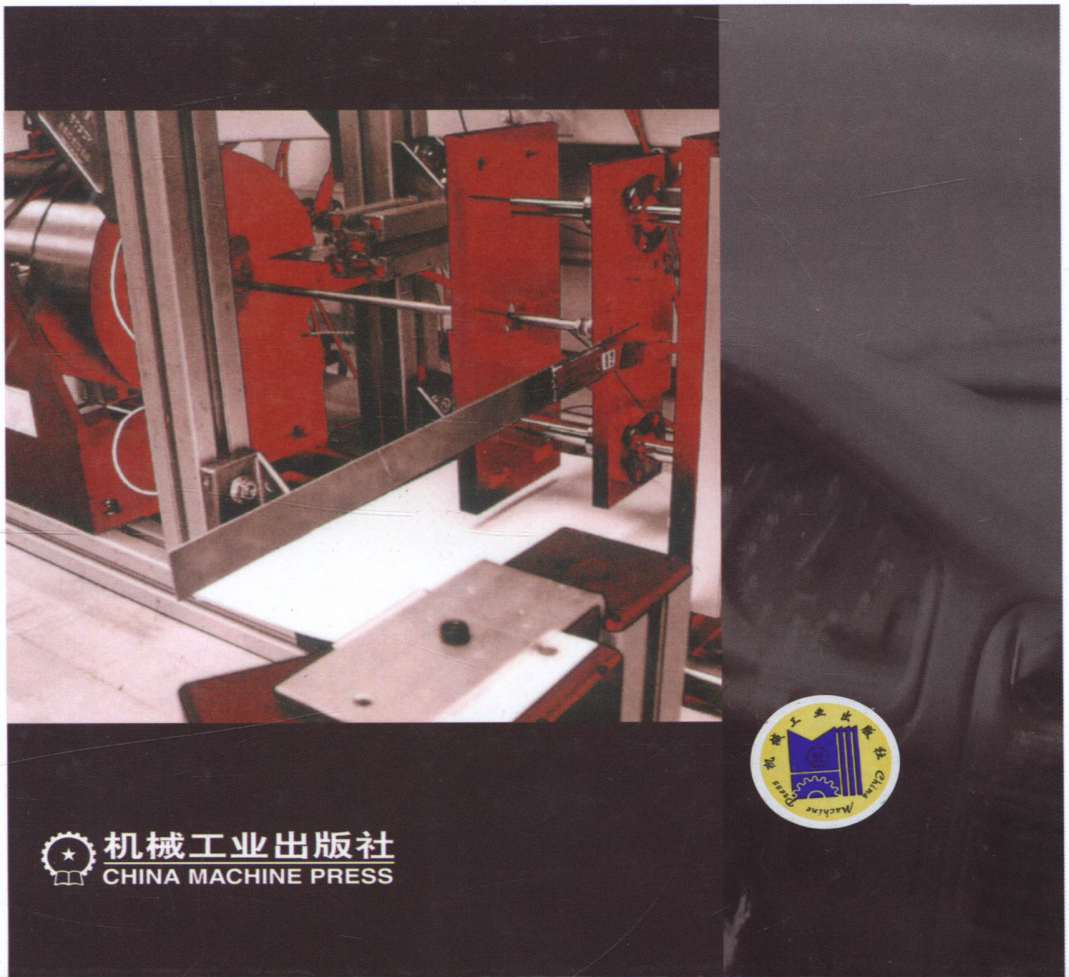
汽/车/先/进/技/术/译/丛

振动阻尼、控制和设计

Vibration Damping,Control,and Design

（美）Clarence W.de Silva 主编
李惠彬 张曼 等译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

汽车先进技术译丛

振动阻尼、控制和设计

［美］Clarence W. de Silva 主编
李惠彬 张曼 侯蕾 宋金响 杨曼 译

机 械 工 业 出 版 社

低振动级的结构或机械意味着能带给人们低噪声和改善的工作环境。一方面，振动阻尼、振动修改和控制在降低结构或机械振动级、维持结构或机械的高性能、提高生产效率和延长工业机械有效寿命方面起着关键性的作用；另一方面，来自车辆发动机、环境和高速、高温排放气体的噪声不仅会造成乘员的不舒适和公众的烦恼，还会造成车辆本身的损坏。在这种情形下，噪声抑制方法与设备、吸声材料和结构是至关重要的。本书由国际上振动、噪声领域著名的专家、学者撰写而成，是当今国际上振动阻尼、振动与噪声控制领域的最新学术著作。本书最显著的特色就是对阻尼理论、阻尼模型、阻尼测量及振动控制的工程应用有全面细致的阐述。本书覆盖了振动噪声控制领域的大部分关键内容，其中振动及控制方面内容包括了：阻尼理论、阻尼实验技术、结构与设备隔震、振动控制、直升机旋翼调谐、振动设计与控制、结构动力学修改与灵敏度分析、旋转机械振动、机床再生颤振、流致振动；声学及控制方面内容包括了：声学基本知识、听力及其心理学效应、噪声控制标准与法规、仪器仪表、噪声源、吸声设计、抗性消声器设计、阻性消声器设计、隔声设计及统计能量分析。

本书适合于从事车辆与交通工程、土木与建筑工程、机械工程、航空航天工程设计与制造人员参考阅读，也可作为大专院校车辆与交通工程、土木与建筑工程专业硕士研究生和博士研究生课程教材或参考书。

Vibration Damping, Control, and Design ISBN: 978-1-4200-5321-0

Copyright©2007 by CRC Press.

Authorized translation from English language edition published by CRC Press, part of Taylor & Francis Group LLC; All rights reserved; 本书中文简体翻译版授权由机械工业出版社独家出版并限在中国大陆地区销售。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

Copies of this book sold without a Taylor & Francis Sticker on the cover are unauthorized and illegal. 本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签，无标签者不得销售。

本书版权登记号：图字 01-2011-0494

图书在版编目（CIP）数据

振动阻尼、控制和设计/（美）席尔瓦（Silva, C. W. D.）主编；李惠彬，张曼等译. —北京：机械工业出版社，2013.3
（汽车先进技术译丛）
书名原文：Vibration damping, control, and design
ISBN 978-7-111-41111-6

Ⅰ.①振… Ⅱ.①席…②李…③张… Ⅲ.①汽车-阻尼减振 Ⅳ.①U463.213

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 008450 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：徐 巍 责任编辑：徐 巍 何士娟 版式设计：霍永明
责任校对：常天培 封面设计：鞠 杨 责任印制：邓 博
三河市宏达印刷有限公司印刷
2013 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 36.25 印张 · 2 插页 · 807 千字
0001— 3000册
标准书号： ISBN 978-7-111-41111-6
定价：148.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务 网络服务
社服务中心：（010）88361066 教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294 机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649 机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203 **封面无防伪标均为盗版**

译者序

结构和机械振动与噪声控制的目的是在于获取低的振动级、低的噪声，以改善人们的工作与生活环境，并提高机械的工作性能、生产效率，提高结构的有效寿命。面向工程的振动与噪声控制问题是一个系统问题，它涉及各种振动力学模型与声学模型的建立，线性和非线性阻尼理论的理解与阻尼模型的建立，流体-结构耦合模型的建立，转子动力学模型的建立，机床颤振模型的建立，模型的数值仿真技术，信号分析原理与技术，阻尼测量技术，结构动力学修改与灵敏度分析，振源和声源识别技术，隔声与吸声理论和技术，隔振减振与动力减振器技术，振动与噪声的被动、主动控制理论和技术，以及振动与噪声控制标准（包括客观与主观内容）、规范的制定与实施，等等。为了得到良好的振动和声学性能，在设计控制系统之前，理解、分析和再现系统动态特性是非常重要的。这个目标可以通过解析方法、数值仿真、测试和测试数据的分析，以及以上各种方法的综合来实现。

本书是国际上振动噪声控制领域的最新著作。本书最显著的特色就是对阻尼理论、阻尼模型、阻尼测量及振动控制的工程应用有全面细致的阐述。原书各章内容均由振动与噪声领域中国际上杰出科学家和经验丰富的专家撰写而成，他（她）们是：Clarence W. de Silva（加拿大温哥华英属哥伦比亚大学）编写第 1 章、第 7 章；S. Akishita（日本草津，立命馆大学）编写第 12 章～第 14 章、第 16 章；SeonM. Han（美国得克萨斯州卢伯克市，德州理工大学）编写第 11 章；Teruo Obata（日本帝京大学）编写第 17 章、第 18 章；陈宸塑（中国长春，吉林大学）编写第 8 章；Nader Jalili（美国南卡罗来纳，克莱姆森大学）编写第 5 章；Kiyoshi Okura（日本兵库县，日本三星传动带有限公司）编写第 19 章；KouroshDanai（美国马萨诸塞州阿默斯特，麻省大学）、Takayuki Koizumi（日本同志社大学）编写第 20 章；Randall D. Peters（美国佐治亚州摩斯大学）编写第 2 章、第 3 章；Robert G. Landers（美国密苏里大学）编写第 10 章；H. Sam Samarasekera（加拿大不列颠哥伦比亚省苏尔寿泵（加拿大）有限公司）编写第 9 章；L. Y. Lu（中国台湾高雄第一科技大学）编写第 4 章；Y. B. Yang（中国台湾台北台湾大学）编写第 4 章；EbrahimEsmailzadeh（加拿大安大略大学）编写第 5 章；Kiyoshi Nagakura（日本东京都铁路技术研究所）编写第 15 章；J. D. Yau（中国台湾台北淡江大学）编写第 4 章。

本书在振动、噪声和声学的分析、设计、监测和控制领域为广大的工程师、技术人员、设计者、研究人员、教育工作者和学生，提供了一本有关技术、工具和数据方面的最新的、权威的、方便和透彻的参考书（手册）。本书探讨的内容相当宽泛，包括了：振动抑制、阻尼和控制；转子动力学建模与分

析；振动设计及控制；系统设计、应用和控制实施；声学和噪声抑制。本书理论联系实际，并为方便查阅和信息跟踪，所有章节中的重要内容和结论都总结到摘要、图、表和框图中。在每一章的结尾都给出了参考文献，以方便读者进一步的信息查阅和研究。

本书第 8 章～第 12 章由张曼翻译，第 5 章由侯蕾翻译，第 6 章由杨曼翻译，其余各章由李惠彬翻译，研究生宋金响、周江伟、刘亚茹、周天绮、钱乾、刘大琦、熊羚利、王畅、钱龙等参与了部分章节的翻译工作。李惠彬对全书文字和插图进行了统一校阅。对于原书中存在的明显小错误，已在译文中直接修改，不再一一加注说明。另外，本书参考文献甚多，为方便读者查阅，所有参考文献格式遵从原文，未作任何改动。本书的翻译出版得到了国家自然科学基金（50875022）的部分资助。译者衷心感谢机械工业出版社有关编辑的辛勤工作。由于译者水平有限，欠妥和误译之处一定存在，恳请国内外专家和广大读者批评指正。

译　　者

2012 年 9 月于北京理工大学

前　言

本书各章是由振动与噪声各领域中杰出的科学家和经验丰富的专家撰写而成，在振动、噪声和声学的分析、设计、监测和控制领域为广大的工程师、技术人员、设计者、研究人员、教育工作者和学生提供了一本有关技术、工具和数据方面的最新的、权威的、方便和透彻的参考书（手册）。本书探讨的内容有：振动抑制、阻尼和控制；振动设计及控制；系统设计、应用和控制实施；声学和噪声抑制。为方便读者查阅和信息跟踪，所有章节中的重要内容和结论都总结到摘要、图、表和框图中。在每一章的结尾都给出了参考文献，以方便读者进一步的信息查阅和研究。相互参照方法贯穿书中，它表明书中一些地方对某一特定话题需要提供进一步的信息。

本书对理论和实际应用给予了同样的重视。书中给出了解析公式、设计方法和控制技术，并进行了解释。本书从头到尾给出了许多案例来说明所介绍理论的实践情况，并提供了大量公式，以方便参阅和汇总。

在机械系统中，机械振动要么是由系统部件之间的动能和势能反复相互转换引起的，要么是由变化的激励力引起的。这样的振动响应并不局限于纯的机械系统，也可以在电和流体系统中找到。然而，在纯的热系统中，固有的自由振动是不可能的，而且需要一个变化的激励来获取振动响应。振动、噪声和声是压力波的显现，它也往往是动态振动系统源的显现。

低振动级意味着低噪声和改善的工作环境。振动改进和控制在维持高性能与生产效率、延长工业机械有效寿命方面可能起着关键性的作用。因而，目前做了大量的努力来研究和控制由机械部件、机床、运输车辆、冲击过程、土木工程结构、流体流动系统和飞机产生的振动。噪声和声学问题可能起源于不希望的振动和流体-结构的相互作用，比如在汽车发动机上所发现的。来自发动机、环境和高速高温排放气体的噪声不仅会造成乘员的不舒适和公众的烦恼，而且还会造成车辆本身的损坏。在这种情形下，噪声抑制方法与设备、吸声材料和结构是至关重要的。为了得到良好的振动和声学性能，在设计和控制系统之前，理解、分析和再现系统动态特性是非常重要的。这个目标可以通过解析方法、解析模型的计算机分析、测试和测试数据的分析，以及以上方法的联合来实现。

近年来，在不同的工程分支领域（特别是土木、机械、航空航天、生产和制造领域）中的一定应用范围内，教育工作者、研究人员和从业人员做出了很大的努力来研究和控制振动和噪声问题。在机床、运输车辆、冲击过程、土木工程结构、建筑机械、工业加工、产品认证与质量控制、流体流动、船舶和飞

机上可以找到具体应用。本书是这方面努力的一个贡献。从解析方法视角来看，本书从头到尾都给出了实际考虑、设计事项和实验技术，并且从公式、数据和先进理论的简约和快照风格再现的视角来看，本书可作为振动、冲击、噪声和声学领域的工程师与技术人员、研究人员、导师和学生有用的参考工具。

主编　Clarence W. de Silva

于加拿大温哥华

目　录

译者序

前言

1　振动阻尼 …… 1

1.1　概述 …… 1

1.2　阻尼类型 …… 2

1.2.1　材料（内部）阻尼 …… 2

1.2.2　结构阻尼 …… 5

1.2.3　流体阻尼 …… 6

1.3　振动分析中的阻尼表达 …… 8

1.3.1　等效黏性阻尼 …… 9

1.3.2　复刚度 …… 11

1.3.3　损耗因子 …… 13

1.4　阻尼的测量 …… 15

1.4.1　对数衰减法 …… 16

1.4.2　阶跃响应法 …… 17

1.4.3　迟滞回线法 …… 18

1.4.4　放大因子法 …… 19

1.4.5　带宽法 …… 21

1.4.6　备注 …… 23

1.5　界面阻尼 …… 24

1.5.1　旋转界面中的摩擦 …… 27

1.5.2　不稳定性 …… 27

参考文献 …… 28

2　阻尼理论 …… 29

2.1　概述 …… 29

2.2　介绍 …… 31

2.2.1　阻尼的总体概况 …… 31

2.2.2　细节考虑 …… 33

2.2.3　单摆用作仪器研究材料阻尼 …… 35

2.2.4　“底部存在足够的空间” …… 37

2.3　背景 …… 39

2.3.1　术语 …… 39

2.3.2　一般技术特征 …… 39

2.3.3　主动阻尼和被动阻尼 …… 40

2.3.4　磁流变阻尼 …… 41

2.3.5　Portevin-LeChatelier 效应 …… 41

2.3.6　噪声 …… 42

2.3.7　黏弹性 …… 42

2.3.8　记忆效应 …… 43

2.3.9　黏弹性的早期发展历史 …… 43

2.3.10　蠕变 …… 44

2.3.11　拉伸指数 …… 44

2.3.12　分数维微积分 …… 45

2.3.13　修改的库仑阻尼模型 …… 45

2.3.14　松弛 …… 45

2.4　迟滞——更多的细节 …… 46

2.5　阻尼模型 …… 47

2.5.1　黏性阻尼谐振子 …… 47

2.5.2　Q 的定义 …… 48

2.5.3　阻尼“红移” …… 48

2.5.4　强迫振动系统 …… 48

2.5.5　阻尼能量或容量 …… 49

2.5.6　库仑阻尼 …… 49

2.5.7　热弹性阻尼 …… 50

2.6　阻尼的测量 …… 51

2.6.1　传感器的注意事项 …… 51

2.6.2　共模抑制 …… 52

2.6.3　黏性阻尼的案例 …… 53

2.6.4　测量阻尼的另一种方法 …… 53

2.7　迟滞阻尼 …… 54

2.7.1　等效黏性（线性）模型 …… 54

2.7.2　迟滞阻尼实验案例 …… 55

2.8　通用理论的失效 …… 57

2.9　空气影响 …… 57

2.10　噪声和阻尼 …… 58

2.10.1　一般考虑 …… 58

2.10.2　$1/f$ 机械噪声案例 …… 59

2.10.3　相位噪声 …… 61

2.11　变换方法 …… 62

2.11.1 一般考虑 …… 62
2.11.2 位数反求 …… 62
2.11.3 小波变换 …… 63
2.11.4 著名的海森伯（Heisenberg）定理 …… 63
2.12 迟滞阻尼 …… 64
2.12.1 物理基础 …… 64
2.12.2 Ruchhardt 实验 …… 64
2.12.3 物理摆 …… 65
2.13 内部摩擦 …… 69
2.13.1 关于内部摩擦的测量和说明 …… 69
2.13.2 非振动试样 …… 69
2.13.3 内部摩擦阻尼的等时性 …… 70
2.14 数学技巧——阻尼的线性近似 … 71
2.14.1 黏性阻尼 …… 71
2.14.2 迟滞阻尼 …… 71
2.15 内部摩擦物理学 …… 72
2.15.1 基本概念 …… 72
2.15.2 错位和缺陷 …… 72
2.16 齐纳（Zener）模型 …… 73
2.16.1 假设 …… 73
2.16.2 模量和损耗的频率依赖性 … 74
2.16.3 成功的黏弹性模型 …… 75
2.16.4 黏弹性模型的失效 …… 76
2.17 迈向通用型阻尼模型 …… 76
2.17.1 与频率二次方成比例的阻尼容量 …… 76
2.17.2 垂摆和通用型阻尼 …… 77
2.17.3 修正的库仑模型——背景 … 77
2.17.4 修正的库仑阻尼模型——运动方程 …… 78
2.17.5 模型输出 …… 80
2.17.6 实验案例 …… 81
2.17.7 阻尼与谐波项 …… 84
2.18 非线性 …… 85
2.18.1 一般考虑 …… 85
2.18.2 谐波成分 …… 87
2.18.3 非线性/复杂性以及未来技术 …… 88
2.18.4 微观动力学、细观力学和细观动力学 …… 90
2.18.5 细观非线性复杂之重要性的案例 …… 91
2.19 结语 …… 92
参考文献 …… 92
3 阻尼中的实验技术 …… 97
3.1 电子学方面的思考 …… 97
3.1.1 传感器的线性特征 …… 97
3.1.2 频率问题 …… 98
3.1.3 数据采集 …… 98
3.2 数据处理 …… 99
3.2.1 编程语言 …… 99
3.2.2 积分技术 …… 99
3.2.3 傅里叶变换 …… 99
3.3 传感器的选择 …… 102
3.3.1 直接测量 …… 103
3.3.2 间接测量 …… 103
3.4 阻尼案例 …… 104
3.4.1 案例1：振动棒——带显著噪声的线性阻尼 …… 104
3.4.2 案例2：振动簧片——非线性阻尼案例 …… 105
3.4.3 案例3：地震仪 …… 106
3.4.4 案例4：带有光电门传感器的杆摆 …… 108
3.4.5 案例5：受刀锋下面材料影响的杆摆 …… 110
3.4.6 案例6：低 Q 值的硬质材料 …… 111
3.4.7 案例7：各向异性的内摩擦 …… 112
3.5 有阻尼的强迫振动振子 …… 114
3.5.1 多功能大学实验仪器 …… 114
3.5.2 强迫振动的谐振子 …… 115
3.6 多元非线性振子 …… 115
3.7 多振型振动 …… 118
3.7.1 系统 …… 118
3.7.2 一些实验结果 …… 119
3.7.3 短时傅里叶变换 …… 119
3.7.4 非线性影响——振型混合 … 121
3.8 机械噪声之源——内摩擦 …… 122

3.9 黏性阻尼——需要谨慎 …… 123
3.10 空气的影响 …… 125
参考文献 …… 127
4 结构和设备隔震 …… 129
4.1 概述 …… 129
4.2 基础隔震系统机理 …… 131
4.2.1 弹性隔震系统 …… 133
4.2.2 滑动隔震系统 …… 134
4.2.3 带弹性装置的滑动隔震系统 …… 135
4.2.4 法国电力系统 …… 135
4.2.5 结语 …… 136
4.3 带弹性支撑的结构-设备系统 …… 136
4.3.1 带有弹性支撑的基础隔震系统的公式推导 …… 137
4.3.2 自由振动分析 …… 138
4.3.3 结构-设备隔震系统在简谐激励下的动力学 …… 138
4.3.4 演示性案例 …… 141
4.3.5 结语 …… 144
4.4 滑动隔震系统 …… 144
4.4.1 数学建模和公式推导 …… 144
4.4.2 数值分析方法 …… 146
4.4.3 滑动隔震系统的模拟结果 … 152
4.4.4 结语 …… 160
4.5 带复原装置的滑动隔震系统 …… 161
4.5.1 数学建模和公式推导 …… 162
4.5.2 数值分析方法 …… 163
4.5.3 带复原装置的滑动隔震系统的仿真结果 …… 163
4.5.4 结语 …… 172
4.6 与地震隔离设计有关的话题 …… 172
4.6.1 设计方法 …… 172
4.6.2 静态分析 …… 173
4.6.3 动态分析 …… 175
4.6.4 结语 …… 176
参考文献 …… 177
5 振动控制 …… 180
5.1 简介 …… 180
5.1.1 隔振与吸振 …… 180
5.1.2 吸振与振动控制 …… 180
5.1.3 振动控制系统分类 …… 182
5.1.4 振动控制系统的性能特性 … 182
5.2 振动控制系统概念 …… 183
5.2.1 简介 …… 183
5.2.2 被动振动控制 …… 183
5.2.3 主动振动控制 …… 185
5.2.4 半主动振动控制 …… 187
5.2.5 可调整振动控制单元 …… 187
5.3 振动控制系统的设计与实现 …… 191
5.3.1 简介 …… 191
5.3.2 吸振器或减振器 …… 191
5.3.3 振动控制系统 …… 203
5.4 实际考虑和相关主题 …… 219
5.4.1 振动控制设计的步骤摘要 … 219
5.4.2 未来趋势和发展 …… 220
参考文献 …… 220
6 直升机旋翼调谐 …… 226
6.1 概述 …… 226
6.2 基于神经网络的调谐 …… 229
6.3 基于概率的调谐 …… 230
6.4 自适应调谐 …… 232
6.4.1 区间模型 …… 233
6.4.2 可行区域的估计 …… 234
6.4.3 叶片调整的选择 …… 235
6.4.4 学习 …… 235
6.5 案例分析 …… 237
6.5.1 仿真模型 …… 237
6.5.2 区间（IM）建模 …… 238
6.5.3 性能评估 …… 239
6.5.4 结语 …… 242
参考文献 …… 242
7 振动设计与控制 …… 243
7.1 概述 …… 243
7.2 振动限值规范 …… 244
7.2.1 峰值规范 …… 244
7.2.2 均方根值规范 …… 245
7.2.3 频域规范 …… 245
7.3 隔振 …… 247
7.3.1 设计注意事项 …… 252
7.3.2 柔性系统的隔振 …… 254
7.4 旋转机械的平衡 …… 256

7.4.1 静平衡 …… 257
7.4.2 复数/矢量方法 …… 259
7.4.3 动（双平面）平衡 …… 261
7.4.4 平衡的实验步骤 …… 265
7.5 往复式机械的平衡 …… 267
7.5.1 单缸发动机 …… 267
7.5.2 活塞惯性负载的平衡 …… 269
7.5.3 多缸发动机 …… 270
7.5.4 燃烧/压力负荷 …… 273
7.6 轴的涡动 …… 274
7.6.1 运动方程 …… 274
7.6.2 稳态涡动 …… 276
7.6.3 自激振动 …… 279
7.7 通过模态测试进行设计 …… 280
7.7.1 部件修改 …… 280
7.7.2 子结构 …… 284
7.8 振动的被动控制 …… 286
7.8.1 无阻尼吸振器 …… 286
7.8.2 有阻尼吸振器 …… 290
7.8.3 减振器 …… 296
7.9 振动的主动控制 …… 298
7.9.1 主动控制系统 …… 299
7.9.2 控制技术 …… 300
7.10 梁的振动控制 …… 304
7.10.1 梁的动力学状态空间模型 …… 305
7.10.2 控制问题 …… 306
7.10.3 线性阻尼器的使用 …… 307
参考文献 …… 310
附录 7A MATLAB 控制系统工具箱 … 310
8 结构动力修改与灵敏度分析 …… 319
8.1 概述 …… 319
8.2 有限元模型的结构动力学修改 … 319
8.3 振动模态的摄动法 …… 321
8.3.1 稀疏模态的一阶摄动模型 … 321
8.3.2 稀疏模态的二阶摄动模型 … 321
8.3.3 数值计算案例 …… 322
8.4 结构振动模态的设计灵敏度分析 …… 326
8.4.1 灵敏度分析的直接微分法 … 326
8.4.2 摄动灵敏度分析 …… 326
8.4.3 数值计算案例 …… 328
8.4.4 结语 …… 329
8.5 模态灵敏度分析的高精度模态叠加 …… 329
8.5.1 方法一 …… 329
8.5.2 方法二 …… 330
8.6 自由-自由结构特征矢量的灵敏度 …… 330
8.7 重模态的矩阵摄动理论 …… 331
8.7.1 基本方程 …… 331
8.7.2 特征解的一阶摄动 …… 332
8.7.3 针对重模态的一阶摄动的高精度模态叠加 …… 332
8.8 密集模态特征值的矩阵摄动法 … 334
8.8.1 密集模态特征值的摄动分析方法一 …… 334
8.8.2 密集模态特征值摄动分析方法二 …… 336
8.8.3 结语 …… 338
8.9 复模态的矩阵摄动理论 …… 339
8.9.1 基本方程 …… 339
8.9.2 稀疏模态的矩阵摄动法 …… 340
8.9.3 特征矢量偏导数的高精度模态叠加 …… 342
8.9.4 非亏损系统重特征值的矩阵摄动 …… 344
8.9.5 非对称矩阵密集特征值的矩阵摄动 …… 346
参考文献 …… 347
9 旋转机械振动 …… 348
9.1 概述 …… 348
9.2 振动基础 …… 352
9.2.1 强迫振动 …… 352
9.2.2 自激振动 …… 356
9.2.3 参数的不稳定性 …… 361
9.2.4 扭转振动 …… 362
9.3 转子动力学分析 …… 363
9.3.1 分析方法 …… 363
9.3.2 建模 …… 369
9.3.3 设计 …… 376
9.4 振动测量和技术 …… 381

9.4.1 测量单位 …… 381
9.4.2 测量参数及方法 …… 382
9.5 振动控制和诊断 …… 383
9.5.1 标准和规范 …… 383
9.5.2 振源识别 …… 386
9.5.3 振动分析-案例研究 …… 392
参考文献 …… 397
10 机床再生颤振 …… 401
10.1 概述 …… 401
10.2 车削加工中的颤振及案例分析 …… 402
10.3 端铣加工中的颤振及案例分析 …… 408
10.4 时域模拟及案例分析 …… 413
10.5 颤振检测及案例分析 …… 418
10.6 颤振抑制及案例分析 …… 420
10.6.1 主轴转速选择 …… 420
10.6.2 进给量与切削深度选择 …… 421
10.6.3 主轴转速变化 …… 422
10.7 个案研究 …… 424
参考文献 …… 427
11 流致振动 …… 429
11.1 海洋环境描述 …… 429
11.1.1 谱密度 …… 430
11.1.2 海浪谱密度 …… 433
11.1.3 时间序列逼近谱密度 …… 437
11.1.4 由谱密度生成时间序列 …… 437
11.1.5 短期项统计 …… 438
11.1.6 长期项统计 …… 441
11.1.7 结语 …… 444
11.2 流体力 …… 445
11.2.1 波浪力状态 …… 446
11.2.2 作用于小结构上的波浪力——Morison 方程 …… 447
11.2.3 涡流诱导的振动 …… 450
11.2.4 结语 …… 452
11.3 举例 …… 453
11.3.1 拖拽电缆的静止状态 …… 453
11.3.2 作用于铰接塔上的流体力 …… 454
11.3.3 显著波高分布——Weibull 分布和 Gumbel 分布 …… 456
11.3.4 重构给定显著波高的时间序列 …… 459
11.3.5 可用的数值计算程序 …… 460
参考文献 …… 461
12 声级和分贝 …… 463
12.1 概述 …… 463
12.2 声波特性 …… 463
12.3 声级和分贝 …… 465
12.3.1 声功率级 …… 465
12.3.2 声压级 …… 465
12.3.3 总声压级 …… 466
13 听力及其心理学效应 …… 467
13.1 导论 …… 467
13.2 人耳的结构及功能 …… 467
13.3 频率与响度响应 …… 468
13.4 听力损失 …… 469
13.5 噪声的心理学效应 …… 470
13.5.1 响度说明 …… 470
13.5.2 噪声标准曲线 …… 472
13.5.3 声级 …… 473
参考文献 …… 474
14 噪声控制标准与法规 …… 475
14.1 导论 …… 475
14.2 噪声政策背后的基本思想 …… 475
14.3 立法 …… 476
14.3.1 行动计划 …… 476
14.3.2 欧盟委员会公布的数据 …… 477
14.3.3 对欧盟后续行动的建议 …… 477
14.4 法规 …… 477
14.5 评定噪声的方法 …… 478
参考文献 …… 481
15 仪器仪表 …… 482
15.1 声强测量 …… 482
15.1.1 理论背景 …… 482
15.1.2 测量方法 …… 482
15.1.3 声强测量的误差 …… 483
15.1.4 应用 …… 483
15.2 镜面-传声器系统 …… 484
15.2.1 测量原理 …… 484
15.2.2 应用 …… 486

15.3 传声器阵列 …… 487
15.3.1 传声器阵列的原理 …… 487
15.3.2 阵列的指向性模式 …… 488
15.3.3 应用 …… 489
参考文献 …… 490
16 噪声源 …… 491
16.1 概述 …… 491
16.2 声辐射 …… 491
16.2.1 点声源 …… 491
16.2.2 有限体积的声源 …… 494
16.2.3 由平面声源产生的辐射 …… 496
16.2.4 噪声源声功率估计 …… 499
参考文献 …… 501
17 吸声设计 …… 502
17.1 概述 …… 502
17.2 吸声基础 …… 502
17.3 吸声材料 …… 504
17.3.1 多孔材料 …… 504
17.3.2 管状材料 …… 504
17.3.3 膜材料 …… 504
17.3.4 穿孔板 …… 504
17.3.5 谐振腔 …… 506
17.4 复合墙体声学特性计算 …… 506
17.4.1 多孔毯状物与板材组合的吸收系数 …… 506
17.4.2 穿过一张多孔板的传声损失 …… 508
17.4.3 通过复合夹心板的传声损失 …… 508
17.5 内衬管的衰减 …… 510
17.5.1 内衬管中衰减量的计算 …… 510
17.5.2 内衬弯管中的声衰减 …… 511
17.5.3 分离器内衬管道中的衰减 …… 512
17.6 阻性消声器的衰减 …… 513
17.6.1 一个内衬膨胀室的传声损失 …… 513
17.6.2 一个送风静压箱/充气室的传声损失 …… 515
17.7 一般考虑 …… 515
17.7.1 对于有衬里的声学材料的表面处理 …… 515
17.7.2 气流速度 …… 516
17.7.3 气体温度 …… 516
17.7.4 暴露在灰尘和水中 …… 517
17.8 阻性消声器的实际例子 …… 517
参考文献 …… 520
18 抗性消声器设计 …… 521
18.1 概述 …… 521
18.2 基本关系式 …… 521
18.2.1 分析模型 …… 521
18.2.2 边界条件 …… 522
18.3 抗性消声器的效果 …… 523
18.3.1 插入损失 …… 523
18.3.2 传声损失 …… 524
18.4 计算步骤 …… 525
18.5 模型的运用范围 …… 530
18.5.1 平面波的近似条件 …… 530
18.5.2 温度的影响 …… 530
18.5.3 管中气体流动的影响 …… 530
18.5.4 管中摩擦损失的影响 …… 530
18.6 实际案例：用于往复式压缩机的膨胀类消声器 …… 531
参考文献 …… 533
19 隔声设计 …… 534
19.1 隔声理论 …… 534
19.1.1 隔声表述 …… 534
19.1.2 单面墙的传递损失 …… 534
19.1.3 多面板的传声损失 …… 538
19.1.4 带有声桥的复合墙的传播损失 …… 543
19.2 隔声的应用 …… 546
19.2.1 隔声罩 …… 546
19.2.2 隔声护层 …… 549
参考文献 …… 553
20 统计能量分析 …… 554
20.1 概述 …… 554
20.2 功率流方程 …… 554
20.2.1 两子系统结构的功率流方程式 …… 555
20.2.2 多子系统结构的功率流方程式 …… 556

20.3 统计能量分析（SEA）参数的估计…… 556
20.3.1 模态密度…… 556
20.3.2 内部损耗因子…… 557
20.3.3 耦合损耗因子…… 558
20.3.4 输入功率…… 559
20.4 结构上的应用…… 559
20.4.1 在拖拉机驾驶室噪声预测中的应用…… 559
20.4.2 在建筑物噪声和振动预测中的应用…… 559
参考文献 …… 562

1 振动阻尼

摘要

振动系统中的阻尼通过机械能的耗散来表现。本章将介绍机械阻尼的建模、分析和测量。讨论的阻尼类型包括：材料内部阻尼（包括黏弹性阻尼和迟滞阻尼）、结构阻尼、流体阻尼、界面阻尼、黏性阻尼、库仑摩擦和斯特里贝克阻尼。本章还分析了用等效黏性阻尼模型表示不同类型的阻尼，还研究了旋转装置中的阻尼。

1.1 概述

阻尼是机械能在动力学系统中耗散而产生的现象（机械能的损失通常转化为内部的热能）。在利用、分析和测试动力学系统时，动力系统中阻尼水平状态的认识很重要。例如：在受到地震干扰时，固有频率落在地震频率范围内（也就是小于33Hz）、拥有相对较低的阻尼的一个装置会在共振情况下产生破坏运动。这个效果能通过低频支撑结构和低阻尼面板而得到进一步放大。以上例子表明，在设计和运行复杂机械系统时，成组设备、部件和支撑结构中的阻尼知识非常重要。为了建立一个系统和它的外围设备的动态模型，必须知道部件阻尼的性质和水平。当系统处于工作状态时，对于施加在系统上的动态环境极限，即系统能够承受的最大动态激励，系统的阻尼知识也同样重要。此外，阻尼知识对未能通过验收测试的系统所作出的设计修改有用。

但是，为研究测试激励（输入），测试对象阻尼水平知识的意义通常被过分强调。具体来说，如果响应谱法被用来描述振动测试中所需的激励，那么就没有必要让用于研究所需响应谱技术参数的阻尼值等于测试对象的实际阻尼。但唯一的要求是：用于指定响应谱的阻尼要等于用于测试响应谱的阻尼。然而，在测试对象和激振器工作台之间的动态相互作用程度会依赖于这些系统中的实际阻尼值。此外，当测试接近试验对象的共振频率时，就值得去了解测试对象中的阻尼。

在描述一个动态系统的阻尼时，首先要理解与系统机械能耗散有关的主要机理；其次，选出一个能合适表现相关能量耗散的阻尼模型也很重要；最后，需要通过监测测试的系统或一个具有代表性的物理模型在正常操作下瞬态工况的系统响应，或利用已有的有效数据来确定阻尼值（模型参数）。

1.2 阻尼类型

在任何一个动力学系统中，都存在某种形式的机械能耗散。在系统建模中，如果与系统中初始激励时总机械能相比，在感兴趣时间历程内耗散的机械能较小，那么阻尼可以忽略。即使对于高阻尼比系统，进行忽略阻尼项的分析也是有用的。这是为了研究几个关键的动态特性，如模态参数（无阻尼固有频率和振动模态）。

有若干种类型阻尼属于机械系统的内在表现。如果以这种方式提供的有效阻尼值不足于系统本身功能的发挥，那么外部阻尼装置可以添加进来，既可以在最初的设计阶段，也可以在随后系统设计修改阶段。在研究机械系统时，有三种主要的阻尼机理很重要。它们是：

① 内部阻尼（材料的）。

② 结构阻尼（在铰链和界面处）。

③ 流体阻尼（通过流体-结构相互作用）。

内部（材料）阻尼来自于材料内部各种各样微观和宏观过程的机械能耗散。结构阻尼产生于机械结构各部件之间相对运动引起的机械能的耗散，这些部件存在一个共同接触点、铰接点或支撑物。流体阻尼产生于一个机械系统或它的部件在流体中移动时拖拉力和关联的动态相互作用引起的机械能耗散。

两种通用的外部阻尼器可以直接添加到机械系统上，用来改善系统的能量耗散特性。这两种阻尼器是：

① 被动阻尼器。

② 主动阻尼器。

被动阻尼器是通过各种运动来消耗能量的装置，不需要外界提供功率或使用作动器。主动阻尼器拥有需要外界提供功率的作动器。它们通过主动地控制需要阻尼的系统的运动来工作。阻尼器可能会被视为振动控制器。在本章，将重点介绍阻尼是机械系统的固有属性。

1.2.1 材料（内部）阻尼

材料内部阻尼起源于和微观结构缺陷有关的能量损失，这些缺陷诸如有颗粒边界和杂质。热弹性效应产生于不均匀压力造成的局部温度梯度，如激振梁状态、铁磁材料涡流效应、金属位错运动、聚合物中链分子的运动。目前，已经建立了若干种模型来表示内部阻尼造成的能量耗散。各种各样的模型主要都来源于大范围工程材料的研究结果，没有一个单独的模型能完全代表所有材料的内部阻尼特性。然而，有两种普通类型的内部阻尼可以识别出来：粘弹阻尼和迟滞阻尼。后者实际上用词有些不当，因为所有类型的内部阻尼都和迟滞回线效应有关。

应力（σ）和应变（ε）的每一个关系点连接起来就构成迟滞回线，如图 1-1 所示。迟滞回线面积表示在每个应力周期中单位体积材料中的能量耗散。这被称作单位体积阻

尼容量（或能量），用 d 表示。显然，d 由循环积分得到：

$$d = \oint \sigma \mathrm{d}\varepsilon \tag{1-1}$$

实际上，对于任何阻尼装置，在位移-力平面中都存在一个迟滞回线。因此，位移对力的回路积分（迟滞回线所围面积）等于克服阻尼力所做的功。因此该积分（回线所围面积）就是每个周期运动的能量耗散。阻尼容量或能量被材料体积除后，仍然像从前一样等于单位体积阻尼容量或能量。

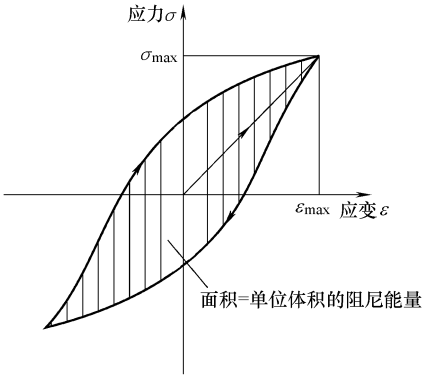


图 1-1 机械阻尼中的典型迟滞回线

必须明确的是，不同于纯粹的弹性力（如弹簧弹力），阻尼力不能单独作为一个位移（q）的函数。原因很简单，如果考虑一个仅由 q 决定的力 $f(q)$，那么，对于一个部件的特定位移点 q，力会相同，而不管运动方向（也就是速度 $\dot{q}$ 的方向）如何。因此，在一个加卸载循环中，同样的路径将拥有两个运动方向，之后，将无法形成迟滞回线。换句话说，在一个完整运动周期内的净功将为零。接下来考虑一个力 $f(q, \dot{q})$，它由 q 和 $\dot{q}$ 决定。那么，在一个给定的位移点 q，力也取决于 $\dot{q}$。因此，在一个运动方向上的力将不同于反方向的力，结果将形成一个迟滞回线，它与克服阻尼力所做的功（也就是能量耗散）一致。我们能推断出阻尼力在一定程度上取决于相对速度 $\dot{q}$。特别是对于不取决于速度 $\dot{q}$ 大小的库仑摩擦，其阻尼力取决于速度 $\dot{q}$ 的符号。

1.2.1.1 黏弹性阻尼

对于一个线性黏弹性材料，其应力与应变的关系是一个与时间相关的线性微分方程，方程中包含了常系数。一个常使用的关系是

$$\sigma = E\varepsilon + E^* \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

此关系被称为开尔文模型。式中，E 是杨氏模量；E^* 是与时间无关的粘弹系数。弹性项 $E\varepsilon$ 与阻尼无关，并且正如前文提到的，在数学上它的回路积分为零。因此，对于开尔文模型，单位体积的阻尼容量是

$$d_v = E^* \oint \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\varepsilon \pi \tag{1-3}$$

对于一个受到正弦激励的材料，在稳定状态下有

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \cos \omega t \tag{1-4}$$

将式（1-4）代入式（1-3）中，得到

$$d_v = \pi \omega E^* \varepsilon_{\max}^2 \tag{1-5}$$

那么，在方程式（1-4）中，当 $t = 0$ 或 $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t = 0$ 时，$\varepsilon = \varepsilon_{\max}$。根据式（1-2），相对应的应力是 $\sigma_{\max} = E\varepsilon_{\max}$。因此有

$$d_v = \frac{\pi\omega E^{*}\sigma_{\max}^{2}}{E^{2}} \tag{1-6}$$

d_v 的表达式取决于激励的频率 ω。

除了开尔文模型外，另两个粘弹阻尼的模型也很常用。它们是麦克斯韦模型

$$\sigma + c_{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = E^{*}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

和标准线性固体模型

$$\sigma + c_{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = E\varepsilon + E^{*}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

显然，标准线性固体模型是开尔文模型和麦克斯韦模型的结合，并且它是三种模型中最精确的。但是，对于大多数实际应用，开尔文模型更适用。

1.2.1.2 滞后阻尼

前面已经指出，粘弹阻尼材料的应力即内部阻尼力，取决于应变的变化频率（运动的频率）。然而需要注意的是，对于一些类型的材料，阻尼力并非显著地取决于应变的振荡频率（或谐波运动的频率）。这种类型的内部阻尼被称为滞后阻尼。

对于滞后阻尼，单位体积的阻尼容量（d_{b}）也与运动频率无关，可以表示为

$$d_{\mathrm{b}} = J\sigma_{\max}^{n} \tag{1-9}$$

对于 $n=2$ 的情况，一个简单的模型能满足式（1-9），表示为

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{\widetilde{E}}{\omega}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

它等同于使用一个粘弹系数 E^{*}，根据 $E^{*}=\widetilde{E}/\omega$，该系数取决于式（1-2）中的运动频率。

考虑在谐波运动频率 ω 下的情形，材料应变表示为

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cos\omega t \tag{1-11}$$

那么，式（1-10）变为

$$\sigma = E\varepsilon_0\cos\omega t - \widetilde{E}\varepsilon_0\sin\omega t = E\varepsilon\cos\omega t + \widetilde{E}\varepsilon_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1-12}$$

正如式（1-12）等式右边项所示，材料应力拥有两个部分：第一部分对应材料线性弹性性质并且是同相位应变；第二部分的应力，对应滞后阻尼并且有 90°的相位差（应力部分超前应变 90°）。一个方便的数学表示法是可能的，采用常用的复数形式响应，根据

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-13}$$

式（1-10）变为

$$\sigma = (E + \mathrm{j}\widetilde{E})\varepsilon \tag{1-14}$$

因此这种简化形式的滞后阻尼可用一种复数弹性模量来表示，其中它的实部对应常用的线性弹性（能量储存）模量（或杨氏模量），虚部对应迟滞损失（能量耗散）模量。

结合式（1-2）和式（1-10），一个综合粘弹阻尼和滞后阻尼的简单模型可以表

示为

$$\sigma = E\varepsilon + \left(E^* + \frac{\widetilde{E}}{\omega}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \tag{1-15}$$

对于一个阻尼如式（1-15）所表示的系统，其运动方程可由纯弹性运动方程推导得到，只需简单地用算子 $E + \left(E^* + \frac{\widetilde{E}}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}$ 替代 E 即可。

案例 1-1

写出一个不均匀细长梁在作弹性运动时的方程，该细长梁材料既有粘弹阻尼，也有滞后阻尼。

解：

一个无阻尼梁上单位长度的动态载荷为 $f(x,t)$，该梁弯曲运动时贝努尼-欧拉公式可表示为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{1-16}$$

其中，q 是梁上一点 x 的横向运动。那么，对于一个有材料阻尼（既有粘弹阻尼也有滞后阻尼）的梁，可以写出运动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E^* + \frac{\widetilde{E}}{\omega}\right)I\frac{\partial^3 q}{\partial t\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{1-17}$$

式中，ω 是稳态振动情形下外部激励 $f(x,t)$ 的频率。然而，在自由振动时，ω 表示自由衰减振动的频率。那么，在分析自由振动模态衰减时，应该把方程式（1-17）中的 ω 用每个模态方程中相应的频率（ω_i）来代替。因此，得到的有阻尼的振动系统具有和无阻尼系统相同的归一化模态振型。阻尼系统的分析和无阻尼系统的分析非常相似。

1.2.2 结构阻尼

产生结构阻尼的机械能损失由部件间相对运动产生的摩擦力和机械系统、结构中铰接点的碰撞或间歇接触造成。能量耗散特性取决于机械系统的细节。因此，很难找到一个令人满意的通用的分析模型来描述结构阻尼。由摩擦造成的能量耗散，通常用 Coulomb 摩擦模型来表示。然而，由碰撞产生的耗散则应该由两个接触物的恢复系数决定。

估算结构阻尼最常用的方法就是测量。但是，测量值只能表示机械系统中的总阻尼。从总阻尼值中减去其他类型阻尼值将得到结构阻尼值，其中在系统中出现的其他类型阻尼（如材料阻尼）通过控制环境、早期数据等来估算。

与结构阻尼相比，内部阻尼通常可以忽略不计。在高楼、桥梁、车辆导轨、许多其他土木结构工程和机器人、汽车的机械装置中，很大比例的机械能耗散通过结构阻尼机理产生。一种主要的结构阻尼形式是滑动阻尼，造成滑动阻尼的能量耗散是由于结构接合点的界面剪切。滑动阻尼的大小直接来自于库仑（干燥）摩擦，该摩擦则取决于多种因素。这些因素包括有联接力（如螺栓拉紧力）、表面特性和接合面的材料性质。以上这些又和结构联接点的磨损、腐蚀和一般退化有关。由此看来，滑动阻尼与时间有

关。通常我们将阻尼层置于接合处用来减少那些不必要的退化。滑动导致阻尼层的剪切形变，同时通过材料阻尼和库仑摩擦产生能量耗散。这样，既不带来接合处过度退化，又能保持一个高水平的等效结构阻尼。这些阻尼层需要有较高的刚度（也要有较高的比阻尼容量）来承受接合处的结构载荷。

接合处的结构阻尼随接合点处出现的滑动而变。这主要是由接合处伴随滑动产生的局部变形造成。代表这一现象的典型迟滞回线如图 1-2a 所示。滞环上的箭头指出了相对速度的方向。对于理想化的库仑摩擦，在每个相对运动的方向上，摩擦力（F）保持常数。代表库仑结构阻尼的理想迟滞回线如图 1-2b 所示。相应的结构关系表示为

$$f = c\mathrm{sgn}(\dot{q}) \tag{1-18}$$

式中，f 为阻尼力；q 为接合处的相对位移；c 为摩擦参数。因局部形变而导致的结构阻尼，其简化模型可表示为

$$f = c\,|q|\,\mathrm{sgn}(\dot{q}) \tag{1-19}$$

相应的迟滞回线如图 1-2c 所示。其中 sig 函数被定义为

$$\mathrm{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & (v \geqslant 0) \\ -1 & (v < 0) \end{cases} \tag{1-20}$$

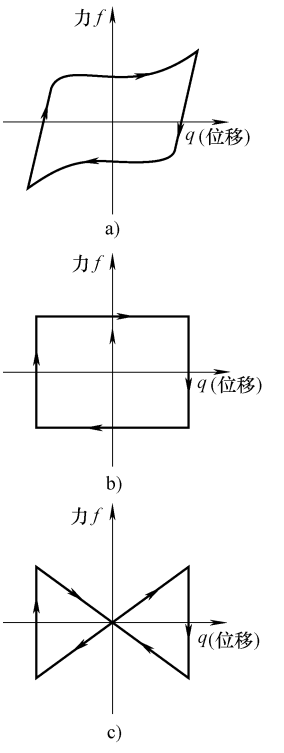


图 1-2　典型的迟滞回路
a）典型的结构阻尼
b）库仑摩擦模型
c）简化的结构阻尼模型

1.2.3　流体阻尼

一个在流体介质中运动的机械部件如图 1-3 所示，其相对运动方向平行于 y 轴。部件相对于周围流体的局部位移由 $q(x, y, t)$ 表示。

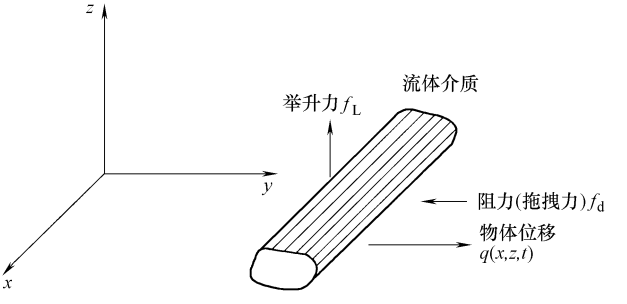


图 1-3　在流体介质中移动的物体

在 x-z 平面上，单位投影面积产生的阻力由 f_d 表示。该阻力导致流体阻尼中的机械能耗散产生，通常表示为

$$f_d = \frac{1}{2} c_d p \dot{q}^2 \mathrm{sgn}(\dot{q}) \tag{1-21}$$

其中，$\dot{q}=\partial q(x,z,t)/\partial t$，它表示相对速度。阻力系数 c_d 是雷诺数和结构横截面几何形状的函数。净阻尼效果由黏性拖拽和压力拖拽产生，其中黏性拖拽由在流体-结构界面的边界层效应产生，而由流体分离造成的湍流效应（涡区）产生压力拖拽。这两种效应如图 1-4 所示。其中 ρ 是流体密度。对于流体阻尼，如图 1-3 所示，与结构构造有关的单位体积内的阻尼容量表示为

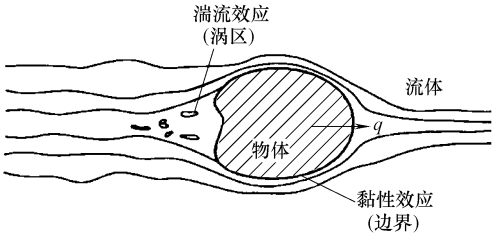


图 1-4 流体阻尼力学

$$d_f=\frac{\oint\int_0^{L_x}\int_0^{L_z}f_d\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}q(x,z,t)}{L_xL_zq_0} \tag{1-22}$$

式中，L_X 和 L_Z 分别表示 x、y 方向上的横截面尺寸；q_0 是相对位移的归一化幅值参数。

案例 1-2

已知一根长为 L 的矩形截面均匀梁。该梁在静止的液体中发生横向振动。求流体结构交互作用单位体积阻尼容量的解析表达式。

解：

假设梁的轴线沿 x 轴方向，且梁在 z 轴方向作横向运动，在 y 轴方向上没有变化，因此在这个方向上的长度参数相互抵消。

$$d_f=\frac{\oint\int_0^{L}\mathrm{d}x\mathrm{d}q(x,t)}{Lq_0}$$

或者

$$d_f=\frac{\int_0^{T}\int_0^{L}f_d\dot{q}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{Lq_0} \tag{1-23}$$

式中，T 是振幅周期。假设 c_d 是常数，将方程式（1-21）代入方程式（1-23）中，得

$$d_f=\frac{1}{2}\frac{c_d\rho}{Lq_0}\int_0^{L}\int_0^{T}|\dot{q}|^3\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{1-24}$$

对于频率为 ω 的稳态激励和振型函数 $Q(x)$（或对于在固有频率为 ω 的自由模态振动和振形函数 $Q(x)$），可以得到

$$q(x,t)=q_{\max}Q(x)\sin\omega t \tag{1-25}$$

在这种情况下，随着变量 $\theta=\omega t$ 的改变，方程式（1-24）变为

$$d_f=2c_d\rho\frac{q_{\max}^3}{Lq_0}\int_0^{L}|Q(x)|^3\mathrm{d}x\omega^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

或者

$$d_f=\frac{4}{3}c_d\rho q_{\max}^3\omega^2\frac{\int_0^{L}|Q(x)|^3\mathrm{d}x}{Lq_0}$$

注意：$t=0\sim T$ 的积分区间为 $\theta=0\sim 2\pi$ 或者是 4 个 $\theta=0\sim\pi/2$。

如果归一化参数被定义为

$$q_0 = \frac{1}{L}q_{\max}\int_0^L |Q(x)|^3 \mathrm{d}x$$

那么可以得到

$$d_f = \frac{4}{3}c_d\rho q_{\max}^3\omega^2 \tag{1-26}$$

常用阻尼分类见表 1-1。

表 1-1　阻尼分类

阻尼类型	起因	本 构 关 系
内部阻尼	材料特性	黏弹性 $\sigma = E\varepsilon + E^*\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ 迟滞 $\sigma = E\varepsilon + \frac{\widetilde{E}}{\omega}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$
结构阻尼	结构接合处和接触界面	结构变形 $f = c\lvert q\rvert\mathrm{sgn}(\dot{q})$ 库仑 $f = c\,\mathrm{sgn}(\dot{q})$ 一般界面 $f=\begin{cases} f_s & (v=0) \\ f_{sb}(v)\,\mathrm{sgn}(v) & (v\neq 0)\end{cases}$
流体阻尼	流体结构相互作用	$f_d = \frac{1}{2}c_d\rho q^2\,\mathrm{sgn}(\dot{q})$

1.3　振动分析中的阻尼表达

要在系统动态分析中体现阻尼的详细的微观表达式是不切合实际的。相反，阻尼的简化模型常被使用来代表多种类型的能量耗散。考虑一个普通 n 个自由度机械系统，其运动由 n 维广义坐标的矢量 $\boldsymbol{x}$ 来表示，$\boldsymbol{x}_i$ 表示惯性质量的独立运动。对于微小位移，可以假定线性弹性元件。相应的运动方程可以用矢量矩阵表示

$$M\ddot{x} + d + Kx = f(t) \tag{1-27}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 是质量（惯性）矩阵，$\boldsymbol{K}$ 是刚度矩阵。激励力函数矢量为 $\boldsymbol{f}(t)$。阻尼力矢量 $\boldsymbol{d}$（$\boldsymbol{x}$，$\dot{\boldsymbol{x}}$）通常是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的一个非线性函数。系统模型中的阻尼类型可以由系统方程中 $\boldsymbol{d}$ 的属性来表示。正如前面章节所讨论的，可能用到的多种阻尼模型在表 1-2 中列出。表 1-2 中，只有线性黏性阻尼能满足简化数学分析。在简化动力学模型中，其他类型的阻尼形式通常被一种等效黏性阻尼所替代。确定的等效黏性阻尼每个振动周期的能量耗散要和原有阻尼的能量耗散相等。运动方程因此可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t) \tag{1-28}$$

在振动系统的模态分析中，最常用的模型是比例阻尼，在该模型中，阻尼矩阵满足

$$\boldsymbol{C}=c_{\mathrm{m}}\boldsymbol{M}+c_{\mathrm{k}}\boldsymbol{K} \tag{1-29}$$

式（1-29）等式右边第一项是惯性阻尼矩阵。在每个集中质量上相应的阻尼力与它的动量成比例。这代表能量耗散与动量改变（如撞击时）有关。第二项是刚度阻尼矩阵。相应的阻尼力与接近集中质量元素接合处的局部变形力的变化率成比例。因此，它代表了线性结构阻尼的一种简化形式。如果阻尼是比例阻尼的话，那么阻尼运动可以解耦为独立模态。这意味着，如果阻尼模型属于比例类型，那么阻尼系统（同时还有无阻尼系统）将会拥有实模态。

表 1-2 动力学系统方程中一些常用的阻尼模型

阻尼类型	简化模型
黏性	$\Sigma_j c_{ij}\dot{x}_j$
迟滞	$\Sigma_j \frac{1}{\omega}c_{ij}\dot{x}_j$
结构	$\Sigma_j c_{ij}\lvert x_j\rvert \mathrm{sgn}(\dot{x}_j)$
结构库仑	$\Sigma_j c_{ij}\mathrm{sgn}(\dot{x}_j)$
流体	$\Sigma_j c_{ij}\lvert x_j\rvert \dot{x}_j$

1.3.1 等效黏性阻尼

对于一个线性单自由度的黏性阻尼系统，受到外部激励作用。一个单位质量的运动方程可表示为

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^2x=\omega_{\mathrm{n}}^2u(t) \tag{1-30}$$

如果激励力是频率为 ω 的正弦激励，则有

$$u(t)=u_0\cos\omega t \tag{1-31}$$

那么系统的稳态响应可表示为

$$x=x_0\cos(\omega t+\phi) \tag{1-32}$$

其中响应幅值是

$$x_0=u_0\frac{\omega_n^2}{\left[(\omega_{\mathrm{n}}^2-\omega^2)+4\zeta^2\omega_{\mathrm{n}}^2\omega^2\right]^{1/2}} \tag{1-33}$$

且响应的相位角为

$$\phi=-\arctan\frac{2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\omega}{(\omega_{\mathrm{n}}^2-\omega^2)} \tag{1-34}$$

在一个周期内，单位质量的能量耗散 ΔU（也就是阻尼容量）由阻尼力 f_{d} 所做净功产生，则有

$$\Delta U=\oint f_{\mathrm{d}}\mathrm{d}x=\int_{-\phi/\omega}^{(2\pi-\phi)\omega}f_{\mathrm{d}}\dot{x}\mathrm{d}t \tag{1-35}$$

由于质量归一化，见方程式（1-30），那么黏性阻尼力表示为

$$f_{\mathrm{d}}=2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x} \tag{1-36}$$

对于黏性阻尼，阻尼容量 ΔU_{v} 可表示为

$$\Delta U_{\mathrm{v}}=2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\int_{0}^{2\pi/\omega}\dot{x}^{2}\mathrm{d}t \tag{1-37}$$

最后，将方程式（1-32）代入方程式（1-37）中，得到

$$\Delta U_{\mathrm{v}}=2\pi x_{0}^{2}\omega_{\mathrm{n}}\omega\zeta \tag{1-38}$$

对于一般类型阻尼（见表 1-2），运动方程将表示为

$$\ddot{x}+d(x,\dot{x})+\omega_{\mathrm{n}}^{2}x=\omega_{\mathrm{n}}^{2}u(t) \tag{1-39}$$

一个周期内能量耗散［方程式（1-35）］表示为

$$\Delta U=\int_{-\phi/\omega}^{(2\pi-\phi)/\omega}\mathrm{d}(x,\dot{x})\,\dot{x}\mathrm{d}t \tag{1-40}$$

考虑质量归一化，各种阻尼力表达式 $d(x,\dot{x})$ 在表 1-3 中给出。

如对于流体阻尼，阻尼容量是

$$\Delta U_{\mathrm{f}}=\int_{-\phi/\omega}^{(2\pi-\phi)/\omega}c\,|\dot{x}|\dot{x}^{2}\mathrm{d}t \tag{1-41}$$

将方程式（1-32）代入方程式（1-41）中，可得到稳定简弦运动下的阻尼容量为

$$\Delta U_{\mathrm{f}}=\frac{8}{3}cx_{\mathrm{n}}^{3}\omega^{2} \tag{1-42}$$

表 1-3　一般类型阻尼的等效阻尼比表达式

阻尼类型	单位质量阻尼力	等效阻尼比 ζ_{eq}
黏性	$2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}$	ζ
迟滞	$\frac{c}{\omega}\dot{x}$	$\frac{c}{2\omega_{\mathrm{n}}\omega}$
结构	$c\,\lvert x\rvert\mathrm{sgn}(\dot{x})$	$\frac{c}{\pi\omega_{\mathrm{n}}\omega}$
结构库仑	$c\mathrm{sgn}(\dot{x})$	$\frac{2c}{\pi x_{0}\omega_{\mathrm{n}}\omega}$
流体	$c\,\lvert\dot{x}\rvert\dot{x}$	$\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)x_{0}c$

通过比较方程式（1-42）和方程式（1-38），可得流体阻尼的等效阻尼比为

$$\zeta_{\mathrm{f}}=\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)x_{0}c \tag{1-43}$$

式中，x_{0} 是方程式（1-33）中给出的稳态振动的幅值。对于表 1-2 中的其他类型阻尼，等效阻尼比的表达式可按类似方式得到。相应的等效阻尼比表达式在表 1-3 中给出。需要注意的是，对于非黏性阻尼类型，ζ 是振动频率 ω 和激励幅值 u_{0} 的函数。而表 1-3 中给出的表达式由假设简弦激励导出。当采用非简弦激励表达式时，应该进行工程判断。

对于包含比例阻尼的多自由度系统，运动方程能转化为一组单自由度的方程（模态方程），其类型如方程式（1-30）。在这种情形下，阻尼比和固有频率对应各自的模态值，尤其是 $\omega=\omega_{\mathrm{n}}$。

1.3.2 复刚度

考虑一个线性弹簧刚度 k 和一个阻尼常数 c 的线性黏性阻尼器并联，如图 1-5a 所示。假设一个力 f 作用在系统上，使弹簧从其松弛位置移动距离 x，则有

$$f = kx + c\dot{x} \tag{1-44}$$

假定运动是简弦的，表示为

$$x = x_0 \cos\omega t \tag{1-45}$$

由此可知弹性力 kx 与位移同相，但阻尼力 $c\dot{x}$ 相位超前位移 90°。这是因为速度 $\dot{x} = -x_0\omega\sin\omega t = x_0\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$，它比 x 的相位超前 90°。特别的有

$$f = kx_0\cos\omega t + cx_0\omega\cos(\omega t + \pi/2) \tag{1-46}$$

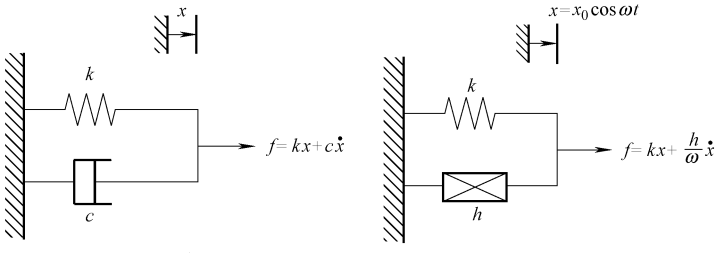


图 1-5 与弹性元件平行

a）黏性阻尼器 b）迟滞阻尼器

同一数据可由复数表示，其中同相分量被视为实部而以相同频率振动，90°超前相位分量被视为虚部，由此可以得到和方程式（1-46）等价的方程

$$f = kx + \mathrm{j}\omega cx \tag{1-47}$$

下面通过位移复数表达式入手推导：

$$x = x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-48}$$

并将之代入方程式（1-44）。注意到方程式（1-47）也可以写为

$$f = k^* x \tag{1-49}$$

式中，k^* 是一个复刚度，表示为

$$k^* = k + \mathrm{j}\omega t \tag{1-50}$$

显然，系统本身和它的两个元件（弹簧和阻尼器）是实数的。它们各自的力也是实数的。复刚度是两个力成分（弹簧力和阻尼力）的简单数学描述，当承受简弦运动时，这两者有 90°的相位差。由此可见线性阻尼器可由一个“虚”刚度来进行“数学”描述。在黏性阻尼情况中，该虚刚度（且和阻尼力幅值）伴随简谐运动频率 ω 而线性增加。当分析离散阻尼器时，其复刚度的概念与前文讨论的材料阻尼中复弹性模数的运用相似。

我们注意到，对于迟滞阻尼，阻尼力（或者阻尼应力）并不取决于简谐运动的频

率。因此，一个迟滞阻尼器可由一个等效阻尼常数表示

$$c = \frac{h}{\omega} \tag{1-51}$$

该常数对于频率为 ω 的简谐运动（比如模态运动或强迫运动）是有效的。这种情况表现在图 1-5b 中。那么相应的复刚度就是

$$k^* = k + \mathrm{j}h \tag{1-52}$$

案例 1-3

一个弹性系统，质量为 m，把它连接到由迟滞阻尼器和弹簧构成的组合体上，如图 1-5b 所示。现把激振力 f 施加到质量块上，问由此产生系统的频率响应函数是什么？位移响应 x 是多少？并求该系统的共振频率。最后将此结果与黏性阻尼情况下的值作比较。

解：

对于频率为 ω 的简弦运动，系统的运动方程可表示为

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + kx = f \tag{1-53}$$

设激励力 $f = f_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 和产生的稳态响应为 $x = x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，其中 x_0 相对 f_0 有一个相位差（也就是说，它是一个复数函数）。那么，在频域内，将简谐响应 $x = x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 代入方程式（1-53）中，将得到

$$\left[-\omega^2 m + \frac{h}{\omega}\mathrm{j}\omega + k \right] x = f$$

表示为频率传递函数

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{[k - \omega^2 m + \mathrm{j}h]} \tag{1-54}$$

注意，照例通过用 $\mathrm{j}\omega$ 替代 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 来获得此结果。传递函数的幅值在共振频率处取得最大值。这相当于方程

$$p(\omega) = (k - \omega^2 m)^2 + h^2$$

的最小值。

如果令 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\omega} = 0$，则有

$$2(k - \omega^2 m)(-2\omega) = 0$$

因此，谐振频率相当于方程 $k - \omega^2 m = 0$ 的解。

下面给出共振频率

$$\omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1-55}$$

注意，在迟滞阻尼的情况下，共振频率等于无阻尼固有频率 ω_{n}。并且不同于黏性阻尼中的情况，其频率与阻尼本身大小无关。为了方便，把系统响应视为弹簧力

$$f_{\mathrm{s}} = kx \tag{1-56}$$

那么，将得到归一化传递函数为

$$\frac{f_s}{f} = G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \omega^2 \frac{m}{k} + j\frac{h}{k}\right]} \tag{1-57}$$

或

$$\frac{f_s}{f} = \frac{1}{[1 - r^2 + j\alpha]} \tag{1-58}$$

其中

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\alpha = \frac{h}{k} \tag{1-59}$$

它们分别是归一化频率和归一化迟滞阻尼。传递函数的幅值是

$$\left|\frac{f_s}{f}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \alpha^2}} \tag{1-60}$$

并且相位角（相位超前）为

$$\angle\frac{f_s}{f} = -\arctan\frac{\alpha}{(1 - r^2)} \tag{1-61}$$

这些结果如图 1-6 所示。

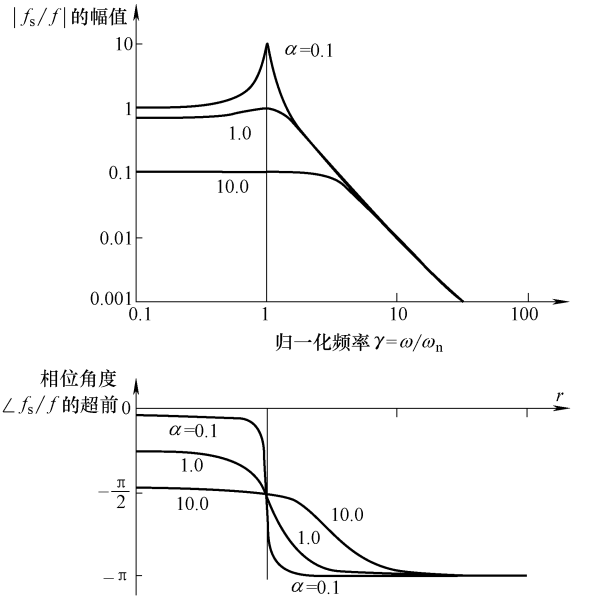


图 1-6 具有迟滞阻尼的单振子的频率传递函数

1.3.3 损耗因子

将一个装置（阻尼器）的阻尼容量定义为一个完整周期运动中的能量消耗，即

$$\Delta U = \oint f_d \mathrm{d}x \tag{1-62}$$

该表达式通过位移-力平面上的迟滞环路面积得到。如果系统最初（总）的能量表示为 U_{max}，那么比阻尼容量 D 通过下面的比值得到：

$$D = \frac{\Delta U}{U_{max}} \tag{1-63}$$

损耗因子 η 等于在一个阻尼周期内每弧度的比阻尼容量。因此，

$$\eta = \frac{\Delta U}{2\pi U_{max}} \tag{1-64}$$

注意到，在阻尼较小时，U_{max} 近似等于装置的最大动能或最大势能。

方程式（1-38）给出了装置每单位质量的黏性阻尼容量为

$$\Delta U = 2\pi x_0^2 \omega_n \omega \zeta \tag{1-65}$$

式中，x_0 是振幅；ω 是装置简谐运动的频率；ω_n 是无阻尼固有频率；ζ 是阻尼比。系统单位质量的最大势能为

$$U_{max} = \frac{1}{2}\frac{k}{m}x_0^2 = \frac{1}{2}\omega_n^2 x_0^2 \tag{1-66}$$

因此，由方程式（1-64）可得，一个黏性阻尼简单振子的损耗因子表示为

$$\eta = \frac{2\pi x_0^2 \omega_n \omega \zeta}{2\pi \times \frac{1}{2}\omega_n^2 x_0^2} = \frac{2\omega\zeta}{\omega_n} \tag{1-67}$$

对于自由衰减系统，有 $\omega = \omega_d \approx \omega_n$，其中后者近似适用于小阻尼。对于强迫振动，最剧烈的振动响应情况出现在 $\omega = \omega_d \approx \omega_n$ 时，此时必须考虑能量的耗散。无论何种情况，损耗因子近似表示为

$$\eta = 2\zeta \tag{1-68}$$

对于其他类型的阻尼，当用等效阻尼系数 ζ_{eq} 代替 ζ 时，方程式（1-68）中的关系仍然不变。

一些普通材料的损耗因子见表 1-4。常用的阻尼参数的定义见表 1-5。一些常用阻尼模型的损耗因子表达式见表 1-6。

表 1-4　一些普通材料的损耗因子

材　　料	损耗因子 $\eta \approx 2\zeta$
铝	$2\times10^{-5} \sim 2\times10^{-3}$
混凝土	0.02 ~ 0.06
玻璃	0.001 ~ 0.002
橡胶	0.1 ~ 1.0
钢	0.002 ~ 0.01
木头	0.005 ~ 0.01

表 1-5 阻尼参数的定义

参 数	定 义	数学公式
阻尼能(ΔU)	每个周期耗散的能量(位移-力迟滞回路面积)	$\oint f_d \mathrm{d}x$
单位体积阻尼能	每个周期单位材料体积耗散的能量(应变-应力迟滞回路面积)	$\oint \sigma \mathrm{d}\varepsilon$
阻尼能比(D)	每个周期耗散的能量(ΔU)与初始的最大的能量(U_{max})之比。注意:对于小阻尼,U_{max} = 最大势能 = 最大动能	$\frac{\Delta U}{U_{max}}$
损耗因子(η)	单位角度周期耗散能比。注意:对于小阻尼,$\eta = 2 \times$ 阻尼比	$\frac{\Delta U}{2\pi U_{max}}$

表 1-6 几种常用阻尼模型的损耗因子

材料阻尼模型	应力-应变本构关系	损耗因子(η)
黏弹性 Kelvin-Voigt	$\sigma = E\varepsilon + E^* \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\omega E^*}{E}$
迟滞 Kelvin-Voigt	$\sigma = E\varepsilon + \frac{\widetilde{E}}{\omega} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\widetilde{E}}{E}$
黏弹性标准线性固体	$\sigma + c_s \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = E\varepsilon + E^* \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\omega E^*}{E} \frac{(1 - c_s E/E^*)}{(1 + \omega^2 c_s)}$
迟滞标准线性固体	$\sigma + c_s \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = E\varepsilon + \frac{\widetilde{E}}{\omega} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$	$\frac{\widetilde{E}}{E} \frac{(1 - \omega c_s E/\widetilde{E})}{(1 + \omega^2 c_s)}$

1.4 阻尼的测量

阻尼由多种参数（如阻尼容量比、损耗因子、品质因数和阻尼比）和模型（如黏性、迟滞、结构和流体）表示。在试图测量一个系统的阻尼之前，需要确定一个（模型）表示方法，以便充分描述系统机械能损耗的本质，然后需要确定测量模型的一个或多个参数。

对于运行在各种条件下的力学耦合的设备，为其中复杂零部件的阻尼建立一个既符合实际又容易加工的模型是非常困难的。即使已经有了一个满意的阻尼模态，但它的阻尼参数的实验确定也可能是繁琐乏味的。主要的困难在于因为不能够把各种阻尼（如材料、结构和流体）从总的测量中分离出来。进一步地说，为了保证结果的真实性，阻尼测量必须在实际运行条件下进行。

在实际测量过程中，如果一种阻尼（如流体阻尼）被消除了，那么是不能再现或重复实际工作条件的。这同样会把消除的阻尼类型与其他类型阻尼之间可能的耦合效应根除掉。实际上，系统的总阻尼一般不等于各个阻尼单独作用之和。采用实验数据计算等效阻尼的另外一种限制是来自假定动态系统的特性是线性的。如果系统是强非线性，那么阻尼估计会出现较大错误。然而，当用实验数据估计阻尼参数时，习惯假定系统具有线性黏性特性。

一般存在两种方法进行阻尼测量：一种是采用时程响应记录估计阻尼，另外一种是采用系统的频响函数来估计阻尼。

1.4.1 对数衰减法

对数衰减法也许是用来测量阻尼最普通的时程响应方法。当具有黏性阻尼的单自由度振子系统［参见式（1-30）］被脉冲输入激励（或初始条件激励），那么它的响应就随时间衰减（图1-7），表达式为

$$y = y_0 \exp(-\zeta \omega_n t) \sin \omega_d t \tag{1-69}$$

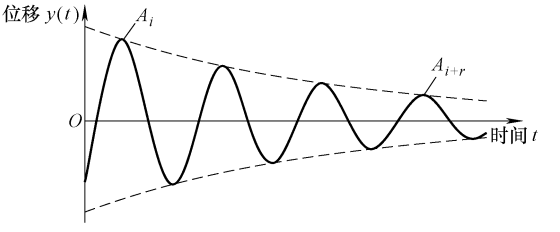


图 1-7　简单振子脉冲响应

其中有阻尼的固有频率为

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{1-70}$$

如果在 $t = t_i$ 时刻的响应为 y_i，且在 $t = t_i + 2\pi r/\omega_d$ 时刻的响应为 y_{i+r}，那么根据式（1-69）可得到

$$\frac{y_{i+r}}{y_i} = \exp\left(-\zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} 2\pi r\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

特别的，假定 y_i 对应时间函数的一个峰值，幅值为 A_i，且 y_{i+r} 对应时间响应中第 r 个周期后的峰值，幅值为 A_{i+r}（图1-7）。甚至对于时程响应任意间隔 r 个周期的两点，以上公式依然成立，且在当前的测量步骤中，选取峰值点是个不错的主意，这是因为这些值比起时程响应中其他任一点要来得大。那么，使用式（1-70），可得到

$$\frac{A_{i+r}}{A_i} = \exp\left(-\zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} 2\pi r\right) = \exp\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} 2\pi r\right]$$

则（每个周期）对数衰减率 δ 为

$$\delta = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{A_{i+r}}{A_i}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-71}$$

阻尼比可以表示为

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi/\zeta)^2}} \tag{1-72}$$

对于小阻尼（一般 $\zeta < 0.1$），$\omega_d \approx \omega_n$，则式（1-71）变为

$$\frac{A_{i+r}}{A_i} \approx \exp(-\zeta 2\pi r) \tag{1-73}$$

或者

$$\zeta = \frac{1}{2\pi r} \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+r}}\right) = \frac{\delta}{2\pi} (\zeta < 0.1) \tag{1-74}$$

实际上，这就是“每弧度”对数衰减率。

根据式（1-74），可以从自由衰减记录中估计出阻尼比。具体来说，确定了衰减响

应中相隔 r 个周期的幅值之比，并代入式（1-74）中，就得到等效阻尼比。

另外，如果把衰减响应中相隔 n 个周期的幅值之比用系数 2 表示，并代入式（1-74）中，就得到

$$\zeta = \frac{1}{2\pi r}\ln(2) = \frac{0.11}{n}(\zeta < 0.1) \tag{1-75}$$

对于缓慢衰减（小阻尼），可以得到

$$\ln\left(\frac{A_i}{A_{i+r}}\right) = \frac{2(A_i - A_{i+1})}{(A_i + A_{i+1})} \tag{1-76}$$

接着，根据式（1-74），得到

$$\zeta = \frac{A_i - A_{i+1}}{\pi(A_i + A_{i+1})}(\zeta < 0.1) \tag{1-77}$$

式（1-72）、式（1-74）、式（1-75）和式（1-77）中的任意一个都可以用来计算测试数据中的 ζ。应该注意以上结果都假定系统具有单自由度特性。对于多自由度系统，如果初始激励使得系统的衰减主要以一种振动模态发生，那么可以采用上面方法确定每阶模态的阻尼比。换句话说，就是假定存在模态分离和存在“实模态”（不是“复模态”和非比例阻尼）。

1.4.2 阶跃响应法

阶跃响应法同样是一种时间响应方法。如果单位阶跃激励作用到用式（1-30）表示的单自由度振子系统上，那么它的时程响应为

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\exp(-\zeta\omega_n t)\sin(\omega_d t + \phi) \tag{1-78}$$

式中，$\phi = \cos\zeta$。经典的阶跃曲线如图 1-8 所示。第一个峰的时间 T_p 为

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \tag{1-79}$$

在时间 T_p 时的响应 M_p 为

$$M_p = 1 + \exp(-\zeta\omega_n T_p) = 1 + \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{1-80}$$

过冲百分比 PO 为

$$PO = (M_p - 1) \times 100\% = 100\exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{1-81}$$

因此，如果阶跃响应记录中 T_p、M_p 或 PO 中有一个参数已知，那么采用下面合适的关系，就可以计算出对应的阻尼比：

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{T_p\omega_n}\right)^2} \tag{1-82}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left[\frac{\mathrm{In}(M_p - 1)}{\pi}\right]^2}}} \tag{1-83}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\left[\dfrac{\ln(PO/100)}{\pi}\right]^2}}} \tag{1-84}$$

应该注意的是，当确定 M_p 值时，响应曲线应该归一到单位稳态值。更进一步地说，以上结果仅对单自由度和多自由度中的模态激励有效。

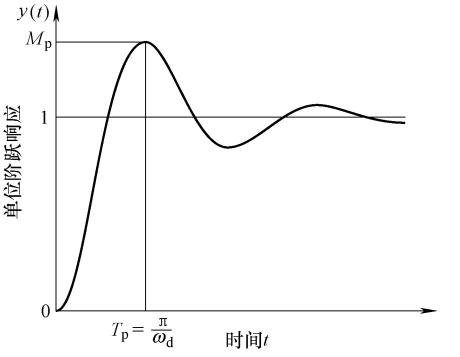


图 1-8　经典的简单振子阶跃响应

1.4.3　迟滞回线法

对于有阻尼的系统，力与位移关系的一个周期构成一个迟滞回路。迟滞回路的形状根据系统中的惯性、弹性特性和其他保守力条件（如重力）来改变。但是保守力（如惯性、弹性和重力）在一个完整周期内所做的功为零。因此，净功只等于阻尼耗散的能量。故力与位移迟滞回路面积可以得到阻尼容量 ΔU［参见式（1-62）］。根据位移-力曲线，同样可以确定系统的最大能量。然后，利用式（1-64）计算损耗因子 η，并利用（式 1-68）计算阻尼比。这种阻尼测量方法和时域法一样被认为是基本的。

注意：式（1-65）是单位质量在一个加载-卸载周期内克服阻力所做的功（耗散能量）。应该联想到

$$2\zeta\omega_n = c/m$$

式中，c 是黏性阻尼系数；m 是质量。

因而，根据式（1-65），单位质量和每个迟滞回路耗散的能量等于

$$\Delta U = \pi x_0^2 \omega c/m$$

因此，在没有对质量归一化的情况下，黏性阻尼的每个迟滞回路耗散的能量为

$$\Delta U_v = \pi x_0^2 \omega c \tag{1-85}$$

对式（1-62）用阻尼力 $f_d = c\dot{x}$、简弦运动位移 $x = x_0 e^{j\omega t}$ 对时间进行积分，积分区间为 $t = 0 \sim 2\pi/\omega$，从而推导得到式（1-85）。

同样，从式（1-51）的观点看，黏性阻尼每个迟滞回路耗散的能量为

$$\Delta U_h = \pi x_0^2 h \tag{1-86}$$

现在，既然初始的最大能量可以用初始的最大势能表示，则有

$$U_{max} = \frac{1}{2} k x_0^2 \tag{1-87}$$

注意刚度 k 可以从位移-力迟滞回路的平均斜率测量得到。因而，从式（1-64）的观点看，迟滞阻尼的损耗因子为

$$\eta = \frac{h}{k} \tag{1-88}$$

接着，根据式（1-68），可以得到迟滞阻尼的等效阻尼比为

$$\zeta = \frac{h}{2k} \tag{1-89}$$

案例 1-4

测试阻尼材料时，对细杆进行从 -900N 加载到 900N、再卸载回到 -900N的循环加载，并测量对应的弯曲。实验过程中获得的平滑的载荷 - 弯曲曲线如图 1-9 所示。假设材料阻尼主要表现为迟滞类型，请估计：

① 迟滞阻尼系数。

② 等效阻尼比。

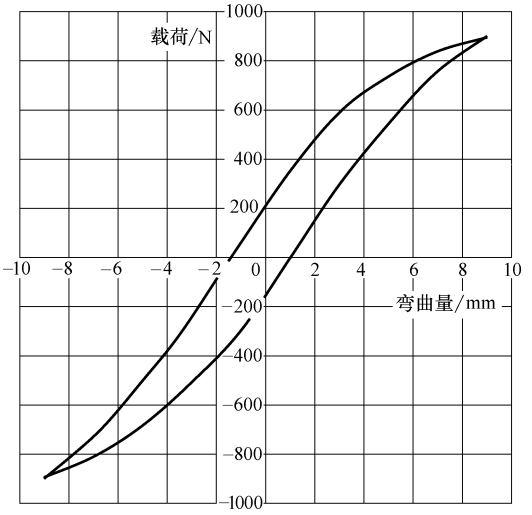


图 1-9 阻尼材料迟滞回路实验结果

解：

把迟滞回路的顶部段和底部段近似看做三角形，回路面积估计为

$$\Delta U_{\mathrm{h}} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2.5 \times 900\mathrm{N} \cdot \mathrm{mm}$$

另外，可以计算迟滞回路中的方格来获得这个结果。弯曲幅值为

$$x_0 = 8.5\mathrm{mm}$$

根据式（1-86）得到

$$h = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times 2.5 \times 900}{\pi \times 8.5^2}\mathrm{N/mm} = 9.9\mathrm{N/mm}$$

迟滞回路的平均斜率估算为阻尼元件的刚度，因此有

$$k = \frac{600}{4.5}\mathrm{N/mm} = 133.3\mathrm{N/mm}$$

根据式（1-89），得到等效阻尼比为

$$\zeta = \frac{9.9}{2 \times 133.3} \approx 0.04$$

1.4.4 放大因子法

放大因子法是一种频域响应方法。考虑一个带有黏性阻尼的单自由度振子系统。它的频响函数的幅值为

$$|H(\omega)| = \frac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{[(\omega_{\mathrm{n}}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_{\mathrm{n}}^2\omega^2]^{1/2}} \tag{1-90}$$

$|H(\omega)|$与激励频率 ω 之间的关系图如图 1-10 所示。当分母的表达式取得最小值

时，幅值出现峰值。它对应于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[(\omega_{\mathrm{n}}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_{\mathrm{n}}^2\omega^2\right]=0 \tag{1-91}$$

式（1-91）的解就是共振频率 ω_{r}，为

$$\omega_{\mathrm{r}}=\sqrt{1-2\zeta^2}\omega_{\mathrm{n}} \tag{1-92}$$

注意：$\omega_{\mathrm{r}}<\omega_{\mathrm{d}}$［参见式（1-70）］，但是对于小阻尼（$\zeta<0.1$），$\omega_{\mathrm{n}}$、$\omega_{\mathrm{d}}$和 ω_{r}的数值几乎相等。放大因子 Q 是频响函数在共振频率处的幅值，把式（1-92）代入式（1-90），可以求得 Q 为

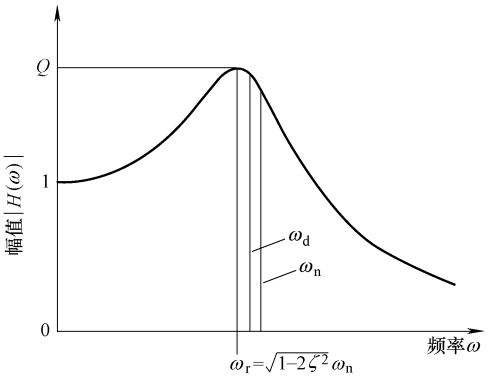


图 1-10　适用单自由度系统的放大系数阻尼测量方法

$$Q=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-93}$$

对于小阻尼（$\zeta<0.1$），存在

$$Q=\frac{1}{2\zeta} \tag{1-94}$$

实际上，式（1-94）对应的是频响函数在频率 $\omega=\omega_{\mathrm{n}}$处的幅值。

如果可以得到频响函数的幅值曲线（或 Bode 图），那么利用式（1-94）即可以估计系统阻尼比 ζ。当采用这种方法时，频响函数曲线必须归一化，目的就是让零频率处的幅值（称为静态增益）变为 1。

只要系统模态频率不是密集分布，且系统具有小阻尼，那么根据多自由度系统频响函数的 Bode 图的幅值就可以估计得到多自由度系统模态阻尼值。图 1-11 是幅值的对数（以 10 为基底）坐标图，幅值用分贝（dB）表示，通过对幅值取对数 log（幅值），并乘以系数 20 得到。在共振频率 ω_i处，作开始段曲线的渐近线，并从渐近线处测量得到放大因子 q_i（dB）。那么有

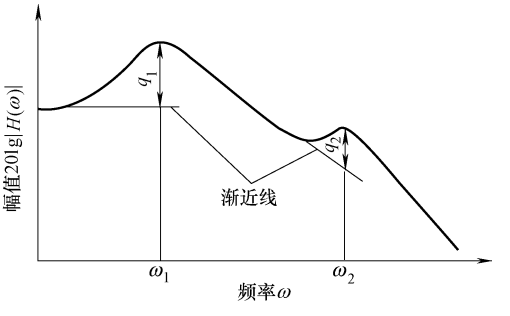


图 1-11　适用于多自由度系统的放大系数法

$$Q_i=(10)^{q_i/20} \tag{1-95}$$

模态阻尼比为

$$\zeta=\frac{1}{2Q}(i=1,2,\cdots,n) \tag{1-96}$$

如果共振峰是密集的，那么必须对频响函数进行曲线拟合，得到合适函数，以确定对应的模态阻尼值，也可以采用频域数据，利用 Nyquist 图计算阻尼数值。

1.4.5 带宽法

带宽阻尼测量法同样基于频响函数。单自由度带黏性阻尼的振子系统的频响函数幅值由式（1-90）给出。对于小阻尼，峰值幅值由式（1-94）给出。半功率带宽定义为当幅值为峰值的$1/\sqrt{2}$倍时频响函数幅值曲线的宽度，带宽用$\Delta\omega$表示（参见图1-12），使用公式（1-90）求得带宽$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$。根据定义，$\omega_1$和$\omega_2$是下面方程式$\omega$的根

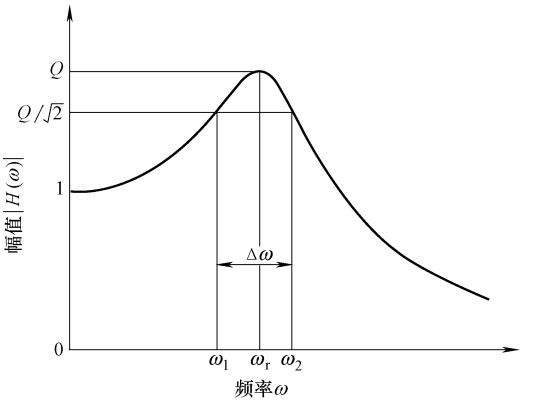


图1-12 单自由度系统带宽法阻尼测量方法

$$\frac{\omega_n^2}{\left[(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2\right]^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\times 2\zeta} \tag{1-97}$$

式（1-97）可以表示成下面的形式

$$\omega^4-2(1-2\zeta^2)\omega_n^2\omega^2+(1-8\zeta^2)\omega_n^4=0 \tag{1-98}$$

这是一个ω的四次方程，具有根ω_1^2和ω_2^2，并满足

$$(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)=\omega^4-(\omega_1^2+\omega_2^2)\omega^2+\omega_1^2\omega_2^2=0$$

相应的有

$$\omega_1^2+\omega_2^2=2(1-2\zeta^2)\omega_n^2 \tag{1-99}$$

和

$$\omega_1^2\omega_2^2=(1-8\zeta^2)\omega_n^4 \tag{1-100}$$

因而存在

$$(\omega_2-\omega_1)^2=\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2=2(1-2\zeta^2)\omega_n^2-2\sqrt{1-8\zeta^2}\omega_n^2$$

对于小的ζ（和1相比），可以得到

$$\sqrt{1-8\zeta^2}\approx 1-4\zeta^2$$

因此

$$(\omega_2-\omega_1)^2\approx 4\zeta^2\omega_n^2$$

或者，对于小阻尼有

$$\Delta\omega=2\zeta\omega_n=2\zeta\omega_r \tag{1-101}$$

根据式（1-101），采用下面关系可从带宽中估计出阻尼比

$$\zeta=\frac{1}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \tag{1-102}$$

对于具有稀疏共振频率的多自由度系统，前述的方法可以扩展到估计多自由度模态阻尼。下面考虑图1-13所示的频响函数幅值图（单位：dB）。

由于系数$\sqrt{2}$对应于3dB，因此对应这个共振峰的带宽可由幅值图上该峰下的3dB的

宽度给出。对于第 i 阶模态，阻尼比为

$$\zeta_i = \frac{1}{2}\frac{\Delta\omega_i}{\omega_i} \qquad (1\text{-}103)$$

阻尼测量的带宽方法表示共振处的带宽是系统能量在共振邻域内耗散的度量。对于小阻尼，由式（1-103）给出的关系是有效的，但是它是基于线性系统分析基础上的。其他阻尼测量方法见表 1-7。

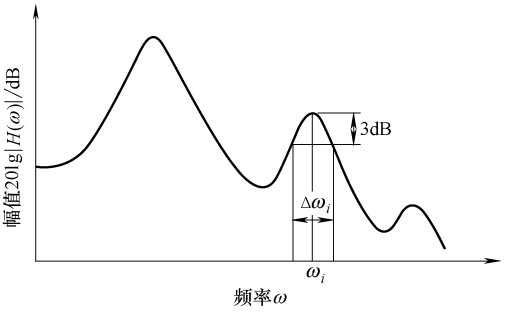


图 1-13　多自由度系统带宽法阻尼测量方法

表 1-7　阻尼测量方法

方　法	测　量	公　式
对数衰减法	A_i 为选定的初始显著幅值	对数衰减 $\delta = \frac{1}{r}\ln\frac{A_i}{A_{i+r}}$（每个周期） $\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$（每个弧度） 或　$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi/\delta)^2}}$ 对于小阻尼，有 $\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$ $\zeta = \frac{A_i - A_{i+1}}{\pi(A_i + A_{i+1})}$
阶跃响应法	M_p 为归一化到单位稳态响应的第一个峰值 PO 为过冲百分比（超过稳态响应的值）	$M_p = 1 + \exp\left[\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$ $PO = 100\exp\left[\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$
迟滞回路法	ΔU 为位移-力迟滞回路的面积 x_0 为迟滞回路的最大位移 k 为迟滞回路的平均斜率	迟滞阻尼系数 $h = \frac{\Delta U}{\pi x_0^2}$ 损耗因子 $\eta = \frac{h}{k}$ 等效阻尼比 $\zeta = \frac{h}{2k}$
放大因子法	Q 为共振频率处的幅值，零频率处的幅值要求归一化到 1	$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ 对于小阻尼，有 $\zeta = \frac{1}{2Q}$
带宽法	$\Delta\omega$ 为共振峰值的 $1/\sqrt{2}$ 处的带宽（如半功率带宽）；ω_r 为共振频率	$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_r}$

1.4.6 备注

使用实验方法确定的阻尼值存在一定的限制。比如，采用时程响应方法确定设备高阶模态的阻尼时，习惯性的步骤就是先用简弦激振器在所需的共振频率处激振系统，然后释放激振机构。但是，在随后的瞬态振动中，除了比例阻尼外，不可避免地存在模态耦合。在这类测试中，其实默认了设备可以用特殊的模式激振。本质上，在阻尼测量中都假定了比例阻尼。这就给测量的阻尼值带来了一定的误差。

根据测试结果来计算阻尼参数的表达式一般是基于线性系统理论的。然而，所有的实际设备都会呈现一些非线性特性。如果非线性程度较高，那么测量得到的阻尼值是不能代表实际的系统特性的。更进一步的是，试验确定阻尼通常是在低振幅情况下完成的。对应的响应可能比极端工作条件下展示的振幅要小一个量级。除了相对低的振幅外(图 1-14)，实际设备中的阻尼随运动幅值的增加而增加。相应的，当根据实验确定的阻尼值用于研究系统在各种工作条件下的系统特性时，应该对这些阻尼值进行外推。另外，阻尼值应该和设备的应力水平联系起来。但是，设备的部件不同，承受的应力水平也不同，因而对于整台设备很难取得一个有代表性的应力值。推荐的测量结构在地震扰动下阻尼的方法之一，就是分析结构地震响应记录，该记录是类似于将要考虑的地震。表 1-8 所示为 ASME 推荐的适用于运行安全地震（OBE）和安全停堆地震工况（SSE）的几种结构的一些经典阻尼值。

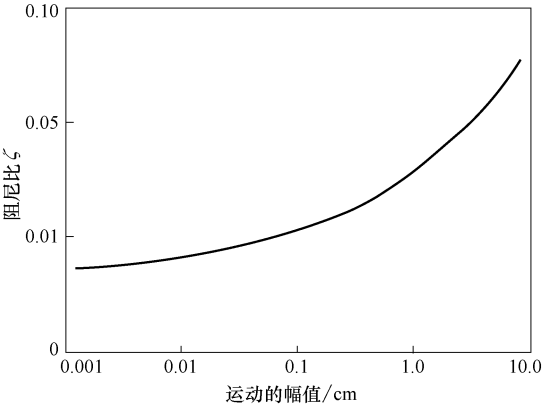


图 1-14 振动幅值对结构阻尼的影响

表 1-8 ASME 推荐用于地震的经典阻尼值

系　　统	阻尼比 ζ(%)	
	OBE	SSE
设备和大型管道系统(直径大于 12in)	2	3
小直径管道系统(直径小于 12in)	1	2
焊接的钢结构	2	4
螺栓连接的钢结构	4	7
预应力的混凝土结构	2	5
钢筋混凝土结构	4	7

当采用频响函数幅值曲线估计阻尼值时，精度在小阻尼比小于 1% 时变得很差。出

现此种情况的原因在于：在用实验方法确定频响函数时，靠近弱的阻尼共振处的振幅曲线上很难获得足够的点，因而振幅曲线在微弱的阻尼共振峰附近不能很好地描述；在大阻尼处，时间速度太快，以致测量中包含了较大的误差；密集模态的干涉也可能影响测量的阻尼结果。

1.5 界面阻尼

在许多应用场合，阻尼产生于两个相对滑动表面的界面处，如在轴承、齿轮、螺旋副和导轨中。尽管这类阻尼一般当做结构阻尼来处理，但由于它的重要性，因而在这里把它当做另一类阻尼——界面阻尼进行详细研究。

界面阻尼在1500年就被DaVinci提到过，并在1700年再次被库仑研究过。他们采用的简化模型就是著名的库仑摩擦模型

$$f=\mu R\operatorname{sgn}(v) \tag{1-104}$$

式中，f为与运动方向相反的摩擦力；R为两个滑动表面之间的法向反力；v为两个滑动表面之间的相对速度；μ为摩擦系数。

注意："sgn"符号函数是用来强调f与v的方向相反。这个简单模型是不能给所有的界面阻尼提供精确结果的。众所周知，除了加载条件外，界面阻尼取决于一系列的因素，如材料性质、表面特性、摩擦性质、运动部件的几何形状和相对速度的幅值。

一个更完整的界面阻尼模型合并了如下的特性，如图1-15所示：

① 静摩擦和动摩擦，具有黏附和黏滑性态。

② 常规的库仑摩擦（区域1）。

③ 在再一次增加前，动摩擦以负斜率下降。这就是所谓的"Stribeck效应"（区域2）。

④ 常规的黏性阻尼（区域3）。

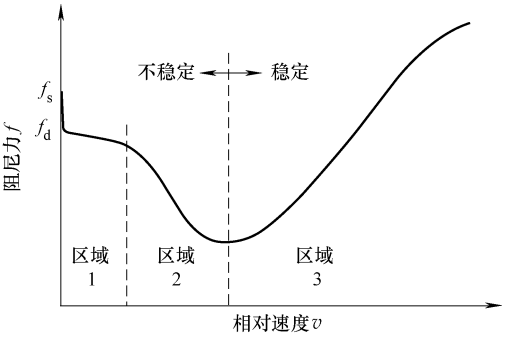


图1-15 界面阻尼的主要特性

以上特性覆盖了工程上常见界面阻尼的性态。假设施加一个力，使两个表面产生相对运动。从摩擦的角度看，施加的力太小，是不能产生相对运动的；开始运动所需的最小力f_s就是静摩擦力；当运动开始时，维持运动所需的力将瞬间降到f_d。仿佛最初两个表面是"粘在一起"，f_s就是必需的分离力。因而，这个特性称为黏附。为了维持两个表面之间相对运动所需的最小力f_d就是动摩擦力。实际上，在动摩擦状态下，在粘连和分离断断续续重复出现时，"黏滑"是有可能发生的。很明显，这样的振荡运动对应的是不稳定状态（如在机床上）。这种效应是不希望的，应该避免。

在相对运动开始后，对于小的相对速度，常规的库仑摩擦阻尼形态也许占统治地位，如图1-15区域1所示。在相对低的速度下，润滑表面之间存在一些固体-固体接

触，这将产生库仑阻尼力。当相对速度增加时，这种固体-固体接触程度将下降，且阻尼力将下降，正如图 1-15 的区域 2 所示。这个特性被称为 Stribeck（斯特里贝克，下同）效应。由于区域 1 和区域 2 中摩擦曲线的斜率是负的，因此这些区域对应的是不稳定区域。当相对速度进一步增加时，处于完全润滑的表面，黏性阻尼将占统治地位，如图 1-15 的区域 3 所示，这就是稳定区域。界面阻尼的组合模型可以表示为

$$f=\begin{cases}f_{\mathrm{s}} & (v=0)\\ f_{\mathrm{sb}}(v)\operatorname{sgn}(v)+bv & (v\neq 0)\end{cases} \tag{1-105}$$

注意：$f_{\mathrm{sb}}(v)$ 是速度的非线性函数，它代表了动摩擦力（$v>0$）和 Stribeck 效应。用来表示这种效应的模型包括下面的公式：

$$f_{\mathrm{sb}}=\frac{f_{\mathrm{d}}}{1+(v/v_{\mathrm{c}})^{2}} \tag{1-106}$$

$$f_{\mathrm{sb}}=f_{\mathrm{d}}\mathrm{e}^{-(v/v_{\mathrm{c}})^{2}} \tag{1-107}$$

和

$$f_{\mathrm{sb}}=f_{\mathrm{d}}+\alpha|v|^{1/2}\operatorname{sgn}(v) \tag{1-108}$$

注意：f_{d} 代表动态库仑摩擦力；v_{c} 和 α 是模型参数。

案例 1-5

一个质量为 m 的物体放置在一个水平面上，连接到刚度为 k 的弹簧上，如图 1-16 所示。质量块被拉动，弹簧从静止位置起被拉长 x_0，请确定物块随后的滑动运动。物块和水平面之间的摩擦系数为 μ。

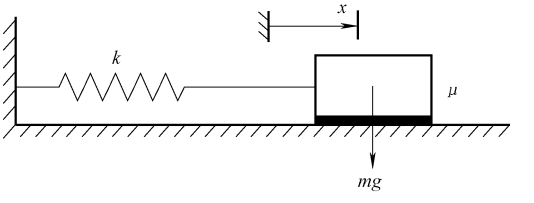


图 1-16 物块克服库仑摩擦力滑动

解：

注意，当物块向左运动时，摩擦力 μmg 方向向右，反之亦然。现在，考虑运动的第一个周期，初始位移为 x_0，然后向左侧运动，弹簧压缩时渐渐静止，接着物块向右运动。

前半个周期（向左运动）：

运动方程为

$$m\ddot{x}=-kx+\mu mg \tag{ⅰ}$$

或者

$$\ddot{x}+\omega_{\mathrm{n}}^{2}x=\mu g \tag{ⅱ}$$

式中，$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{k/m}$ 是材料无阻尼固有频率。式（ⅱ）的齐次解为

$$x_{\mathrm{h}}=A_1\sin(\omega_{\mathrm{n}}t)+A_2\cos(\omega_{\mathrm{n}}t) \tag{ⅲ}$$

特解为

$$x_{\mathrm{p}}=\frac{\mu g}{\omega_{\mathrm{n}}^{2}} \tag{ⅳ}$$

因此，总解为

$$x_h = A_1\sin(\omega_n t) + A_2\cos(\omega_n t) + \frac{\mu g}{\omega_n^2} \tag{v}$$

初始条件为：$t=0$ 时 $x=x_0$ 和 $\dot{x}=0$，于是得到 $A_1=0$ 和 $A_2=x_0-(\mu g/\omega_n^2)$。因而，公式（$v$）变为

$$x=\left(x_0-\frac{\mu g}{\omega_n^2}\right)\cos(\omega_n t)+\frac{\mu g}{\omega_n^2} \tag{vi}$$

在前半周期结束时，可以得到 $\dot{x}=0$ 和 $\sin\omega_n t=0$。因此对应的时间为 $t=\pi/\omega_n$。把这个关系代入公式（vi），对应的物块位置（注意：$\cos\pi=-1$）为

$$x_{l1}=-\left(x_0-\frac{\mu g}{\omega_n^2}\right) \tag{vii}$$

后半个周期（向右运动）：

运动方程为

$$m\ddot{x}=-kx-\mu mg \tag{viii}$$

或者

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=-\mu g \tag{ix}$$

对应的响应为

$$x=B_1\sin(\omega_n t)+B_2\cos(\omega_n t)-\frac{\mu g}{\omega_n^2} \tag{x}$$

初始条件为：$t=\pi/\omega_n$ 时 $x=-(x_0-(2\mu g/\omega_n^2))$ 和 $\dot{x}=0$，于是得到 $B_1=0$ 和 $B_2=x_0-(3\mu g/\omega_n^2)$。因而，公式（x）变为

$$x=\left(x_0-\frac{3\mu g}{\omega_n^2}\right)\cos(\omega_n t)-\frac{\mu g}{\omega_n^2} \tag{xi}$$

在 $t=2\pi/\omega_n$ 时，物块渐渐停止，$\dot{x}=0$，$\sin\omega_n t=0$，因此在后半周期结束时，对应的物块位置为

$$x_1=x_0-\frac{4\mu g}{\omega_n^2} \tag{xii}$$

下一个周期的响应是这样确定的：把式（xii）表示的 x_1 代入式（vi）得到向左的运动；用式（xi）表示向右的运动。那么，可以把总响应表示为

① 第 i 个周期向左的运动为

$$x=[x_0-(4i-3)\Delta]\cos\omega_n t+\Delta \tag{xiii}$$

② 第 i 个周期向右的运动为

$$x=[x_0-(4i-1)\Delta]\cos\omega_n t-\Delta \tag{xiv}$$

其中，

$$\Delta=\frac{\mu g}{\omega_n^2} \tag{xv}$$

注意：对于可能运动的半个周期，响应的谐波成分的幅值应该是正的，因而必须有

$x_0>(4i-3)\Delta$　第 i 个周期向左的运动。

$x_0 > (4i-1)\Delta$ 第 i 个周期向右的运动。

同样要注意，根据式（xiii）和式（xiv），向左运动的平衡位置为 $+\Delta$，向右运动的平衡位置为 $-\Delta$。典型的响应曲线如图 1-17 所示。

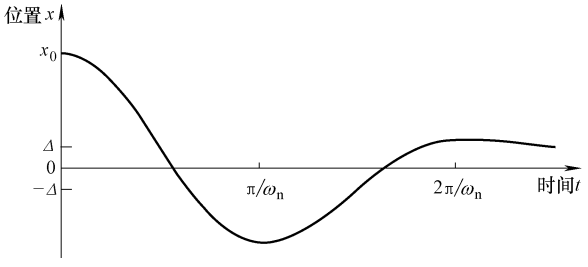


图 1-17 库仑摩擦下的典型周期响应

1.5.1 旋转界面中的摩擦

齿轮传动、旋转轴承和其他关节中的摩擦都有一点相似的性态。当然，摩擦特性取决于设备的性质，也取决于加载条件；但是，试验已经表明这些设备的摩擦行为可以用这里的界面阻尼模型来表示。一般情况下，实验结果表示为摩擦系数（摩擦力/法向力）与两个滑动面之间相对速度的关系曲线。对于旋转轴承，轴的旋转速度相当于相对速度，但对于齿轮，采用的是节线速度。图 1-18 所示为一对直齿轮摩擦系数的实验结果。

从这些结果中可以观察到，对于这类旋转设备，阻尼特性可以用速度-摩擦系数平面中的两段直线来表示：第一段直线具有陡的负斜率，而第二段直线具有平和的正斜率，它代表等效黏性阻尼常数；如图 1-19 所示。

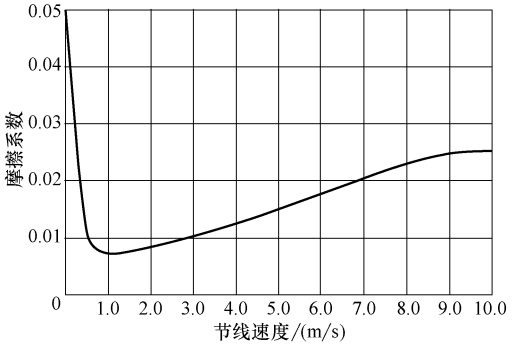


图 1-18 一对直齿轮摩擦系数实验结果

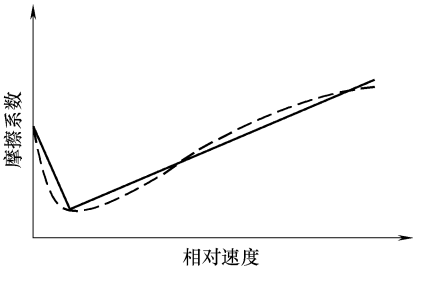


图 1-19 旋转设备的摩擦模型

1.5.2 不稳定性

采用界面阻尼模型可以很容易解释诸如金属切削工具（如车床、钻床和磨床）这样的相互作用设备呈现的黏滑和振荡这样的不稳定特性或自激振动。特别的，注意到模型有一个负斜率（或负阻尼系数）的区域，它对应低的相对速度，另外一个正斜率区

域，它对应高的相对速度。考虑一个单自由度模型：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{1-109}$$

如果不考虑外部激励力，则初速度为 $\dot{x} = 0$。但是，在这个区域，阻尼系数 b 会是负的，因而系统将是不稳定的。因而，一个轻微的扰动将导致一个逐步增加的响应。随后，$\dot{x}$将增加到超过临界速度，此时阻尼系数 b 是正的，系统也就变成稳定了，所以响应将逐步减少。这个增加和衰减循环将在一个频率处重复出现，该频率主要取决于系统的惯性和刚度参数（m 和 k）。振荡就是以这种方式在界面设备中产生的。

参 考 文 献

Blevins, R.D. 1977. *Flow-Induced Vibration*, Van Nostrand Reinhold, New York.

den Hartog, J.P. 1956. *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York.

de Silva, C.W., Dynamic beam model with internal damping, rotatory inertia and shear deformation, *AIAA J.*, 14, 5, 676–680, 1976.

de Silva, C.W., Optimal estimation of the response of internally damped beams to random loads in the presence of measurement noise, *J. Sound Vib.*, 47, 4, 485–493, 1976.

de Silva, C.W., An algorithm for the optimal design of passive vibration controllers for flexible systems, *J. Sound Vib.*, 74, 4, 495–502, 1982.

de Silva, C.W. 2005. *MECHATRONICS — An Integrated Approach*, Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL.

de Silva, C.W. 2006. *VIBRATION — Fundamentals and Practice*, 2nd ed., Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL.

Ewins, D.J. 1984. *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press Ltd, Letchworth, England.

Inman, D.J. 1996. *Engineering Vibration*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Irwin, J.D. and Graf, E.R. 1979. *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Van de Vegte, J. and de Silva, C.W., Design of passive vibration controls for internally damped beams by modal control techniques, *J. Sound Vib.*, 45, 3, 417–425, 1976.

2 阻尼理论

摘要

这个介绍性的章节综合了许多内容，尽管它们在很大程度上讲述的是由于摩擦与阻尼（见第 1 章）引起的、看似不连贯的摩擦属性。在其他方面，物理学史典型的事件表明：由于物理学家的无力，阻尼模型不能根据第一理论来描述摩擦。为了支持本章所依据的基本论点，声明提供的证据是：重要的非线性特性几乎在经典阻尼模型中消失。本章阐释了固体中的迟滞阻尼来自内部摩擦的机制是如何导致严重错误解释的。情况就是如此，即便迟滞阻尼常常装扮成一个线性现象。正如 2.17 节中所述的，作者的工作是尝试修正通用模型的缺陷，以得到通用阻尼模型。2.17 节以典范的阻尼形式来讲述。在模型的发展中，与间接的相反，能量直接参与体现了价值。为了更好地观察阻尼处理在未来的演变，本章的最后一节披露了阻尼的一些显著的复杂性，但这才刚刚开始。在这些发现中，起作用的处理技术将在第 3 章中提到。

2.1 概述

有关这个问题已经有许多书籍进行描述，这确实是一个难以在阻尼问题中列入的主题。黏弹性仅只是几部浩繁的工程手册的基础。本章节特意与其他参考书中有类似名称的章节区分开来。很少有重复的、被读者称为优秀资源的知名和成熟的经典方法，譬如德席尔瓦（2006 年）和本手册的第 1 章。它们提供了很多工程日常问题的解决方案技术。本章的目标是给那些非常规问题以及那些随着技术推进遇到的频率更高的问题提供帮助。这个目标被认为是对重新审视阻尼这个物理学基础问题最好的服务。

一旦一个多体系统达到一个稳定的状态，在达到稳态的方法上，阻尼处理的难度可能会远低于接近稳态过程的理论描述。当处理涉及直升机的气动弹性和关节的极限环时，非线性对瞬态响应具有深远的影响。尝试对它建模在很大程度上并不成功，这迫使依据经验选择来减少弹性体的振动（在早期使用液压阻尼器，霍奇森，2003）。在较低复杂程度下，我们的理解总是局限于一些常见的现象，例如小提琴或者单簧管产生的声音负阻尼特性。历史上，当由于太多的理论参与而使得技术“撞上了墙”，那么很明显必须回过头来检验基本假设。在物理领域里，对一些传统思维的彻底改变有时是很必要的，其中一个比较出众的例子便是量子力学理论。在大量看似毫无关系的观察中（但是被作者证明是有实质联系的），有希望带来在本章能够部分实现的构架的目的，但阻尼的巨大复杂性让完全成功的想法又变得不切合实际了。

物理学在19世纪早期经典阻尼理论的形成中扮演了突出的角色。在随后的实践过程中，工程师们却发现了一些物理学家根本就没有想到的很多问题。然而，在最近几年，物理学被偶尔要求重新审视阻尼理论的基础。随着个人计算机的出现和人们对非线性问题重要性认识的提高，新的发现质疑了传统理论基础的严重局限性。力学领域被严重限制了，直到非线性问题（非阻尼类）开始解决，并开始关心先前忽略的一些特性，这些特性展现了系统的唯一特性。正如求解这些唯一特性需要有比解决线性问题更复杂的技术，而且，有越来越多证据显示非线性阻尼可能是搞明白这些扑朔迷离工程问题的关键。

设法识别能量耗散的主要机理是非常重要的。当然，说比做要容易，因为有许多不同的摩擦现象存在。此外，根据第一定理来描述摩擦仍是一件让人畏惧的事，所以我们必须利用唯象模型展开工作。而且，一个给定的名词在两个不同专业有两个完全不同的意思，这就是系统命名法上的冲突。所以，这一章节的主要内容就是在关注物理学的同时，试图小心定义术语，而且这些处理还要自然地沿着历史轨迹发展。

对高频、大振幅的振动，工程师们比科学家们更感兴趣。理想的阻尼模型是不考虑应用场合所带来的影响，可是，这种理想模型几乎无法实现。因为小振幅、长周期（缓慢、幅度较小的）的振动一般可以为大家对阻尼的许多机理研究提供一种有价值的工具，所以本章重点讨论此方向。

在大量可供作者们论述的阻尼素材中，本章作者选择了一个独一的（期待中的）统一主题——非线性阻尼，特别是小振幅、低频率的振动。因为这个理论还远没有完善，许多想法和观点都模棱两可。但是，人们需要讨论和探究这个问题，因为人们发觉了它的重要性。根据本章作者的知识，阻尼在这章不是以从前的方式讨论。参考最早的相关文献资料（Peters，2001a，2001b），下面的话是A. V. Granato教授指出的：“在你们提供的字里行间里，我并不知道有谁正在探索内摩擦”。

统一非线性耗散理论的主题有两个要点：(ⅰ) 非线性阻尼对多体系统的影响以它们独自的方式达到稳定；(ⅱ) 阻尼和机械噪声之间存在紧密的联系。当振动衰减不服从指数规律时，是由于非线性，这种现象中存在重要的分支，且仅仅是值得称颂的开始。

由于过去近十年来在传感器和数据采集/分析方面的巨大进步，使得本章内容具有新颖性。演示这样的非指数衰减，要求以下两点：（ⅰ）一个优良的线性传感器；（ⅱ）当阻尼较小（高的Q值）时，有一种方便研究长时间记录数据的工具。第一条已经被笔者的专利-全差分电容传感器实现。第二条则可以通过一款很实用而且价格便宜的、基于Windows平台的数据A/D转换、分析软件实现。随同Dataq的A/D转换器一起的是一款叫做“预见”的软件，它被证明是识别非线性衰减的工具，它把记录的分析结果输入到Excel表格上。后面的章节将会更详细地介绍这些新奇的方法。

在工程文献中，有许多非线性阻尼的例子，甚至连库仑阻尼也是非线性阻尼，这是因为摩擦力涉及了速度的代数符号，而不是线性黏性阻尼中看到的速度本身。以下是在写这一章节时首次意识到的。正如在随后的文字中将看到的，衰减过程通常不是纯指数性的。无论纯指数衰减的原因是什么，也不管系统是基本上线性的（黏性）还是非线

性（现有的迟滞模型），纯指数衰减的品质因子 Q 是常数。当存在第二种机理时，例如依赖振幅的阻尼（即使是唯一一种机理），Q 就取决于时间。基于以下原因，模态耦合很重要。当由于弹性力非线性（这种处理假设了线性动力学，因而不可能）造成一对模态耦合时，那么耦合的强度和两个单模态振幅的乘积成比例关系。

所以，Q 的变化可能影响到稳定状态的发展。它是决定哪阶模态最终是否生存/消亡的因素。并且，生存的模态分布决定于初始条件，包括激励的强度。

很久以前，音乐家们就学会了处理非线性问题，这要部分归功于负责处理听觉谐波的人耳特性。一对纯谐波信号可以在耳朵里起拍、生成线性探测器无法察觉的“声音”。例如，有一个强烈的、未失真的500Hz 的信号，和一个纯的1003Hz 的声音同时存在。耳朵将听见一个 3Hz 的拍，因为在人耳听觉的第一个信号二次谐波基础上叠加了第二个信号的基频。虽然如此，对于这个例子还有很多需要解释。乐队指挥家需要强音和弱音，这不只因为耳朵的非线性，更因为乐器本身发声的非线性特点。比如，用一个好的传声器和 LabView（参见 de Silva，2006）很容易演示木质弦乐器是基于强音的。正如快速傅里叶变换（FFT）功率谱上所显示的，混合的谐波项不但随音量而变，而且谐波的分布也随时间变化。

在工程上，阻尼问题的讨论中一般不去处理噪声，但是，机械噪声确实是这一章中要提到的重要技术内容。相信振动、阻尼和噪声之间存在很大的联系，提供的证据支持这样的假设，就是将最重要也是最难理解的机械内部阻尼形式（材料 = 迟滞 = “通用”），与也是最重要、最难理解的噪声形式（$1/f$ = 闪烁频率 = 粉红色）紧密联系起来。如果这个前提假设是正确的，那物理学中关于阻尼的几条基础理论都将重建。来自大量独立调查中实验研究成果为支持这个假设提供了证据。希望接下来这段冗长又不寻常的介绍将会对读者的认知有所帮助。历史元素有助于把许多方面综合在一起，这些元素是不假思索地提供的。在以下的介绍中，最后会提供一些实际的、新颖的阻尼公式。虽然读者可能很难自己推导，但是希望读者至少能检验一下这些第一次出现在 2.17 节里的公式。

2.2 介绍

2.2.1 阻尼的总体概况

“阻尼”（damping）这个词的来源很难确定。damping 这个词很明显与词 damper 有关，一般把 damper 定义为“能够减小电、力、空气动力或者声音振动幅度的装置”。这个定义沿用了几个世纪，比如，来描述钢琴上的声音衰减器踏板。也许德语中的一个词 dampfen（意思是卡住）对这个词语的形成有一定影响。人们很容易想到水是否可用做润滑剂来发挥点作用。当然，液态水在某些振动能量耗散中有很重要的作用，并且取决于流体黏性（气态或液态）的摩擦就是一种重要的阻尼类型。在著名的斯托克斯工作中，有一个很有趣的历史，就是为什么他的“摩擦指数”表述并没有替代现代术语——黏度。有一些奇怪的专业术语被用来描述阻尼，如被称为缓冲器的工程装置，它

是一种力学阻尼器，其振动部件连到活塞上，而活塞又在充满液体的缸筒中运动。

我们可以察觉到这些用来形容各种不同类型阻尼的形容词数量是如此的多。这些描述振动能量损失变成热量的术语的多样性无疑能够完全表达阻尼现象的复杂性。我们的目的有：（ⅰ）识别各种不同类型阻尼之间的相同与不同；（ⅱ）对我们所观察到的特性，解释一些物理原理。无论是理论上还是实验上，概念性的想法和技术都很容易提供，指向最低复杂程度的目标就是可以获得对半意义结果。读者们应该注意一个“大一统的”阻尼理论是不存在的，而且也不会存在。

阻尼消耗了振动的部分能量，并以不可逆转的方式转变成热，有时会转换成噪声；否则的话，振动能量将周期性地在势能和动能之间转换。不论在被动设备设计过程中选用合适材料，还是在复杂系统主动控制中采用反馈控制，实现对阻尼的控制都是重要的，这是因为机械振动可能是不利的甚至是破坏性的。一个经常被引用的案例就是 Tacoma 海峡大桥在 1940 年 11 月 7 日在强风中塌陷的悲剧。就像单簧管中簧片的振动一样，对这个悲剧最好的描述就是“负阻尼”作用，它能增强振动。

对于给定的一个系统，最佳的阻尼值根据系统需要可能落在一个较大的范围内，从大到极小。工程界往往要求振动尽量靠近临界阻尼。而物理实验，例如寻找捉摸不定引力波的实验［集中在激光干涉仪引力天文台，或激光干涉仪引力波天文台，美国；GEO600，德国（和英国）；VIRGO，意大利（和法国）；TAMA，日本］则要求它们的一些部件中的阻尼尽可能小。全世界的频率标准则需要非常小的阻尼来保证报时的高精度。

对于系统的具体部件，一个成功的设计经常要求识别造成能量耗散的主要具体机理。甚至在识别了主要的能量耗散源后，耗散源处理的理论难度可能会由于阻尼类型的不同而大小不一。对于流体阻尼缓冲器，足够多的模型已经存在了数十年。另一方面，对于材料阻尼，有关内部摩擦的理论数不清，但大都缺乏自相合。

阻尼的基础机理在大多数情况下都是非线性阻尼，但是，振子运动本身在很多情况下都可以近似用线性二阶微分方程表示。如果势能是位移的二次方，那么无阻尼线性振动方程就是简单简弦振子的方程，因为它的解是正弦和余弦（简弦）的组合。这种无阻尼振动方程包含两项：一项是与位移有关，另一项是与加速度有关。和位移、加速度相乘的常数都是由系统本身的性质决定的。例如，在一个弹簧振子系统中，加速度与质量相乘，位移和弹簧常数相乘。因此，该方程对应于服从胡克定律（理想化的）弹性的牛顿第二定律。在 *LC* 振荡电路中，“位移”相当于电容器的电荷（除以 *C*），“加速度”相当于电容器电荷的二次导数（乘以电感 *L*）。

对振动中总是出现的阻尼描述方法，就是在上述的位移、加速度项中添加速度项。虽然阻尼可以由不同的原因产生，但通常都有一个主要成因。例如：在电阻、阻抗和电容（*RLC*）的串联电路中的阻尼，主要取决于电阻的焦耳热，而几乎不用考虑热辐射的能量损失。因此，根据欧姆定律，运动方程包括电容器一次导数（电流），再乘以 *R*。

辐射对 *RLC* 电路阻尼影响作用的大小取决于电路与环境耦合量的大小。如果电路和一个带有天线的终端放大器相连接，那么辐射会比焦耳损失对电路阻尼的影响作用更

大。在这种情况下，振荡频率是一个关键参数，同样这对阻尼问题一般也是关键的。不幸的是，除了由经验主义提出的唯象学类型模型外，对于一些常见的系统，恰当考虑频率影响的理论努力大都被证明不成功。

2.2.2 细节考虑

质量-弹簧振子是教科书描述简弦运动的典型例子，其中一个有史以来制作的最复杂的机械振子之一是垂直地震仪的 LaCoste 版本。在这一章中展现了一部分重要的实验数据，这些数据是用四周都是 LaCoste 零长度弹簧（LaCoste，1934）的仪器来产生的。在 20 世纪 60 年代，这台被用来收集数据的仪器是作为全世界标准化地震台网（WWSSN）的一部分。一般认为，这种地震仪的弹簧提供给仪器的是迟滞性阻尼，而不是通常认为的黏性阻尼。与流行的观点相反，空气阻尼对于这台地震仪在其标称的工作周期内是不重要的，这个周期时间通常大于 15s。由于每一个长周期的钟摆很明显地表现出类似的行为，因此，我们基于协同的证据强烈支持旧的一种认识（大都不被注意），即迟滞阻尼（摩擦力与频率无关）是普遍的（Kimball 和 Lovell，1927）。在 1927 年被提出的一种普遍形式内部摩擦（阻尼）的观点得到加强，因为在三个明显不同的系统中看到了相同的行为：（ⅰ）一个质量-弹簧振子（正如 Gunar Streckeisen 所演示的，在后面给出）；（ⅱ）摆的恢复取决于地球的引力场（由几个独立的团队演示）；（ⅲ）通过横向偏转张紧的旋转杆（1927 年 Kimballand 和 lovell 实验）。

迟滞阻尼的普遍性的假设是本章的一个关键点。将会看到甚至振动气柱阻尼（Ruchhardt 的实验来测量热容量）也极有可能是迟滞的。所描述的模型，都是从共同的阻尼理论出发。有趣的是，作者的模型与常规的滑动摩擦有相似之处，该滑动摩擦模型是 Charles Augustin Coulomb 带给我们的。它有效地改变了库仑动摩擦系数，得到一个有效的、依赖能量的内部摩擦系数。为了获取指数衰减、而不是库仑阻尼的线性衰减，这种能量依赖关系是必需的。正如同传统的库仑阻尼，它的模型是非线性的，涉及速度的代数符号。我们会看到模型所预测的阻尼容量允许等效黏性模型，而且其隐含的物理学与第二类型蠕变有关，而与黏弹性的第一类型蠕变相反。

作者认为，对于建立耗散模型而言，现有的阻尼理论不是最好的工具。困难来自用线性数学模型近似振子衰减。虽然许多人承认已有再三的告知，即黏性阻尼是实际耗散物理的近似，但他们不承认这个近似的许多严重的局限性。与这种情况相类似的，就是我们发现自己处于标有“确定性混沌”的世纪。“蝴蝶效应”（Lorenz，1972 年）已经从根本上改变了许多人的思想，但仅和大幅度的摆的运动有关，此时，由于非线性仪器不再同步摆动了。作为混沌的原型，在混沌可能发生之前，摆必须是刚性的，能够摇摆（位移大于 π）。非线性是混沌的先决条件，但还不够，因为很多例子有高度非线性，但并不产生混沌运动。例如：在外部驱动的扫频过程中，非线性振子振幅发生跳跃，这个案例已被大家知道好多年。在像杜芬和范德波振子系统中，在混沌认可之前，振幅跳跃现象就观察到了。当然，对初始条件（造成蝴蝶效应的原因）的敏感依赖性并不是时时能考虑到的。作为重大的进步，Lorenz 发现混沌是偶然的，是在建立大气对流模型中

发现的。作者直面来自金属中等尺度结构的复杂性也一样不期而至。当采用他的、享有专利的全差分电容传感器来研究不同力学系统——主要是振子时，观察到了“奇特现象”（正如 Richard Feynman 给的标签）。

就混沌而言，单摆最终可以当做复杂问题的原型。当工作在低能量，特别是通过长周期和小振幅的组合，物理摆的自由衰减基本离开了线性振动方程的运动趋势。当单摆用软合金制造时，这种复杂性是很容易演示出来的。图 2-1 所示为杆摆衰减情况，该摆用常规的、连接导电体的焊剂（大直径铅-锡）制造（Peters，2002a，2002b，2002c）。

图 2-1 中记录数据的“抽筋”（不连续）一点也不和先前提到的振幅跳跃有关，相反，它们是 Portevin-Le Chatelier（PLC）类跳跃（Portevin 和 Le Chatelier，1923）。它们是基本的、还有点“不鲜明”的现象，物理学用了数十年去尝试，而后又忽视了（尽管材料科学和工程学较早注意到 PLC 效应）。关于图 2-1，可以说的最明显、最深刻的话如下：PLC 抽筋的出现意味着势能函数的概念并不真正有效，这是因为势能函数的定义要求力对位移的闭路积分必须消失。

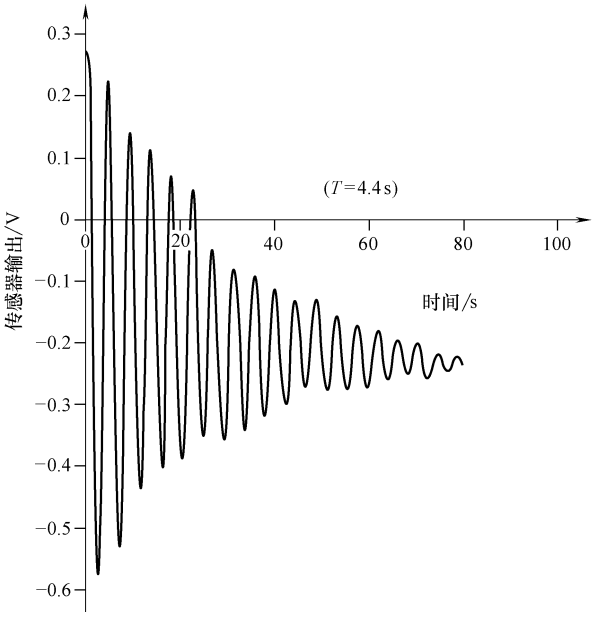


图 2-1　用焊剂制造的杆摆自由衰减

不管是何种类型的迟滞，迟滞是造成阻尼的原因，它不允许力收缩到零，因此对于宏观振子来说，势能是从来没有正式意义的（因为总是存在阻尼）。在那些案例中，阻尼必须连续（但图 2-1 所示的案例不是那样），这样势能函数的假设具有一些计算意义。对于受 PLC 效应影响的振子，以上道理再也不成立，因为噪声再也不是简单的、可被波动-耗散理论（用来表征白噪声，如 Johnson）所预测的热形式，因此造成的性能对各种技术问题非常重要，比如传感器性能。

工程师懂得处理“粘附”系统的方法已有几十年。由于在假定的势能函数中存在亚稳定，因此系统容易闭锁（完全困在一处局部势能处）。掌握亚稳态的一种方法（扯开打算要运动的部分）就是“抖动”系统。在最后 10s，这个过程变得更加复杂，主要看到了随机共振的影响变大了。以下是 Bulsara 和 Gammaitoni（1996 年）给出的定义：

随机共振是这么一种现象，其中的系统承受的周期性调制信号是如此之弱以至于不能正常探测到，但是由于微弱确定性信号与随机噪声之间的共振使得信号又能探测了。

这种现象和高频振动有关（Gammaitoni，1995 年）。有一种情况就是信噪比（SNR）

通过提高噪声级这种有悖常理的动作来提高。就谐波势能来说，是不能获得这样一种SNR 增大的。

在最近的粒状材料研究中，“拍击”已变成了一种通用做法来研究违背微积分基本定理的行为。数年以前，作者采用了拍击方法来加速张紧状态导线的蠕变。很明显，敲击放有伸缩仪的桌子给导线带来振动激励会激发断断续续的 PLC 类的长度变化。由于脉冲的宽频特征，因此导线的各种模态（de Silva，2006）会很容易被激发出来。当用力锤带载荷“敲击”桌子时，银线会以相同的方式被激发，在部分载荷移除后，会出现长度收缩。由于原子总数是固定的，因此这个过程肯定涉及样品表面和体内原子的交换。

对伸缩仪导线提高温度的研究同样展示出奇怪的行为。当用垂直放置的炉子把直径0.1mm、长度接近 30cm 的多晶硅银线在空气中在它的 100K 熔点范围内加热时，银线的行为展示出较大变化（Peters，1993a，1993b）。由于实验不能在真空中进行，因而在这些温度点上，长度的较大变化可以和金属的氧化联系起来（让人联想到的关键现象，人的裸眼可见）。当温度发生周期性变化时，金属线长度的变化展示出极大的迟滞性。受伊利诺伊理工大学 Tom Erber 教授的影响，造成热迟滞的原因是假定存在一些基本类型原子的中尺度量化。

由细观非弹性缺陷结构造成的力学迟滞明显是普遍存在的。当处于开环工作时，用在原子力显微镜和其他纳米技术场合当做执行机构的压电变换器深受高量级的迟滞影响。这种特性和异常大的阻尼一致，在单摆中存在钢/压电陶瓷刀锋界面，就可以观察到此种现象。

甚至普通的应变计都展示出复杂的迟滞特性。在初始应力循环中观察到的正常的大迟滞一般在若干个周期后将降低很多，这是一种做功硬化（如果应变远低于失效极限）。需要注意的是本章讨论的所有迟滞是不能和间隙（比如齿轮传动中的）混为一谈。

所有这些实验和细观非弹性复杂性决定迟滞阻尼性质的假设是一致的，可以看到存在很多很多的案例，其中样品的应变（再加上阻尼）并不简单，也不平滑，但是更像粒子材料的复杂行为。在多晶硅金属材料的案例中，通过酸性蚀刻处理方法制造的可见的相同颗粒很明显对中尺度（非平滑）内部摩擦阻尼负责。假定阻尼在原子尺度而不是中尺度的量子级，那么这个结果没有实验验证。然而，这是一种通用假设，用这个假设估计类似地震仪这样仪器的本底噪声，并计算 SNR。

2.2.3 单摆用作仪器研究材料阻尼

由于早期对物理学的贡献，物理学在那时称为自然哲学，人们很容易相信单摆在下面两方面具有唯一重要性：（ⅰ）科学发展史；（ⅱ）基础理论教学用。一个单一的观察可以足够抵御下面诱惑——(正如早已指出的）单摆在过去的 30 年内变成了混沌新科学的主要原型。此外，展示重要性和以前没有公开发表的结果等许多种数据文件，都是用单摆产生的。

对于学基础物理的学生来说，选择单摆可能看起来并不复杂。同样，对于花了15年辛苦时间来搞明白谐波振动的作者来说，单摆是最万能的仪器，有了它就很容易地理解了阻尼。一般来说，它成了科学发展的中心。伽利略、惠更斯、牛顿、胡克和其他文艺复兴时期所有著名的科学家都研究过单摆。单摆用作建立碰撞定律、守恒定律、地球引力场特性，以及最重要的是，单摆是牛顿的两体中心力理论研究工具。该中心理论是经典力学发展的基础，而经典力学又是所有物理学和工程的中心。历史学家 Richard Westfall 早已评论过："没有了单摆，也就不存在原理了"（Westfall，1990）。

在1850年，George Gabriel Stokes 先生发表了一篇基础论文（Stokes，1850）。他对单摆阻尼的处理使得数十年后也能理解一系列物理和工程重要现象。比如：他的学说是流体力学纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程的基础。更进一步的是，作为斯托克斯（Stoke）定律的黏性流动是决定电子电荷的密立根著名油滴实验的基础。

Stoke 在他的论文中，他这样写："……用当代精度来衡量，单摆试验在那些最著名的试验中可以公正地上榜"。他还写道：

"呈现的论文包括了1个或2个内摩擦理论对解决感兴趣问题的应用，但是和单摆无关……对于给定流体和给定的速度，确定的阻力证明是不和表面（摩擦）成比例的，但是和球半径成比例……由于根据单摆试验可以知道空气摩擦指数，因而我们很容易计算出给定尺寸（水）球的最终速度……因此，除了其他用途外，单摆为我们提供了一些和气象部门有关的、感兴趣的信息。"

这段引文的最后一句陈述谈及了他那个年代"通用理论"中的一些错误。通用物理中的一些阻尼模型在今天以类似的方式被错误应用。那些在不必要的方面坚持黏性阻尼线性模型的人们未能认识到线性模型的应用极限。由于实验的不足，因而经常出现应用不当。严肃看待以下开尔文的话语，我们将受益匪浅：

"当你能测量你所谈到的，而且也能用数字表示出来，那么你对这件事情是有所了解的。但是当你不能测量你所谈到的，而且也不能用数字来表示，那么你对这件事情的知识是属于浅薄的、不能满意的那类。这也许是知识的开启，但是在你的思想中你没有什么领先于科学现状。" William Thomson 出版社，开尔文勋爵（1824—1907）。

根据 Stokes 在他论文中谈到的严格条件，可知斯托克斯（Stokes）定律类型的简单的（黏性）流动仅是可能存在。根据19世纪晚期 Osborne Reynolds 提供给我们的无量纲参数，我们现在细化那些黏性流动条件。特别的，斯托克斯（Stokes）定律仅适用于 $Re=\rho vL/\eta<60$（近似值，对于球）。其中，ρ 是缓速流体的密度；v 是物体相对于流体的速度；L 是物体的特征尺寸；η 是流体黏度。对于振子来说，要求一般不能满足，而且最近的试验表明来自空气的拖拽对阻尼的贡献正比于速度的平方，这个实验结果一般不能忽略（Nelson 和 Olssen，1986）。以上仅是一个案例，它表明了两种或多种阻尼有时如何必须折合成一种充分的耗散模型的。在这篇文献中提供了一种把所有通用的阻尼形式组合成一个数学表达式的新颖方法。此外，文献还介绍了如何解析计算案例中自由衰减响应的时程曲线。

Stokes 的研究很重要，令人惊奇的是，他对进一步实验的一些呼吁，从来就没有被

认真考虑过。在他论文的第 75 页上，可以读到下面文字：“进一步说，有关振动电弧递减的试验是几乎完全想要的”。注意，Stokes 呼吁实验师们产生这样的数据。在 19 世纪，收集他所需要的数据需要花费大量劳力，因而试验也就从来没有完成过。当今的传感器和数据处理使得这些试验简单容易了，但是到现在为止，单摆更多地被看做是古迹，而不是 Stokes 描述的重要仪器。作者的大部分努力直接显示出单摆仍然是研究的重要仪器。比如：简单设计的一个物理单摆是这里呈现的广义阻尼（修改的库仑）模型的基础；另外一点就是单摆一直被用来说明由结构普通缺陷引起的运动的令人惊奇的、丰富的复杂性（2002a，2002b，2002c）。因此，研究“低速和缓慢”垂摆的复杂运动能够在缺陷材料特性上产生重大、新的发现——这个领域里第一定律没有啥进步。

2.2.4 “底部存在足够的空间”

Richard Feynman 在 1959 年做了一个著名的谈话，题为“底部存在足够的空间”（出席在 CalTech 的美国物理学会年会）。采用来自生物学的观察，他谈到固体物理世界涉及“……在复杂环境下出现奇怪现象”。自 Feynman 预言性谈话过去的 44 年里，在大规模集成电路（VLSI）、微机电系统（MEMS），甚至纳米技术都取得了可观的进步。在力学领域（包括传感器）的进步要远小于电子学的，因而，我们目前的数据处理功能要远超出我们的采集（和作动器）能力。

微型化的主要障碍之一包括当系统尺寸收缩到小于中尺度而朝原子尺度发展时，可能出现的物理性质的巨大变化。比如，正当部件尺寸以摩尔定律（Moore，1965）继续变小时，大规模集成电路电子学也开始承受原子的量子特性的冲击。在其他事情中，Feynman 预测在这么小的尺度上润滑再也不是“经典的”。一个相关的说明：诺贝尔经济学奖得主 Edward M. Purcell（Purcell，1977）发表的论文对我们的宏观世界和微生物之间进行了震撼的对比。在低雷诺数时，惯性变得不重要了，力学主要受黏性影响统治。对于工程师来说，采用新的范式来处理这些差别是非常必要的。

在题为“真的有大量空间”文章（Roukes，2001）中，可以看到对建造一种真正的、有用的微尺度和纳米尺度装置的努力方面存在预料到的“黑暗一面”。气体原子和分子经常在物体表面上吸附和解附。这个过程被认为是气体原子、分子与表面之间存在动量交换，甚至允许气体-固体界面的科学研究（Peters，1990）。装置越小，那么由于吸附/解附稳定性就越差。正如 Roukes 早已指出的，这个不稳定性可能真正对未来各种机电信号处理应用带来不利影响（Cleland 和 Roukes，2002）。

在本章存在直接的证据，就是我们必须更多地关注噪声：（ⅰ）真空单摆中，可以推测漏气影响单摆的自由衰减；（ⅱ）地震仪自由衰减显示出幅值和相位的噪声，以及有非线性阻尼的证据。考虑（ⅰ），当真空腔压力减少时，已经存在的稳定态（吸附和解附之间的平衡速率）受到扰动，因而从单摆表面存在复杂的气体排出现象。这个释放在空间上一般不是均匀的，而更像在 1986 年由乔托空间探测器拍到的哈雷彗星的喷射。对于情况（ⅱ），看起来噪声来自单摆本身结构中的尺度复杂性，而不是来自涉及的气体。

微型机械具有作为芯片时钟的潜力，相位噪声对时钟的重要性是有据可查的。需要指出的另外一个更微妙的事情就是相位噪声的重要性。对于提高 SNR 最好的方法之一就是相位灵敏度检测技术，这种方法最初由普林斯顿的 Robert Dicke 使用来改进太阳能试验。采用“锁定”放大器方法的微型机电传感器的性能受机械相位噪声的影响极大。

微型设备的相位噪声仍然基本上是推测的。除了上述的机理（吸附/解附）外，其他事情构成了本章缺陷组织的主题。要制造没有错位和/或对晶体顺序的其他扰乱如空穴、裂缝或其他物杂质的材料是不可能的。因此，“当大自然填补她厌恶的真空时，她很少这样做得完美”。

在初期失效点缺陷组织起来的很长一段时间内（在更大的应变处），缺陷一直影响着振动。它们甚至可能是 $1/f$ 噪声的主要原因。$1/f$ 类型电子噪声据认为包括借用诱捕状态的缺陷，这些状态来自有时涉及表面的晶体缺陷。固体表面和体内的相互作用非常重要。比如，在作者博士论文采用的一种纯铜单一晶体。由 Vic Pare 提出的一个实际玩笑（我们从来没有执行过，因为这些试验样品需要花钱）就是让 98lb 体弱的人用手弯曲一样品，然后让一个橄榄球队的后卫去把它整直了！当错位在表面发展，并扩散到受牵连的体内时，这震撼的不可逆转性就是做功硬化的结果。

在晶体材料的案例中，按照它们的制造方法，迟滞的记忆特征可能非常重要。导线一般通过小模具的连续拖拽来制造。在长度变化过程中，这个“冷挤”传导到导线体内和表面之间单层组原子的交换。这个波动-耗散理论如果存在的话并不能保持下去，或者仅存在于比原子大的实体中。因此，在微型设备振动中，存在许多待数清的噪声因素。当 Feynman 谈到固态的奇怪现象时，他是对的。

未来的技术预计会遇到日益增多的阻尼问题，这些问题必须提到尺度议题——在本章中处理一些讨论的因素。就作者的知识而言，这些因素先前还没有发表过。直到小的（MEMS）振子在工程界变得更加普遍，我们必须用其他方法而不是传统方法来研究阻尼机理。对于验证气体动能理论来说，有一种方法类似于实验技术。正如 Present 在他的教科书中注释的（Present，1958），存在两种方式的布朗运动可以研究的：（ⅰ）用小的物体和不复杂的传感器；（ⅱ）用较大的物体和非常敏感的传感器。后者提供了一些我们当今的、中尺度的阻尼知识。全差分电容传感器，它的专利名称为“对称差分电容器”（SDC），这种健全的、新的技术是灵敏的，是线性的，对用户是友好的（Peters，1993a，1993b）。当具备了通过研究大尺度物体来预测小型物体特性的其他灵敏传感器时，各种宏观单摆的小能量研究演示了由 Feynman 预测的复杂类型的一些“奇特”现象。

根据作者视野，我们物理学团体对两个重大错误深感有罪：（ⅰ）基于黏性阻尼，对许多问题假定了线性运动方程因而带来过分简化；（ⅱ）通过采用不合适的、过分复杂的阻尼模型，丢失了基础关键问题的洞察。本章的目的在于帮助在这些因素之间迈向健康的平衡。因而希望读者们得到更好的知识充实来识别，并破除通向未来技术道路上的障碍。

2.3 背景

2.3.1 术语

对于能量耗散的机理，人们用许多形容词来描述力学系统中的阻尼现象。这些词包括（没有全部列出）：黏性、涡电流、库仑、滑动、摩擦、结构、流体、热弹性、内部摩擦、黏弹性、材料、固体、声子-声子、声子-电子和迟滞。对于目前的用途，可以根据下面三种方法中的任一种来对阻尼分类：（ⅰ）流体（包括黏性）；（ⅱ）库仑；（ⅲ）迟滞。尽管迟滞阻尼开始和固体中一种特殊材料阻尼的工程循环联系起来，但是应该注意到所有的阻尼都涉及迟滞（希腊语有“来晚”的意思）。在应力-应变循环图上，对于没有耗散、理想物质的位移来说，应力-应变是一条直线，迟滞会把这条直线张成一个环。迟滞的尺寸——更具体地说就是迟滞环内面积-是每循环由于阻尼所做的不可恢复的功的大小。在那些标为“内部摩擦”的案例中，实际的摩擦力是不容易辨识的。摩擦这个词在一般意义上是指负责把振子相关运动转换成不相关的热运动。

就每种黏性、涡流和库仑阻尼来说，作用于振子的外力担负耗散的能量。外力分别和以下因素有关：（ⅰ）层流；（ⅱ）感应电流；（ⅲ）表面摩擦。表面摩擦力案例并不是教科书上必须呈现的，表面摩擦力涉及动摩擦系数和法向力。除了热弹性阻尼外，前述的案例具有内部性而不是外部的，因而要比其他案例更容易进行理论处理。黏性阻尼和涡流阻尼（覆盖了一个很大的运动范围）用一个速度项就得到充分描述，因而得到一个线性运动方程。但是，库仑阻尼与速度不成比例，且相当程度上仅依赖于速度的代数符号，因而它的运动方程是非线性的。另外，不像大多数其他形式的阻尼，库仑阻尼不是指数的。当画出运动与时间关系曲线时，沿着直线存在转折点。相类似的，如果涡流阻尼仅在一小块运动区域存在，那么衰减将是线性的，而不是指数的（Singh 等，2002）。

2.3.2 一般技术特征

历史上，黏性阻尼一直是模型的选项，这是因为其代表的运动方程具有数学吸引力，且对于 *RLC* 电路来说，其数学形式是恰如其分。对于机械振子来说，它一般是不合适的，这是因为黏性阻尼相当于系统的一部分在由与速度成比例摩擦力带走能量的外部牛顿流体中运动。

缺陷引起的材料阻尼，如错位，也会引起蠕变，因此高强度和高阻尼容易造成不兼容的属性。镁合金在这方面趋于比许多其他金属表现得要好。正如那些熟悉铸铁力学特性所认识到的那样，材料硬度既不是韧性的先决条件，也不是小阻尼的先决条件。

缺陷以不同的尺度确定“物体如何断裂”。关于这方面的研究，Marder 和 Fineberg 早已表明以下观点：

“根据过分理想出发点计算得到的固体强度，其结果是完全错误的；不是根据理想条件下的性能来确定，相反，而是根据最不利条件下最脆性点的生存极限来确定

(Marder 和 Fineberg，1996)。"

对简弦振子的黏性阻尼模型作出主要贡献的有三个著名的科学家：开尔文勋爵(Thomson 和 Tait，1873)、G. G. Stoke 以及 H. A. Lorentz。他们的模型受到了高度广泛的欢迎，Stokes 以他流体动力学方程式而闻名，这些动力学方程也包含了描述雨滴最终速度的纳维-斯托克斯 Navier Stokes 定律，这个定律是他通过对摆阻尼处理发展而来的。该定律不仅为宏观可见振子阻尼提供了最简单的近似表达，也被 Robert Millikan 用来确定电子的电荷。值得注意的是，流体中的谐振动（即便是很小的雷诺数）要比稳定流动的黏性摩擦力复杂得多。这方面的话题将在第 3 章的 3.9 节中涉及。

第一个使用"简谐振子"术语的可能是开尔文勋爵。这样的一个振子是实验物理学的一个关键工具，它也是理论物理学研究的基础。它是电磁波甚至是超流体、超导体的交流基础。

涉及简谐振动的很多理论的框架来源于 Hendrik Anton Lorentz（1853—1928）的工作。Lorentz 以一系列的经典物理学贡献而闻名，比如：(ⅰ) 爱因斯坦的狭义相对论的转化；(ⅱ) 带电粒子加速力学定律。这两项都有他的贡献。在电子存在被证实前，Lorentz 就提出光波的产生是由于电荷在原子中振荡的结果。由于他在电子数学理论方面的突出贡献，1902 年 Lorentz 被授予诺贝尔奖。当注意到术语 Lorentzian（常用作描述原子光谱谱线形状）的方法成为惯例后，他的贡献的重要性再一次得到认识。Lorentzian 等同于强迫黏性-阻尼简谐振子的共振响应。

说明电网络中电阻是如何产生阻尼的很容易，然而要理解机械阻尼在黏性方面的滞弹过程是很有挑战的。从他 Ph. D 论文的评论来看，据说 Lorentz 从来没有明显地对他方程中的速度阻尼项满意过——不知道怎样把它联系到基础物理上。还有一点是清楚的，从 Stokes 的论文中，他认识到他的黏性摩擦定律在使用上必须谨慎。似乎 Lorentz 和 Stokes 都很注意和当时那些粗心大意设计出的黏性模型作比较。

被粘弹性方法充分描述的"滞后"阻尼影响固体失效的观点并没有被广泛认同。不幸的是几乎没有人扩大他们关于阻尼的视野去把更多重要的形式纳入进来，比方说从固体滞弹性方面推导。在这项工作中，很重要的是认识到一些细微的不同，如非弹性一定不会等同于滞弹性（弹性以外）。

2.3.3 主动阻尼和被动阻尼

随着电子设备成本/性能的改善，主动阻尼也越来越流行。通过使用积分/差分电路(运算放大器）方法的力的反馈装置，机械振子有时可以用作某些特殊的用途。这方面科技的一个复杂例子就是宽频地震仪，大概 35 年前就开始取代了早期（被动式）仪器设备。在本文中提到的一些实验使用的是 Sprengnether-LaCoste 弹性装置，这些弹性装置也被像 Streckeisen STS-1 and STS-2 这样的力反馈装置所取代。

替代反馈的另外一种主动影响机械振子阻尼的方法，就是把传感器连接到有负输入阻抗的放大器上。市场上销售的德国产的 Lennartz Electronics 地震仪使用了这种专利技术来改善普通的、现有的电动检波器的性能。

主动阻尼依赖于复合系统（电子 + 力学）传递函数的性质。传递函数的特性是由其零点、极点在复平面上的位置决定的。地震仪名义上是在接近临界阻尼的 0.707 倍开始工作的。这个可以归纳为以下两个原因：（ⅰ）仪器更容易被调节；（ⅱ）地震记录更方便被解读。当然，依据波动—耗散定理，增加阻尼意味着要降低灵敏度。

力反馈技术对于某些场合是不实用的，即使不考虑花费。而且，必须要认识到这种方法不能解决所有问题，因为一个差劲的机械设计仅仅靠电子设备是难以挽救的。有关商品的描述在某些状况下是被夸大的，给消费者造成一个传感器能这样完美无瑕地工作的印象。一些加速度计运用抖动去抵消轴承上“黏附”的影响。一定会有抖动，因为势能函数不是真正谐波的，它受制于非线性阻尼的作用。甚至一个不用轴承的传感器方案，非线性的影响也依旧存在。在“地震传感器和它们的校正”（Bormann 和 Bergmann，2002）这篇论文中，Erhard Wielandt 讨论了关于地震仪弹簧的瞬态干扰问题，他说：

“大多数新式的地震仪都会产生自发的瞬态干扰，这些干扰是由机械零件之间的压力导致的‘微型地震’产生的。”

换句话说，中等尺度下，缺陷造成的内摩擦造成了类似于常规滑动摩擦的行为，这些地方的静态系数远大于动态系数。当 Bantel and Newman 观察到了他们的实验与内摩擦的“粘-滑模型”一致时，Bantel and Newman 的假定是和以上观点一致的（Bantel and Newman，2000）。

然后，必须用一个探测器，它要能对周围伺服网络函数的信号忠实地作出反应。传感器的线性和灵敏度是最重要的，因为力-反馈设计的基础就是线性系统理论。对于一些比较简单的情况，设计方法可能很简单，因为像 MATLAB 等软件包（参见 de Silva，2006）已经内置了大量的函数去描述这些特征。

2.3.4 磁流变阻尼

最近一种关于阻尼控制的方法与上文提到的伺服网络有很大的不同。它使用了磁流变（MR）流体。它根据应用磁场的尺寸大小得到某种复合流体黏性方面的大范围变化（取决于应用的磁场的大小）。J. David Carlson（Carlson，2002）描述了在一台洗衣机自旋过程中 MR 海绵减振器是怎样被激活，来阻止海绵被甩出去的。在他的文章中，可以看到通过向减振器的电磁铁通电，洗衣机的 Lorentzian（共振响应）峰被大幅度地降低了。

2.3.5 Portevin-LeChatelier 效应

物理、工程、地球科学和数学都为更好地理解阻尼现象作出了很大的贡献；然而，很少有人在它们之间作一些跨学科的交流研究。跨领域学科间交流的障碍来源于：（ⅰ）总体上阻尼问题的复杂性；（ⅱ）物理和数学的发展趋势是比较低的实用性和比较高的特殊性——着眼于特殊的能量耗散机制。第（ⅰ）种情况比较典型的例子是 1923 年发现的 PLC 效应。尽管一个因素是量子力学的诞生也大概是这个时候，但是为什么物理学在有两个问题不清楚的前提下大都漠视了这个“肮脏科学”早期的例子呢？

如果历史向着一个不同的方向前进的话，我们也许根据第一定律早就能理解最重要的噪声形式（1/*f* 或闪变或者粉红色噪声）了，但是我们现在还难以理解这些。尽管 R. B. Johnson（成名于他在电阻器中发现的白色电子噪声）是最初的几个明白这种噪声形式的人，但仍然不能根据第一定律解释这种现象——尽管最近的发现表明，这种现象和涉及自相似性的分形几何有密切的联系。这种几何又和中尺度材料联系起来了，其中的晶粒（而不是原子）是统计力学的基本元素。

对合金而言，PLC 效应在某些方面类似于巴克豪森（Barkhausen）效应对磁系统的作用。在铁质材料的案例中，来源于中尺度下的噪声早已被搞清楚了，然而类似的机械形式的噪声还没有被认真研究过。这种疏忽似乎更令人困惑，因为 G. Venkataraman（Venkataraman，1982）已经在费米会议中警告过了，对于科学家而言，去了解他所感受到的本应该成为一个非常重要的新领域的（Venkataraman，1982）。

2.3.6 噪声

之所以在本章讨论噪声，主要是由于它对于理解阻尼现象很有帮助，但是人们在这上面付出的努力基本看不到成果。人们对噪声对于阻尼研究的重要性的感觉可以从一篇评论（1985 年 Kip Thorne 在一本 V. B. Braginsky 等人写的书的英译本的序言中）中找到，主要因为激光干涉引力波观测站（LIGO）的仪器需求，Thorne 写道：

“这种实验的核心问题是制作一个尽可能完成简谐振动的振子，而最大的困难就是振子的能量损耗问题。如果损耗是完全平滑的，那么它就不是一个问题了。但是统计力学的波动-耗散理论告诉我们任何损耗都是伴随着不断变化的力。损耗越大，力变化也就越大，实验人员想要探测的信号就被隐藏得越好。”

Thorne 的这个评论暗示了机械与物理之间存在的一个时常重要的对话障碍——关注问题的不同方面。LIGO 试图最小化阻尼，而很多工程问题关注的却是相反面——让阻尼无损耗的、尽可能大。稍后会有更细致的关于噪声的讨论。

2.3.7 黏弹性

在高分子材料的世界里，阻尼频繁地被表述为“黏弹性”。关于这个词，很多书写过（比如 1988 年 Lakes 写的），它是两个词的结合体——黏性和弹性。我们总是遵照牛顿的描述，认为理想流体具有黏性。同样的，遵照胡克定律（应力与应变成比例），固体也被描述为弹性的。不幸的是，大自然既不存在理性固体，也不存在理想流体。真正的弹簧不会完全遵守胡克定律，而是受“滞弹性”（不是弹性）影响的，滞弹性在应力应变关系中带来迟滞现象。真实的流体通常有不同程度（如果不接近全部的话）的非牛顿力学性质。所以，一种假想的、既像流体又像固体的“混合”性质在几十年里一直主导人们的想法，这些人一直在尝试建立阻尼理论模型。

应当注意的是，黏弹性模型中使用的弹簧和减振器根本不存在。它们只是充当了一种表现现象的工具，是希望能更好地帮助我们理解它们被设计去模仿的基本过程。比方说，高聚合物（或聚合物基复合材料）（它们内部有长链分子互相交织的结构）就是广

泛的力学干涉材料之一。(一个常见的现象是许多长的纤维交织在一起。) 温度的升高伴随着总长度的缩短的性质 (对所谓的熵弹簧而言是负的温度膨胀系数), 这与金属形成鲜明的对比。这样的性质对阻尼而言是非常重要的, 就像 Gross 多年前说过的一样, "……热运动干扰分子的运动方向, 使分子迷失方向, 最终导致试件膨胀和收缩的延迟" (Gross, 1952)。

2.3.8 记忆效应

就在上述这篇文章中, Gross 作为第一批人, 提到了蠕变的"记忆"属性。他描述了一个旧的实验: "一个牢牢挂起来的金属或者塑料线先在一个方向上扭曲很长时间, 然后在另一个方向上扭曲一个比较短的时间。释放后的瞬间, 偏转出现在最后一次扭转的方向上, 但偏转会迅速减小。然后, 反向现象出现, 且导线开始向另一个方向偏转, 对应第一次扭转——短期的处理记忆被更久远、更长持续时间的、更深刻的记忆阻塞了!" 当然, 也许这个古老的实验 (现在有时也叫滞弹性后效应) 对于那些熟悉现代更高级的形状-记忆-合金的人来说不是那么令人吃惊, 形状记忆合金被很多人期待能在阻尼应用科学中扮演重要角色。

2.3.9 黏弹性的早期发展历史

在 19 世纪, 为黏弹性的发展作出开创性贡献的都是些物理界的"牛人", 像麦克斯韦和开尔文。麦克斯韦以他命名的电磁学方程而闻名, 但他的另外两项突出贡献却被知之甚少: (ⅰ) 气体运动理论, 和 (ⅱ) 黏弹性理论——这两项都对振子阻尼理论非常重要。麦克斯韦对黏弹性问题的兴趣第一次以论文形式发表是在他十几岁的时候, 题目叫"弹性固体的均衡性"。通过他对玻尔兹曼气体运动理论的研究发展, 麦克斯韦展示了气体黏性的一个有悖常理的属性。随着压力的减小, 黏性却没有明显减小, 一直到分子间碰撞的平均自由路径开始接近容纳气体的装置的尺寸为止。他的贡献甚至对诸如 MEMS 振子这样的当代创新也重要, 他的异乎寻常的预测也迅速被实验所验证。麦克斯韦的黏弹性模型既包含了一个纯弹性的弹簧, 也包含了一个纯黏性的缓冲器 (一种流体减振器, 其内部的摩擦力正比于速度)。

开尔文也许是第一个在简谐振动方程中包含进了黏性阻尼术语的人, 他提出了一个黏弹性简单模型。这两个模型通常在文献 (没有原始的参考文献) 中都包含一个弹簧和一个缓冲器。这两个模型之间的不同点是, 麦克斯韦的模型是串联, 而开尔文的模型是并联 (Kelvin-Voigt)。

工程师们早已发现这两个模型都不如滞弹性的标准线性模型 (SLM) 用处大, SLM——这个超先进的模型是在 20 世纪由 Clarence Zener (Zener, 1948) 提出的。在三元素的齐纳 (Zener) 系统中, 一个弹簧和并行的弹簧和缓冲器串联。令人好奇的是, Zener 和电子设备有广泛的联系, 因为常见的二极管就是以他的名字命名的, 但是很少有人知道他在滞弹性方面的工作。毫无疑问, 他在滞弹性领域的见识帮助他更好地理解二极管中复杂的工作过程。

2.3.10 蠕变

当今的滞弹性模型经常在文献中出现，但是主要和初级的蠕变有关。也有一些不同与此的论文，比如 Berdichevsky 的（Berdichevsky 等，1997）。最近一项更加有探索性的工作已经显示了黏弹性的方程式也能符合中级蠕变，在这些形式下，应变随时间的衰减率已经消失了（Peters，2001a，2001b）。

蠕变（和松弛）物理学对阻尼的重要性引发了一些讨论。当样本承受常应力时，应变通过三个阶段的蠕变：（ⅰ）初级；（ⅱ）中级和（ⅲ）第三级。这些阶段的前两个阶段的例子如图 2-2 显示。

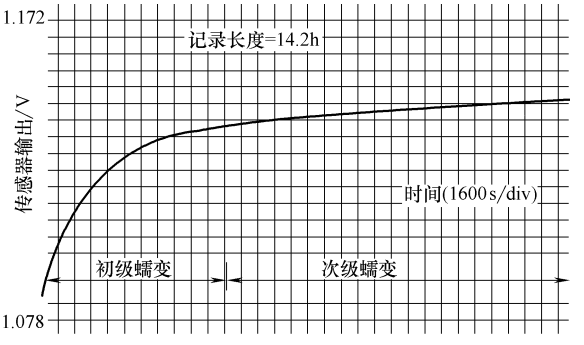


图 2-2　垂直地震检波仪中弹簧的蠕变

在初级阶段，样本产生滞弹性变形，该过程包括晶体结构的缺陷。随着样本的做功硬化（比如塞入了错位），无序机理的影响逐渐消减。做功硬化在没有热效应（热效应通过扩散过程会导致硬化的减弱）的情况下会导致纯指数级的蠕变（在开尔文零度条件下，如果用单个时间常数来描述，蠕变最终会停止）。在蠕变的中级阶段，做功硬化和热软化会达到一个平衡，其中应变与时间的关系由指数变为线性。如果应力大于和失效联系的临界值（弹性极限），这个平衡不会持续很久。然后在第三级阶段，样本会发生复杂的断裂。尽管人们从阻尼方面考虑想要分离三级蠕变，但是在阻尼和失效、缺陷之间显然存在联系。我们过一会儿继续讨论这个问题。

在图 2-2 中，蠕变来源于被严重扰动的仪器（被工作在大楼里的水管工偶然重新安置的）。正如任何一个长周期的机械振子一样，在一次重要的再平衡后，仪器必须重新稳定。可以观察到初级蠕变持续了 5h，图中可以观察到的中级蠕变并没有随隐含的恒定比率持续下去。因而，当振荡周期达到 20s 这个等级时，仪器一般在 1 至几天后稳定下来。

图 2-2 中蠕变的总值值得关注。在标示的 14.2h 处，地震检波器的质量块在垂直距离上仅仅移动了 0.25mm，这个可以从纵轴上确定（传感器标定常数为 2000V/m）。

2.3.11 拉伸指数

系统的特性显得比黏弹性的 SLM 模型简单描述的特性更加复杂。1847 年，Kohlrausch（1847）发现玻璃莱顿瓶上残余电荷衰减服从拉伸指数定律。他发现的这个函数形式经常和松驰时间的宽带分布联系在一起，而且已经被用来描述范围很广的物理过程。为了描述具有拉伸指数形式的阻尼，使用了开尔文串联或麦克斯韦并联元素。尽管

通过这种方法可以实现改进的数据拟合，但这项技术会导致大量的材料参数等待识别。

2.3.12 分数维微积分

对于多指数衰减模型来说，一个有希望方案就是用“分数维”元素取代传统的流变缓冲器。据称只需要几个参数，很多黏弹性媒介的材料特性就能在长的时间和/或频率范围内被描述出来（Hilfer，2000）。也有可能用分数导数去处理在衰减过程中有时候出现的间断点（Asa，1996）。分数维微积分的缺点是：（ⅰ）增加了计算/存储空间要求；（ⅱ）和大多数人练习相异的深奥的数学。

2.3.13 修改的库仑阻尼模型

在这里首次正式发布、后面详细描述的、启发式的“修改库仑”模型是所有上述阻尼模型的替代。它被认为与二次蠕变（Peters，2001a，2001b）和（如分数维微积分那样）用很少的参数完成了很好的拟合。从能量观点来考虑的话，该方程用包括了品质因数 Q 的标准形式表示。

2.3.14 松弛

严格来说，松弛是由一个受恒定压力的样本的行为来定义的。由于这些机制只在关系蠕变中讨论，因此应力松弛趋于零指数（最简单的近似）。实际上，给出的定义可能会误导读者，因为松弛这个词是被用来描述一系列过程，其中的一些数据在时间上呈指数衰减——例如，在黏弹性 Kelvin - Voigt 模型中恒定应力下应变的松弛。

有些使用缓冲器和弹簧的黏弹性模型在有限的应用领域内已经相当成功，例如在后面将继续讨论的齐纳（德拜）［Zener（Debye）］模型，多年来一直用于描述固体中阻尼的特殊形式模型。该模型是从与错位相关的松弛推导中得到的。Berry 和 Norwich 在 20 世纪 50 年代进行了这种有发展前途的实验工作（Berry 和 Norwich，1958 年）。Granato 和 Lucke 提出了一个著名的理论模型来描述错位阻尼（Granato 和 Lucke，1956 年）。Granato 模型是一个振动弦模型（弓形弗兰克-里德振源），其中“弦”的端点落在位错线上的点，它们已被钉着。最近的理论表明，Granato 模型并不总是适当的；“位错相互作用可能大大改变在内摩擦实验中观察到的位错频谱成分”（Greaney 等，2002 年）。（关于这个问题的优秀介绍性资料是在网页 http：//mid-ohio. mse. berkeley. edu/alex/rachel/rachel/rachel. html 上找到的）。

Bordoni（1954 年）进行的实验使得他观察到松弛型内部的摩擦过程，其中的声衰减在特定温度下达到了峰值。所谓的 Bordoni 峰发生在低温或超声波频率条件下。首次在催化裂化的铅、铜、铝以及银金属中观察到损失，而且这些损失在位错松弛和驱动频率可能同步发生时取得最大值。

刚才描述的位错阻尼的特点是温度依赖性松弛，这是 Arrhenius 行为的表现。通过画出内部摩擦与周期温度曲线，那么可以估计出此过程中阻尼激活的能量。以下引文来源于 Berry 论文，它帮助定义历史上许多用来描述阻尼的一些表达式：

“内部摩擦经常笼统地被描述为固体降低振动的能力。严格地说，它测量了固体内的具体机制运作消耗振动能量。如果胡克定律不能正确地描述材料的静态应力-应变曲线，那么内部摩擦甚至会在最小应力点出现。当材料的应变依赖于其他变量而不是应力时，被 Zener 称为滞弹性的非弹性行为就会出现。”

在近期的私下交流会上，Granato 教授指出：

“位错按照齐纳（Zener）［或德拜（Debye）］形式针对阻尼来说还算不错，但并非针对弹性模量。这是因为对应力的响应是按傅里叶级数给出。该级数中的高阶项对阻尼没有影响，但对高频率下的弹性模量却有很大的影响。这使得与周期频率引起的影响相比，弹性模量下降得更缓慢。”

2.4 迟滞——更多的细节

对许多系统来说，比如机电作动器尤其是使用高驱动水平时，迟滞和蠕变是很常见的。它们的传递函数是受“速率-独立记忆效应”影响的。执行机构的状态不仅取决于输入信号的现值，而且也取决于它们过去的幅度特性，尤其是极值，但与过去的速率没有关系（Visintin，1996）。这种说法是在支持作者迟滞阻尼的二次蠕变模型，其中先前的转折点的幅度决定后半周期内部摩擦力大小。记忆效应中最引人注目的例子之一就是上述提到的 Gross 在 20 世纪 50 年代提出的案例，它涉及扭转的导线。

阻尼的复杂性源自于在真实材料中发现的有缺陷的结构，而这些结构会引起迟滞，迟滞在希腊语中意味着“迟到”。虽然，似乎每个人都在一定程度上意识到磁的滞后，但在引起阻尼的力学迟滞机理方面接受过训练的人非常少（至少在物理上）。例如，位错通常是固态物理学教科书的一个附加章节，尽管大家都知道与理想的材料性能相反，但它们是实际上不可缺少的材料性能。

对于含铁材料，试样作出响应的磁化滞后于电流产生的（电磁）场。真正的弹簧并不服从胡克定律 $F = -kx$，位移 x 滞后于弹簧的恢复力 F。用“固有”变量替代 x 和 F 可以方便地表示引起的迟滞。因此，应变 ε［如果这根线处于张紧，ε 即为弹簧长度的分数（或微小）变化］滞后于应力 σ（单位面积的力）。通常在工程实践中，根据外力计算应力（负的弹簧力 F），因此，$\sigma = E\varepsilon$ 相当于胡克定律，其中 E 用来描述制作弹簧材料的弹性模量。在直线的情况下，E 就是杨氏模量，但对于盘簧来说，E 主要取决于切变模量。一些迟滞方式可以用自由衰减振子来表示，如图 2-3 所示。广义坐标 q 表示所示案例中力作用下弹簧的伸长量，或当纵坐标为压力时 q 表示应变。速度与位移的关系图被称为相空间图。它通常用于描述混沌系统，如果在振子频率处“选通”，则它就成为“庞加莱”截面。需要注意的是，当使用与弹力相反的外力时，迹线符号相反，除非曲线占据不同的象限。承认这种差异很重要，尤其是当讨论负阻尼，且其中的振动幅值随时变化，如图 2-3b 所示。

虽然在力学振子中负阻尼不是很常见，但了解负阻尼是可能的。有一个例子是光学驱动摆，由于氟化锂晶体被放置在其支撑结构中（含辐射产生的高密度色心）（Coy 和

Molnar，1997 年）。这个钟摆的一个有趣的特点是它不愿夹带到驱动激光。在空气动力学方面也存在负阻尼的例子，如颤振。由于桥梁和建筑物在灾难性事故中可能遭受到负阻尼（以塔科马纳罗斯桥为例），因此它是一个不能被忽略的主题。

迟滞的另一个例子与负阻尼非常相像（虽然通常不会把它归类成这样），就是在热能发动机中发现的（Peters，2001a，2001b）。这个运动不是简单的简弦运动，迟滞曲线经过的速度（在压力与体积关系图中）是随迟滞回线尺寸的增加而增大。一个较大的环路（由气体做的较大的功）导致发动机每分钟的转数（r/min）更高，而与固定周期下的较大的运动幅值相反。气体压力在质量/弹簧振子上提供了一个类似于胡克定律的弹力。

通常假设迟滞回线“光滑”，但这不一定是真的。例如，在磁滞情况下，被称为巴克豪森效应（巴克豪森，1919 年）的“抽筋”片段是众所周知的。等效的金属合金抽筋行为被称为“波特万-勒夏特列”效应（波特万和勒夏特列，1923 年）。虽然我们在数学意义上一直避免这些棘手情况（不服从积分基本定律）出现，但它们的存在是迟滞复杂性不可否认的见证。

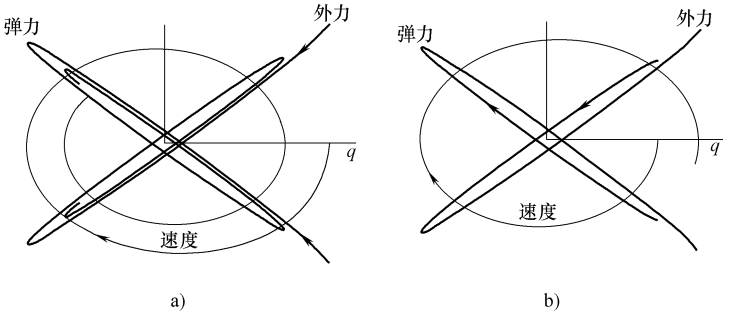


图 2-3　迟滞阻尼自由衰减振子的不同表示方式

a）正阻尼（耗散）　b）负阻尼（运动建立）

2.5　阻尼模型

2.5.1　黏性阻尼谐振子

正如学生在教科书中第一次看到的，有阻尼强迫简弦运动方程大都为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{2-1}$$

式中，m 是质量；k 是弹簧刚度；c 是黏性阻尼“系数”；$F(t)$ 是振子的外部激励力。采用性能系数或品质因数 Q 方便分析，故将式（2-1）重写为规范形式

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{F(t)}{k}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{2-2}$$

对于 $F(t)=0$ 和假设解为 $x=A\exp(p\theta)$ 及 $\theta=\omega_0 t$，微分方程可转变为 $x(\theta)$ 的二次代数式，方程的根为

$$p=-\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)} \tag{2-3}$$

根据 Q 值，运动是过阻尼（非振荡）、临界阻尼或欠阻尼中的一种。把我们的注意力限定到最后一种情况，对应的 $Q>1/2$，其中式（2-3）的平方根是虚数。此外，我们主要关心的是 $Q\gg1$ 的系统。

2.5.2 Q 的定义

一般定义品质因数 Q 为 2π 倍振子能量与每个周期因摩擦而损失的能量的比值。对于黏性阻尼（还有以后讨论的迟滞阻尼），Q 是独立的振幅。对于其他类型的阻尼，我们可以看到，Q 不是恒定的。在黏性阻尼振动的情况下，$Q=\omega_0/2\beta$，其中 β 以一个振幅衰减“常量”出现在解中。正如在第 3 章 3.9 节中将讨论的，参数 β 并非真的不变。

$$x=Ae^{-\beta t}e^{\pm j\omega_0 t\sqrt{1-1/4Q^2}} \tag{2-4}$$

由于 x 是实数，我们使用式（2-4）的实部，并利用欧拉恒等式可得

$$x(t)=Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t-\Phi) \tag{2-5}$$

式中，$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$；$\Phi$ 是一个由初始条件决定的常量。

2.5.3 阻尼“红移”

可以看出，振动频率取决于阻尼常数 β，然而分数 $\Delta\omega/\omega_0$ 的改变总是忽略不计的。例如，当 $Q=3$ 时，减少的频率只有 1.4%，这接近于 $Q=0.5$ 时的临界阻尼。在这些 Q 值较小的情况下，由于海森伯不确定原理，自由衰减振子的振动时间如此之短以至频率界定不清。对于 Q 较大的情况，其中的频率定义良好，此时频率的变化是可以忽略不计的，比如在 $Q=100$ 时，分数的漂移值只有 1.3×10^{-5}。在内摩擦（迟滞）阻尼的情况下，由于振子同步而没有任何的红移。

2.5.4 强迫振动系统

当 $F(t)$ 不为 0，而是对应角频率 ω 的简弦激励和振幅 A，响应等于式（2-5）（瞬态）和一个特解（稳态）的总和。

$$x_P(t)=A_P\cos(\omega t-\delta) \tag{2-6}$$

式中，$\delta=\arctan\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$。

该系统在 $\omega\to\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时发生共振（振幅最大），而且在稳定状态下振幅随频率 ω 变化的公式为

$$A_P=\frac{A\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}} \tag{2-7}$$

式（2-7）所描述的共振响应曲线被称为洛伦兹曲线。在物理学中，这个词更常用来描述压力扩大线宽度（Milonni 和 Eberly，1988 年）。如前所述，洛伦兹从来没有明显满足阻尼项 $2\beta \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$。他的博士论文与通过电磁辐射的电子振荡器的阻尼有关，他从第一原理出发，未能满意地描述阻尼。尽管我们会想说他的失败是缘于他对问题采用了经典（量子力学）描述方法，但这种观点过于简单化了。

2.5.5 阻尼能量或容量

2.5.5.1 黏性阻尼

每个周期的损失，我们把它称为阻尼能（量），在黏性阻尼的情况下根据下式计算（单位质量）：

$$d_{\mathrm{v}} = 2\beta\oint \dot{x}\mathrm{d}x = 2\beta\omega A^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi\beta\omega A^2 \tag{2-8}$$

式中，A 是振幅。由于每单位质量的总能量是 $\omega^2A^2/2$，所以我们可得知 $Q=\omega/(2\beta)$。

2.5.5.2 迟滞阻尼的线性近似

在这种情况下的运动方程是 $m\ddot{x}+\dfrac{h}{\omega}\dot{x}+kx=0$，其中 h 常数。在一个周期内的能量损失由如下公式给出：

$$-\Delta E = md_{\mathrm{h}} = \frac{h}{\omega}\int_0^T \dot{x}^2\mathrm{d}t = \frac{h}{\omega}\omega A^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi hA^2 \rightarrow d_{\mathrm{h}} = \frac{\pi}{m}hA^2 \tag{2-9}$$

所以有

$$Q = m\omega^2/h$$

2.5.5.3 迟滞阻尼-修改的库仑模型

本章介绍描述迟滞阻尼运动的非线性方程如下：

$$\ddot{x}+c\sqrt{\frac{2E}{k}}\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0=\ddot{x}+\frac{\pi\omega}{4Q_{\mathrm{h}}}\sqrt{\omega^2x^2+\dot{x}^2}\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=\ddot{x}+cA_{\mathrm{prev}}\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x \tag{2-10}$$

其中，最后一个表达式中的下标“prev”表示在最后（先前的）运动转向点的幅值。这种特殊形式的阻尼项（Peters，2002a，2002，2002c）被认为是由第二次蠕变而不是初始蠕变（Peters，2001a，2001b）引起的，它并不和中间带 Q 的表达式一样有计算作用。阻尼能由以下公式给出：

$$-\Delta E = md_{\mathrm{h}} = 4cmA\int_0^{\pi/2}A\cos\theta \mathrm{d}\theta \rightarrow d_{\mathrm{h}} = 4cA^2 \tag{2-11}$$

于是得到

$$Q = \pi\omega^2/(4c)$$

因此非线性模型中的常数是和线性近似常数有关系：

$$c = \pi h/(4m)$$

2.5.6 库仑阻尼

一个最简单的摩擦模型是一根满足胡克定律的弹簧的一端连接到在平台上滑动的物

块上，弹簧的另一端连接到固定的墙上。虽然达·芬奇可能是第一个科学地考虑它的人，但物块对平台的摩擦力是由查尔斯·奥古斯丁·库伦（1736—1806）第一次定量描述。库仑摩擦阻尼振子的自由衰减运动方程及解由以下公式给出：

$$m\ddot{x}+f\mathrm{sgn}(\dot{x})+kx=0 \tag{2-12}$$

其解为

$$x(t)=[x_0-(2n+1)\Delta_x]\cos\omega t+(-1)^n\Delta_x$$

因为速度项的符号，所以这个方程是非线性的，但是它很容易进行数字积分。此外，它是几个解析解已知的非线性方程之一，它的解已在上面给出（详细内容读者可以参考彼得斯和普里切特的著作，1997 年）。整数 n 指的是从 $t=0$ 时起半周期转折点的个数，Δ_x是每半个周期位移的减幅（线性，不是对数，单位为 m）。有很多场合要使用式(2-12)，如土木工程中在结构铰接点构件产生的相对运动（滑动）。从能量方面，考虑克服摩擦在一个周期内所做的功由下式给出：

$$f(4x_0-8\Delta_x)=\frac{1}{2}kx_0^2-\frac{1}{2}k(x_0-4\Delta_x)^2 \tag{2-13}$$

其中，对于较小的减幅，得到

$$\Delta_x=\frac{f}{k}=\frac{f}{m\omega^2} \tag{2-14}$$

表 2-1 总结了目前对库仑模型阻尼特性的处理方式。

表 2-1　阻尼特性

类型	运动方程	阻尼能	Q
黏性	$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$	$2\pi\beta\omega A^2m$	$\frac{\omega}{2\beta}$
迟滞(线性近似)	$\ddot{x}+\frac{h}{m\omega}\dot{x}+\omega^2x=0$	πhA^2	$\frac{m\omega^2}{h}$
迟滞(改进的库仑)	$\ddot{x}+c_hA\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0$	$4c_hA^2m$	$\frac{m\omega^2}{4c_h}$
库仑	$\ddot{x}+\frac{f}{m}\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0$	$4fA$	$\frac{\pi m\omega^2A}{4f}$
依赖于振幅	$\ddot{x}+c_fA^2\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0$	$4c_fA^3m$	$\frac{m\omega^2}{4c_fA}$

2.5.7　热弹性阻尼

一个带有 LabvIEW 的传声器被用来分析铝棒的振动数据。用一只手的拇指和食指握住一根 1m 长的杆的中心，另一只手涂抹小提琴弓松香后轻抚这根杆可以激发出刺耳的音强。这个“会唱歌的棒”是一种常见的物理演示实验设备的一部分，其衰减被发现与热弹性阻尼的理论公式（兰道和利弗席兹，1965 年）具有一致性：

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{Th.d}}}=\frac{\kappa T\alpha^2\rho\omega}{9C^2} \tag{2-15}$$

式中，ω 是振动的角频率；T 是温度；ρ 是棒的密度；C 是单位体积的热容量；α 是它

的热膨胀系数；κ 是热导率。表达式中假设存在绝热振动，并且在纯剪切振动的情况下（如棒的扭转振动）没有热弹性耗散，这是因为体积没有改变，所以也就不存在温度的局部振荡。特别要注意，Q 与频率成反比，它不像黏性阻尼那样与频率成正比，也不像迟滞阻尼一样与频率的平方成正比。热弹性阻尼对材料具有显著热导率的高频压缩振动有重要意义，尤其是对于金属，因为它的热导率很大。

在聚合物（熵弹簧，但是与金属的符号相反）中可比较行为的演示是很容易的。用两手拉伸橡皮筋，并立即将它碰触到额头上。温度上升是很容易感觉到的。相反，当把橡皮筋放到对温度敏感的脸上时，释放的张紧的皮筋的冷却是足以能感觉出来的。式（2-15）不适用于聚合物。

2.6 阻尼的测量

2.6.1 传感器的注意事项

测量所面临的挑战就是在没有明显改动研究系统的条件下完成任务（见 de Silva，2006 年）。对于文献中所描述的机械振动的测量，有两种类型的传感器较其余类型的先进：（ⅰ）光学传感器和（ⅱ）电容传感器。光学传感器或许有着最小的扰动，但是在较大的动态范围内，它们自身并不容易呈现良好的线性（且对于数字模式会有细微的量化错误）。电感应传感器，例如根据地震学原理制作的线性变量全差分变换器（LVDT），由于铁磁体的粒度，其固有的噪声要更多一些（高达 100 倍）。此外，该变换器并不适合小型化，并且这些组件生来不稳定。为什么我们在有能力使用电路等价（除了它的电阻抗外）以及能适应微电子机械系统 MEMS 小型化的电容传感器时，仍然继续普遍使用全差分电感应传感器（LVDT）呢？这是一个谜。小型电容传感器所面临的真正的挑战在于当它们靠近毫微法拉水平电容器时，传感装置输出阻抗的增加。

本章讲述的所有实验都采用全差分单元，其专利名称是“对称差分电容”（见 Peters，1993a，1993b）。它对学习宏观尺寸机械振子以及各种振子衍生物都十分有用，最近还发现了它在微电子机械系统 MEMS 中的应用。当它以阵列形式布置时，具有极大的灵敏度，如图 2-4 所示。

图 2-4 中的各种线条相当于窄的绝缘体带，例如装置中连接着放大器的垂直线。在交叉联接的静态装置中，标记为“1”的平板在电学上与那些标记为“2”的平板有明显的区别。全部的平板排列构成一个对称的交流电桥，而且运动装置的中心位置（如图所示 $x=0$ 处）与 $V_0=0$ 时的电桥平衡相一致。远离平衡的位移提供了一个从 $-w/4$ 到 $w/4$ 的线性输出电压，如图 2-4 上底部的曲线插图所示。

振荡器的频率通常为几十千赫兹，且放大器是属于仪器仪表类的（Horowitz 和 Hill，1989 年）。不同于电桥的零值检波器，当采用同步探测时会实现穿过 $x=0$ 的线性响应。这可以用一个锁定放大器来实现，但是最近的 Cavendish 平衡使用的传感器是二极管（Tel-Atomic 公司，网址是 http：//www. telatomic. com/sdct1. html）。

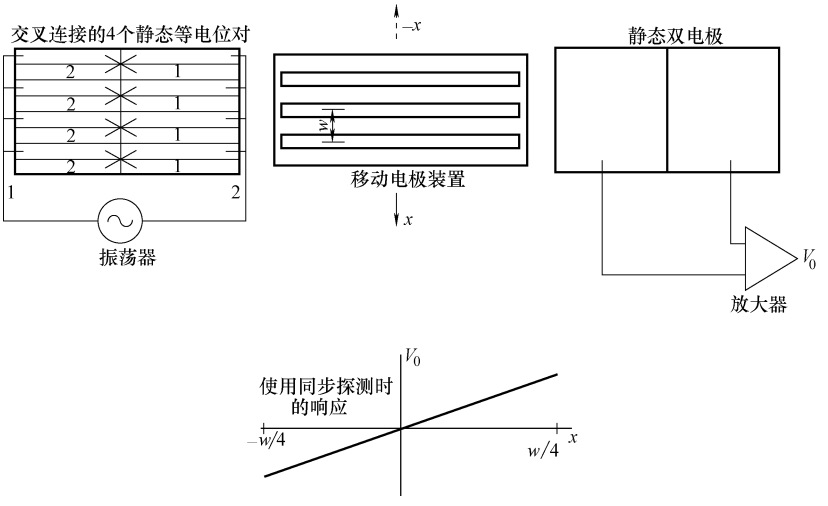


图 2-4　全差分电容式传感器列阵的插图（为了清楚起见，三个电极根据它们的工作位置分开表示，相互平行、且有一点小的间隔，图中间位置的是移动电极）

一份使用二极管 SDC 传感器的教程（即详细说明）可在上面网上找到。

在图 2-4 中，可以看到四个独立的 SDC 单元相互平行的连接。阵列中的独立单元的总数 N 取决于它们的特征宽度 w，可检测的运动总范围是 $w/2$。如果范围要求较小，那么原则上 N 可以做得非常大，其合理性是基于以下原因。如果装置的输出电容不是一个因素，那么位置传感器的灵敏度与 w 成反比关系。然而，当 w 减小时，降低增大的输出阻抗（电容）影响就比提高灵敏度重要，这个灵敏度的提高是这样得到的：假如把传感器连接到一个无限输入阻抗的放大器上，由于仪表放大器的输入电容是不可以忽略的，所以仅当输出阻抗通过某种方式保持在较低水平时减小 w 才是有益的。这是通过单元阵列来实现的。原则上，使用光刻技术和小间距平行电极，输出电容可取合理常数，如 N 接近 100。由于现有技术和下面的原因，使得这一概念已被认为是可行的：虽然没有做成阵列的形式，但奥本大学在 SDC 传感器周围制造了一个中尺度加速度传感器。根据美国陆军合同，传感器原型是建立在印制电路板（PWB）上的（Dean，2002 年）。

毫无疑问，由 Analog Devices 销往市场的、受欢迎的硅基微电子机械系统 MEMS 加速度传感器使用了阵列阻抗的优点，在力反馈布置中采用了大量的“指针”。虽然它们大都用在其他地方，但这是第一次采用力反馈全差分电容传感器，该类传感器是基于作动器瞬时动作和非线性单个单元传感器函数（Peters 等，1991 年）。

2.6.2　共模抑制

在试图测量阻尼时，可能会面临模态混合的困难。例如，历史上使用光学检测的卡文迪许实验，在传统上是很难成功的，除非把实验仪器放置在一个非常安静的地方，从而避免吊杆下垂摆动。高频的下垂运动（1Hz 的数量级）作为一个“噪声”叠加到低

频扭转信号上。Tel-Atomic 公司出售的电脑化的卡文迪许摆通过机械共模抑制功能的手段克服了这个问题。一个置于吊杆末端的 SDC 传感器在电信号相位上与放在吊杆另一端的第二个 SDC 传感器的相位相反。吊杆本身作为两个传感器的移动电极。没有一个传感器对平行于吊杆长轴的运动有一阶响应。与吊杆垂直的摆动在很大程度上被消除了。

2.6.3 黏性阻尼的案例

当以下列方式施加阻尼时，上述 Sprengnether-LaCoste 弹簧地震仪就能很恰当地描述黏性阻尼：该仪器是依据法拉第定律建成的（速度）传感器，例如，在静磁场里，一个线圈和仪器质量块同时运动。像原先使用的那样，线圈连接到记录仪的放大器上。然而，在目前这样的构造中，是不能作为速度传感器的，因为它的灵敏度在低频时受到了严重的限制。相反，在图 2-4 中所示类型的 SDC 列阵被用来测量质量块的位置（一对铅块，总质量为 11kg）。如果在线圈开路时操作仪器，则没有感应电流。把电阻连接到线圈上（通过非常细的铜丝连到仪器盒接头上），物块的移动就产生电流。根据楞次定律，感应电流抵抗这种移动，于是导致阻尼的产生。阻尼取决于电流的大小，由此可以通过欧姆定律得出一个电阻幅度的反函数。这种现象如图 2-5 所示。

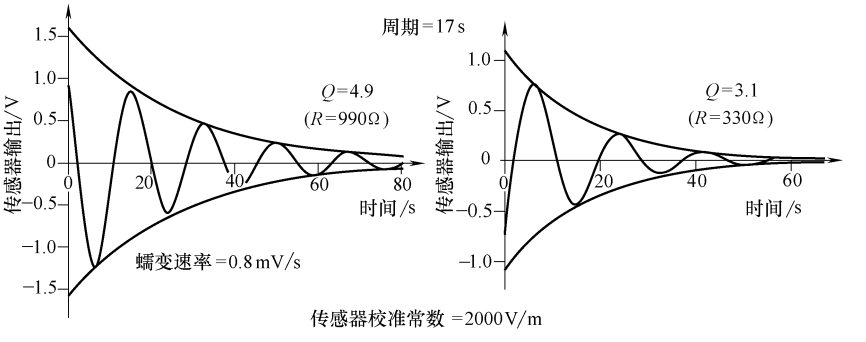


图 2-5 采用两个不同电阻的垂直地震仪的感应电流阻尼的案例

与振动周期 17s、Q 接近 80 的“无阻尼”仪器相比，增加一个 990Ω 的电阻使得 Q 降低超过一个数量级到 4.9。一个 330Ω 的电阻甚至把 Q 进一步降低到 3.1。阻尼值也受到 480Ω 线圈绕线电阻的控制。

对衰减曲线拟合的包络线是估算 Q 值的基础。衰减数据首先通过输出 Dataq DI-154RS A/D 转换产生的记录导入 Excel 中作为一个 p. dat（CSV）文件。这种拟合是通过反复使用拖放和自动填充功能而得来的。请注意，990Ω 电阻（在第一个案例中）的情况下由于蠕变并不像其他情况下一样是纯粹的指数衰减。蠕变的速率在较大的初始振幅下更大。

2.6.4 测量阻尼的另一种方法

曲线拟合（一般情况下是完全非线性的）是用来估计阻尼参数的最佳方法，特别

当如果衰减是非指数形式时。对于更多常规情况，可以使用一些较为简单的方法。在一堆用来定义说明振子阻尼的方法中，最常见的一种方法就是使用对数减量法。当式(2-1)右侧等于0，此时的解为：

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \Phi) \tag{2-16}$$

整周期的转折点，$x_N = x_0 e^{-\beta NT}$，其中 $N = 0$，1，2，…这些可以用来计算对数减量，公式为

$$\beta T = \frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{x_N} \tag{2-17}$$

不幸的是，由于下面两个问题中的一个或两个根据式（2-17）来估算是一件困难的事，问题是：（ⅰ）衰减记录上的均值位置偏移或者（ⅱ）不对称的衰减，其中一侧平衡衰减的转折点在速率上与另一侧不同。情况（ⅱ）往往比人们预想的更容易发生，它往往是材料复杂性的后果而不是由电子探测器的非线性导致的。然而，重要的是在估算阻尼之前确保探测器是线性的或者为要使用的非线性探测器进行修正。

使用半周期转折点 $n = 2N$ 这个方法可以进行部分补偿，而后用这样三个点中的最小值来进行估算。

$$\beta T = -2\ln[1 - (x_{n-1} - x_{n+1})/(x_{n-1} - x_n)] \tag{2-18}$$

在转折点（有时最优点数量大约有十几个）使用式（2-18）的优点是随机误差减小了。就像用自动填充功能一样，计算直接在诸如 Excel 的电子表格中进行。

2.7 迟滞阻尼

2.7.1 等效黏性（线性）模型

式（2-1）描述的机械振子往往是那些有外部控制的，比如涡流阻尼。对于阻尼来自构件内部摩擦的振子，下面的迟滞阻尼线性模型的近似形式一直在使用：

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + kx = F \tag{2-19}$$

应该注意的是，迟滞是导致全部阻尼的原因。然而，对于方程（2-19）所描述的系统，工程师们却一直使用“迟滞阻尼”这个术语。这个方程在两个重要的方面与式(2-1）是不同的。对于黏性阻尼振子，Q 与频率成正比，但对于迟滞阻尼振子，Q 与频率的平方成正比。此外，黏性阻尼改变振子的频率，因为 $\omega_1 < \omega_0$，且在共振时，频率甚至更低。然而，迟滞振子是同步的，只要一个频率 $\omega = \sqrt{k/m} \rightarrow \omega_r$ 就能描述运动的所有特征。例如，很容易表明振子在这个频率处产生共振。关闭共振，响应不是标准的洛伦兹的（Lorentzian）形式。为了证明这一点，假设系统处于稳态并使用相量法（该方法在 1893 年由 Steinmetz 提出，适用于变量是复指数形式），即 $F = F_0 e^{j\omega t}$ 和 $x = x_0 e^{j\omega t}$ 得到频率传递函数为

$$\frac{kx}{F}=\frac{1}{1-\omega^2\frac{m}{k}+\mathrm{j}\frac{h}{k}}=\frac{1}{1-r^2+\mathrm{j}\alpha}=Z \tag{2-20}$$

式中，$r=\frac{\omega}{\omega_r}$且 $\alpha=\frac{h}{k}=\frac{1}{Q}$。

传递函数的实部和虚部由下式给出：

$$\mathrm{Re}(Z)=\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2+\alpha^2},\mathrm{Im}(Z)=\frac{-\alpha}{(1-r^2)^2+\alpha^2} \tag{2-21}$$

用极坐标形式表示为

$$Z=|Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}$$

其中，

$$|Z|=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+\alpha^2}},\delta=\arctan\frac{\alpha}{1-r^2} \tag{2-22}$$

比较强迫黏性阻尼振子和强迫迟滞阻尼振子两者之间的稳态响应是一件有趣的事情，即把式（2-1）与规范化的式（2-7）进行比较。波德图的比较（对数坐标，幅值）由图 2-6 给出。在阻尼参数 α 取较小值（Q 值较大）时，两种情况相差不大，然而在取较大的阻尼参数值时，差距却非常明显。

2.7.2 迟滞阻尼实验案例

目前用于若干个问题研究的垂直地震仪，是根据迟滞阻尼来衰减的。在 2.16.4 节，题为“黏弹性模型的失效”的部分，详细提供了 Gunar Streckeisen（1974）所做的工作，他的研究工作表明，以上观点是真实的。一旦修正了记录中的长期偏移，那么仪器的衰减曲线常常近乎于完美的指数函数曲线。有时这种偏移是仪器弹簧蠕变的结果，但它也可能是由其他因素导致的结果，比如：（ⅰ）温度变化或者（ⅱ）气压变化，甚至（ⅲ）潮汐的影响。对温度的敏感性是由于构造仪器材料的热导率差别引起的，而大气压力的变化则是浮力效应。潮汐的影响是上述三个因素中最小的，它会导致地壳在大约 12h 周期内有小的加速度的产生。

在随后的讨论中，提供了两种不同的衰减记录。在这两种情况下，振动的初始振幅很大，是 1mm 的相当大一部分，而且这两种情况的周期是不同的，在第一种情况下是 17s，第二种情况下则是 21s。第一种情况的时间记录如图 2-7 所示，包括 9800 个点。一旦一个 12μV/s（向上）的偏移移除了，那么衰减（左侧曲线）即被认为是“近似教科书”的指数形式。

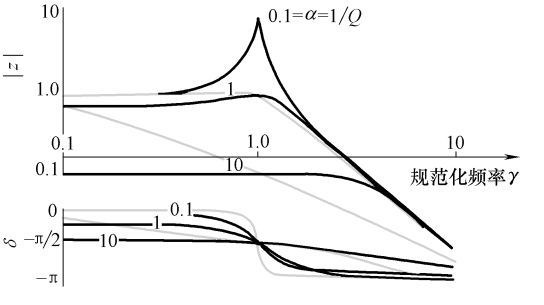


图 2-6 稳态强迫振动系统的 Bode 图比较：（ⅰ）迟滞阻尼（图中深线）；（ⅱ）黏性阻尼（图中浅线）

“近似”这个形容词是很恰当的，因为在定义上部和下部的转

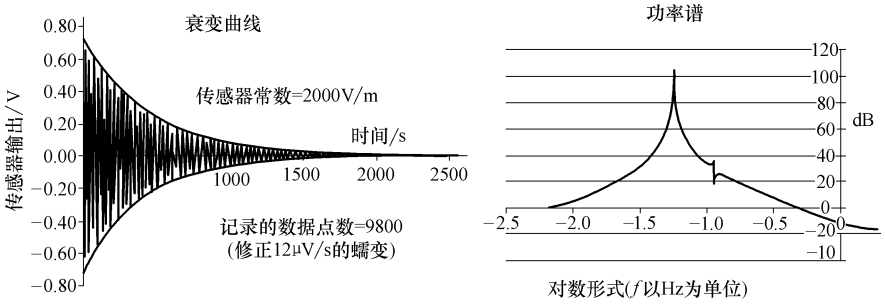


图 2-7　由迟滞阻尼引起的垂直地震仪的自由衰减（振动周期为 17s）

折点（上部 0.0022，下部 0.0025）的时候，使用 Excel 由“眼球”指数反复拟合确定而导致的衰减常数 12% 的偏差。在作者的经验里，几乎所有机械振动都会如此。在数以百计的案例研究中，完全对称的指数衰减是很难看到的。

由于在图 2-7 所示的时间记录上大约有 150 次振荡，所以解决运动的各个转折点是不可能的，但是这个振动却与纯粹的阻尼正弦曲线很近似，如图 2-7 中右侧所示。这个谱线由 4096 点 FFT 生成，其中包括前 1090s 的事件记录。二次谐波是观测到的唯一失真波形，它比一次谐波值低了接近 65dB。对于图 2-7 中所给出的情况，$Q=80$。

图 2-8 给出了另一个自由衰减迟滞阻尼的案例。和通常的状况一样，记录会受到偏移的干扰，这种干扰可能来源于弹簧的蠕变，在这种情况下恒定的蠕变速率是 60μV/s，正如图 2-8 中右侧所示。所有这些图都是由 Excel 产生的，就如前面讨论感应电流阻尼时指出的那样。随着图 2-7 中曲线的衰减，左侧的蠕变修正图是在原始数据上增加一个长期项而生成的。这个衰变一旦修正，它就是一个近乎完美的迟滞型指数曲线。在两个阻尼机制同时处于活跃状态的情况下，我们还可以（根据钟摆研究）看到其他的案例。

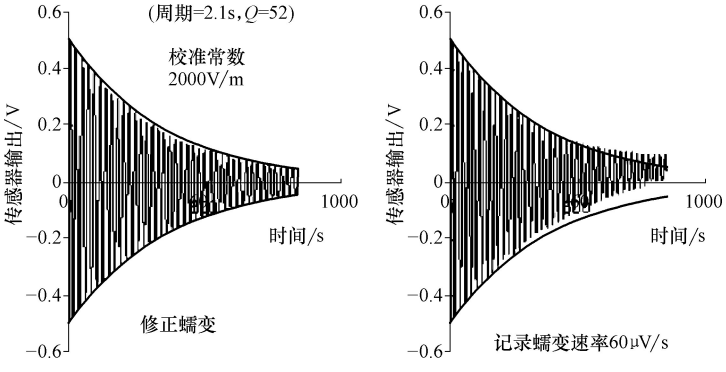


图 2-8　由迟滞阻尼引起的地震仪的自由衰减

与图 2-7 和图 2-8 相对应的 Q 值与迟滞阻尼一致，即 17s 振动的 Q 值为 80，21s 振动的 Q 值为 52。正如本章其他地方所提到的，迟滞阻尼的 $Q\alpha\omega^2$ 与指数为 1 的黏性阻尼相反。当然，我们必须采集足够宽频率范围的数据来验证这一观点，就像 Streckeisen 在 1974 年所做的那样。

2.8 通用理论的失效

在过去数十年内，主要由工程师完成的许多机械振子研究表明了衰减常数β是正比于ω^{-1}，而不是常数（比如，Bert，1973）。这些案例中的阻尼称为“材料的”“结构的”或“迟滞的”。获得正确频率依赖性的通用方法就是用频率除以速度，并把结果称为“等效黏性”阻尼。形容字“等效”提请注意这样一种事实，就是固体中的内部摩擦不能真正产生流体效应。此外，在本章也存在支持的立场，就是当进行多体系统模态分析时，黏性阻尼类的线性方程不能产生真正有意义的（预测性的）模型。

由 Kimball 和 Lovell（1927）（是早期通用电器的物理学家）完成的重要的早期工作明显是第一次试验，表明了很多固体的内部摩擦（“力”）实质上是独立于频率的。换句话说，他们的优雅技术（其中的旋转杆在横向力作用下发生弯曲）第一次演示了迟滞阻尼的“通用性”，但很少有 21 世纪的物理学家知道这项重要的工作。当和 Portevin 与 LeChatelier 所作的重要贡献相比时，Kimball 和 Lovell 的系统研究受“肮脏物理学”的影响而明显被忽略了，科学家们偏爱的是那个世纪的“干净的”新的量子力学。

有趣的是用铅做的铃铛在室温下不会铃铃作响，但是把它浸入温度是 77K 的液氮中，它会发出响声。这个经常在物理“马戏团”中采用的演示清楚地表明了通过降低温度，可以大大减少在音频下铅的内部摩擦。根据这些观察可以学到的重要课程内容就是：阻尼一般是温度、频率、传导性……（谁知道哪里是这个清单的末尾）的复杂函数。不但一堆状态变量对完整描述耗散是必需的，而且先前的应力-应变循环史也可能是关键的。这是缺陷结构阻尼带来的性质。

2.9 空气影响

甚至在高度真空环境中操作的振子，也存在来自内部摩擦的重要的附加阻尼。这种现象如图 2-9 所示，图中提供了两种不同的“简单”摆。它们是简单的，意味着摆的质量集中靠近摆结构的底部。在此图中，画出了衰减时间（衰减常数β的倒数）与压力（单位：mTorr[㊀]）的自然对数 log 的关系曲线。压力的减少由高质量的低真空泵完成，而且压力的测量由下面两种压力表完成：（ⅰ）量程为 8～760Torr 的机械压力表；（ⅱ）量程为 0～100mTorr 的热偶真空压力表。当压力在 100mTorr～8Torr 的范围内，无论哪一个压力表都不能精确测量压力。类似的，低于 1mTorr 的压力目前也不能测量，但是在用该类泵进行的其他类似实验中，采用离子压力计可以很容易地把压力泵到 0.01mTorr 以下。

每个单摆的振动周期非常接近 1s，每个案例的起始运动幅值为 25rad。较重的单摆采用放在单晶硅薄片上的一对尖头钢支撑来提供摆动轴线。在摆的底部连上了一个质量

㊀ 1Torr = 1mmHg = 133.3Pa。

接近 1kg 的固体铅球。较轻的单摆采用放在坚硬陶瓷板上的一个钢制刀锋来支撑，而且在摆的底部连上了一个大的（直径 10.3cm）、轻的（143g）空心金属球，以提供尽可能大的空气阻力。通过 Dataq DI-154RS A/D 采集仪把 SDC 传感器的信号传给计算机，从而测量摆的运动。

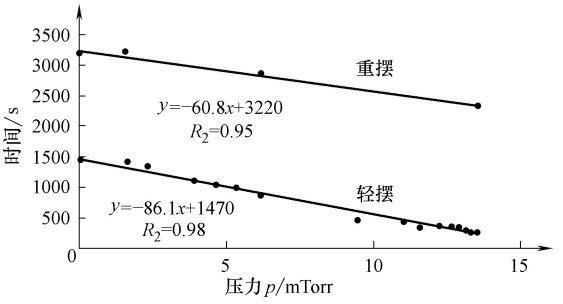


图 2-9　在真空腔中作为压力函数的单摆阻尼

尽管图 2-9 中的空气阻尼明显，但是影响并不是人们所想象的，至少对于重的摆来说。此外，在大气压力下，很容易演示非线性阻力的重要性。也正如 Nelson 和 Olssen（1986）所指出的，这种类型的流体摩擦造成了重要的、依赖幅值的阻尼。

对于以上轻、重两种摆来说，一旦空气的影响消除了（压力低于 1mTorr），那么残余阻尼比大气阻尼就大得多了。对于重摆来说，去除空气把 Q 值从 7500 提高到 10100，对于轻摆来说，去除空气把 Q 值从 1000 提高到 4600。因此我们看到，甚至单摆设计成受空气阻力严重影响，它也有显著阻尼，这个阻尼取决于单摆的制造材料或支撑单摆的材料。

重摆和轻摆两者之间的内部摩擦阻尼的差别没有想象的那么大。尽管这里有转动轴线类型不同带来的差别（点支撑-重摆，刀锋支撑-轻摆），但是没有做啥努力来确定阻尼差异产生的主要原因。除了摆动轴设计的不同外，支撑仪器的工具也不同。轻摆在轴线和下部质量之间采用大直径的固体黄铜丝。重摆采用铝管。

用来产生图 2-9 实验结果的两个单摆都是相对高频的仪器（周期为 1s）。在每个案例中，枢轴都靠近仪器的顶端。就这点而论，它们与出于本章节使用的长周期摆形成鲜明对比。演示长周期一些复杂性的简单仪器就是可调周期的杆摆（参见前面的图 2-1）。摆动轴线越接近中心，则周期越长，内部摩擦的影响也就越大。很容易看到摆对外部激励力的灵敏度正比于周期的平方。同样，检测内部构造变化的能力是周期的二次方。

2.10　噪声和阻尼

2.10.1　一般考虑

阻尼与噪声密不可分的事件使得人们对可能由振动产生的不需要的声音毫无办法。在最简单的案例中，与阻尼相联系的噪声可以用波动-耗散理论来描述。黏性阻尼、热驱动振子是热动力学平衡的经典案例，波动-耗散理论适用于以上案例。经典的电子学模拟案例是约翰逊（Johnson）的电阻噪声，可由 Nyquist（白色）噪声公式来描述。

构建一个完美的简单简弦振子的最大障碍是振子的耗散。如果阻尼是完全平滑的，

那么这就不是一个大挑战。但是，统计力学的波动-耗散理论证明了阻尼伴随着波动力。阻尼越大，波动力就越大，即噪声越大。有一个统计力学的标准问题，就是显示出相对波动的幅值是反比于参与运动粒子数的平方根。在内部摩擦噪声案例中，与中尺度结构有关的缺陷导致产生噪声的有效粒子数要远比样品总的原子数少。不幸的是，波动-耗散理论可能不能应用。早就知道该理论不适用于巴克豪森（Barkhausen）效应（Barkhausen，1919）。最近证明了该理论不适用于玻璃结构（Grigera 和 Israeloff，1999）。作者假定 PLC 效应和巴克豪森（Barkhausen）效应之间存在紧密的联系，意味着波动-耗散理论一般也不能应用于内部摩擦阻尼。

内部摩擦噪声不是白噪声，而是更像 $1/f$（或闪烁 = 粉红色）噪声，这是一种普通的噪声，还不能根据第一定律来解释它。在自组织临界性方面经常引用的论文介绍如下：

“我们将看到临界状态的动力学具有具体的时间指纹，称为‘闪烁噪声’，其中，功率谱 $S(f)$ 在低频处的尺度为 $1/f$。通过很大时间尺度范围内的相关分析，可以把闪烁噪声的特征显现出来，也能清楚表示出某种协同效应。我们观察到的噪声，比如有来自类星体的光、太阳黑子的强度、通过电阻的电流、沙漏中沙子的流动、像尼罗河的河水流动，甚至证券交易所的价格指数。尽管闪烁噪声存在普遍性，但是它的起源不是很清楚。实际上，人们可能会说由于它的普遍性，因而至今没有一个提出的机理自称可以当做 $1/f$ 噪声的一个普遍性的基本根源。我们也许会争辩其实闪烁噪声不是噪声，但是它反映了自组织临界系统的内在的动力学。临界性的另一个特征就是空间的自相似性。早已指出自然界充满了自相似的‘分形’结构，尽管它的物理原因还没有弄清楚。（Bak，1988）”

应该注意到有关这篇自组织临界性论文存在着争议，引用 Bak 关于 $1/f$ 的著作——《自然界如何工作：自组织临界性科学》，摘录如下（第 95 页）：

“在早期开展工作中（CFJ），丹麦奥胡斯的一个本科生（Kim Christensen）显示我们对原先的沙堆粒子有关 $1/f$ 噪声的分析并不完全正确。幸运的是，对于大规模模型，通过表明 $1/f$ 噪声在荷电状态会真正地冒出来，我们从那时起已经从一个联合项目完全失败中缓过神来。”

在最近几年里，数学家们已被吸引到“……类推学，其中过去通常被认为分离的数学和物理的三个领域，最终被认为是联系的。类推学是试验性的和有点逗人的，但还是富有成效的。这三个领域是波动物理特征值的渐近性、动力学混沌和素数理论”（Berry 和 Keating，1999）。一些数学家推测动力学系统（根据作者的想法，也许是几种细观非弹性摆）可能变成产生素数的“机器”。

2.10.2 $1/f$ 机械噪声案例

图 2-10 显示了一个机械闪烁噪声的案例，它由于 Sprengnether 垂直地震仪弹簧（LaCoste 类型）蠕变使得噪声更糟。数据来自两段分开的时间记录，第一段数据大约在第二段数据前半小时开始。在采集第一段数据之前，一个卡销被从地震仪中移除。用于

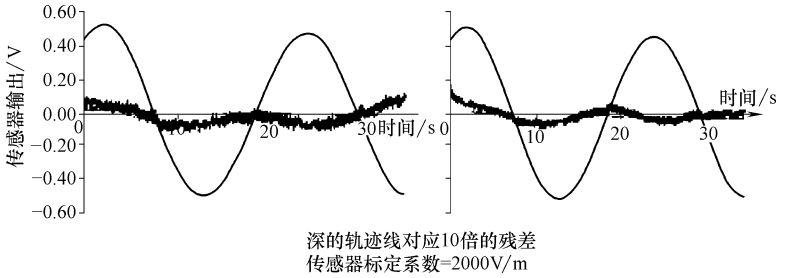


图 2-10　支持地震仪中 1/f 机械噪声的证据

约束质量块运动的卡销，它一直放在原位置上，决定了包括漂移在内的电子噪声的大小。测量到的电子噪声（白噪声 = 1/f^0）比机械（地震仪）类最小噪声成分（高频）小 1 个数量级。在两个案例中的振动峰-峰值为 0.5mm（传感器的标定常数为 2000V/m）。对于该系统，SNR = 1 的峰-峰值具有 1μm 的数量级。

尽管原位置的卡销一直没有卸载掉弹性恢复力，然而卡销的移除给弹簧中的缺陷结构带来了巨大变化，正如原数据和它们的谐波拟合曲线的参数所表示的（用 10 倍系数放大了）。

通过计算残差的功率谱可以演示噪声的闪烁特征（没有表示出来）。用 FFT 变换出来的数据画出对数 log-对数 log 曲线图显示第二段数据的 1/f 噪声的频率依赖性。第一段数据的较大噪声集中在上限频率。趋于 1/f 噪声特征的松弛揭示了闪烁噪声是“做功硬化”的残留物。为了演示闪烁噪声不是电子引起的，用锁相的仪器质量块记录传感器的输出。电子噪声被证实要比闪烁噪声小上一个数量级，特性具有“白噪声”，可能主要是由于 A/D 量化误差引起的（参见第 6 章）。

由于弹簧在卡销移除的时候不能处于平衡（也许是当系统夹住时由于温度变化引起的），出现了大量初始分子重新排列，这涉及粒子边界的原子。可以看到当两轮数据隔开了半小时后，波动量有显著的减少。尽管如果弹簧也一起松开，蠕变噪声将毫无疑问更大，但是不容易在这种场合下快速重新平衡地震仪，使得它的振动周期超过 20s。这些观察和灵敏地震仪的已知特性是同步的，正如 Erhardt Wieland 在“仪器的自我噪声—瞬态干扰”中所注明的（Borman 和 Bergmann，2002）：

“大多数新的地震仪产生由力学部件中应力造成的自发瞬态干扰和准微型地震。尽管不能肯定它们起源于弹簧，但是它们的输出波形看起来在弹簧力中有突然和恒定的变化（类似阶跃）。长周期地震记录在这种干扰下有时会出现严重退化。瞬态响应通常在几个月内或数年内消失；如果不消失的话，且特别当它们的频率增加时，那么必须怀疑腐蚀。制造商要用低应力设计减缓该问题，并通过老化部件或老化加工好的地震仪（通过持久的存储、振动或冷热交替循环）来减缓该问题。有时可以通过采用力锤敲击地震仪的支护墩来释放内部应力，在每次新安装地震仪时有推荐的操作步骤。（Wielandt，2001）”

材料噪声阻尼显示出有点和巴克豪森（Barkhausen）噪声相类似的特性，巴克豪森

噪声涉及远离平衡态系统的磁现象。这样一种噪声和铁磁域的颗粒性质联系起来，并对采用铁合金的电子仪器设计带来后果。比如，知道（尽管面不广）普通的 LVDT 实质上要比电路上等效的电容式传感器的灵敏性要差，这是由于它的铁磁成分（运动的杆件）。正如 Wielandt（2001）所指出的，“电容传感器……要比电感式的传感器好上 100 倍”。在电路上和 LVDT 等效的全微分电容传感器仍具有很高的优点，这源自它的较高的对称性。此外，通过构造阵列式的电容装置，可以使灵敏度很大。

巴克豪森噪声和迟滞阻尼噪声之间存在的相似性要比认识到的大——这涉及中尺度粒度、微观现象和宏观现象之间的中间现象。对于这样的系统，由于源自一大堆非线性相互作用引起的复杂性，第一定律方法在这里很难采用。比如，在固体内部摩擦案例中，阻尼源自应力-应变迟滞，而该迟滞由固体中缺陷结构决定。在金属试样中每个“颗粒”大约包含了 10^{12} 个原子，闪烁噪声明显地来自比真正的白噪声具有更高空间相关性的、分形几何自相似结构。无所不在的 $1/f$ 噪声和贴有“普遍性”的迟滞阻尼是一致的，正如 Kimball 和 Lovell（1927）所提出的。

2.10.3 相位噪声

先前的案例涉及的是幅值噪声。察看机械类的相位噪声也是可以的，如图 2-11 所示。

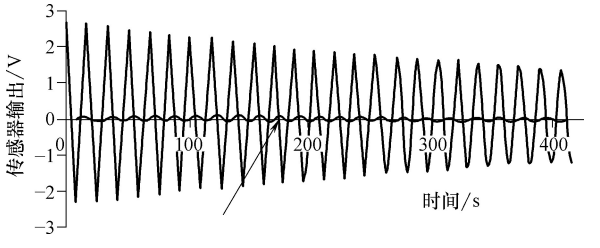


图 2-11 垂直地震仪自由衰减信号中的相位噪声的演示

对于标定常数为 2000V/m 的传感器，可以看到最初的振动幅值为 1.3rad，这个幅值太大，以至于不能观察到机械类巴克豪森噪声的不连续性。通过把衰减信号与“参考信号”（察看 Excel 对原始数据拟合的残差）的对比，产生的相位噪声非常明显。通过调整在计算机上生成的带阻尼的正弦波：（ⅰ）振幅和相位的初始值、（ⅱ）衰减参数和（ⅲ）频率，可以通过视觉反复接近以得到原始数据的最佳拟合。利用图 2-11 做完这些，残差（原始数据和拟合曲线之间的差值）引人注目特征就是结构看起来像“心跳”，但不是。造成此现象的相位噪声被认为是符合 $1/f$ 机械噪声。为了使噪声形象化，考虑以一个小的随机化的（噪声）矢量来产生数据记录是方便的，所用的矢量尾巴落在矢量的头部。位于矢量方向上的噪声矢量分量产生幅值噪声（图 2-10），而垂直分量则负责产生相位噪声，如图 2-11 所示。

振动相位噪声给精密石英晶体性能施加了严重的限制，因为它们对加速度敏感。通过敲击已知特征的参考振子，在这些振子中可以观察到相位噪声，即参考振子用作

图 2-11所示的计算机“拟合曲线”一样的功能。为了降低相位噪声，用低固有频率的隔振器来为晶体隔振（正如 Wenzel 协会在营销文献中描述的，奥斯汀，X）。

2.11 变换方法

2.11.1 一般考虑

对于线性系统，拉普拉斯和傅里叶变换（拉普拉斯更通用）是杰出的工具，它们用来研究运动方程（见第 10 章）。作者的变换经验（像大多数物理学家）主要与傅里叶变换（FT）有关。可以用相矢量来理解离散傅里叶变换（Peters，1992）。对于线性微分方程，变换是把微分方程转换为等效的代数方程的工具。不幸的是，由于叠加原理的失效，他们不能直接用于非线性方程。然而，线性近似仍然是非常有价值的，所以有关阻尼的一个章节去讨论它们的一些特性是值得的。

很明显，有关 FFT 的想法最初由高斯在 19 世纪初期探讨过，但是 20 世纪 60 年代数字信号处理（DSP）的“爆发”主要是由于 Cooley 和 Tukey 的工作（1965）。有关“偶然”的一个有趣的历史事件出现在出版的论文中，读者可以参考 Cipra（1993）的文献，以下是他所说的有关 FFT 的评语：

“傅里叶变换站在信号处理的中心，其中包括了一切：从卫星通信到医疗成像、从声学到光谱。傅里叶分析，作为 X 射线晶体照相术，是 Watson 和 Crick 双螺旋发现的必不可少的工具，对于研究蛋白质和病毒的结构来说，FFT 仍然是重要的工具。在求解偏微分方程时，无论在理论上还是计算上，傅里叶变换是基础工具。因此，从傅里叶热分析理论到量子力学最现代的处理，FFT 是数学物理的核心。任何一种波现象——无论是地震、潮汐还是电磁——它们都是傅里叶分析的对象。许多统计过程，如从原始数据中消除“噪声”和计算相关，它们也是根据傅里叶变换的工作。

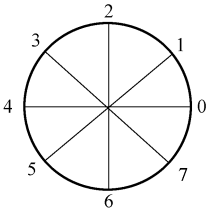
考虑到前面有关噪声的声明，作者使用自相关作为一个强有力的手段来识别时域信号中短时、低频的周期信号，它不容易在功率谱（FFT）上显示出来。例如，在地球潮汐力快速松弛的激励下（周期 12h），自相关是研究地球自由振动-模态的工具和手段（彼得斯，2000）。根据维纳-辛钦定理，用 FFT 产生自相关（Press 等，1986）。

和 DFT 相比，FFT 的巨大优势已经开始消退。DFT 开始计算倒易空间内每一个“矢量”的成分［频率的倒数是时间，单位是秒（s），或波数（空间频率）的倒数是位移，单位用米（m）表示］，而不管事实上许多组成部分具有相同的值，当然除了符号的变化外。

2.11.2 位数反求

和离散的傅里叶变换（DFT）相比，FFT 威力的关键（中央处理器单元（CPU）所需的时间和 $n\log n$ 成正比）在于 Cooley-Tukey 算法的位数反求图。下面可以简单地加以

说明。考虑用分布在图 2-12 所示的单位圆上的 $n=8$（便于演示）点，来替代将要变换的记录的一般长度数据（一般，最小长度 $n=1024$ 点）。



十进制数（反求）	二进制数	十进制数（常规）
0	000	0
4	001	1
2	010	2
6	011	3
1	100	4
5	101	5
3	110	6
7	111	7

图 2-12　图解：为什么 Cooley-Tukey FFT 算法要大大快于原先的 DFT

观察到复平面上的单位根（标数为 0～7）把“饼”分成 8 等份（算法要求 n 可以表达成 2 的幂）。正如图中所示，8 个“矢量”的十进制计数线依次横穿过相平面图（图 2-12 左边的圆）。在 Cooley-Tukey 算法中，要选择反求矢量的二进制代表的位数。表中右边是最低有效位数，表中左边是最高有效位数，因此正如图 2-12 右边的表中数字所示的十进制计数为 0～7。有了位数反求，“lsb”就变成了最左边的二进制数字，“msb”就是最右边的二进制数字。因而，比如，二进制 110（一般是 6）就变成了 3。

采用了位数反求，相平面就不必像一般的矢量横穿（循环的），但更像触发器中来回穿过圆。这意味着，在“矢量”分量（转换中给定项的实部和虚部）计算中存在不必要的重复。比如，5 是简单的 -1。反求 1 的符号而得到 5 比起不必要的第二次计算正弦和余弦项要更快。当 n 变得很大时，时间的节省是很多的，这是因为此时存在大量的相圆循环。对于 1K 数据，FFT 计算的变换要比 DFT 快 102.4 倍。更多的细节参见 Peters 文献（2003a，2003b，2003c）。

2.11.3　小波变换

最近的工作表明，将来在某些应用场合小波变换（WT）可能替换 FT。WT 采用哈尔（Haar）函数，该函数在［0，1］区间上正交，这与简弦函数（正弦和余弦）的正交有所不同，简弦函数在［0，2π］区间上正交（Strang，1993）。研究表明 WT 比 FFT 能够更好地表示海森伯（Heisenberg）不确定性定理的特征。

2.11.4　著名的海森伯（Heisenberg）定理

量子力学的核心和灵魂就是海森伯（Heisenberg）不确定性定理。正如本章某处所注明的，有关阻尼模型有话要说。根据著名的物理学家 Hans Bethe（1992）所评论的，海森伯（Heisenberg）不确定性定理有一些“坏新闻”：

“许多人认为不确定性定理使得每件事情变得不确定了。事实完全相反。没有了不确定性定理，也就不可能存在任何原子，物质的行为也就不存在任何确定性。因此，不确定性定理事实上是确定性定理。”

令人好奇的是，在海森伯（Heisenberg）定理的发现过程中出现过失败。在他的博士论文辩论过程中，在伟大的理论物理学家 Arnold Sommerfeld（他的导师）和著名的实验学家 Wilhelm Wien 面前，Heisenberg 证明不能推导出一个简单显微镜的放大功率。这

个耻辱的高潮就是 Wien 教授要求他解释电池是如何工作的，但是 Heisenberg 也不能回答该问题。鉴于他杰出的理论贡献，对于 Wien 教授给他的 F 成绩，Sommerfeld 给了 Heisenberg 可能的最高级别的补偿。因而，Heisenberg 最终被授予博士学位。

后来，作为事件的讽刺性的转变，Heisenberg 选择显微镜演示了他发现的矩阵量子力学的特征，这些特征也纠正了和波尔波动力学理论相关的问题。正是他曾经的这些巨大的窘境，使得他闻名天下！

2.12 迟滞阻尼

2.12.1 物理基础

具有黏性阻尼的简弦振动模型假定耗散来自外部作用力。这个假定是不适合的迟滞阻尼概念的理解。为了适应内部摩擦，需要 1 个以上的质量块连接到负责复原的弹性元件上。两个系统在这方面具有教学意义，一个用作长周期的物理摆（力学），另外一个作为振子用 Ruchhardt 方法测量气体的热容比（主要是热动力学）。由于有关黏性和迟滞阻尼之间差别存在很大的混淆，因此这里把两个案例都呈现在这里。有据可查的处理方法，就是对于应用物理和工程来说假定迟滞阻尼是更重要的情况。

机械振子阻尼来自机械能向热能的转换，这是常识。人们期待对热动力学的直接考虑可使人们更充分理解（阻尼）基本物理的概念。尽管本章很少考虑理想气体，但存在经典试验涉及它的相关性。它是一项巧妙技术，在 1929 年第一次被 Ruchhardt 用来测量 γ，γ 是定压热容比上定容热容（Zemansky，1957）。

2.12.2 Ruchhardt 实验

考虑质量为 m 的活塞在横截面积为 A 的缸体中移动，剩余压力 p_0 的理想气体 V_0 处于体积交替压缩和膨胀。假定活塞和缸体之间没有滑动摩擦。活塞质量小的位移 x 导致体积变化为 $\Delta V = V - V_0 = Ax$。存在恢复力 $F = A\Delta p$，其中压力差 Δp 通过假定的绝热过程与 ΔV 有关；即，对于气体可估计的热的传入和传出，假定运动周期非常短。利用公式 pV^{γ} = 常数，得到

$$\gamma p_0 V_0^{\gamma-1}\Delta V + V_0^{\gamma}\Delta p = 0 \tag{2-23}$$

根据式（2-23）可以得到

$$m\ddot{x} + \frac{\gamma p_0 A^2}{V_0}x = 0 \tag{2-24}$$

式（2-24）是简弦振子运动方程。因为假定绝热过程，所以没有阻尼。通过测量周期 $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{V_0 m/\gamma p_0 A^2}$，可以估计出 γ。

历史上，出现过这样的测量是略微低估 γ 值，这个可以按下面来理解。

理想气体的状态方程为 $pV = NkT$，通过微分得到

$$p_0 xA + V_0 \frac{F}{A} = Nk\Delta T$$

$$m\ddot{x} + \frac{p_0 \mathrm{A}^2}{V_0} x = \frac{NkA}{V_0}\Delta T(t) = F_{\mathrm{d}}(t) \tag{2-25}$$

注意式（2-24）和式（2-25）之间的差别。在式（2-25）中，阻尼可能来自温度的变化（一类“负驱动”项），它和运动循环过程中的热传导有关。如果振动有可能是等温的（在非常低的频率下 $\Delta T = 0$，基本上是准静态的），那么频率要比绝热状态的低，这是因为 $\gamma > 1$ 这个条件从式（2-25）中消失了。在等温状态下，也可能不存在阻尼，因为在压缩过程中进入气体的热量可能被膨胀过程中离开气体的热量平衡掉了。得到阻尼的唯一途径就是在压力-体积图上分离压缩和膨胀路径，即分离出哪里有迟滞阻尼。实际情况肯定对应绝热和等温两个极端之间的状态，实验明显倾向于绝热状态。然而，过程必须在某种程度上从绝热状态出发，因为式（2-25）显示存在的阻尼是来自温度变化产生的迟滞阻尼。观察与“驱动力” $F'_{\mathrm{d}}(t)$ 有关的温度变化是有趣的事情。在 Ruchhardt 试验中，肯定存在滞后于 $x(t)$ 的 $\Delta T'(t)$ 微小变化［不存在叠加在 $\Delta T'(t)$ 上的绝热状态可逆的温度变化］。通过和式（2-25）相比较，式（2-24）右侧的零项可用阻尼力来替换，可以写成下面的速度项：

$$F'_{\mathrm{d}}(t) \propto \Delta T'(t) \rightarrow -\frac{c}{\omega}\dot{x} \tag{2-26}$$

式中，c 为常数。注意和速度相乘的系数并不是简单的常数，而是一个常数被角频率相除。使用速度是为了数学上的便利，但是速度的幅度将不会是影响迟滞阻尼温度变化的一阶要素。x 对时间的导数不但会导致相位偏移 90°（传递的热提供了这个滞后），而且通过链式法则引入了一个频率乘子。因此，让阻尼正比于速度将造成增加耗散热流，而且随频率而增加的阻尼增加了。因为这种情况并不发生，而且至少我们引入了一个非物理项到公式中，因此必须被频率相除。用式（2-26）替换式（2-24）右侧的零项，我们得到修改的、带阻尼的运动方程为

$$m\ddot{x} + \frac{c}{\omega}\dot{x} + \frac{\gamma p_0 A^2}{V_0} x = 0 \tag{2-27}$$

通过察看负阻尼即 $c < 0$ 的案例，可以认清式（2-27）中阻尼项形式存在的更多理由。当气体造成发动机循环时，这样的情况是真实的。一个演示性的案例研究就是低温的斯特林发动机试验（Peters，2002a，2002b，2002c），通过采用基于推导公式（2-27）相同的观点得到的公式，在理论和实验之间实现了合理的吻合。

可以看到包括阻尼在内的 Ruchhardt 试验的直截了当的建模得到一个运动方程，它是迟滞阻尼形式。对于耗散由内部摩擦左右的大多数系统来说，看起来迟滞阻尼接近通用形式。

2.12.3 物理摆

在 Speake 等（1999）发表的论文中，人们找到以下观点：

“对数减量（Q^{-1}）随频率平方的逆变化。在铜-钡这个频率范围，我们把这解释为证实了杨氏模量的虚部是独立于频率的，这和麦克斯韦（Maxwell）模型预测的相反。”

为了用实验拟合他们的理论，他们采用了“修改的”麦克斯韦模型，该模型的时间常数分布从30s到大于4000s。他们努力建模的动机源自Kuroda（1995）的观察，就是滞弹性是在由时间摆方法估计牛顿引力常数G中出现的一些大误差造成的。

尽管该模型符合他们特别的试验，但是Speake等的模型并没有收到奥卡姆剃刀的祝福。更进一步的是，他们声称阻尼主要源自铜-钡挠性枢轴，这可能不对。其他的研究表明，与建造摆材料相比，确定长周期单摆轴线的材料在许多情况下对阻尼一点儿也不重要（有时根本不重要）。该模型也和他们完成的这类试验吻合，但这些试验很简单，现在把该模型呈现在这里。

图2-13演示的是一个理想的长周期机械摆，可以称为“物理摆”。摆的底部和顶部质量一样，都是M，并假定它们远大于连接结构的质量，连接结构用曲线来代表。

内部摩擦阻尼的主要机理可以通过观察图2-13b所示的“负位移”位置上作用在摆上的外力来理解。通过枢轴（一般是刀锋）的向上“法向”力与分别挂在旋转轴线左右的一对摆锤的重力方向相反。当单摆交替在正负位移之间摆动时，结构完成了周期性的弯曲。应该指出的是内部摩擦贯穿整个结构起作用，甚至在没有净弯曲的情况下，即可能存在结构的补充件来完成压缩和伸张。即使振子处在太空的无重状态，驱动力矩也会导致动态反应力，并通过这种方式增加阻尼。

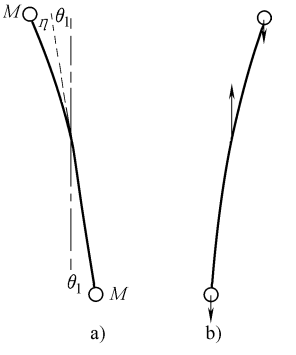


图2-13　用于研究库仑阻尼修改模型的理想物理摆

a）正位移　b）负位移

假定摆的两个质量块相隔$2L$距离，且旋转轴线在几何中心上面ΔL距离。应用牛顿第二定律，下面的质量块带来恢复力矩、上面的质量块带来反作用力矩，于是得到

$$\ddot{\theta}_1+\frac{g}{2L}\left(1+\frac{\Delta L}{L}\right)\theta_1-\frac{g}{2L}\left(1-\frac{\Delta L}{L}\right)\theta_2=0$$

$$\theta_2=\theta_1+\eta \tag{2-28}$$

注意：重写式（2-28）来允许更大的位移，其中的弹性非线性增加了奇特的特性。周期振幅趋于和引力非线性的振幅趋势相反，因而规定了改进的等时性。更多细节参见Peters，2003a，2003b，2003c。

两个质量块位移上的差异涉及和θ_1成比例的弹性项，取决于时间变化率的耗散项，即

$$\eta=c\left(\theta_1\cos\delta-\frac{\dot{\theta}_1}{\omega}\sin\delta\right)$$

$$\omega=\sqrt{g\frac{\Delta L}{L^2}} \tag{2-29}$$

式中，c 是无量纲常数。采用斯坦梅茨（相量）法可以求得方程的解。方程符合常规假定，就是应力和应变通过复常数相关。角度 δ 是相位角，η（应变）滞后 θ_1（应力）角度 δ。为了描述下面那个质量块的运动，我们可以忽略 η 的弹性部分，因为它对阻尼没有贡献（或者如果摆杆不弯曲，那么假设仍然存在前面提到过的阻尼）。因此去掉下标，并经过一些代数变换，可得到以下结果

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{\omega}\dot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

$$\alpha=\frac{gc}{2L}\sin\delta \quad （对于 \Delta L \ll \mathrm{L}） \tag{2-30}$$

其中 $Q=2\pi E/(-\Delta E)$，式（2-30）还可以表达为

$$\ddot{\theta}+\frac{\omega}{Q}\dot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

$$Q=\frac{2L}{gc\delta}\omega^2(\delta \ll 1) \tag{2-31}$$

作为材料的一个特性，如果 δ 独立于频率，那么 Q 是频率的二次方，即由内部摩擦引起的单摆阻尼与频率的平方成反比——即使内部摩擦（由 δ 确定）本身是独立于频率的。注意到内部摩擦的频率依赖性是不能等同于振子 Q 的频率依赖性的重要性，即使内部摩擦经常简单表述为 $1/Q$。这个问题在 2.13.2 节中将进行更详细的讨论。

2.12.3.1 Q 依赖性的测试

在式（2-31）中，Q 对频率和长度的依赖性可以通过单摆的试验测量出来。两个铅球，每个质量接近 1kg，每个铅球都钻一个孔，方便铝合金的箭头轴（长度接近 70cm）的插入，这种箭头常用于复合狩猎弓箭上。第二孔钻在与第一个孔垂直的位置上，并用攻有螺纹。这个箭头轴被锯成两段，并在钢铁做的刀锋处形成刚性连接，这个连接需要用力配合，并用环氧树脂粘接上下刀锋面。刀锋在箭轴中心相反的两侧垂直向外伸展。

2.12.3.2 测试阻尼的简单方法

尽管 SDC 传感器可以替换掉，但是将要描述的试验采用了一种实验技术来完成，该技术已授权描述为具有新颖简单性——但传感器仍然具有相当准确性。为了测量周期和阻尼，一个小的“旗子”上粘到上面箭轴的顶部。这个旗子是一个小的薄薄的 U 形塑料制品，其中 U 的“大腿”大约 1mm 宽，两个“腿”中心之间间隔 0.5cm。装上了一般用于教学实验的红外光电门类型传感器，因而在单摆振动过程中这个旗子会断开光电门。然后采用 Pasco Smart 定时器完成两个不同的校时试验。在每轮试验中，用手把单摆放到大约为 10°的初始位置，然后放开。没有必要对初始位置精确定位。

在单摆定时器模式下，周期是直接测量的。对于这种情况，相对于 U 形旗（其中的垂直臂要比其他两个臂稍微长些）来说，光电门是固定的，这样才能当单摆每次经过时光电门则中断一次。在时间间隔模式下，U 形旗被固定，因而 U 形旗的两个臂中断光电门梁。这个中断时间的倒数证明是光电门位置的单摆瞬时速度的合适测量，其中该

位置是动能最大位置。经过 5 个振动循环后，对于相隔一个周期的遍历，时间间隔被手工记录。这些数字被输入 Excel，且它们的倒数也被画出图来。趋势线（选用该选项打印斜率）适用于近似线性下降的图。这根线的减量（每个循环分段减少）证明对运动对数减量能很好近似，通过本章提到的其他技术，以上近似估计具有非常好的精度。

在第一种设置的实验中，在较低箭轴上的铅球维持离刀锋恒定距离，而以此同时，在较高箭轴上的铅球与刀锋的距离不断增大以延长周期。在考虑的所有周期范围内，两个物体间的距离在 67cm 名义值附近以较小的数值来回改变。第一种实验研究结果是图 2-14 左边显示的曲线，图中曲线画的是对数减量与周期平方的关系。对于任何周期值，采用图示 0.0004 斜率可以计算单摆（π/Δ）的 Q。例如，周期 10s 对应的 Q 值是 76，近似于考虑的最短的周期。接近另一个极端的案例是：$T=35\text{s}$，$Q=6$。在可能存在的最短周期处，由于空气拖拉而产生的阻尼将会开始变得重要。

对周期平方的线性回归的合理拟合是和式（2-31）预测的结果一致，即 Q 应该是频率的二次方。

式（2-31）同时也指出，对数减量应该与两物体之间的距离 L 的倒数成比例。为了检验这个推论，单摆的周期当做物体分离的函数来测量，测量时一样要用灵巧的计时器。在记录图 2-14 右侧图数据的过程中，周期保持在 20s 不变。在每个记录数据中，高处的球始终只比低处的球离刀锋近一个微小的距离。相对于误差的棒图来说，趋势线 0.049 的截距远偏离于零，这表明存在系统误差。产生这个误差的可能原因有：

① 一定尺寸的球，而不是像理论模型中假设的是质点。

② 除球以外不可忽略的零件的质量。

不过，这些数据依然给出了 Q 的一个清晰的大小依赖性。

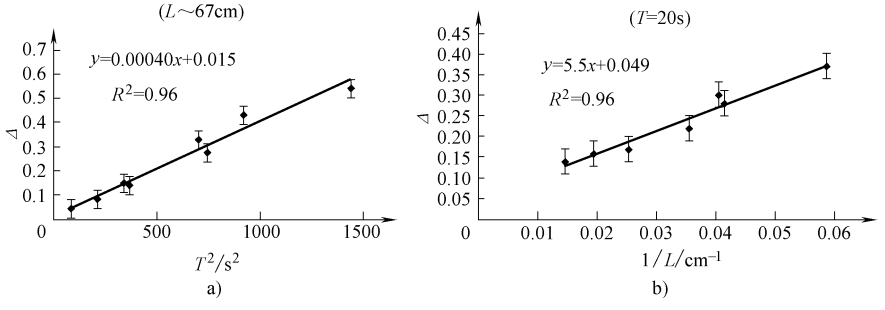


图 2-14　测试 Q 对以下因素依赖性的实验结果

a）对数减量与周期平方的关系　b）对数减量与两个球分离距离倒数的关系

正描述的实验是不容许人们容易分离出阻尼源，如图 2-14 所示的试验案例中，刀锋放置在结硅晶片（集成电路材料）上。不知道在刀锋-硅晶片界面处应变控制耗散到何种程度，也不知道铝箭轴弯曲控制耗散到何种程度。尽管生成式（2-31）的模型只假定了后者，然而在不管阻尼细节的情形下，仍然存在对模型认可的理论和实验的基础。

2.12.3.3 高耗散及硬质材料

同样的单摆也被用于演示一些由于使用不同材料替换硅晶片而产生的不同寻常的内摩擦阻尼特性上。当使用一些非常软的材料（比如铅）来作为刀锋的支撑时，如同预测的那样，阻尼有一个相当大的增强。然而，人们也发现生铁会使对数减量（10s 周期）增加超过 40% 的幅度。同样的情况也会出现在压电陶瓷晶片上，通过强力击打晶片来点燃气烤架。生铁和陶瓷-锆酸盐-钛酸盐（或酯）样本的硬度都很高，因此必定由于其内部众多且密集的缺陷（其中，原子的无序是应力的敏感函数）而产生内部摩擦。其他的一些硬质接触界面，比如钢铁对玻璃或者钢铁对蓝宝石，它们并没有显现出和钢铁-硅界面特性的不同，由此我们可以看出，在所有案例中，单摆产生的阻尼的主要原因是铝轴的弯曲。

有关铸铁的实验结果和已知的高频下出色的阻尼特性是一致的——比如，对于发动机缸体来说，这是很重要的特性。研制的一些镁合金也被发现在不牺牲强度的情况下仍然拥有出色阻尼特性。

2.13 内部摩擦

2.13.1 关于内部摩擦的测量和说明

力学谱是测量材料内部摩擦的通用工具（Fantozzi,1982）。通常，一个扭转的摆被用来对一个样品施加简弦压力，响应（应变）相对于压力有一个滞后，它提供了损耗因子，即内部摩擦力。在这样的试验中，普遍的做法就是把内部摩擦力表示为 Q^{-1}。由于这种实验取决于测试技术的特性，因而可能存在混淆，换言之，是否测量 Q 而不是测量与应力-应变滞后角成比例的参数，都有可能存在混淆。如果 Q 是从一个振动自由衰减曲线中获得，应用式（2-32）定义的对数减量计算，则问题可以被解决。

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \beta T = \frac{\pi}{Q} \tag{2-32}$$

式中，x_n 和 x_{n+1}是被一个周期 T 运动分开的两个邻近转折点幅值。在实际实验中，人们很难调整机械系统在一个很宽的频率范围段内振动。对于质量-弹簧系统来说，目前作者已知的最宽的频率范围，涉及 Gunar Streckeisen（1974）的工作，其中使用了拉科斯特弹簧的垂直地震检波器被调整产生 7 ~ 140s 的振动周期范围。由于获得宽变化范围的特征模态是一件困难重重的事，因而内部摩擦一般用一个不运动的试样来确定。我们下面考虑这样的情况。

2.13.2 非振动试样

在典型的、用来测量内部摩擦的扭转摆中，试样的质量非常小。举例来说，这样的单摆可能是以全差分电容传感器初始版本为依据建立的，用来研究磁弹性金属丝（Atalay 和 Squire，1992）。由于拥有许多精巧、敏感的仪器，Atalay 和 Squire 仪器属于“可

逆”式传感器。试样顶端的蚕丝纤维用来提供试样的最小拉紧力。他们使用一个驱动模式下的线性旋转差分电容传感器（LRDCT）（Peters，1989）对敏感的磁弹性试样施加一个已知的应力，再用另一台 LRDCT 来测量应变幅度和由于弹性应变滞后于应力产生的角度。由此就像下面显示的那样，他们测量了迟滞角（不包括 Q）。

在不考虑惯性项的情况下，试样响应 X 与周期性外部力 F 的关系可表示为

$$F = Kx = (k + \mathrm{j}\zeta)x = F_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{2-33}$$

因此传递函数为

$$\frac{x}{F} = k^{-1} - \mathrm{j}\,\frac{\zeta}{k^2} \tag{2-34}$$

从式中我们可以看出，实验不能得到 Q^{-1}，而是滞后角度 ζ/k，其中 k 为常数。或许这个用来表现内部摩擦力的测量角度相当于 Q^{-1}，因为对于频率为 ω_0 的振子来说，$k = m\omega_0^2$，且对于自由衰减振子来说 $Q = m\omega_0^2/\zeta$。然而，请记住，这个 k 的表达式并不能用于我们刚才描述的非振动实验。如果考虑了一个可调整的振子，那么这样一个实验和将要测量的之间存在频率平方的差异性。

这个问题重要性的案例可以在 Lakes 和 Quakenbush（1996）的论文中找到，论文概要如下：

“阻尼及 $\tan\delta$ 在成十上百的频率 v 范围内，遵循对 v^{-n} 的依赖关系，其中 $n \approx 0.2$。这种依赖性对应拉伸指数松弛函数，它被归咎于错位点缺陷机理。这并不符合自组织临界错位模型，该模型预测 $\tan\delta \propto A^{-2}$。金属的错位阻尼和高阻尼金属、机械焊接剂性能以及卡文迪许扭秤中的支撑金属丝的演化有关。”

目前的争论表明，由 Lakes 和 Quackenbush 完成的实验和 SOC 模型并没有太大的分歧；理论和实验两者之间指数差异值只有 0.2，而不是他们认为的 1.8。

2.13.3 内部摩擦阻尼的等时性

众所周知，在自由衰减的黏性阻尼情况下，振动频率由于阻尼的存在而依照下式降低：

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (2Q_v)^{-2}} \tag{2-35}$$

且强迫振动振子的共振频率则降低的更多（Marion 和 Thornton，1998）。但很少有人知道测量这个阻尼“红移”是一件多么困难的事情，这带来了海森伯测不准原理的特征。同时，也很少有人知道，大量的阻尼实验证明，在某些系统中，振动频率也许完全不由阻尼决定，即振子是同步的。一个线性齐次微分方程不能实现等时性，但按下面修改阻尼项时，我们可以通过一个非线性的形式得出等时性：

$$\frac{\omega}{Q}\dot{x} \rightarrow \frac{\pi}{4}\,\frac{\omega}{Q}\sqrt{\omega^2[x(t)]^2 + [\dot{x}(t)]^2}\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) \tag{2-36}$$

其中符号（$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$）是速度的代数表示形式——这导致运动方程即使在没有出现平方根的情况下依旧是非线性的。对于小的阻尼来说，平方根项可以等价于随时间变化的运动振幅与角频率的乘积。

其他的阻尼模型也有发生的可能性，并在 Peters（2002a，2002b，2002c）中被标出，从中我们依然可以看出波形由于非线性而产生的谐波失真。在 Peters 和 Pritchett（1997）的论文中，显示出振动具有等时性。

对于大的 Q 值，滞后角（单位 rad）用 $\delta = 1/Q$ 表示。研究人员通常测量出 δ，并将内部摩擦的大小指定为 Q^{-1}。正如先前指出的，对于黏性阻尼振子，Q 与频率成正比。因此，对于黏性阻尼，内部摩擦与频率成反比。

对于迟滞阻尼，我们得到以下结果：

$$\tan\delta = \alpha = \frac{h}{k} \tag{2-37}$$

其中变量由式（2-19）定义。对于小阻尼来说，$\tan\delta = \delta = Q^{-1}$，我们发现迟滞阻尼的内部摩擦与频率的平方成反比，因为 h 为常数，且 $k = m\omega^2$。

2.14 数学技巧——阻尼的线性近似

2.14.1 黏性阻尼

在胡克定律表达式中，$F = -kx$，通常我们通过将 k 变为一个复数系数来近似迟滞振动，这也是其他领域的标准做法，比如对电磁媒介损耗的描述。毫无疑问，这样的做法通过标准化后更具有普遍性，被应用于通过绘制矢量图的方式解决电子工程学的模拟电路问题，此矢量图方法由 Steinmetz（1893）发明。

我们通过表达式 $x(t) = x_0 e^{j\omega t} = x_0\cos\omega t + jx_0\sin\omega t$ 认识到简弦变化包含在复数指数表达式的实部中（或者虚部）。应用牛顿第二定律，并且将弹性系数表示为 $ke^{j\delta}$（$\delta \ll 1$，小阻尼），我们得到有阻尼的简弦振动方程

$$m\ddot{x} + kx + (jk\delta)x = 0 \tag{2-38}$$

其中采用了近似表达：$\cos\delta \to 1$，$\sin\delta \to \delta$。

然而，由于 $\dot{x} = j\omega x$ 和 $\frac{k}{m} = \omega^2$，所示方程式（2-38）可以重写为

$$\ddot{x} + \omega\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2-39}$$

因此我们可以看出，阻尼系数 $\omega\delta = \omega/Q = 2\beta$ 允许我们可以将对数缩减量 Δ 用 x 与 F 的滞后角 δ 的形式来表示，即 $\Delta = \beta T = \pi\delta$（注意，由于是否有阻尼所造成的差距很小并且很难测量，所以在此我们不对此进行区分）。如果 β 与频率无关，那么 δ 与频率成反比，这在试验中是很少被注意到的。

2.14.2 迟滞阻尼

式（2-39）不能恰当地代表一些最重要的工程系统。对于那些被标记“迟滞”的系统，我们必须用一种不同的方式来表示复弹性系数。我们假设 $F = -(k_{complex})x = (k + jh)x$，其中 h 为实常数。由于 $dx/dt = j\omega x$，我们得到如下运动方程：

$$\ddot{x} + \frac{h}{m\omega}\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2-40}$$

由于假设 h 是真正的常数（不受频率影响），所以位移和力之间的滞后角为

$$\delta = \frac{h}{k} = \frac{1}{Q} = \frac{h}{m\omega^2} \tag{2-41}$$

可以看到 δ 与频率的平方成反比。（注意，这里的 δ 和图 2-6 中的 α 相同）。需要注意的是，弹性系数的复数形式是不能单纯地从普通的黏弹性理论中获得。这样的理论需要大量的松弛时间（伸展指数）（Speake 等，1999）。

2.15 内部摩擦物理学

2.15.1 基本概念

所有的阻尼来自于由于大量的相互作用而产生的事物复杂性变化的程度，其表现形式为内部的非保守模式或者包含环境的外部模式，这对于那些最接近教科书上方程表达的系统也是成立的。举例来说，作者曾经试图用黏性阻尼液体来制作理想的简弦振子。尽管它们结构复杂并且不严格遵守斯托克斯定律-拉力和速度成正比。非线性的纳维-斯托克斯方程可以描述它们，但除了一阶近似外，相对于当今传感器可以感知的精度来说并不真正好，非线性的纳维-斯托克斯方程不是一种简单形式。

最接近理想的黏性阻尼振子可能是这种类型，就是阻尼力源自依据法拉第定律产生的涡流。一个磁体被贴在振子上，且当它运动接近导体的时候，磁通量的时间变化率产生一个和速度成正比的减速力。因为确实存在一个力，且因为楞次定律，阻尼项具有物理意义。这种情况可以成为一个完整的理想模型，除了一个要素——如果磁体也要振动的话，那么磁体就是机械系统的一部分，它必须具有结构上的完整性。由于出现在结构上的载荷（对不同重量的法向反力），所以总会出现一些蠕变。这种蠕变最终不可避免，因为明显不存在一个应力阈值，低于这个阈值，塑料变形就终止。认识到与惯性质量有关的力（牛顿第二定律）和重力一样重要是要紧的事。在太空中失重和真空的状态下，围绕弹性构件（比如一个弹簧，相对于单纯的摆来说）设计的系统会经历阻尼。

2.15.2 错位和缺陷

对诸如错位这样的力学缺陷被相当部分的科学团体忽略的程度让人惊讶。更惊讶的是当有人考虑缺陷在另一个领域——电子学中的重要性。我们现今这个信息时代（计算世界）就是从广泛认识到这些被称为杂质的缺陷的重要性开始的。自从用一些其他的三价和五价的小聚合体替换了硅原子以后，N-型和 P-型半导体材料才成为现代生活的必需品。

固体强度远低于理想（完美）晶体模型的预期结果。错位是导致这个结果的罪魁

祸首。它们对于工程材料的影响被如此表述："当（孕育万物的）大自然填充她厌恶的真空时，她很少做得完美。"不幸的是，很少有基础科学的学生受到缺陷物理学方面的训练。甚至，对这些特性提供一个有条理的基本描述也很难，所以只有极少的科学家对它的重要性有一些皮毛认识。

"黏弹性"是一种误导性的术语。把单词黏性和弹性组合起来表明状态变量随时间变化平滑，也就是说像一个黏滞的流体。不幸的是，无论是和"域"还是和"粒子"相联系的迟滞并不正确。在磁场中，可以很容易证明非平滑现象（抽筋）的存在，这种现象被称为巴克豪森（Barkhausen）噪声。尽管这个现象在 1919 年被 Barkhausen 证实存在，但是只有最近的一些研究开始对它的复杂性有更进一步的认识（Urbach 等，1995a，b）。

与巴克豪森效应以某种方式联系的类似现象就是 PLC 效应。在施加应力状态下，合金时常出现不连续的应变增加（跳跃）。作者甚至演示过类似的应变复原，用"拍击"催化。证明这些效果的多晶体金属明显收到"粒度"的影响。和"颗粒状材料"不同的效应成为了近一段时间研究的热门题目。甚至纯的多晶体金属也显示出这些性质。德语中用 zinngeschrei（ = tin cries）这个词来描述锡（罐头）在大应力作用下的变形。那些曾经试图弄弯大直径钨丝的人都经历过这种现象，因为这种非平稳应变可以同时被触觉和听觉捕捉到。

还有一种被认为在未来具有工程应用潜力的材料，它显示出"粒状"行为——形状记忆合金（SMA）的特性。如果一个形状记忆金属试样在马氏体金相温度下循环，那么它会发出声音（Amengual 等，1987）。有关迟滞的一张好图（取自他们的研究工作）和一些其他优秀的文章，参见 Sethna 教授的网页 http：//www. lassp. cornell. edu/sethna/hysteresis/ReturnPointMemory. html。这些振动噪声输出和 PLC 效应有关，且具有惊人的重复性，尽管它们具有十分复杂的行为。

因此，存在大量的实验证据反对过分简化的观点，该观点认为迟滞阻尼可以通过一个简单的线性微分方程进行有意义的表述。对于好的数学处理来说，必要的非线性项超越"混沌"至"复杂性"世界。尽管对很多人来说是困惑的，但确定性系统的混沌在很多情况下是容易处理的（采用的方程可以数值积分）。阻尼问题要远比确定性系统混沌复杂。对我们理解的挑战部分来自于在具备了对中尺度缺陷及缺陷结构位置认真调查研究之前需要花费的时间。正如有了齐纳（Zener）模型，如果我们使用单词滞弹性来描述"而不是"弹性的系统，那么对于这个十分重要的、且对科学和工程许多领域大多还未知的极难理解的科学来说，术语"细观非弹复杂性"是一个合适的标签。

2.16 齐纳（Zener）模型

2.16.1 假设

黏弹性的离散单元接触算法为一些阻尼现象提供了良好的基础，然而黏弹性作为迟

滞阻尼的近似则行不通。它在物理学和工程学的声望是接下来的细节讨论的保证，因此失败的案例可以作适当的记录。

依据齐纳（Zener）的例子，下面的这个线性微分方程涉及应力 σ、应变 ε 和它们的一阶时间导数：

$$\sigma(t)+\tau_\varepsilon\dot{\sigma}=E_1(\varepsilon+\tau_\sigma\dot{\varepsilon}) \tag{2-42}$$

式中，τ 是松弛时间（下标 ε 表示常应变，下标 σ 表示常应力）；E_1 是松弛弹性模量（缓慢进程中的应力和应变之比）。名义上，$\tau_\sigma>\tau_\varepsilon$，符合应变滞后应力。对于周期性变化，有

$$\sigma(t)=\sigma_0 e^{j\omega t},\varepsilon(t)=\varepsilon_0 e^{j\omega t} \tag{2-43}$$

将式（2-43）代入式（2-42），得到：

$$(1+j\omega\tau_\varepsilon)\sigma_0=E_1(1+j\omega\tau_\sigma)\varepsilon_0 \tag{2-44}$$

复数弹性模量由下式定义：

$$E_C=\frac{1+j\omega\tau_\sigma}{1+j\omega\tau_\varepsilon}E_1 \tag{2-45}$$

并根据式（2-46），将应力和应变联系起来：

$$\sigma(t)=E_C\varepsilon(t) \tag{2-46}$$

由式（2-45），得到弹性模量的实部和虚部为

$$\mathrm{Re}(E_C)=\frac{1+\omega^2\tau_\varepsilon\tau_\sigma}{1+\omega^2\tau_\varepsilon^2}E_1 \tag{2-47}$$

$$\mathrm{Im}(E_C)=\frac{\omega(\tau_\sigma-\tau_\varepsilon)}{1+\omega^2\tau_\varepsilon^2}E_1 \tag{2-48}$$

在所有情况下，独立变量或者“频率”方便用无量纲参数，$\omega\tau=\omega\sqrt{\tau_\varepsilon\tau_\sigma}$。

使用极坐标形式表示很方便，所以有

$$E_C=|E_C|e^{j\delta} \tag{2-49}$$

其中 $|E_C|$ 是通过计算实部和虚部总和，并对和开平方根而得出。很容易看出，δ 是确定系统阻尼损失的滞后角。此外，由式（2-47）和式（2-48）可知其遵守公式：

$$\tan\delta=\frac{\omega(\tau_\sigma-\tau_\varepsilon)}{1+\omega^2\tau_\sigma\tau_\varepsilon} \tag{2-50}$$

2.16.2 模量和损耗的频率依赖性

齐纳模型一个必不可少的特征如图 2-15 所示，其中“未松弛”的高频弹性模量服从下面关系式：

$$(E_1E_2)/(E_1+E_2)=E_1(\tau_\sigma/\tau_\varepsilon)。$$

在黏性阻尼模型中，阻尼数值由 βT 的乘积决定，并等于减量的对数。当阻尼“常数”β 值恒定不变时，减量的对数和时间成正比。图 2-16 将标准模型计算的减量的对数与 β 为常数的曲线相对照。图中还分别显示了当 $\omega\tau=10$、1、0.1 时的一组迟滞曲线。需要注意的是，阻尼只有在 $\omega\tau$ 接近 1.0 时才变得很大，这和图 2-15 底部曲线一致。因

为这个原因，图上标出了点 a 到点 f，再由点 f 回到点 a 的曲线，从而演示应力在穿过迟滞回线所做的功。功的代数符号围绕回线变化，且一个回线所做的净功刚好等于回线的封闭面积。

为使基于齐纳（标准线性）模型的阻尼符合简单的近似黏性，必须使 $\omega\tau \gg 1$。即振子的周期必须短于松弛时间中较小的那一个，如同图 2-16 底端所示。

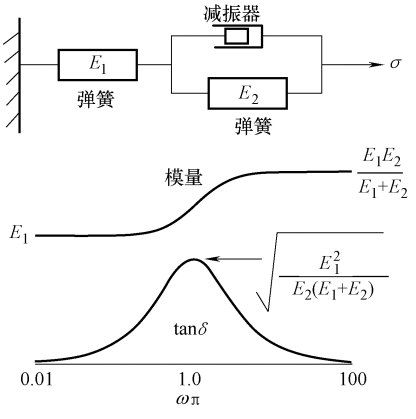


图 2-15 滞弹性齐纳模型—底部曲线分别是模量和损耗随“频率”的变化曲线

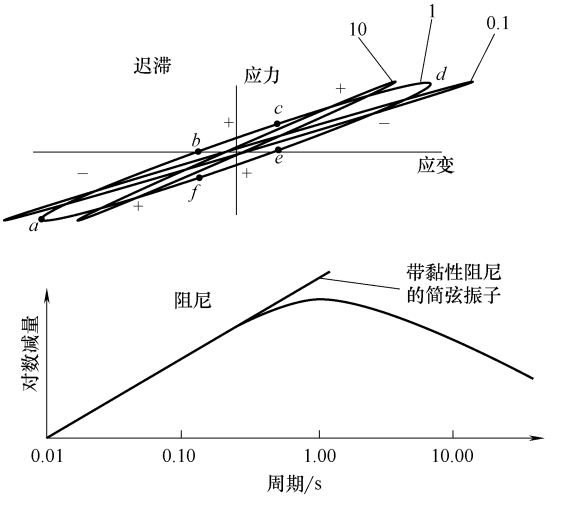


图 2-16 齐纳模型的特性

2.16.3 成功的黏弹性模型

黏弹性对于某些材料来说，作为阻尼的近似是完全足够了。在黏弹性模型应用到应变变化几乎是连续的场合时，作为迟滞基础的流体特性的假设被期望最接近正确。看起来最真的流变学类型的材料大多是由长链聚合物制造出的固体，比如各种各样的塑料。然而，这样的材料可能带来惊人的结果。图 2-17 是使用尼龙单丝做样本（8lb[㊀]的渔线）研究出的结果。一对扭转的自由衰减记录对应两个不同的温度——290K（室温）和 390K（超过尼龙玻璃化的温度）。当温度升高到超过玻璃化温度（从 18.2s 变化到 27.8s），尽管这时观察到了周期增加了很多，但发现对数减量几乎不变。这与预期的在高温条件下软化材料会导致一个更大的阻尼不相符合。这个效果和我们之前提过的铸铁的效果相反，尽管铸铁非常坚硬，但铸铁的阻尼并不小。因此，软化并不导致阻尼的上升。

尽管对于图 2-17 所示两种衰减中存在蠕变，但蠕变在更高温的情况下更为显著。图 2-17 底部图中较低曲线演示了这点，这条曲线是计算机拟合曲线，其中所需的最合适的长期项被去除了来演示蠕变。在这两个衰减情况中，通过把 A/D 数据（Dataq DI-

㊀ 1lb = 0.45kg。

154RS）导入到 Excel 中计算出对数减量，然后反复调整参数，取得最佳拟合效果。

尽管玻璃的阻尼通常用黏弹性理论来处理，但是 Granato（2002）最近已经通过缺陷对这些材料建立模型。在他的论文中，Granato 作出如下陈述："由于错位导致晶体变形，因此间隙是导致玻璃在接近或超过玻璃化温度时变形的微观基本因素。"

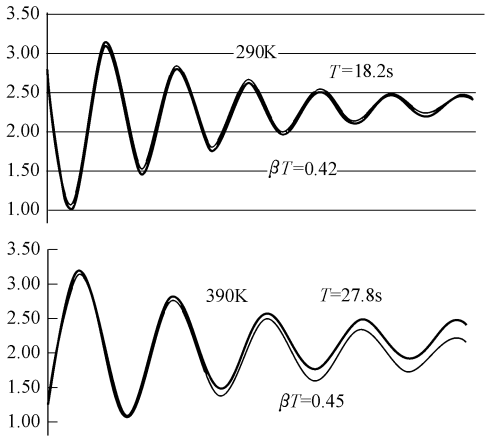


图 2-17　先低于尼龙玻璃化温度、再高于尼龙玻璃化温度的单丝尼龙扭转自由衰减记录（尽管在高温时模量大大减少了，但阻尼并不如此）

2.16.4　黏弹性模型的失效

遗憾的是，对于呈现的齐纳模型的严谨优美的理论来说，存在相当数量的力学系统，其 Q 值和频率并不成正比，反而是和频率的平方成正比。许多长周期的机械振子（设计成各种单摆）的对数衰减（$\Delta = \pi/Q$）都被测量过。在所有的情况中，这些系统都通过 $\Delta = \beta T \alpha T^2$ 而不是 $\beta T \alpha T$ 来近似表达。类似情况在除了摆以外所有的力学振子中被发现。举例来说，在 Gunar Streckeisen 和 Erhard Wielandt（由于他发明了广泛应用的 STS-1 地震波检测器而闻名）的地球物理学研究中。在 Streckeisen 攻读博士学位期间，Streckeisen（1974）测量了一个垂直式 5100-V Sprengnether 长周期地震检波器的数值阻尼（分数临界阻尼）。在去除了速度传感器的磁铁（为了减少电涡流和空气阻尼的影响）后，他发现数值阻尼与周期（在 7 ~ 140s 范围内）的平方成正比。在这个周期范围内，他做了 30 次试验，发现阻尼从大约 0.0008 增加到了大约 0.3——变化系数大概为 400，而不是对黏性阻尼预期的变化系数 20。引用 Wielandt（私人对话）的话来说，"数据十分明显。"

2.17　迈向通用型阻尼模型

2.17.1　与频率二次方成比例的阻尼容量

Q 对频率二次方的依赖关系（对数减量和周期的平方成正比）等同于摩擦力独立于频率。为了支持普遍性的说法，导论（2.2.2 中）中提到，存在三个不同的系统具有这个特性：（ⅰ）刚刚讨论过的垂直地震波检测器，（ⅱ）各种垂摆，（ⅲ）由 Kimball and Lovell（1927）第一个完成的摆杆内部摩擦力测量，当杆绕水平轴旋转时，Kimball and Lovell 测量了杆的末端的横向挠度。

2.17.2 垂摆和通用型阻尼

图 2-14 为作者说明通用（迟滞）阻尼的实验中的一个案例。其他阐述迟滞阻尼的专著，包括了 Syracuse 大学的 Peter Saulson 的，他的著作经常在文献中被引用（参见 Saulson 等，1994）。

Braginsky 开创性的工作（对 LIGO 来说十分重要）在上文关于小力的测量及噪声部分被提到。他和他的莫斯科研究小组成员争论石英的内摩擦力会在 0.1 ~ 10Hz 之间与频率无关（Braginsky 等，1993）。

一篇被再三引用的关于迟滞阻尼的论文是由 Quinn 等（1992 年）发表的，该论文涉及长周期垂摆构造中的材料问题。[根据他们的研究而提出的该类型垂摆第一次描述是在几年前的科学论文中（Peters，1990）] 在后续论文中，Speake 等（1999）作出如下表述："滞弹性类似物和其引起的 $1/f$ 噪声都在其他的一个很宽范围过程（比如绝缘体和磁体过程）中发现，这些过程用依赖频率的感受物来描述。"

巴克豪森效应标志的抽筋（非连续性变化）现象第一次在力学实验中发现，该实验诞生了亚稳态论文。根据在 James Brophy（Brophy，1965）论文里的思考，他在 1990 年的论文存在这样的假设："细观动力学单摆的抽筋行为是一种典型的力学上的巴克豪森效应。"

2.17.3 修正的库仑模型——背景

接下来的结果自然而然地从全差分电容传感器的应用到对力学振子的研究，建立内摩擦对长周期垂摆影响模型的努力显示出一些对大多数人来说出人意料的结果——Charles Augustin Coulomb 建立的物理学基本原理可能比人们目前所理解的更为广泛。大多数物理学人士不将库仑的名字和静电学法则以外的贡献联系起来。然而事实上，自从库仑给出静态和动态的系数的经验描述后，工程师们就一直在滑动摩擦中使用他的名字了。由于对土壤土木工程抱有浓厚的兴趣（Heyman，1997），库仑还提出了别的假设——理解颗粒状流动甚至某些裂缝的根据。关于后者，莫尔准则应用于库仑失效包络面，定义了一个"内摩擦系数"，它用来预测脆性破坏（Gere 和 Timoshenko，1996）。

库仑摩擦在经验上是比较简易的（至少作为第一个近似值来说），因为当两个表面之间存在相对运动时，库仑摩擦仅取决于两个表面之间的法向力以及速度的代数符号。如同多体系类型中的许多问题，滑动摩擦的一套完整理论远非目前所认识的这样。过分单纯化教科书来解释能量损耗（通过描绘两接触固体表面的"丘陵和山谷"）是无用的。这种想法如同试图理解光学接触现象一样天真。两个正交面向的圆柱形石英纤维，允许碰触，可能经历的原子键合力是惊人的强大，远远超过了范德华类型的微弱吸引力。在这样的演示中，干净的表面是成功的最重要要素，这引发了另一个问题——内摩擦力和表面物理之间的联系。

机械能到热能的转变必定涉及非线性过程（雪崩状或者瀑布状）。一个对缺陷结构的相互作用的启发性描述（产生热量并最终导致失效）是图 2-18 显示的汤姆·埃伯

(伊利诺伊理工大学)的声子三角关系。作者在包括地球这样的更大尺度上应用埃伯的三角来解释地震。每个人都认同金属丝的弯曲并不是直接从最初的初始状态沿着宏观的三角形上边走向失效。

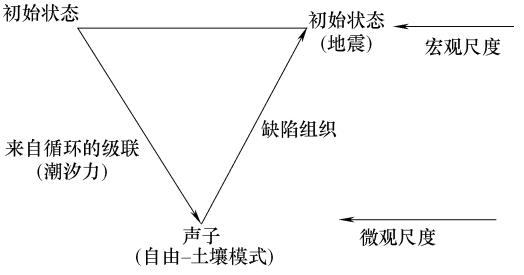


图 2-18　启发性描述：材料是如何失效的——与阻尼有关的过程

通过级联，必然存在一个向下的通往微观尺度失效的路径。这些级联在磁铁样本上可能引起巴克豪森噪声，并在无磁性金属合金中发出声音(PLC 效应)。失效需要缺陷组织向上的路径，它的机理还没有搞明白。关于组织这条边一种第一定律的可能含义就是其中的自组织临界性。在磁性的例子中，Erber 使用了磁通门磁力仪来提高对失效的预测，因为已经证实了在失效情况中，磁滞现象是循环失效过程中尺度结构变化的一个敏感标志。从这些研究中我们可以推断噪声、阻尼与失效之间有一些尚未发现的联系。

表面摩擦被估计以某种形式与内部摩擦具有联系，二者最大的不同是表面摩擦具有更多的缺陷，它们带来重新分配能量。表面拥有更密集的单元（降低阶数）可能是接下来显示的改进的内部摩擦模型和表面摩擦之间不同的一个重要因素。

2.17.4　修正的库仑阻尼模型——运动方程

在下列关于内部摩擦的阻尼模型中，库仑关于滑动摩擦的定律是通过假设摩擦系数并不恒定，并且涉及能量定律中振动能量 E 来修改的，即

$$m\ddot{x}+cm\left[\frac{2E}{k}\right]^{\lambda}\operatorname{sgn}(\dot{x})+kx=0,E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{2-51}$$

式中，c 为由 λ 确定的常数；对于库仑（滑动）摩擦，$\lambda=0$；对于振幅独立的迟滞类型阻尼，$\lambda=1/2$；对于非振幅独立（比如大雷诺数流体）的阻尼类型，$\lambda=1$。在所有情况中，若 $c\ll1$（小阻尼），阻尼是频率的二次方，那么内部摩擦有：$Q^{-1}\propto\omega^{-2}$。尽管方程式（2-51）是非线性的，但该方程很容易求解，一会儿我们将看到非线性是衰减状态中产生谐波的原因。

为了包括振子的 Q，很方便把方程式（2-51）重写成标准形式。在迟滞阻尼的情况下（$\lambda=1/2$），方程式（2-51）变为

$$\ddot{x}+\frac{\pi\omega}{4Q_{\mathrm{h}}}\sqrt{\omega^2x^2+\dot{x}^2}\operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0 \tag{2-52}$$

同样，对于非振幅独立阻尼类型（$\lambda=1$），有

$$\ddot{x}+\frac{\pi}{4y_0Q_{\mathrm{f0}}}(\omega^2x^2+\dot{x}^2)\operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0 \tag{2-53}$$

式中，y_0 是 x 的振幅的初始值（x 的最大值）；Q_{f} 和在迟滞阻尼模型中一样——非常数。

更确切地说，在这个情况下，Q 随振幅的减少而增加。另一方面，只受库仑（滑动的，$\lambda=0$）摩擦影响的振子的 Q 随着振幅的变化而减小，其运动方程的标准形式如下：

$$\ddot{x}+\frac{\pi\omega^2 y_0}{4Q_{c0}}\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2 x=0 \tag{2-54}$$

在方程式（2-53）和方程式（2-54）中，下标 0 标示随时间变化的 Q 的初始值。由 $Q_{c0}/y_0=\pi/(4\Delta_x)$，方程式（2-54）等同于方程式（2-12）。

正如一些例子表明的，一个振子可能同时受三种类型的摩擦影响。可以求解下面方程表示的系统

$$\ddot{x}+\left[\frac{\pi\omega^2 y_0}{4Q_{c0}}+\frac{\pi\omega}{4Q_h}\sqrt{\omega^2x^2+\dot{x}^2}+\frac{\pi}{4y_0Q_{f0}}(\omega^2x^2+\dot{x}^2)\right]\mathrm{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0 \tag{2-55}$$

衰减状态中的任意时刻，总的 Q（随时间变化的 Q）由下式决定

$$\frac{1}{Q(t)}=\frac{1}{Q_c}+\frac{1}{Q_h}+\frac{1}{Q_f} \tag{2-56}$$

从式（2-56）中我们可以看出，最小的 Q（最大阻尼项）在公式中起主要作用，这和以前的串联电容情形有点类似。

当所有的 $Q_s\gg1$ 时，对于振幅的时间依赖性来说（转折点，$y(t)=|x_{\max}|$），察看解析解具有指导意义。在没有摩擦参与的情况下，首先通过注明能量的时间导数为零方式来考虑能量，以得到解析解，即

$$\dot{E}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=\dot{x}(m\ddot{x}+kx)=0(\text{没有摩擦}) \tag{2-57}$$

当存在摩擦时，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 是由抵抗摩擦力所做功的时间导数来决定，即 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 ωyf 成比例，其中 f 表示摩擦力。在库仑摩擦情况中，f 是常数（由 y_0 决定），所以 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 $E^{1/2}$ 成比例。对于迟滞阻尼，f 与 y 成比例，所以 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 E 成比例。对于流体阻尼，f 与 y^2 成比例，所以 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 与 $E^{3/2}$ 成比例。因此，综合情况可以表示如下

$$\dot{E}=-(c_1+c_2\sqrt{E}+c_3E)\sqrt{E} \tag{2-58}$$

因为能量和 y^2 成比例，所以我们可以写出随时间变化的振幅方程

$$\dot{y}=-c-by-ay^2 \tag{2-59}$$

式中，a、b、c 为常数。这个一阶方程的解可以通过积分表格求出，并且结果由 c 相对于 ab 乘积的大小决定。就目前的研究目的来说，我们把库仑阻尼限制在一个并不突出的情形，其中的解包含一个指数（对于大的 c 值，我们可以引申到对应的一般情形：用 tan 或倒数项表述）。利用 $r=(b^2-4ac)^{1/2}$，当前方程解的结果如下

$$y=\frac{b(p-1)+r(p+1)}{2a(1-p)} \tag{2-60}$$

其中 $4ac<b^2$ 和 $\alpha=2ay_0+b-r$，$\beta=2ay_0+b+r$，$p=\dfrac{\alpha}{\beta}\mathrm{e}^{-rt}$。

在 $c=0$ 的情况下，式（2-60）可以简化为下列形式，对于曲线拟合是有用的：

$$\frac{1}{y}=\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{y_0}\right)\mathrm{e}^{bt}-\frac{a}{b} \tag{2-61}$$

当 $a=0$ 时，曲线拟合的更好的表达式是：

$$y=\left(y_0+\frac{c}{b}\right)e^{-bt}-\frac{c}{b}(\text{直到 } y=0) \tag{2-62}$$

表 2-2 总结了基于修改的库仑阻尼模型做出的曲线拟合。

表 2-2　对转折点的曲线拟合

如果没有阻尼 $\dot{E}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=\dot{x}(m\ddot{x}+kx)=0$,没有摩擦
有阻尼(E 与 y^2 成比例,$\hat{E}$ 与 ωy 成比例,有摩擦力) $\dot{E}=-(c_1+c_2\sqrt{E}+c_3E)\sqrt{E}$
等效于下面公式(c 对应库仑阻尼,b 对应迟滞阻尼,a 对应流体阻尼) $\dot{y}=-c-by-ay^2$
一般的解为 $y=\frac{b(p-1)+r(p+1)}{2a(1-p)}$ 其中 $\alpha=2ay_0+b-r,\beta=2ay_0+b+r,p=\frac{\alpha}{\beta}e^{-rt}$
特例,$c=0$ $\frac{1}{y}=\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{y_0}\right)e^{bt}-\frac{a}{b}$
特例,$a=0$ $y=\left(y_0+\frac{c}{b}\right)e^{-bt}-\frac{c}{b}$　(直到 $y=0$)

2.17.5　模型输出

图 2-19 是三种摩擦共同影响下的衰减状况。注意：Q 最初如何上升到峰值（该值小于仅考虑迟滞阻尼情况下的常数 Q 值），然后下降。最初上升的原因是依赖振幅的阻尼项（大小由系数 a 决定），之后下降的原因是库仑阻尼项（大小由系数 b 决定）。

表 2-3 中用于绘制图 2-19 的代码在这里由于两个原因被复制：

① 修正的库仑模型可以数值求解，一般用于解决阻尼问题，这种简便性可以表示出来。

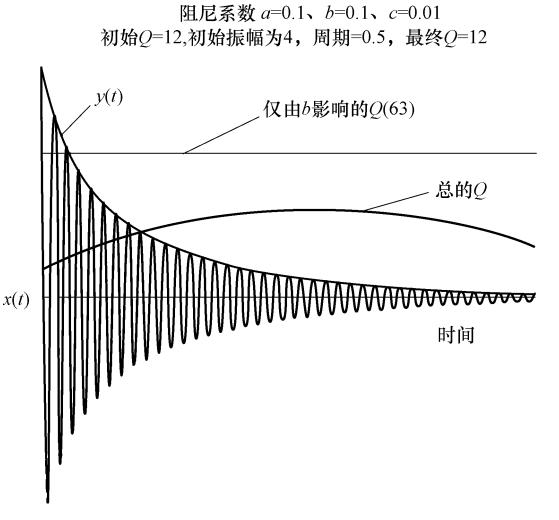


图 2-19　基于式（2-55）和式（2-60）建立模型产生的结果

② 阐明一种积分算法，证明具有直观的、简易的、功能强大的 Cromer-Euler 技术，Alan Cromer 第一次把该方法描述为：相对于 Euler 提出的不稳定“最初近似”而言，此方法是“最终近似（LPA）”方法（Cromer，1981）。在过去的 20 年内，作者在大量的案例中采用了 LPA 方法：从美国反卫星计划的卫星星历表的生成到确定性系统混沌的简单、多体非线性问题。

2.17.6 实验案例

表 2-3 中的程序代码是用来决定一个给定实验案例性质的。在过去，人们常常天真地假定整个衰减过程记录是指数的。特别是收集的数据较长时，阻尼显现出非线性。接下来的两个实验案例将会支持这种观点：一个是接近完美的（非线性）振幅依赖型（流体）阻尼的特例，另一个是振幅依赖阻尼与迟滞阻尼的混合，但不包含任何库仑的影响。库仑阻尼时常表现出“要么完全，要么没有”的状态，这取决于是否存在不需要的、包括滑动的机械接触。在案例发现了一个值得注意的例外：在狭窄运动区域内，单摆受涡流阻尼影响（Singh 等，2002）。

用于产生图 2-14 中数据的单摆同样被使用如下：在其底部贴上一个大的塑料薄片，使它的运动（运动方向上表面的法向矢量）以湍流的方式扰动大量空气。如同图 2-20 所预期的，存在一个初始支配（高等级）的振幅依赖阻尼。

速度（最大值）如同之前讨论一样通过光电门来获得。图 2-20 中所示表达式与式（2-59）和式（2-61）一致。那些手动收集并汇总入 excel 的数据产生出“锯齿状”曲线，而根据式（2-61）用电脑拟合的曲线是一对光滑曲线。值得注意的是，空气阻力的二次方程式（由 $a=0.036$ 决定）在衰减开始阶段比黏性阻力高 40%。循环了 37 个周期后，空气阻力的二次方影响已经小于恒定的黏性阻尼 Q 的影响，大约要小 60%。

图 2-21 中流体阻尼“汤-罐”单摆的数据是用 Bush 的黑豌豆罐得来的。填满东西、密封的一个长 11cm 直径 7.4cm 的直圆柱筒，通过一对刀锋的反向开口进行水平悬挂（Peters，2002a，2002b，2002c）。罐的运动由一个与 Dataq A/D 转换器连接的 SDC 传感器记录。但同类型的实验（同样性质的流体）却产生了黏性衰减的记录，目前的情况只包括所谓的“流体”摩擦，如“速度”的平方。为了绘制图表，将 A/D 转换器的数据输入到微软软件包 excel 中，对数据反复调整拟合，得到对振幅的“拟合”系数 a、b、c，因此拟合很容易完成，因为 b、c 证明必须都为 0。

在第二种案例中，使用了一个真空单摆，它不是一个单纯的阻尼模型，如图 2-22 所示，阻尼具有迟滞和振幅依赖阻尼共同作用。尽管流体阻尼与振幅依赖阻尼有相同的模式（阻尼项与振幅平方成比例），词语“流体”并不能用来表述这种情况，因为系统只涉及固体材料。

这个真空单摆的所有衰减记录并不都产生如同图 2-22 所示的混合阻尼。观察到的结果都是十分短暂的，据推测零部件的出气是其中一个因素。

表 2-3　计算振幅时程响应 $y(t)$ 和积分运动方程获得 $x(t)$ 的 QuickBasic 程序代码，适合三种普通摩擦类型

```
CLS
    REM: setup display
    SCREEN 12: VIEW (0,0) -(600, 470): WINDOW (-.2, -5) -(1, 5)
    REM: assign constants and initialize variables
    pi = 3.1416: dt = 0.002: t = 0
    x0 = 4: x = x0: y0 = x0: xd = 0
    Period = .5: omega = 2 * pi/period: b = .1: a = .1: C = .01
    REM: print damping coefficients
    PRINT "DAMPING COEFFICIENTS: a = "; a; ", b = "; b; ", c = "; c
    r = SQR(b^2 - 4 * a * c): alpha = 2 * a * X0 + b - r
    Beta = 2 * a * x0 + b + r
    REM: Use a, b and c—set Q's to dampen (quadratic, linear, and constant resp.)
    qf = omega/2/a/y0: qh = omega/2/b: qc = y0 * omega/2/c
    REM: start integration loop
    LOOP0:
    t = t + dt
    REM: analytically compute amplitude (y = magnitude of x) at each time point
    p = alpha * EXP(-r * t)/beta
    y = (b * (p - 1) + r * (p + 1))/2/a/(1 - p)
    REM: integr. the eq. of motion to get x(t), using 3 fric. force/mass terms
    REM: The coeff."s ff, fh & fc correspond to: quadratic in speed (fluid),
    REM: linear in speed (hysteretic), and independ. of speed (Coulomb) resp.
    ff = (pi/4) * (1/y0) * (1/qf) * omega^2 * x^2 + xdot^2)
    fh = (pi/4) * (omega/qh) * SQR(omega^2 * x^2 + xdot^2)
    fc = (pi/4) * omega^2 * y0/qc
    REM: check algebraic sign - USESIGN BUT NOT MAGNITUOE OF VELOCITY
    IF xdot > 0 THEN GOTO SKIP
    ff: = -ff: fh = -fh: fc = -fc
    SKIP: xdoubledot = - ff - fh - fc - omega^2 * x
    xdot = xdot + xdoubledot * dt: x = x + xdot * dt
    REM: calculate the energy and then the amplitude to evaluate Q
    REM: could instead use analytical result q = (pi/4) * omega^2 * x/abs(ff + fh + fc)
    Energy = .5 * xdot^2 + .5 * omega^2 * x^2
    Amplitude = SQR(2 * energy)/omega
    REM: calculate loss per period due to friction
    loss = ABS(ff + fh + fc) * 4 * amplitude
    q = 2 * pi * energy/loss
    lF t < 1.2 * dt THEN PRINT "initial Q = "; 10 * INT(q)/10;
    IF t < 20 THEN GOTO SKIP2
    PRINT ",initial Amplitude = "; x0; ", Period = "; period;
    PRINT ",finalQ = "; 10 * INT(q)/10
    REM: DO GRAPH
    SKIP2: PSET(.04 * t,.5 * q/omega): PSET (.04 * t,.5 * qh/omega), 4
    PSET (.04 * t,4 * x/y0): PSET (.04 * t,0): PSET (.04 * t,48 * y/y0)
    IF t>20 OR y<0 THEN GOTO pause
    GOTO LOOP0
    Pause: GOTO pause
    RETURN: END: STOP
```

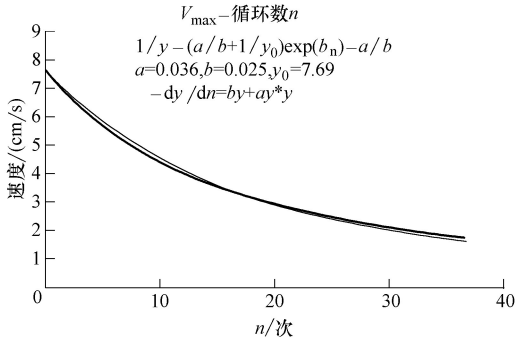


图 2-20 作为循环数 n 函数的空气阻尼单摆的衰减过程

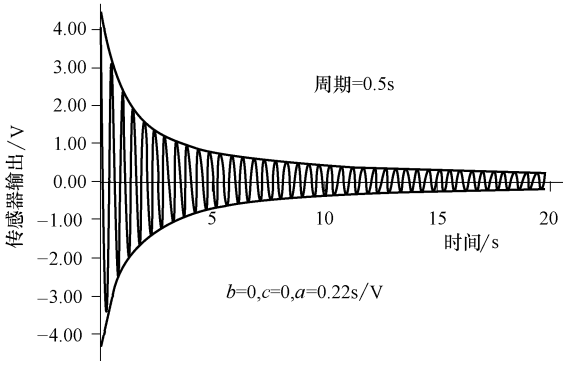


图 2-21 “汤-罐”单摆流体阻尼的例子［颗粒状的填充物（水和黑豌豆）导致摩擦力为速度的平方］

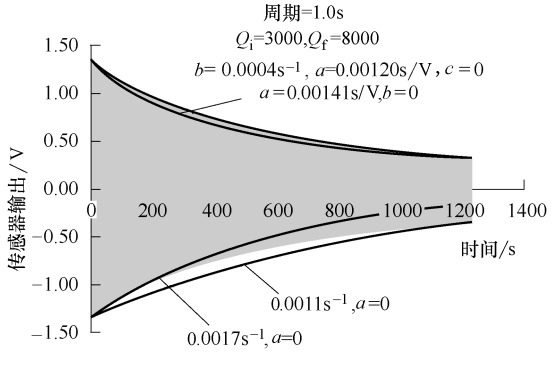


图 2-22 迟滞阻尼与振幅依赖阻尼两者混合案例

下面讲一下数值积分。

用一对等效的一阶微分方程代替对二阶微分方程积分两次——先是加速度，接下来是速度，得到更精确的结果。

举例来说，带黏性阻尼的简弦振子的运动方程可表述为

$$\dot{p} = -q - kp \quad \dot{q} = p \tag{2-63}$$

其中位置的变化用广义坐标 q 表示（这里不用 x 表示），对于动量 $p = m\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$，这里的质量 m 已归一化了。同样的，弹簧常数也归一化了。在理解物理问题时，将问题划归到它的最基础形式是一个非常普遍有效的解决方法。为趋势分析提供无用信息的常数常被“正则化”，这是一种普遍运用的方式，比如在混沌系统建模中就会被应用到。

二阶微分方程在数学上总是可以被降阶成一阶方程组，然而，方程组结果自然通过哈密尔顿原理导出，而不是牛顿力学公式。

2.17.7 阻尼与谐波项

方程式（2-52）到方程式（2-54）都是线性的，修正的库仑阻尼模型分别对应：（ⅰ）迟滞，（ⅱ）振幅依赖，（ⅲ）库仑阻尼。这三个案例的阻尼项可以表达如下：

$$\frac{f}{m} = \frac{\pi}{4}\frac{\omega}{Q}[\nu] \tag{2-64}$$

式中，f 为摩擦力；$[\nu]$ 是方波，它在傅里叶级数展开中的基本项等于振子速度的 $4/\pi$ 倍。举例来说，对于一个 $\pm h$ 的方波，基础振幅是 $\pm(4/\pi)h$。在本章考虑的所有类型的阻尼（用经典形式表示的时候）都对应一个基本的摩擦力 $f = m\omega v/Q$。这个结果很简单，这大概就是为什么物理学家视黏性阻尼为“无污点的”。然而我们仍需小心，只有在迟滞阻尼中 Q 才是恒定的（如同我们之前所说的那样）。对于振幅依赖的阻尼，$Q_f = Q_{f0}(y_0/y)$，而对于库仑阻尼，$Q_c = Q_{c0}(y/y_0)$。非指数的时间依赖的 Q 对多体系统模态发展有很大影响，这是因为弹性是非线性的（对于模态耦合是必须的）。

方程式（2-64）还有一个需要注意的重要地方。只有当 $[\nu]$ 的基本项保留时（与黏性阻尼等效），Q 才与频率成比例。当所有奇数的谐波项包括在内时（满方波），Q 与频率的平方成比例。这意味着摩擦力中的谐波是引起黏性阻尼与迟滞阻尼的主要区别的原因。现在需要考虑的是，如何在算法上修改式（2-52）~式（2-54）来提供给“离差”，即提供 Q 的依赖性而不是频率平方的方法。我们做出如下假设：由于二次蠕变，迟滞阻尼（指数）是阻尼的理想化普遍模式。当齐纳（德拜）模型处于激活状态，比如错位松弛，那么附加项必须增加到迟滞阻尼的“背景”中。也可以从迟滞阻尼的方波中适当去除谐波项来对附加项进行调整，且对于连续变化的系统来说，可能出现 Q 是常数。推测：引起不连续变化的 PLC 效应在 Q 不是常数的情况中起作用。基于修改的库仑阻尼模型的运动方程的归纳见表 2-4 所示。

表 2-4 基于非线性阻尼的运动方程

包括能量项的运动方程 $m\ddot{x} + cm\left[\frac{2E}{k}\right]^{\lambda}\mathrm{sgn}(\dot{x}) + kx = 0, E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$
仅是迟滞的阻尼（指数型的） $\ddot{x} + \frac{\pi\omega}{4Q_h}\sqrt{\omega^2x^2 + \dot{x}^2}\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + \omega^2 x = 0$

（续）

速度平方（流体）阻尼 $$\ddot{x}+\frac{\pi}{4y_0Q_{f0}}(\omega^2x^2+\dot{x}^2)\operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0$$
库仑阻尼 $$\ddot{x}+\frac{\pi\omega^2y_0}{4Q_{c0}}\operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0$$
同时存在三种阻尼 $$\ddot{x}+\left[\frac{\pi\omega^2y_0}{4Q_{c0}}+\frac{\pi\omega}{4Q_h}\sqrt{\omega^2x^2+\dot{x}^2}+\frac{\pi}{4y_0Q_{f0}}(\omega^2x^2+\dot{x}^2)\right]\operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2x=0$$
品质因子 $$\frac{1}{Q(t)}=\frac{1}{Q_c}+\frac{1}{Q_h}+\frac{1}{Q_f}$$

2.18 非线性

2.18.1 一般考虑

电的非线性对于大多数工程师来说都是十分熟悉的。比如频率调制这种常见的非数字式通信是非常基础的。一种流行的无线电业余爱好者通信模式是这样的：载波和信号的两个普通边频带之一在进入天线前被抑制。在接收机处，载波在达到解调器之前被“还原”。扬声器最终传导所需的解调器也是一种非线性设备。

力学非线性情况是贯穿整个自然界的。比如，人的耳朵就不是线性的，而需要用二次和三次的非线性来描述。如果一个强烈的、纯正的低频（听不见的）声波（频率为 f）与一个较高的（频率为 F）声波（可听见的）同时出现，那么一个人可能会听到的声音频率（除了 F 外）为 $F\pm f$（由于二次非线性）和 $F\pm 2f$（由于三次非线性）。

极高频的声波（超声波）被用来研究弹性。超声波传播的准线性特性已经成为测量二阶弹性常数（由速度传播决定）和内摩擦（由梁的衰减即阻尼确定）的基础。一种经常用来研究线性与非线性现象的超声波技术是脉冲-回波方法。通过使用一个薄的试样并增加脉冲宽度，重叠的信号可以建设性的或者毁灭性的增加，且在前一种情况下，当宽度变得很大时接近共振（Peters，1973）。这样的脉冲-回波方法是这位作者的博士论文的基础（“单晶体铜的非线性因素随温度的变化”，田纳西州大学，1968）。M. A. Breazeale 教授的杰出职业生涯致力关注把超声波谐波的产生作为一种确定固体原子间相互作用势形态的方法（Breazeale 和 Leroy，1991）。一个纵波会因为不和谐的势能（在 KdP 晶体中光学倍频激光器的声学等效）而发生扭曲。在同样方式中，由于二阶（确定谐波势能的二阶常数）以上的弹性常量非零，所以声子-声子之间的相互作用仅是可能。由于声子-声子之间的相互作用是阻尼的一部分，所以至少对一些例子来说，必定会从非线性阻尼项中得出这样的结果。

本章统一的主题就是阻尼基本上是非线性的，尽管存在这样的事实：在建模中保留了线性近似，且对于许多场合这些线性模型可以接受（Richardson 和 Potter，1975）。在他们的论文中，Richardson 和 Potter 这样陈述："……一个等效的黏性阻尼元件总是可以得到，并解释系统的所有能量损失。因此，在测量系统线性运动的振动模态参数时，我们不用关注具体的阻尼机理是什么样的。"

尽管对于稳定状态的系统来说，他们的观点是正确的，但对于导致振动稳定状态的瞬态过程来说，估计不是这样的。如同本章其他地方所说的，不同类型的阻尼的混合在振子中是普遍存在的，且只有在黏性阻尼或迟滞阻尼中，Q 才与振幅无关。其他的情况起因于（比如）迟滞阻尼与振幅相关阻尼相结合的衰减。一个用以说明这种组合的例子是在真空中摆动的出气摆。同样的，发现一个长的、"简单的"在空气中振动的摆需要两项——黏性阻尼和"流体"阻尼（Nelson 和 Olssen，1986）。在他们的实验中，由于雷诺数的大小，发现阻力包含了速度的一次方和二次方项。顺带一提，这些案例在文献中可能用修正的库仑阻尼模型和通用的阻尼模型来处理。

不论是振幅相关阻尼还是库仑阻尼，它们都被期望在决定一个多体系统受到外力激励时那个模态被真正激发这件事情上能起作用。对后者而言，库仑摩擦是激发机械系统的混沌振动的基础（Moon，1987）。没有非线性摩擦，激励是不可能的。在类似的方式中（尽管混沌运动可能存在，但并不明显），小提琴弓上松香的摩擦被用来演奏小提琴。同样的，另一个相似的物理学例子是"唱歌的杆"，这在别的地方作为热弹性阻尼而被提及过。

在线性系统中，最初被激发的任何组合的正常模态仅是在这之后存在的模态。然而，情况并不如此，对于很多系统来说，由于模态耦合需要非线性，所以它们的运动方程中就必须存在非线性。关于弹性非线性的存在和重要性是毫无疑问的。事实上，在没有高阶弹性常数下，热膨胀是不会发生的。非线性阻尼的重要性还有待量化，因为包含非线性的模型数量太少。对于那些在阻尼模型中发现包含非线性的最古老也是最简单的阻尼模型——库仑阻尼（滑动摩擦）的人来说，通过他们的选择来进行的改进，是不太可能使他们去重新思考这些问题，并且就黏性等效线性近似的方面来考虑解决问题。

除了黏性阻尼，存在单一类型的阻尼的例子有很多。在他们对牛顿万有引力常量认识改善所进行的努力（近似值 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$）中，Bantel 和 Newman（2000）发现了内摩擦类型的一种单纯的振幅相关阻尼。他们在液态氦的温度（4.2K）下进行试验，并作出如下注释："我们记录中的一个显著特征是三个金属构造材料 Q^{-1} 的振幅依赖关系是线性的"，并且"这种线性暗示 Q 可能与频率有关而非振幅，而实验得出的图实际上显示了在所有测试的构造中，内摩擦具有很大的振幅依赖性（而且非线性的）。"他们还考虑了阻尼的温度依赖性，并且指出在 Cu-Be 合金中，存在两个独立的贡献。一个是线性的和温度独立性，另一个是振幅依赖性和温度独立性。最后，值得注意的是他们的声明："……我们的结果强烈地暗示存在某种'黏滑'机理……"，这为现在的修正库仑内摩擦阻尼模型的文献提供有力的支持。

重复是有保证的——这样的系统不能一直被合理地描述成等价黏滞形式！对于有振

幅依赖的 Q，除非振幅固定，要不然它的等价形式没有意义，比如它的稳态振动。不幸的是，系统向稳态的发展被期望能依赖于阻尼形式。可以确定的是，一个可以预测哪一种模态可以存留的模型（尚未实现），比一个只能描述达到稳态后模态特征的模型要有价值得多。作者和佐治亚理工学院航空航天学院教授 Dewey Hodges 正在计划建立一个这样的有预测能力的项目。就目前的科技现状来说，一个真正的预测模型不能忽略阻尼的非线性。

如 Bantel 和 Newman（2000）所证明的，可以在一个系统中共存的混合的阻尼类型可能随温度改变。Berry 和 Nowick（1958）（及后来接连不断的调查者）早期的实验同样表明，阻尼通常取决于老化。当存在多于一种类型阻尼时候，经验使我们相信老化或时效不会改变阻尼类型的混合。因此，一个充分的阻尼模型必须能够轻易容纳数个同时活动的阻尼类型。工程技术的多样化演变可以处理这样的问题。最“成功”的案例遭受这样的事实，就是过多的参数或者耦合方程组必须经过反复调整，以达到和实验结果合理的一致。这是标准模式形成之前让人想起的高能（核）物理状态。物理学成就的标志总是被简单化。如同艾尔伯特·爱因斯坦的名言：“所有的物理要么是不可能，要么是琐碎的。直到你理解后它才成为可能。然后它就变成琐碎而无意义的了。”然而，不可想象的是某种阻尼物理也会变成琐碎而无意义的。不过，更好地在观念上理解来简化自然界，是我们追求的目标。

大多数阻尼模型的一个令人注意的地方是，在对耗散过程进行描述时，缺少对能量的直接考虑。总而言之，阻尼转换的最重要的数量是能量，所以包含能量是自然的。

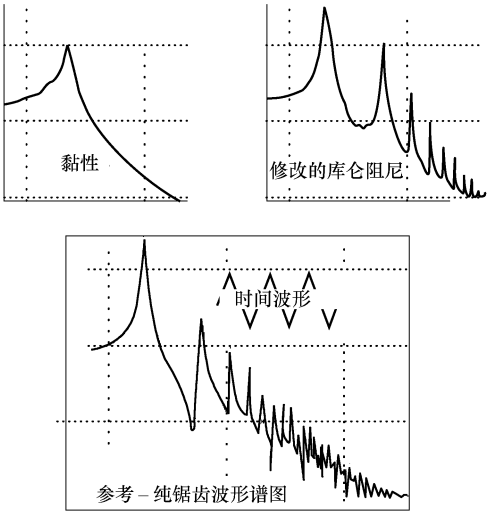


图 2-23　修正库仑阻尼模型和传统的黏性阻尼模型残差之间的谐波成分不同（由于之前提到过的目的，图中还包括了一个纯锯齿图）

2.18.2　谐波成分

当阻尼是非线性时，自由衰减振子的波形包含谐波。谐波成分在对原始记录拟合阻尼正弦曲线后的残差（不同）中最明显，如图 2-23 所示。

对于黏性阻尼模型案例，还要用到残差，因为运动方程是数值积分的，并且与经典的指数衰减正弦曲线（方程的解）相比较，该正弦曲线适用于所有情况。由于计算机的舍入误差，所以拟合曲线总是存在一些不匹配。在图 2-23 中，因为比起大多数通过输入数据由 excel 绘制的“眼球”拟合曲线来说，拟合曲线本身有更高一个数量级的优势，所以黏性阻尼的基波较小。

一个有关谐波分量的测试是通过地震检波器完成的（周期 17s），数据如图 2-11 中

演示的相位噪声。其残差的功率谱如图 2-24 所示。

这个案例中的第三个谐波尤其明显，而其他谐波并不“明朗”的结果可能是由于记录时较大的相位噪声造成的。

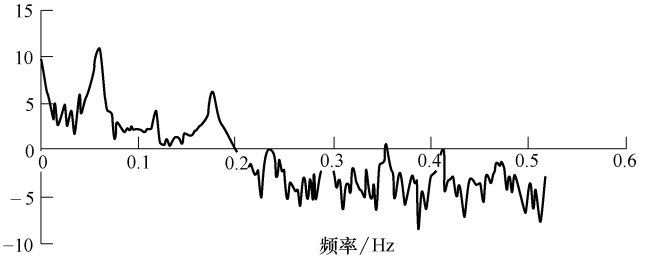


图 2-24　残差的功率谱（Sprengnether 垂直地震波检测器的自由衰退显示了谐波成分）

通过观察残差而不是实验记录本身的 FFT，我们可以发现力学和电子噪声相结合的证据。在频率较低时，噪声（主要是力学的）近似于 $1/f$，而在频率较高时，噪声（主要是电子）开始更接近于“白噪声”（与频率无关），这是因为 12 位 A/D 转换器分辨率限制产生的离散误差。

一般来说，更多谱信息可以从考虑残差中获得，而不是仅看实验数据，尤其是在寻找力学类型的谐波畸变时。谱“指纹”可以最终证明在决定什么程度的工程类阻尼模型需要在完全非线性模式下使用（相对于一个数学上更方便使用的“等效黏性阻尼”模型）上起作用。

图 2-24 中观察到的谐波在决定系统发展方面的重要性还没有被完全了解。如前所述，它们被期待能影响一个多体系统达到稳态的发展过程。目前看来，它们可以用来验证阻尼模型。从一种模型到另一种模型，残差的谱特征之间有重大的不同，如图 2-25 所示。与图 2-23 相比较，修正库仑阻尼模型（滞后的情况）的拟合曲线被调整，在某种程度上减小基波，但是奇数谐波仍然很大。从观察可知，这个模型残差的谱与简化结构模型的谱（参照 de Silva，2000，354 页）几乎相同，即使在这两个模型的摩擦力的时间变化截然不同时依旧成立，正如用来获得残差的较低的时间痕迹（太小，在图中很难看出）。

从这位作者的观点中可以得知，简化结构模型是不可实现的，因为由 $f = c\,|x|\,\mathrm{sgn}(\dot{x})$ 公式提供的摩擦力会突然消失至零位移（位移的绝对值被用来获得频率依赖性的滞后阻尼）。如图 2-26 所示，其中比较了几种模式的滞后曲线。修正的库仑显示的情况和式（2-52）（该式产生图 2-25）的稍有不同；图 2-26 由式（2-10）中的 A_{prev} 产生。

对于这种类型的研究，明显还需要更多。对于研究阻尼的物理学来说，残差的谱是一个强有力的工具，并且需要更广泛的应用。

2.18.3　非线性/复杂性以及未来技术

如果我们打算克服各种技术障碍，那么非线性阻尼模型必须改进。其中一个障碍就

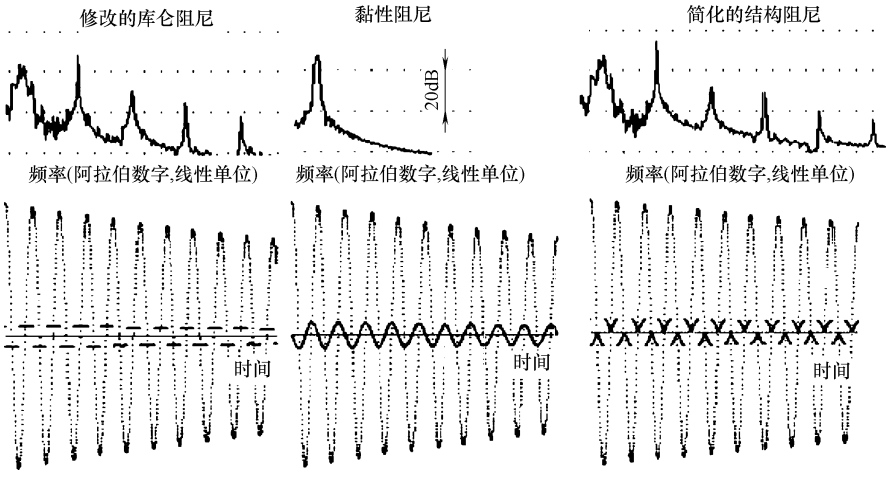


图 2-25 显示三种阻尼模型的残差谱的不同（相应的用来产生谱的时间记录同样被显示在谱图的下面）

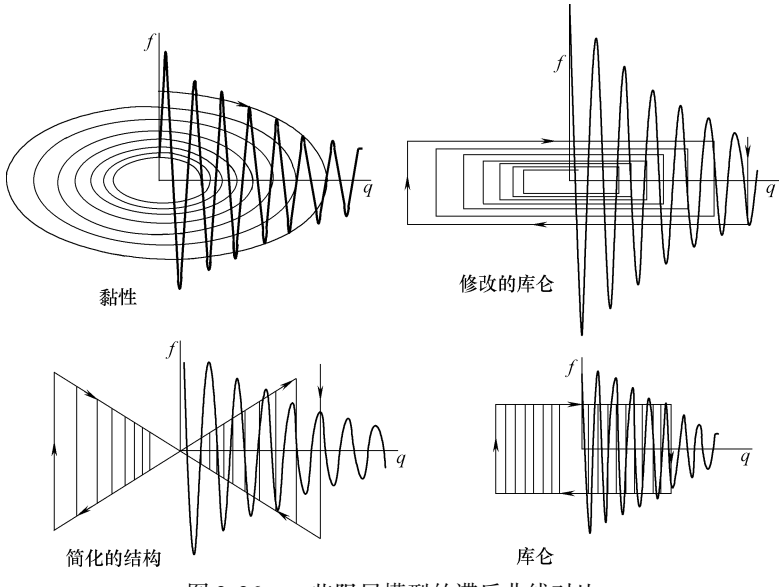


图 2-26 一些阻尼模型的滞后曲线对比

是土木工程领域。有限元模型（FEM）的开发者之一是 Emeritus Edward L. Wilson 教授（加利福尼亚伯克利大学）。在技术备忘表 19 中（从属于《结构分析部分》，是 Computers and structures 出版的文献），Wilson 博士是这样表述的：

“线性黏弹阻尼是计算机模型的特性，而不是一个真实结构的特性。”

将这些观点扩展开，他的表述是：

“线性模态阻尼的使用，作为临界阻尼的百分比，被用来近似结构的非线性行为。真实结构中的能量消耗更为复杂，并且趋向于与位移而不是速度成比例。近似的‘等

效黏性阻尼’的应用缺乏理论与实践支持……模态阻尼标准的‘科技发展水平’的假设需要复核，并且必须发展一种替代方法”[参见瑞利阻尼]。

其中强烈需要改进建模水平的一个高科技领域就是微型机械系统。比如微型机电系统（MEMS）装置已经遇到的一些固体物理（Richard Feynman 在他 1959 年的著名演讲中提到）的“奇怪现象”。为了精通或者弥补这些现象，我们需要更深入地对物理进行了解。

2.18.4 微观动力学、细观力学和细观动力学

至少有三种不同的宽广研究领域集中在有关引起迟滞阻尼的结构缺陷的问题。介绍如下。

（1）微观动力学

在微观动力学领域里，看起来重点主要集中在“接触”摩擦。1999 年在 Jet Propulsion 实验室举办的微观动力学研讨会上产生如下共识（引述 Marie Levine 计划概要）：

① “我们已经证明微观动力学是存在的。下一步就是通过严格的测试和分析技术证明和量化微观动力学。”

② 微观动力学是“定义为材料、机构（闩锁、关节，等）和其他不连续界面的亚微米非线性动力学。”

在这次研讨会上，注意到基于频率的计算方法不能用来建立准-静态、瞬态和非稳定干扰的模型。他们建议要最小化的飞行操作微观动力学的一个不良影响就是抖动。

（2）细观力学

Ostermeyer 和 Popov（1999）谈到了细观力学：“真实物体本质上拥有离散的内部结构。需要更大的努力来描述真正的颗粒物体的连续模型。在近两个世纪的一堆方法中，被描述和分析离散世界的连续模型方面的高度成功的努力做了标记。尽管连续力学具有巨大的先进性，但是许多物理过程只能在非常有限的程度上在连续方法的框架内加以建模。在这些过程中，主要是所有借助介质的连续性受到削弱，即那些成核和损害、裂纹的累积过程，以及材料和构造的失效过程。”

他们的论文谈到困难之一，它涉及本章早先提到的颗粒材料——就是势能不能以普通方式定义。他们引入了一种温度依赖型非平衡、相互作用的势能，由于系统中出现的松弛过程，导致它在时域上不是常数。

（3）细观动力学

本章的作者一手提出了在力学振子的教科书中使用的“细观动力学”术语。他进行的研究独立于那些做细观力学的人，他只有在最近才知道后者。鉴于细观力学似乎主要关注失效，细观动力学一直关注低水平的迟滞。细观动力学可能和前述的宏观动力学有紧密联系，除了后者看起来一直致力于表面（滑动摩擦），而细观动力学关注内部摩擦。

采用“细观动力学”来描述一些计算物理学是阿贡国家实验室材料科学分院的部分工作。他们对计算理论的描述包括：（ⅰ）原子级模拟（采用分子动力学），（ⅱ）

中尺度模拟，即，“细观动力学”（采用有限元），和（ⅲ）宏观（连续）模拟（FEM）。像本章作者一样，他们承认宏观物质并不连续（比如，意味着黏弹性的基础在很多场合下是不可靠的）。他们采用“动态模拟方法，其中的宏观结构单元（颗粒的边界和颗粒交汇处）考虑为基本实体，它的动态行为决定着宏观结构在空间和时间上的演化。”

在洛斯阿拉莫斯国家实验室理论分院，Brad Lee Holian 一直在从事通过非平衡分子动力学方法对细观动力学建模（NEMD）。在他的论文“来自原子论的细观动力学：通向 Hall-Petch 的新路径”中，他提请注意的是：（ⅰ）细观非线性弹性特性必须和压缩状态原子论特性一致；（ⅱ）拉伸状态的中尺度冷态有效性曲线代表表面的，而不是体的结合力，因而它和颗粒大小成反比（Holian，2003）。

细观动力学的复杂性，作者把它称为“细观非弹性复杂性”，是引起前述的“奇怪现象”的大部分原因。对于那些对巴克豪森效应和 PLC 效应熟悉的人来说，这些不奇怪。据认为基于 Richard Feynman 的三卷系列论文材料，他（如果他还活着的话）会认同细观动力学（Feynman，1970）。比如，我们已经注意到他对巴克豪森效应的讨论，且把转载的 Brage-Nye 有关气泡的论文纳入在他的整体理论中，Brage-Nye 的论文展示了诸如错位、“颗粒”和搅动后“再次结晶”边界的二维缺陷结构（Bragg 等，1947）。

另一个著名人物就是 Enrio Fermi，他的工作以意想不到的方式和本章内容联系起来了。在计算机上完成的最早的动力学计算之一中，他和同事们通过非线性项处理了一串耦合在一起的谐波振子（Fermi，1940）。他们提出的模型的连续性极限就是称为 KdV（Korteweg-deVries）方程的著名非线性偏微分方程，它的解是孤立子，在光纤中应用具有优势。孤立子的阻尼，不管是 KdV 类的，还是正弦戈登（Sine Gordon）孤立子类型的（扭结/反扭接），它都不能用线性数学来描述。正弦戈登（Sine Gordon）孤立子偶尔会用于错位建模（Nabarro，1987）。最早描述错位阻尼的理论采用了扭结/反扭接对，该理论是 Seeger 提出的（1956）。

2.18.5 细观非线性复杂之重要性的案例

正如本章早先提到的，一旦迟滞阻尼最终辨认为对 Cavendish 实验的重要性，那么结果和理论、试验能吻合得更好是有可能的。好奇的是，Henry Cavendish 可能是第一个遭遇“奇怪”现象（它没有讨论此问题）的人（Cavendish，1798）。在他的第一个质量摆动扰乱平衡试验中，采用了铜丝做的“纤维”，存在一个异常小的振动周期，只有 55s。报告的随后试验振动周期大约为 421s。

而 Michell-Cavendish 装置是扭转平衡摆，图 2-27 所示的仪器是物理摆。振动质量 M 挂在自行车轮子上，而车轮轴悬挂在天花板上。长周期摆放置在钟架子下面，因此它们一起不受空气流驱动。通过让车轮以匀角速度旋转，单摆上的驱动力是简弦的。（在此图中，每个质量块后半周期位置在图中用虚圆表示。）知道了（正如根据大振幅自由衰减确定的）阻尼值，就很容易估计出钟架的轨迹数，在单摆共振频率处，需要激励运动的信号水平大于传感器噪声水平。令人奇怪的是，如果单摆最初处于静止状态，那

么通过这种方式在没有驱动力的情况下也能够使得摆振动！原因涉及缺陷结构的亚稳定性。位势并不是简弦的（而是抛物线），但是受到了“细微结构的”严重调制。当处于严重的亚稳态时，驱动装置的小的万有引力（在纳米牛顿力中）并不能“解开系统的锁”。如果单摆已经抖动（工程上使用的做法），那么这个问题至少可以部分避免。正如实际情况，这种单摆搁置到了光学实验使用的隔振台中。

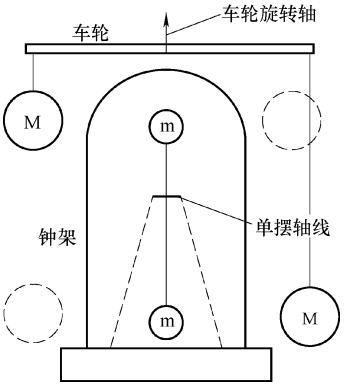


图 2-27　20 世纪 80 年代早期尝试测量牛顿万有引力成熟的物理单摆

最近，一个匈牙利研究小组采用一种类似装置，并假定实验的异常来自于引力，而不是由牛顿定律规定的（Sarkadi 和 Badonyi）。尽管他们声称存在“万有吸引力对相互作用物体的质量比有强烈的依赖性”，但是作者认为在他们的声明值得重视之前，附加试验必须完成。也可能是这样的：他们的单摆的奇异特性被细观非弹性复杂性结果替代了，即现象与非线性阻尼有关。

作者最近对阻尼复杂性的研究是基于下面的假设：对于处理内部摩擦来说，最重要的尺度是中尺度，而不是原子尺度（Peters2004）。支撑这个位置中心的试验围绕对形状记忆镍钛合金的研究。

2.19　结语

本章有关阻尼的大部分材料明显不适合直接的工程应用。被视为重要的事情就是要提供一些背景知识为提出 2.17 节的实际方程提供准备。在第 3 章中，读者将会找到对阻尼测量的实际帮助。

参 考 文 献

Amengual, A., Manosa, L.L., Marco, F., Picornell, C., Segui, C.,, and Torra, V., Systematic study of the martensitic transformation in a Cu–Zn–Al alloy, reversibility versus irreversibility via acoustic emission, *Thermochim. Acta*, 116, 195–308, 1987.

Asa, F., Modal synthesis when modeling damping by use of fractional derivatives, *AIAA J.*, 34(5), 1051–1058, 1996.

Atalay, S. and Squire, P., Torsional pendulum system for measuring the shear modulus and internal friction of magnetoelastic amorphous wires, *Meas. Sci. Technol.*, 3, 735–739, 1992.

Bak, P., Tang, and Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Phys. Rev. A*, 38, 364–374, 1988.

Bantel, M.K. and Newman, R.D., High precision measurement of torsion fiber internal friction at cryogenic temperatures, *J. Alloys Compd.*, 310, 233–242, 2000.

Barkhausen, H., *Phys. Z.*, 20, 401, 1919.

Berdichevsky, V., Hazzledine, P., and Shoykhet, B., Micromechanics of diffusional creep, *Int. J. Eng. Sci.*, 35, 10/11, 1003–1032, 1997.

Berry, M.V. and Keating, J.P., The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics, *Siam Rev.*, 41, 2, 236–266, 1999.

Berry, B. and Nowick, A., Internal friction study of aluminum alloys containing 4 weight percent copper, *National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 4225*, online at http://naca.larc.nasa.gov/reports/1958/naca-tn-4225, 1958.

Bert, C.W., Material damping: an introductory review of mathematical models. measures and experimental techniques, *J. Sound Vib.*, 29, 129–153, 1973.

Bethe, H., Lecture at Cornell University online info. at http://www.nd.edu/~bjanko/Copenhagen/Cop3.pdf, 1992.

Bordoni, P., Elastic and anelastic behavior of some metals at very low temperatures, *J. Acoust. Soc. Am.*, 26, 495, 1954.

Bormann P. and Bergmann E., eds. 2002. *New Manual of Observatory Practice*, Institute of Geophysics, University of Stuttgart, online at http://www.seismo.com/msop/nmsop/nmsop.html.

Bragg, Sir Lawrence, F.R.S., and Nye, J.F., A dynamical model of a crystal structure, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Sci.*, 190, 1023, 474–481, 1947.

Braginsky, V.B., Mitrofanov, V.P., and Panov, V.I. 1985. *Systems with Small Dissipation*, The University of Chicago Press, Chicago.

Braginsky, V.B., Mitrofanov, V.P., and Okhrimenko, O.A., Isolation of test masses for gravitational wave antennae, *Phys. Lett. A*, 175, 82–84, 1993.

Breazeale, M.A. and Leroy, O. 1991. *Physical Acoustics: Fundamentals and Applications*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York.

Brophy, J. 1965. Fluctuations in magnetic and dielectric solids. In *Fluctuation Phenomena in Solids*, R.E. Burgess, Ed., Academic Press, New York.

Bulsara, A.R. and Gammaitoni, L., Tuning in to noise, *Phys. Today*, 49, 39–45, 1996.

Carlson, J.D., Controlling vibration with MR fluid damping, *Sensor Technol. Design*, 19, 2, 2002, online at http://www.sensorsmag.com/articles/0202/30/main.shtml.

Cavendish, H., Experiments to determine the density of the Earth, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 469–526, 1798.

Cipra, B., The FFT: making technology fly, *SIAM News*, 26, 3, 1993, online at http://www.siam.org/siamnews/mtc/mtc593.htm.

Cleland, A. and Roukes, M., Noise processes in nanomechanical resonators, *J. Appl. Phys.*, 92, 5, 2758–2770, 2002.

Cooley, J. and Tukey, J., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series, *Math. Comput.*, 19, 90, 297–301, 1965.

Coy, D. and Molnar, M., Optically driven pendulum, *Proc. NCUR* XI, 1621–1626, 1997.

Cromer, A., Stable solutions using the Euler approximation, *Am. J. Phys.*, 49, 5, 455–459, 1981.

Dean, R., Low-cost, high precision MEMS accelerometer fabricated in laminate online at http://www.eng.auburn.edu/ee/leap/MEMSFabricateTable.htm, 2002.

de Silva, C.W. 2006. *Vibration — Fundamentals and Practice*, 2nd ed., Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL.

Fantozzi, G., Esnouf Benoit, W., and Richie, I., *Prog. Mater. Sci.*, 27, 311, 1982.

Fermi E., Pasta J., and Ulam S., Studies in nonlinear problems I, Los Alamos report (reproduced in R. Feynman, 1970: *Lectures on Physics*, Addison Wesley, Boston, 1940).

Fraden, J. 1996. *Handbook of Modern Sensors, Physics, Designs, & Applications*, 2nd ed., AIP Press (Springer), Secaucus, NJ.

Gammaitoni, L., Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems, *Phys. Rev. E*, 52, 469, 1995.

Gere, J., Timoshenko, S. 1996. *Mechanics of Materials*, Chapman & Hall, London.

Granato, A. 2002. High damping and the mechanical response of amorphous materials, Submitted to

the Proceedings of the International Symposium on High Damping Materials in Tokyo, August 22, 2002 for publication in the Journal of Alloys and Compounds, private communication preprint.

Granato, A. and Lucke, K., Theory of mechanical damping due to dislocations, *J. Appl. Phys.*, 27, 583, 1956.

Greaney, P., Friedman, L.,, and Chrzan, D., Continuum simulation of dislocation dynamics: predictions for internal friction response, *Comput. Mater. Sci.*, 25, 387–403, 2002.

Grigera, T. and Israeloff, N., Observation of fluctuation–dissipation theorem violations in a structural glass, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 24, 5038–5041, 1999.

Gross, B., The flow of solids, *Phys. Today*, 5, 8, 6–10, 1952.

Heyman, J. 1997. *Coulomb's Memoir on Statics: An Essay in the History of Civil Engineering*. Imperial College Press, London, ISBN: 1860940560.

Hilfer, P., ed. 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, London.

Hodges, D. 2003. Private communication (Georgia Tech School of Aerospace).

Holian, B. 2003. Mesodynamics from atomistics: a new route to Hall–Petch, private communication preprint.

Horowitz, H. and Hill, W. 1989. *Art of Electronics*, 2nd ed., Cambridge University Press.

Kimball, A. and Lovell, D., Internal friction in solids, *Phys. Rev.*, 30, 948–959, 1927.

Kohlrausch, R., *Ann. Phys.*, 12, 392, 1847, online information at http://www.ill.fr/AR-99/page/74magnetism.htm.

Kuroda, K., Does the time of swing method give a correct value of the Newtonian gravitational constant?, *Phys. Rev. Lett.*, 75, 2796–2798, 1995.

LaCoste, L., A new type long period vertical seismograph, *Physics*, 5, 178–180, 1934.

Lakes, R. 1998. *Viscoelastic Solids*, CRC Press, Boca Raton, FL.

Lakes, R. and Quackenbush, J., Viscoelastic behavior in indium tin alloys over a wide range of frequency and time, *Philos. Mag Lett.*, 74, 227–232, 1996.

Landau, L. and Lifshitz, E. 1965. *Theory of Elasticity*, Nauka, Moscow.

Lorenz, E. 1972. Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas, presented to AAAS, Washington, DC.

Marder, M. and Fineberg, J., How things break, *Phys. Today*, 49, 24–29, 1996.

Marion, J. and Thornton, S. 1988. *Classical Mechanics of Particles and Systems*, 3rd ed., HBJ, Academic Press, New York, p. 114.

Milonni, P. and Eberly, J. 1988. *Lasers*. Wiley Interscience, Hoboken, NJ, p. 93.

Moon, F. 1987. *Chaotic Vibrations, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, Wiley Interscience, Hoboken, NJ.

Moore, G., Moore's law is described online at http://www.intel.com/research/silicon/mooreslaw.htm, 1965.

Nabarro, F. 1987. *Theory of Crystal Dislocations*, Dover, New York.

Nelson, R. and Olssen, M., The pendulum—rich physics from a simple system, *Am. J. Phys.*, 54, 112–121, 1986.

Ostermeyer, G. and Popov, V., Many-particle non-equilibrium interaction potentials in the mesoparticle method, *Phys. Mesomech.*, 2, 31–36, 1999.

Peters, R., Resonance generation of ultrasonic second harmonic in elastic solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, 53, 6, 1673, 1973.

Peters, R., Linear rotary differential capacitance transducer, *Rev. Sci. Instrum.*, 60, 2789, 1989.

Peters, R., Metastable states of a low-frequency mesodynamic pendulum, *Appl. Phys. Lett.*, 57, 1825, 1990.

Peters, R., Fourier transform construction by vector graphics, *Am. J. Phys.*, 60, 439, 1992.

Peters, R., Fluctuations in the length of wires, *Phys. Lett. A*, 174, 3, 216, 1993a.

Peters, R., Full-bridge capacitive extensometer, *Rev. Sci. Instrum.*, 64, 8, 2250–2255, 1993b. This paper

describes an SDC sensor with cylindrical geometry. Other geometries, including the more common planar one, are described online at http://physics.mercer.edu/petepag/sens.htm.

Peters, R. 2000. Autocorrelation Analysis of Data from a Novel Tiltmeter, abstract, *Amer. Geo. Union annual mtg.*, San Francisco.

Peters, R. 2001a. The Stirling engine refrigerator — rich pedagogy from applied physics, online at http://xxx.lanl.gov/html/physics/0112061.

Peters, R. 2001b. Creep and Mechanical Oscillator Damping, http://arXiv.org/html/physics/0109067/.

Peters, R. 2002a. The pendulum in the 21st century—relic or trendsetter, *Proc. The Int'l Pendulum Project*, University of New South Wales, Australia, Proceedings, October, 2002.

Peters, R. 2002b. The soup-can pendulum, *Proc. The Int'l Pendulum Project*, University of New South Wales, Australia, Proceedings, October. 2002.

Peters, R. 2002c. Toward a universal model of damping—modified Coulomb friction online at http://arxiv.org/html/physics/0208025.

Peters, R. 2003a. Graphical explanation of the speed of the Fast Fourier Transform, online at http://arxiv.org/html/math.HO/0302212.

Peters, R. 2003b. Nonlinear damping of the 'linear' Pendulum, online at http://arxiv.org/pdf/physics/03006081.

Peters, R. 2003c. Flex-Pendulum—basis for an improved timepiece, online at http://arxiv.org/pdf/physics/0306088.

Peters, 2004. Friction at the Mesoscale. In *Contemporary Physics*, P. Knight, Ed., Vol. 45, no. 6, 475–490, Imperial College, London 2004.

Peters, R. and Kwon, M., Desorption studies using Langmuir recoil force measurements, *J. Appl. Phys.*, 68, 1616, 1990.

Peters, R. and Pritchett, T., The not-so-simple harmonic oscillator, *Am. J. Phys.*, 65, 1067–1073, 1997.

Peters, R., Breazeale, M., and Pare, V., Temperature dependence of the nonlinearity parameters of Copper, *Phys. Rev.*, B1, 3245, 1970.

Peters, R., Cardenas-Garcia, J., and Parten, M., Capacitive servo-device for microrobotic applications, *J. Micromech. Microeng.*, 1, 103, 1991.

Portevin, A. and Le Chatelier, M., Tensile tests of alloys undergoing transformation, *C. R. Acad. Sci.*, 176, 507, 1923.

Present, R. 1958. *The Kinetic Theory of Gases*. McGraw-Hill, New York.

Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S., and Vetterling, W. 1986. *Numerical Recipes—the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

Purcell, E., Life at low Reynolds number, *Am. J. Phys.*, 45, 3–11, 1977.

Richardson, M., and Potter, R. 1975. Viscous vs structural damping in modal analysis, *46th Shock and Vibration Symposium*.

Roukes, M., Plenty of room indeed, *Scientific American*, 285, 48–57, 2001.

Sarkadi, D. and Badonyi, L., A gravity experiment between commensurable masses, *J. Theor.*, 3–6, 2001.

Saulson, P., Stebbins, R., Dumont, F., and Mock, S., The inverted pendulum as a probe of anelasticity, *Rev. Sci. Instrum.*, 65, 182–191, 1994.

Seeger, A., On the theory of the low-temperature internal friction peak observed in metals, *Philos. Mag.*, 1, 1956.

Singh, A., Mohapatra, Y., and Kumar, S., Electromagnetic induction and damping, quantitative experiments using a PC interface, *Am. J. Phys.*, 70, 424–427, 2002.

Speake, C., Quinn, T., Davis, R., and Richman, S., Experiment and theory in anelasticity, *Meas. Sci. Technol.*, 10, 430–434, 1999. See also Quinn, Speake and Brown, 1992: Materials problems in the construction of long-period pendulums, *Philos. Mag.* A 65, 261–276, 1999.

Steinmetz, C.P., *Complex Number Technique, paper given at the International Electrical Congress*, Chicago, 1893.

Stokes, G., On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, IX, 8, 1850, read December 9, 1850.

Strang, G., Wavelet transforms versus Fourier Transforms, *Bull. Am. Math. Soc.*, 28, 288–305, 1993.

Streckeisen, G. 1974. *Untersuchungen zur Messgenauigkeit langperiodischer Seismometer*, Diplomarbeit, Institut für Geophysik der ETH Zürich (communicated privately by E. Wielandt).

Tabor, M. 1989. The FUP Experiment. In *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: Introduction.* Wiley, New York.

Thomson, W., Tait, G. 1873. *Elements of Natural Philosophy, Part I.* The Clarendon Press, Oxford, (Thomson was later known as Lord Kelvin).

Urbach, J., Madison, R., and Markert, J., Reproducibility of magnetic avalanches in an Fe–Ni–Co alloy, *Phys. Rev. Lett.*, 75, 4694, 1995a.

Urbach, J., Madison, R., and Markert, J., Interface depinning, self-organized criticality, and the Barkhausen effect, *Phys. Rev. Lett.*, 75, 276, 1995b.

Venkataraman, G. 1982. Fluctuations and mechanical relaxation. In *Mechanical and Thermal Behavior of Metallic Materials*, Caglioti, G. and Milone, A., eds., pp. 278–414. North-Holland, Amsterdam.

Visintin, A. 1996. *Differential Models of Hysteresis*. Springer, Berlin.

Westfall, R. 1990. Making a world of precision: Newton and the construction of a quantitative physics. In *Some Truer Method. Reflections on the Heritage of Newton*, F. Durham and R.D. Purrington, eds., pp. 59–87. Columbia University Press, New York.

Wielandt, E. 2001. *Seismometry*, section Electronic Displacement Sensing, online at http://www.geophys.uni-stuttgart.de/seismometry/hbk_html/node1.html.

Zemansky, M.W. 1957. *Heat and Thermodynamics*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, p. 127.

Zener, C. 1948. *Elasticity and Anelasticity of Metals*, Chicago Press, Chicago.

3 阻尼中的实验技术

摘要

本章是第 1 章和第 2 章的延续，着重探讨了实际试验中的阻尼测量技术。本章首先讨论了电子学方面的知识，然后用计算机模拟演示了传感器线性的重要性，并谈及了其数据采集及处理的一些问题。快速傅里叶变换不仅在频谱分析方面显示出了巨大的威力，而且当一个系统以多模态形式振动，测量每个部件阻尼时更是如此（以“短时”形式）。本章还通过对 7 个不同的自由衰减系统处理的特定应用，探讨了不同类型传感器的优点与缺点。这 7 个案例的不同点体现在：（ⅰ）特征频率；（ⅱ）材料类型；（ⅲ）对数减量的估计方法，从而得到衰减量的 Q 值。对于一些固体，阻尼大多来自结构缺陷。随后又展示了一个有影响的非线性阻尼实验：简单观测 Q 的图像来看它是否随时间变化，然后又给出了两个强迫振子的案例：第一个非常接近线性，而第二个的非线性程度很高，其原因在于包含了磁铁和几个同时作用的阻尼装置在内的非简谐恢复力的作用。鉴于与迟滞有关的频率和/或振幅跳跃等现象，造成强迫系统难以解释，非线性系统正好用于说明这个问题。为了确定复杂系统从瞬态到稳态过程中哪些阶模态存活，接下来给出了对弹性类非线性可能与阻尼类非线性耦合做出了说明，非线性阻尼的另一个重要特征——机械噪声同时也被检测。抽成真空的单摆的 $1/f$ 的幅度展现出随时间不断减小，正如振子在抵抗蠕变过程中运动稳定下来。最后一部分指出了一个普遍的错误观念——黏性空气摩擦是机械振子阻尼的最重要形式。选择的案例是为了说明：（ⅰ）内摩擦几乎永远是重要的，如果不是最重要的话，那么（ⅱ）液体阻尼不是那么简单的——因为我们需要考虑流体密度和黏度。这表明阻尼对于频率有一个复杂依赖关系，这与一般理论预测的简单形式（过分理想化）恰恰相反。

3.1 电子学方面的思考

3.1.1 传感器的线性特征

传感器线性特性的重要性通常被忽视。人们往往天真地假定我们可以简单地通过使用查阅数据表来进行误差校准。但这个假定会导致对谱数据的重大误解，在多模态系统中尤为如此。一个经典的人工（非真实的）案例源于发现人耳是一个非线性传感器——这就是著名的听觉谐波现象，为音乐家们所熟知，并运用于管弦乐中“强音”与“弱音”的演奏。本章讲述了第 2 章中提到的人工信号是如何产生的。图 3-1 从非线

性特征本质的角度上说明了二者的不同。

图 3-1 中频率为 f_1、f_2 的信号是唯一“真实”的信号。其他“非真实”（假象）信号的数量与类型取决于非线性的类型。造成图 3-1a（二次）的传感器的非线性形式为 $U = ax + bx^2$，但造成图 3-1b 的非线性形式为 $U = ax + bx^2 + cx^3$。除了 $U = ax$（理想的、线性输出电压）的影响项，其他影响项是由下述因素产生的：（ⅰ）模拟一对谐波信号；（ⅱ）将这些信号分别输入每一个模拟的传感器；（ⅲ）对它们的输出做一次快速傅里叶变换（FFT）。

虽然可以用数学上三角函数恒等式来理解不同类型的人工信号，但这个现象用计算机描述起来更为简单。对于图 3-1 来说，所有的数值操作都是作者使用 QuickBasic 编码来完成的。它有下述几个用途：（ⅰ）模拟被写入数据文件的谐波信号，之后它被（ⅱ）基于《Numberical Recipes》一书提供的详细的 FFT 算法所读取（Press 等，1986）。

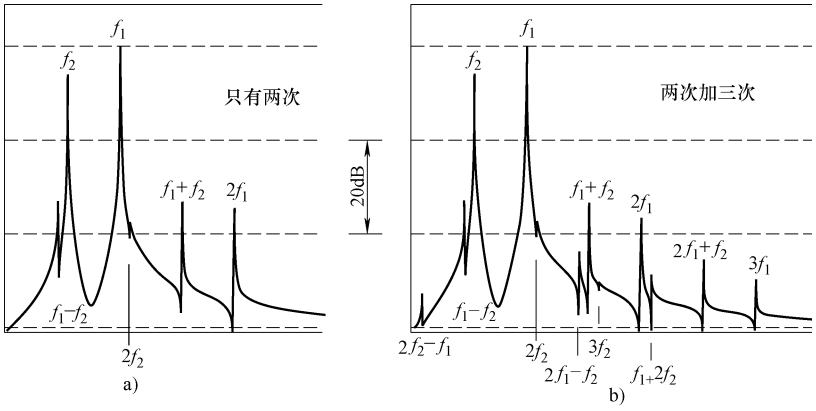


图 3-1　取决于传感器非线性类型的假象频率的差与和的谱图说明

a）传感器非线性形式为 $U = ax + bx^2$ 时的频率

b）传感器非线性形式为 $U = ax + bx^2 + cx^3$ 时的频率

3.1.2　频率问题

传感器的选择很大程度上取决于被测量的频率。频率较高时，数字（存储）示波器是个不错的仪器，一般可以直接连上传声器；频率较低时，串口模-数转换器通常够用且好用。它们的每一个案例都将会给出。本章大部分案例都是关于低频的，其中振型通常不是用频率描述而是用周期（频率的倒数）描述。

3.1.3　数据采集

在缺乏尖端的数据采集与分析工具的状况下，是不容易发现阻尼的真正特征的。恰当的特征描述变得十分重要，这是因为如果振子在除了参数被测量的位置外（频率或振幅）受迫振动时，基于单参数（如黏性线性模型）的十分粗糙阻尼估计或许就不再

恰当。这里选择了实验中的一些案例来说明非线性的重要性。随机选择的振子有一个随时间变化的 Q 值，其概率比预期的更重要。若没有数字化技术巨大进步的话，对阻尼更深入的理解是不可能的。

近十年来，随着计算机技术的普及，模数转换器的功能变得越发强大。比如 Dataq 700 型，与贵上几倍、众多的前几代“插入式”板相比，其性能“鹤立鸡群”（频率较低时）。Dataq 的模数转换器通过 USB 端口（Windows98 及以上）工作，有着 16 位的分辨率和优秀的软件支持。对于当代的需求，它尤为有效，其性能为：（ⅰ）轻松地完成数据压缩，且能看到长篇的记录；（ⅱ）根据各不相同、用途迥异的选项迅速完成 FFT 运算；（ⅲ）轻松地将文件输出至电子表格中。

3.2 数据处理

3.2.1 编程语言

作者编写软件的经历始于原始计算机出现后，甚至使用装打孔带的 PDP-11 的 Fortran 编译器。编写计算机（或特定的硬件处理器）程序所用的语言包括：（ⅰ）机器语言；（ⅱ）汇编语言；（ⅲ）Fortan 以及（ⅳ）Basic，并且了解了一些关于 Pascal 和 C + + 的基本知识。用机器语言编程的苦差事经历是作者追求对傅里叶变换更深入理解的一个原因（Peters，1992，2003a，2003b，2003c，2003d）。他对于数值方法的人生哲学与其对硬件的观点很类似：在符合目前要解决问题的条件下选择最简单的（复杂程度最低的）程序包。当您读到他最喜欢的语言 QuickBasic（某些地方已经升级到 Windows 平台下的 Visual Basic 了）时可能会吃惊。本章中出现的所有仿真模拟结果几乎都是用 QuickBasic 的 DOS 版本做出来的。

3.2.2 积分技术

极少有人发现极有效的积分方案，其中 Cromer（1981）修改了不稳定的欧拉算法。这两种方法的差别包括对积分的离散近似中状态矢量的更新次序（顺序），这种方法被 Cromer 称为“终点近似”（LPA），然而根据命名法，欧拉技术被称为“始点近似”。终点近似（LPA）是被一个为 Cromer 工作的高中生发现的。她本来打算通过欧拉方法来模拟行星运动，同时却编出了 LPA。作者最早运用 LPA 为美国反卫星系统计划做拦截分析，除此以外，还计算轨道星历表。最近，作者用这种方法替代 Runge Kutta 方法，来做各种力学系统模拟，包括几个自由度的非线性系统模拟。德克萨斯技术大学的物理学家 Thomas Gibson 教授，现在通常在他教授的研究生课程——数值方法中使用 LPA。

3.2.3 傅里叶变换

Cooley-Tukey 的推动使算法速度更快，傅里叶变换已经成为一个重要的主流软件工具。如同集成电路天翻地覆地改变了硬件发展一样，FFT 已对科学代码的变革产生了巨

大的影响。

然而大多数人认为 FFT 的价值在于观测“未经处理的”谱数据，却没有人发现其他的基于 FFT 的强有力的工具。例如，自相关函数在揭示被噪声污染的、短时程的低频信号方面的功能无与伦比。对于明确定义的谱线来说，循环数不足以大到在 FFT 中被自己观测到（海森伯效应）。根据 Wiener-Khintchin 定理，自相关函数克服了这个限制。给这个变换乘以它的共轭因子并做它的反变换计算——作者曾用这个技术来研究地球的自由振动（Peters，2004）。

3.2.3.1 短时傅里叶变换

真正强大的软件工具，并不在记录的整个长度内进行傅里叶变换运算。取而代之的是，记录被分为几段（通常每个相邻的部分之间有一定程度上的重叠），然后对每段数据分别进行傅里叶变换。因为数据通常都是时域内的（相对于空间内的而言），这个技术被称为短时傅里叶变换（STFT），其中独立变量的单位是米而不是秒（正如光学中的应用）。为了进行等效数据处理，这个技术可被称为小空间内的傅里叶变换。

当单自由度系统（1-DoF）振子产生的波形不是纯谐波的时候，STFT 尤为有用。对于具有多模态系统，无论是由多数情况下固有振型产生的，还是由少数情况下（作为承载部件的内摩擦的一部分产生）机械噪声产生的，STFT 对于隔离与确定单个频谱成分的时程来讲，都是一个强有力的工具。

STFT 最普遍的形式是固定程序，它是软件包（如 LabVIEW）的一部分。由于人们可以很容易地在存储记录的各个时间进行访问，并在任意一个位置上进行 FFT 运算，所以使用 Dataq 软件可以手动轻易地完成同样的工作。在显示的感兴趣的谱线部分上点击一下，就能以分贝（Dataq 版）或电压的形式给出指定部位的强度。点击一下鼠标亦可得到分贝形式表示的谱线幅值的历史（等时间隔的数值）。通过这种方法，一个单成分系统的自由衰减可以轻易地从总系统的响应中抽取出来。出于现在的需要，我们用手将单个强度抄在纸上，然后键入到电子表格中以便绘图。由于需要的点数通常少于 12 个，故此处理并不费力。

图 3-2 提供了一个手动方式产生的 STFT 案例。与上述提到的方法（在 Dataq 文件夹中的数据上的操作）不同，图 3-2 的记录由计算机生成，并写入一个输出文件。这个数据符合三个叠加的指数衰减正弦形式。

从上面的这幅图（时间记录）来看，我们不清楚各个成分是如何随时间变化的。三个成分中的一个在频域（图 3-2 偏左）里变得明显，并且按时间绘出每条线的强度（图 3-2 偏右），每一个成分的指数特征都可从图中看出。为了测试这个方法的可行性，我们从给出的 STFT 图线中估计阻尼参数，并发现结果与模拟数值有惊人的吻合。

3.2.3.2 STFT 应用案例

由于空间上不允许最终要处理的细观非线性状态，所以本章的大部分案例避免围绕低能量振动给出。下面选择的案例说明了：（ⅰ）Portevin-LeChatelier（PLC）效应对阻尼作用的重要性（Portevin 和 LeChatelier，1923）以及（ⅱ）STFT 消除杂波的威力。由于噪声记录与如前例所述的多振型实例的差别在于振型的数量不同，所以 STFT 的好处

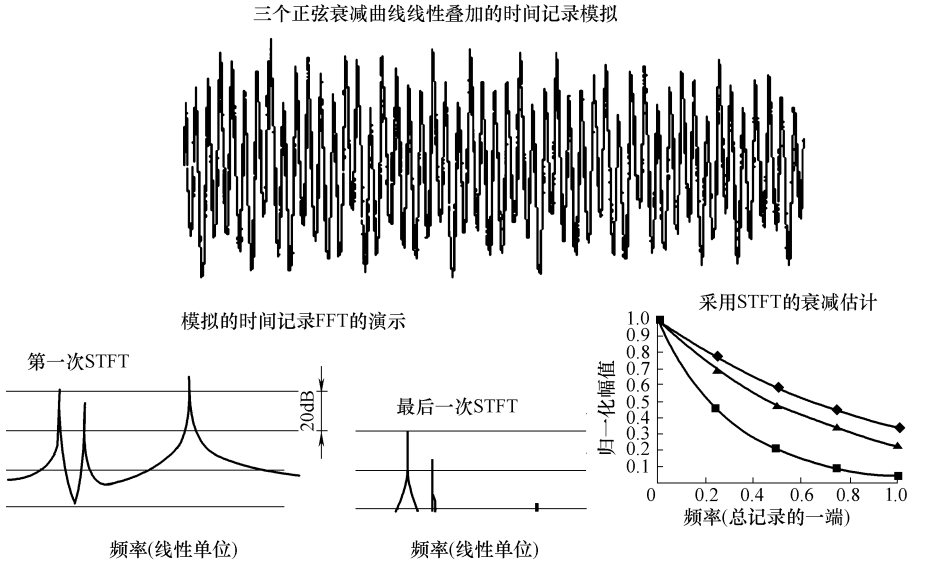


图 3-2　用 STFT 分离叠加成分时间衰减的案例

可想而知。尽管在这些能量上 PLC 效应的跳跃并不显著，但是其对高能内摩擦耗散来说仍然显著。显然这是一个大量事件的结果，其平均结果是一个完全光滑的衰减。

图 3-3 中两幅图的坐标尺度不同，差不多以三个数量级大小区分开来，对于每一个要显示的案例，要有传感器输出范围（中等量程范围值）。通过视觉观察可以一眼看出两个特征：（ⅰ）由高水平发展至低水平的、光滑到抽筋式衰减的变化；（ⅱ）在低能量处的振动频率有 4% 的增加从已增加的垂直线中（每隔五个峰）可识别出第（ⅱ）种特征。更有趣（且对大多数人来说是惊讶）的一个特征是，由于平均位置的跳动，振动相位的变化并不剧烈。

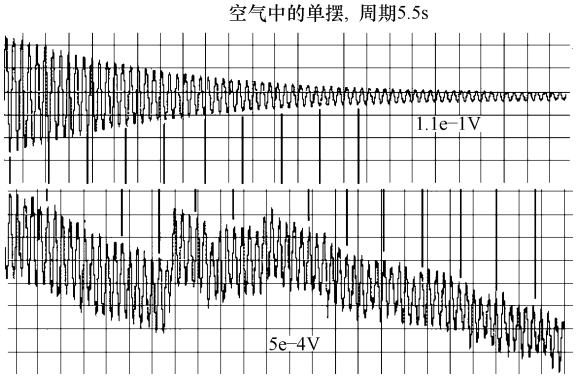


图 3-3　单摆在衰减过程中能量从高到低时特性变化的演示

下面为那些对图 3-3 下面曲线的评论持怀疑观点的人提供信息。根据对数以百计的不同振子的低水平衰减中的研究，作者能够判断显示出来的跳跃是否是传感器（或其他电子的）的伪影。尽管许多年前一个关于磁材料的类似的现象也有记录，即巴克豪森效应（Barkhausen，1919），但是近 14 年来与此结论相左的偏见仍然不绝于耳。不幸的是，与此相关的力学系统（PLC 效应）中的现象仍未被物理学家们所发现。

STFT 对于研究诸如图 3-3 中的数据的价值在图 3-4 中加以说明。但是图 3-3 仅展示

了一个长记录中的第一和最后一部分数据，在这里，STFT 应用于整个记录之中，使用了 27 种不同的 FFT。

从图 3-3 左部曲线可以看出，第 5 次 STFT 的阻尼有一个急剧的减少。因此，我们从第 0 次到第 5 次及第 5 次到第 27 次 SFFT 的间隔内，振动强度曲线是重新绘图的。这两个区间都显示出了完美的线性趋势拟合，并表现出了指数衰减。从而我们发现，在 10^{-10}J 量级的能量水平上，Q 值从 78 ~ 340 飞速变化。虽然，空气阻尼在记录的早期部分确实是一个因素，但我们认为它并没有能力使得观测到的 Q 值变化得如此迅速。同样是这个钟摆的一个类似的阻尼的急剧变化在高度真空中摆动、大约为 10^{-11}J 能量级水平可以观测到。在真空状态下，斜率的变化同样迅速，但 Q 值却在 120 ~ 210 之间变化。我们不知道为什么在低水平能量上，阻尼在真空中较空气中有一个较低的 Q 值。或许，这个差别源自于硅薄板上刀锋位置的不同。此钟摆的阻尼某些程度上也是由下述原因造成：刀锋是以黄铜而非例如碳素钢那种更硬的金属制造的。

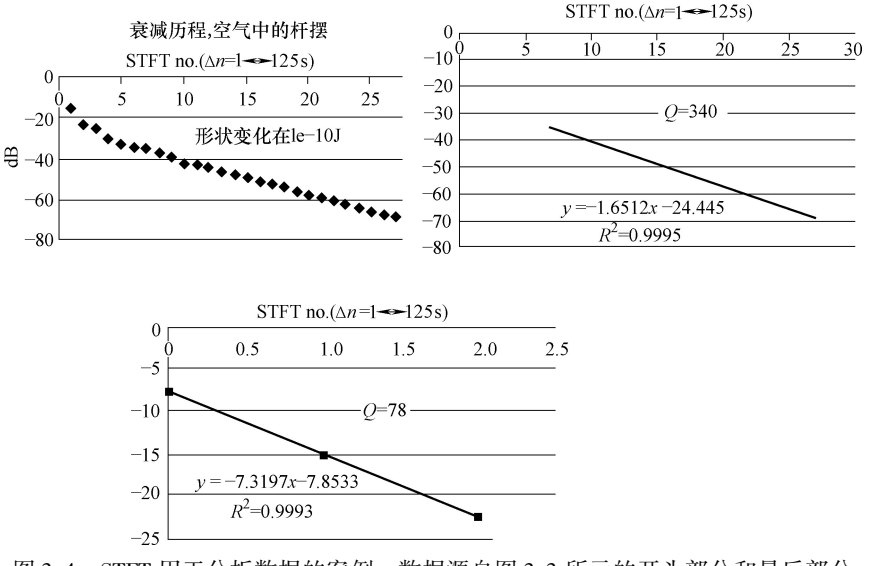


图 3-4　STFT 用于分析数据的案例，数据源自图 3-3 所示的开头部分和最后部分

3.3　传感器的选择

表 3-1 列出了一些测量阻尼的典型传感器。这个表还远远不够详尽，如果读者想详细了解每一个传感器（以及其他类型的讨论），请参考 Fraden（1996）的文献。在给出的传感器中，位置传感器一般是最万能的，但是本章仍然提供了下述传感器应用案例：（ⅰ）速度；（ⅱ）传声器，以及（ⅲ）光电门测量。

除了对线性度（3.1 节讨论过）的要求外，理想的传感器还得是非侵扰的。实际上，在某些能量级上正在研究的系统受到扰动的话，是不能完成实验的。直接测量干扰最小的类型传感器是光学类和电子类——电容式，其次是电感式。

表 3-1 提供了一些传感器装置的优点和缺点。

表 3-1　几种类型的传感器

用于阻尼测量的典型传感器					
位置型	速度型	压力型	时间间隔型	加速度型	力/应变型
电容式的 LVDT 光纤式 编码器 投影法 电位计	法拉第定律 （电磁）	传声器 压力计 电容式 光电式	光电开关	加速度计	应变计

3.3.1　直接测量

3.3.1.1　位置传感器

感应式线性变量差动转换器（LVDT）是经常在工程中使用的传感器。因此，对于许多位置测量来说，它自然而然地成为了选择。但是和电容传感器相比，它显现出了更强的侵扰性和更大噪声。Wielandt（2001）指出了下述电容传感器较电感传感器的优越性："它们（电容）的灵敏度……常常要比电感类型的强百倍。"

光学编码器同样简单好使且应用广泛，但由于它们的数字本质及有限的元器件，其低水平的分辨率与电容设备相比则捉襟见肘。

投影法的光学传感器使用简单，如使用一个稍后讨论的类型的太阳能电池，但是这个方法是痛苦的，它须使用一个偏置电压，必须降解背景光的影响。

电位计使用起来颇为简单，但是由于其滑动器以及支撑它的轴承中的库仑摩擦，其侵扰性和其他位置传感器相比要大得多。

3.3.1.2　速度传感器

速度传感器的功能主要是基于法拉第电磁感应定律。使用一个磁铁和一个线圈，则当线圈的磁通量变化时一个电磁力便在线圈导线中产生了。在宽频（反馈）仪器出现以前，其在地震检测仪上普遍使用。它的主要缺点在于低频的灵敏度太差。

3.3.1.3　时间间隔

光电门在前沿性物理实验中的运动学研究中成为了一个主要手段。与紧凑的、用户友好的计时器相结合，它既能测量周期又能测量速度。如后面所述，他们在缓慢振动系统的阻尼测量中简单易用，但是能够测量的幅值范围有限。

3.3.2　间接测量

在下列情况中：（ⅰ）压力，（ⅱ）加速度，以及（ⅲ）力/应力传感，测量是间接的，如 Ruchhardt 测量气体比热容实验（曾在第 2 章中讨论过）。活塞的振动可以用数种不同的方法测量出来，比如直接位置传感即可完成任务，方法是将一个小电极贴在活塞上，并使其在两个固定电容器极板之间移动。另一种方法是可以用一个活塞上的"标记"来中断光电门的光束。但是，考虑到约束条件，最简单的方法或许是间接测

量——一个压力传感器通过一个导管监测气体，此导管又与这个装置的气缸相通。

加速计有时可以与振子直接相连，但这只有在传感器的质量相对于被研究系统的质量非常小的时候才可行。正如测量速度一样，它们的敏感度在低频范围内十分糟糕(位移的二阶导数产生的响应与频率的平方成比例)。

应变仪使用简单但缺乏敏感性（和位置传感器相比），因为他们只与非常小的一部分的振动样本打交道（如果是非侵扰性的话）。

3.4 阻尼案例

3.4.1 案例1：振动棒——带显著噪声的线性阻尼

测量在人耳频率范围内振子 Q 值的最简单的方法就是将传声器连接在数字示波器上。本例中，传声器是一个便宜的动态类型，且示波器是 Tektronix TDS 3054。如果可以的话，使用驻极体传声器会是一个更好的选择。图3-5展示了一个受锤子重（猛）击之后的木琴棒的衰减信号。

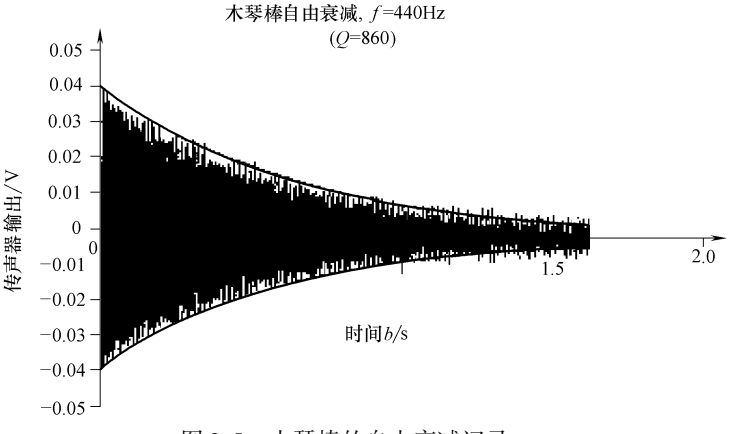


图3-5 木琴棒的自由衰减记录

传声器输出的电压对时间的关系图存在了示波器的内存里，内存里的数字记录被以CSV格式输出到软盘里。在Excel中使用“打开文件”后，磁盘上的数据被输入到其电子表格的A和B两列当中。通过使用“自动填写”、把数据反复填入C列，从而完成对转折点的包络拟合。对于键入单元C1中的表达式“=0.04 * exp（-b * A1)”中常数 b 的每一个值分别做出图来。(下面的转折点是通过向单元D1输入“=-b1”并使用自动填写得到的。）本方法中关于使用Excel的更多细节将会在后面讨论的地震仪阻尼中给出。

虽然可能产生的优化算法可以完成这样的拟合（精度会轻微地增加)，但是视觉技术在此处受到青睐，因为它更易理解、用户友好度更高，而且其性能已被验证。在一个现代的奔腾计算机上，使用一个2K（2048个点）数据记录，Excel生成图3-5所示图形

所需要总时间通常仅需要几分钟。

曾经得到过一个满意的（实验结果与理论预料的）拟合公式（图 3-5 中的 b = 1.6），Q 值用下式估计：

$$Q = \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi f}{b} \tag{3-1}$$

图 3-5 中有很高的电子噪声，那是因为传声器直接连接到了示波器上。这个示波器 20MHz 的最小的频带宽度引起了大量的 Johnson 噪声（白噪声）。用一个前端放大器来使得带通变窄，可以大幅提高数据的质量。通过这种按需要裁剪电路的方式来提高信噪比（SNR），通常是正确的。

3.4.2　案例 2：振动簧片——非线性阻尼案例

为了论述另一个传感技术，我们使用了图 3-6 所示的系统。

将钢锯条在火炬上加热并淬火，然后将其扭转过 90°，其一端被夹在图示的垂直柱子上，另一端捆上了一块硬纸板。硬纸板上面是一盏白炽灯，硬纸板在它下面水平地振动，而在硬纸板下面是一个太阳能电池板——我们拿它当做传感器。本案例中的太阳能电池板是工业装置，它配备了给汽车电池充电的香烟点火插头。此图中亦看到太阳能电池板的输出连到 Tekronix 数字示波器。

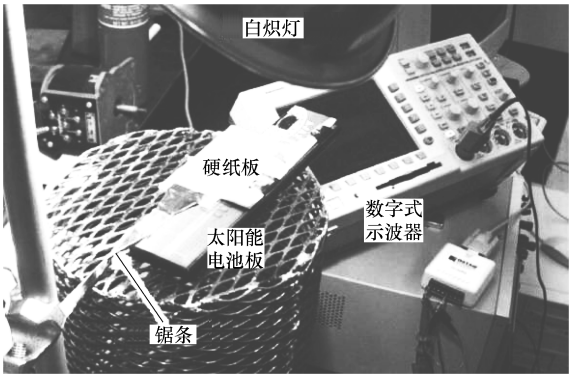


图 3-6　振动簧片自由衰减测试的布置图

与本章中描述的其他检测方案不同，此太阳能电池板的输出不是双极的，取而代之的是根据簧片的平衡位置有一个恒定的电压偏置。

这个振动频率太低了，以至我们很难用交流耦合操作示波器。因此，尽可能将直流偏置调小至关重要。我们通过把处于非活动状态的太阳能电池从灯那里屏蔽来达到此目的。虽然直流偏置可以通过反电压电池来消除，但是这会引入令人无法接受的噪声脉冲。带了这个偏置，电路增益被示波器允许的垂直位置的移动限制住了。本案例研究的结果如图 3-7 所示。

图 3-7 中非零 b 值（0.018）表明了存在有幅值依赖的阻尼［请参考第 2 章式(2-61)］。本案例中的非线性阻尼可能来自于空气，而不是来自于锯条的内摩擦，其存在导致系统 Q 值随时间不断增加。

系统的 Q 值为

$$Q = \frac{\pi}{(b + ay)\tau} \tag{3-2}$$

式中，τ 是振动的周期。在记录的开始（$y=0.12$）时 Q 值为 390，并当振幅趋于 0 时，Q 值接近了 2700。

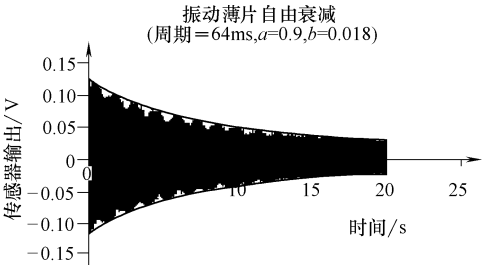


图 3-7　带振幅依赖型阻尼的振动簧片衰减信号

3.4.3　案例 3：地震仪

由于地震仪测量地震的能力和这个仪器振动周期的平方成比例，所以他们需要有一个好的低频传感器。最新一代的商业仪器最常用的传感器是半桥（差动）电容类型。鉴于第 2 章中提到的全桥式对称差分电容传感器（SDC）更佳的灵敏度和线性度，故其在这些场合当中更为适合、好用［在 TEL-Atomic 教程中描述了全桥式的特征（Peters，2002）］。SDC 对称性（电路上与电感的 LVDT 等效）的一个重要优点在于其对施工缺陷的不敏感度，比如表面粗糙度和电极的不平行度。因此，在仪器性能没有严重降低的前提下，仪器建造得可以粗糙一点。例如，SDC 传感器的第一个样机的电极就是将铜片在剪切机上裁剪之后，随后在一个硬平台上用锤子锤平的。这与一些传感器所必需的光学抛光表面形成了鲜明的对比。

在第 2 章中曾对 Sprengnether 垂直地震仪的各方面进行过讨论，当时是用外电阻为 990Ω 的电阻器来提供感应电流阻尼来对其测定的，其传感器构造的 Q 值为 4.9。这个电阻器被线圈连接起来，线圈是原仪器的一部分并在一个定磁铁的区域内移动（带着仪器的质量），也就是法拉第定律（速度）检测器。通过给线圈施加交流电（方波），再在质量运动的每个转折点反接电流方向，完成最初的自由衰减研究的激励。方波驱动这种方式产生的基波（傅里叶系列）与质量运动的方向偏移了 90°，因而与共振相对应。终止驱动后，Dataq DI-700 模数转换器（16 位）采集了图 3-8 所示的数据。

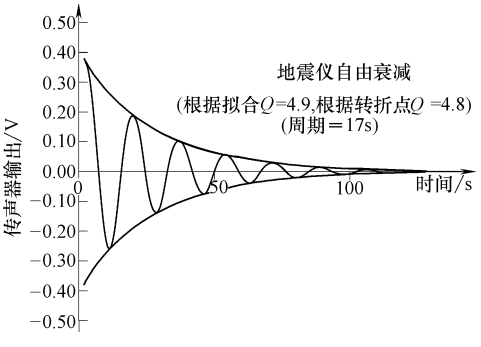


图 3-8　Sprengnether 垂直地震仪自由衰减记录（周期为 17s）

当采集的数据被以 *.dat（CSV）文件格式保存在软盘上后，用 Excel 生成了图 3-8。用“逗号分隔符”来打开文件，将数据输入到 Excel 中。一旦数据导入 Excel 中，为了给计算机生成的时间系列留出空间，这些数据从一个地方右移了一下（从默认的 A 列移到 B 列）。根据采样频率生成该时间系列值，这些数据通过默认方式存入数据文件。为了创建时间列，第一行写 0，n 与数据的开始相对应。顺着 A 列里的一行向下移动，键入“$=A_n+1/$(采样频率)”来递增时间；然后，用鼠标左键点住并且拖动包含时间的框右下角的“小方块”，用自动填充，一路向下、直到生成最后一个数据点。与转折点相对应的、计算机生成的指数衰减是由两个附加列生成的。将光标放在时间 A_n

的地方（C 列中），然后键入“ = A_0 * exp（ -（omega/2/Q） * A_n）”，这样就获得了数据。通过观察数据，A_0 的值显而易见，并且从 12 个转折点中可以快速地得到 Q 的初估值（在保存数据前用 Dataq 软件读取）。

表 3-2 说明了这个技术。例如，在图 3-8 中，根据 13 个转折点得出的 Q 值是 4.8。因此，设指数为 0.0385。使用自动填充，这一列（上边）的指数很快就得到了。之后，第二个（相邻的）D 列的 Q 值用类似的方法获取：将最后一个点取负，然后自动填出至最高的一行（当向下自动填充时，在过了最后一行数据后，Excel 扫过诸行的速度呈指数级增加，所以向上自动填充远比向下自动填充要容易）。

一旦我们对拟合的数据绘出一对指数图像，再加上原数据，我们通过变化参数（本例中是在 0.0385 左右的小调整）的方法可以轻易地将曲线调至满意的拟合（每次都使用自动填充）。当没有太多的参数需要调整时，此方法快速而准确——因为我们的眼睛足可以胜任。根据此方法得到的最佳拟合，我们将 Q 的初始值 4.8 调整到最终值 4.9。

需要指出的是，在表 3-2 中，我们用了一个新的 Excel 表（A 列不再是上述讨论中的时间）。每个转折点（最大和最小值）的电压都是这样读取的：用 Dataq 软件依次将光标放在极值处并手工地记录显示出来的值，然后将这些值键入到 Excel 表中，正好和生成图 3-7 的导入大的数据的“打开文件”的方法相反。

表 3-2　根据转折点估计 Q

根据运动转折点用 Excel 表格估计对数减量

Cavendish 平衡摆

	A	
	-0.252	
	0.247	
	-0.185	
	-0.194	
	-0.133	
	-0.155	
	-0.095	
	0.122	
	-0.062	
	0.107	
	-0.037	
	0.088	
	0.024	
-2 * ln(1-A1-A13)/(A1-A2+A3-A4+A5-A6+A7-A8+A9-A10+A11-A12)) ⟶	0.292266	0.272743
-2 * ln(1-(A2-A12)/(A2-A3+A4-A5+A6-A7+A8-A9+A10-A11)) ↗	0.25322	

(A15 + A16)/2 = 平均值

(根据计算拟合的最后估计值 = 0.271)

（续）

	A	B	C
转折	Pt/V		
3	0.3643		
4	-0.2607		
5	0.1913		
6	-0.1343		
7	0.1029		
8	-0.0687		
9	0.0549		
10	-0.0371		
11	0.0298		
12	-0.0194		
13	0.0149		
14	-0.0109		
15	0.0071	0.6554	0.651
		0.6532	

地震仪的自由衰减

第一次

B15 = -2 * ln(1-(A3-A15)/(A3-A4 + A5-A6 + A7-A8 + A9-A10 + A11-A12 + A13-A14))

第二次

C15 = -2 * ln(1-(A4-A14)/(A4-A5 + A6-A7 + A8-A9 + A10-A11 + A12-A13))

平均得到 $Q = 4.8(\pi/0.653)$

（根据计算拟合的最后估计值 = 4.9）

3.4.4 案例 4：带有光电门传感器的杆摆

测量振动较大的阻尼的一个最简单的方法就是使用普通类型的光电门，这在物理实验教学中已得到广泛应用。用一个贴在振子上的“遮光片”来断开红外线光束。我们正是用这个方法来研究图 3-9 中的杆摆。图 3-10 是这个标志的特写，它贴在了摆的顶端，摆在振动中经过光电门。

如图所示，摆的各部位被夹在了一个垂直的钢棒上。上、下质量块都是用铅做的，每块上都钻有一对孔——一个用来穿入摆的铜棒，另一个（攻丝后）用于拧入紧固螺钉，此螺钉用于固定棒上不同振动垂直位置的质量。

这个机械振子是个复合摆，其振动周期可以通过使刀锋（同样也夹在棒上）靠近质量中心而变得更长。周期很长时，仪器对支持架的外界加速度不再敏感，但它对内部的结构变化变得敏感起来。当仪器上部（尤其是刀锋上面的材料）经历蠕变时，低频不稳定性便被激活。上边的摆类似于一个倒置摆，只不过它是刚性地和下面的摆相连，并且引起其振子展现出双势阱（Duffing）特征。当周期向着真正长的周期增加时，会出现较大振幅。这个细观滞弹性的复杂性趋势取决于棒的尺寸。一如所料，由于棒材和管材熟知的工程性能，大直径、薄壁管会与同样材料制成的实心棒（总质量相同）表现出不同的特性。管子不经历局部（剧烈）变形非常容易褶皱，这是真实的。

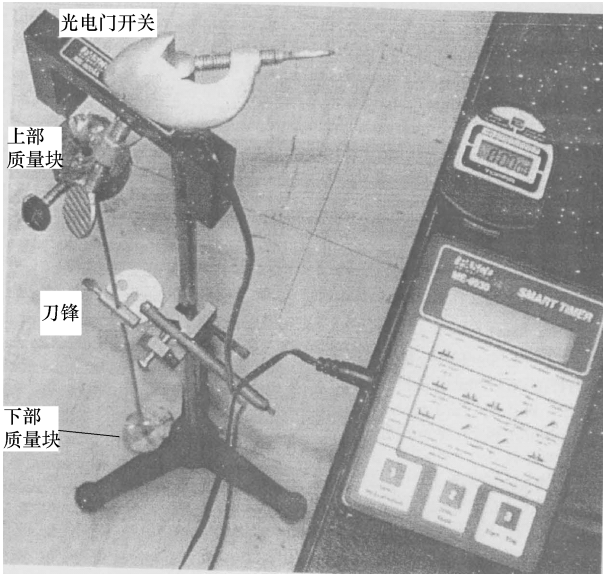


图 3-9　带光电开关的杆摆的阻尼测量

使用光电门测量阻尼需要遮光片通过光束的时间相当小——因此与其他传感器相比，要运动具有较大的振幅。当然，真正的大振幅运动会使周期增长，这符合一直理解的钟摆动力学。在可以接受的幅值范围内（实际当中并不严格限制），摆通过平衡位置的速度与遮光片的两个垂直臂打断光电门光束的时间间隔成反比。如果周期不随幅值变化，那么光电门时间仍与幅值呈反比。对于所受的限制来说，时间倒数与周期数的关系图是自由衰减转折点的合理近似。

本例中的单光电门时间间隔测量使用了 Pasco Smart 定时器。它是个用户友好的仪器，可以通过遮光片来精确地测量出摆的周期（用不等长的两个遮光片臂）。对于这个类型的实验，或许可以证明用一个停表（与速度测量相比非常罕见）来测周期更为方便。之后，我们从 Smart 定时器上人工地读出不断增加的时间间隔并手抄记录，每个循环都是如此。当然，进行这些操作要求振动周期足够长，以保证操作的完成。将记录的数据键入电子表格中加以分析很方便，然后又以此生成了图 3-11 所示的阻尼曲线。

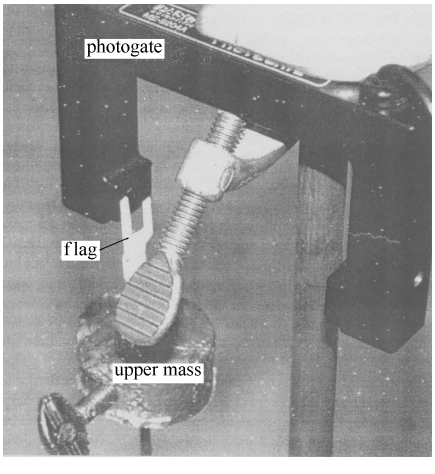


图 3-10　摆的顶端特写：上部质量块和用于中断光电门的“遮光片”

一个纯指数的拟合并不适合于图 3-11 的衰减，其中，我们移除了上部的质量，并且为了得到一个紊乱的空气阻尼，在摆的底部贴上了一个名片（接近 1s 的周期）。然而显

示出来的拟合既包含线性阻尼也包含二次阻尼，这看起来相当合理了。在之前讨论的振动薄片的案例中，该系统足可以用第 2 章中给出的非线性阻尼方程式（2-61）来描述。对于图 3-11 中的数据，一开始 $Q=25$，而在数据记录的最后，Q 增加到 70。

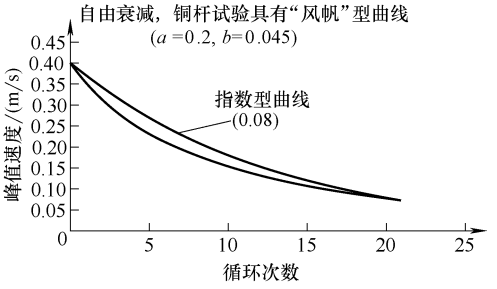


图 3-11　由光电门开关试验确定的摆的自由衰减

去掉贴在底部的名片，并把上部质量块安装到位，用光电门测量技术测量，我们发现此时摆的衰减是指数型的，正如预期中的黏性阻尼一样，其周期为 5s 左右。然而，当周期超过 10s 时，棒的内摩擦则变得比空气阻尼更为重要。尽管在周期更长的水平上衰减仍为指数形式，但频率依存关系不再与要求的线性空气阻尼相同。

3.4.5　案例 5：受刀锋下面材料影响的杆摆

图 3-11 中的数据是由放置在硬陶瓷氧化铝平板上的刀锋试验采集的。当用其他材料支撑时，杆摆的阻尼会受支撑材料的滞弹弯曲影响，而不受杆的滞弹弯曲影响。从下面的例子中可以看出，材料的硬度并不能保证低阻尼。下面的数据是由图 3-12 所示的不同的摆试验采集得到的。

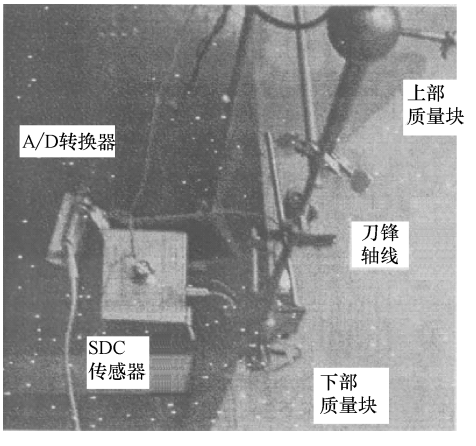


图 3-12　用于研究刀锋下不同支撑材料影响的长周期杆摆

本案例中的传感器是个 SDC 单元，通过 Dataq DI700 A/D 转换器与计算机连接。上部与下部质量大约都是 1kg，并且它们的铝箭头到摆的距离大约是 70cm。

对于氟化锂样本，用于采集图 3-13 中数据的样本是成对的，仅有一对被大剂量伽马射线辐射过，结果造成了晶体结构的改变，其改变不仅是如图 3-14 中照片中指出的色心的原因，还是内摩擦发生剧变的原因。从图 3-13 中可以清楚地看出，LiF 的内摩擦是所使用的杆摆阻尼的主要来源（Peters，2003a，2003b，2003c，2003d）。

氟化锂用在热释光胶片剂量计中（放射检测器）。当暴露于高能辐射之下时，原子被从晶格状态“打”成了与晶格空隙位置相符合的亚稳定状态。一旦配有一个光电倍增管烤箱中样本的温度走上斜坡，那么由亚稳定状态下发生跳跃时，会伴随释放一些光子。这样产生的光的量正是被晶体吸收的剂量的一个度量。因为我们观测到的闪光伴随的温度变化很小，因此有理由预测，这个应变也会引起这类晶体缺陷状态的重大变化。图 3-13 中的数据证实了这个假设，并表示了一个纯晶体和被伽马射线严重损伤晶体之

间衰减特征的显著区别。

在图 3-13 所示的两个衰减曲线中，均有显著的非线性阻尼存在，在两个记录数据的早期部分中都有证实。上边的案例近似于纯库仑摩擦阻尼，而下边的案例有部分的幅值依赖关系，这从图 3-15 显示的 Q 的估计值可以看出。

图 3-15 中的 Q 值是由运动转折点连续的、三个一组的数计算得到，并由 Dataq 软件从显示在显示器上的衰减模式直接读出。所用的方程是

$$Q=\frac{\pi}{-2\ln\left[1-(\theta_n-\theta_{n+2})/(\theta_n-\theta_{n+1})\right]}(n=0,1,2,\cdots) \tag{3-3}$$

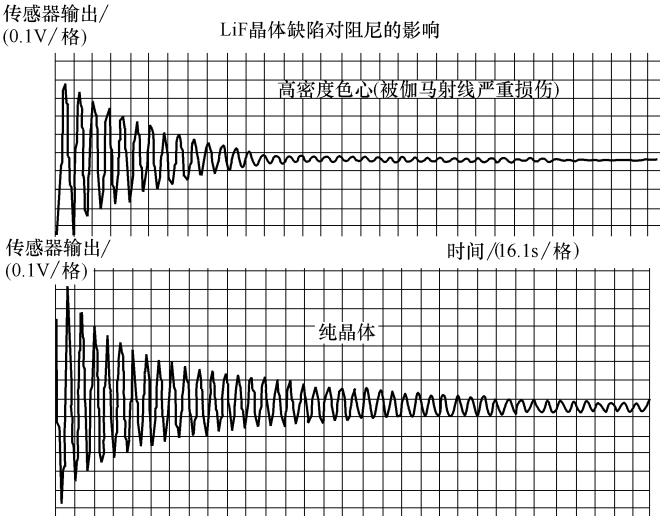


图 3-13　由于刀锋下支撑材料不同造成阻尼不同的说明

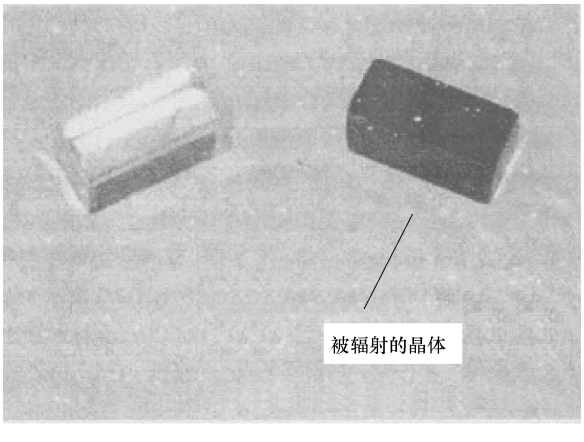


图 3-14　用于获取图 3-13 数据的单晶体 LiF 照片

3.4.6　案例 6：低 Q 值的硬质材料

人们通常（并且错误）地认为硬质材料一定会有低阻尼。下面两个案例说明这个

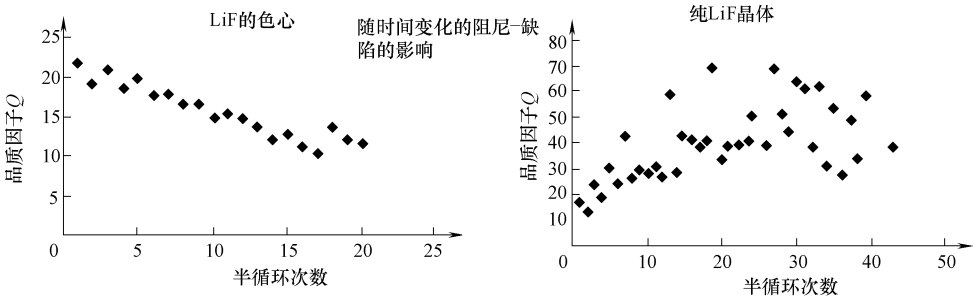


图 3-15　Q 的事件依赖性，LiF 晶体试验

必然性不一定存在。虽然铸铁很硬，但也是相当耗散的，且是制造发动机机体的理想材料。图 3-16 展示了一个支撑在铸铁件上的钟摆的钢锋衰减曲线。

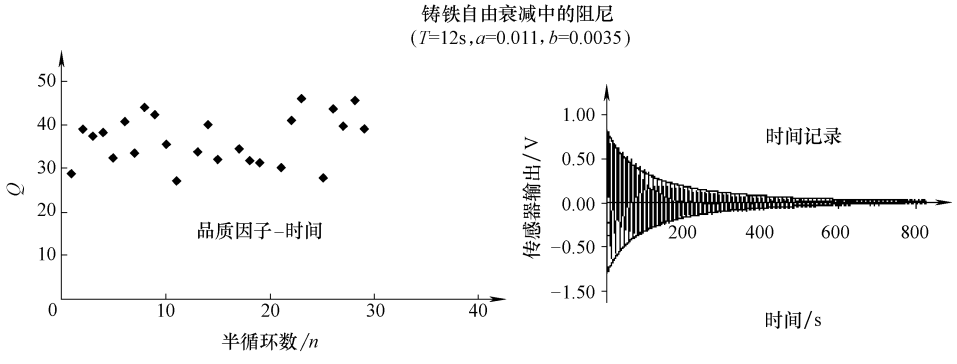


图 3-16　采用铸铁样件采集的数据

在记录的开始，铸铁的阻尼几乎是蓝宝石钢或者硅钢的两倍，其 Q 值大约为 80。虽然铸铁用于机体制造的频率非常高，但是其大阻尼却与发动机机体使用铸铁的已知良好性能相一致。

图 3-17 所示是另一个有着大阻尼的非常硬的材料——压电陶瓷晶片，它是由铅、锆、钛组成的锆钛酸铅（PZT），人们常通过机械冲击使其产生电火花来点燃燃气烤架。基于短时记录得到的 Q 值持续下降，表明了有库仑阻尼，这与长期记录的早期部分中近乎直线的转折点相一致。我们称长期记录是异常的，因为它似乎并不与数个同时作用着的耗散机制相一致。一旦幅值掉到特定水平以下，那么相反，早期观测到的强库仑阻尼似乎在之后消失了。这不禁让人想起了量子型的激活过程。在一个不同摆构造中，研究锆钛酸铅晶片将会很有意思，而且不再是像本例中那样“开路”操作，而是在晶片的顶部和底部之间连接上不同的电阻。

3.4.7　案例 7：各向异性的内摩擦

我们在刀锋下放置了偏振片材料（H 片），发现阻尼取决于长链聚合分子的方向。我们是通过从擦亮地板的反射光中观察偏振片的方法轻易地测定出分子方向的。当反射

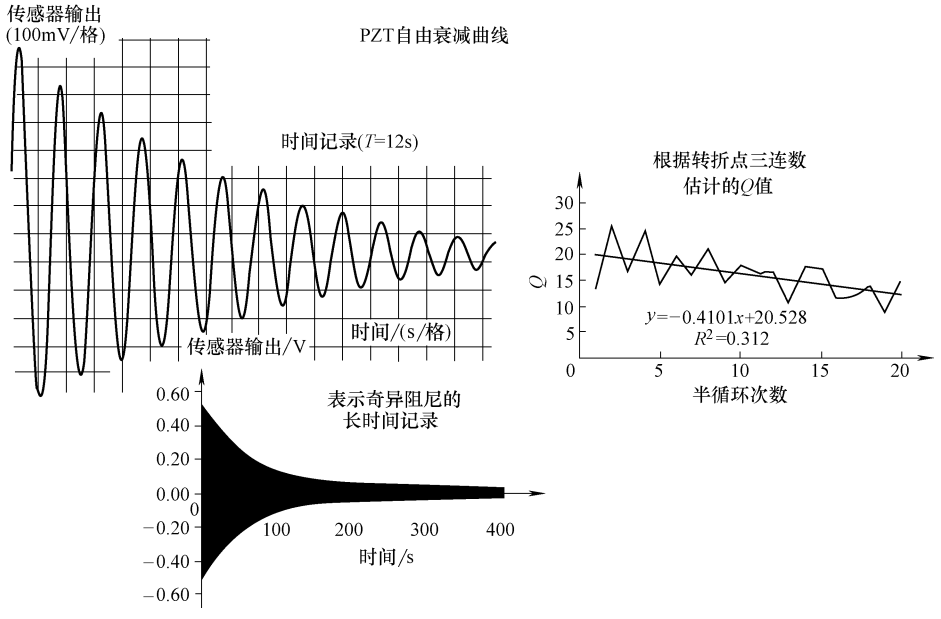


图 3-17　有关 PZT 陶瓷晶片的实验数据

接近于布鲁斯特角时，只有电场的水平分量在非偏振入射光的反射光当中是显著的。因此，通过旋转样本，观测出哪个方向光亮最暗就可以测出分子的方向。这时分子链处于水平布置。

我们推断偏振片的分子特性可能导致了力学和光学的各向异性。如图 3-18 所示，这个推断证明是正确的。

当硅以 10s 为周期振动时，之前的研究发现此仪器的衰减一直保持一个 80 的 Q 值（不确定度为 3%）。目前的研究中，得到的 6 个自由衰减记录适用于下列情形：（ⅰ）边平行于链和（ⅱ）边垂直于链。在平行的情况下，振动的 Q 值平均估计为 50；垂直的情况下为 43。平行的再现性（4%）比垂直的再现性（5%）要稍好一些。其他细节请参考其他文献（Peters，2003a，2003b，2003c，2003d）。

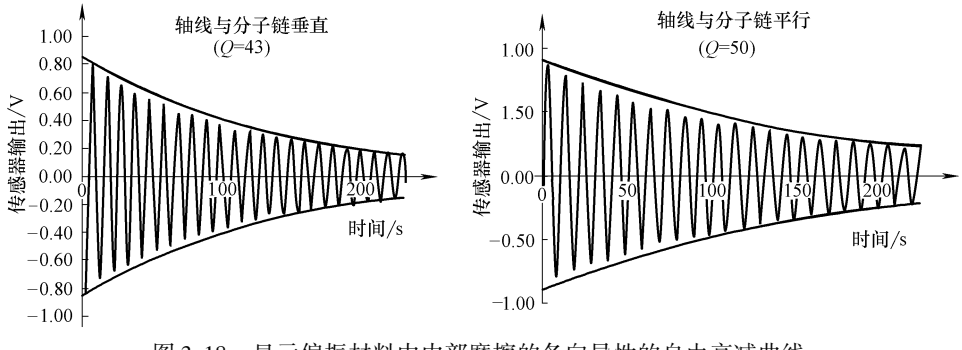


图 3-18　显示偏振材料中内部摩擦的各向异性的自由衰减曲线

自由衰减 Q 值估计的总结如下：

到目前为止，我们描述的所有技术都是基于自由衰减的方法，它们对于非线性系统尤为重要。对于线性系统，同样可以应用如 Box3.1 中所指出的稳态方法（最后一列，de Silva，2006）。表 3-3 总结了本章用于估计对数衰减率的技术，如 βT 及 $Q=\pi/\beta T$。

表 3-3　量化阻尼的方法

阻尼(估计 Q)技术($Q=\pi/\beta T$, T=周期)					
对数衰减率 (整循环,N)	转折点 (半循环,n)	对包络线的 非线性拟合	时间 $\tau=1/e$ ($0.3679x_0$)	短时 傅里叶变换	带宽,放大因子迟 滞回路,阶跃响应
$\beta T=\frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{x_N}$	$\beta T=-2\ln\left[\frac{1-(x_{n-1}-x_{n+1})}{(x_{n-1}-x_{n+1})}\right]$	$-\dot{y}=ay^2+by+c$	$\beta T=T/\tau$	$-\beta T=\frac{T\ln 10}{20}$ [斜率(dB/s)]	de Silva(2006), 第 7 章

最好的方法就是采用一个完全非线性的拟合，最差的方式是测量时间至 1/e。表 3-3中，使用 STFT 方法，计算对数衰减率的表达式为

$$Q=27.29\frac{f}{\left|\frac{L}{t}\right|} \tag{3-4}$$

式中，f 为频率，单位为 Hz；STFT 的斜率为 L/t，单位为 dB/s。

3.5　有阻尼的强迫振动振子

本章主要研究振子的自由衰减振动。通过稳态下的测量亦可作出定量预测。然而，对于预测方面的信心还是依赖于阻尼的本质。除非补充了自由衰减数据，否则这些数据对于大多数非线性系统来讲具有极限值。

3.5.1　多功能大学实验仪器

图 3-19 所示的多功能大学实验室（MUL）仪器，演示了某些应用于强迫振动的技术，这些技术已被 Mercer 大学的物理系学生采用。

为了测量洛伦兹力（定义电流单位-安培的基础），通过接线柱给绕枢轴转动的铜线提供恒流，我们看到重为 W 的物挂在铜线的一个水平臂上，电流通过接线柱进入导线，该导线是经由一个香蕉插头插入到打好的孔中；之后，电流流经又低（看不到的）又短的直线段导线，此导线放置于驱动磁铁的两极之间；最终电流通过接线柱另一端的香蕉插头流出。当导线载流时，磁铁的磁场对导线的力会使其有一个垂直方向的挠曲。方向向上挠曲还是向下挠曲由电流的方向决定，这导致了绕枢轴点（锯齿状的接线柱顶）的旋转。我们用电容传感器 S（SDC 专利的数个变体之一）测量位置。

电流平衡的灵敏度取决于振动导线的质心位置，在某种程度上它是由稀土永磁 M 的位置决定的，这个永磁 M 挂在一根较重的、弯曲 90°、由铜棒螺纹端拧着的钢螺母上。有机玻璃构件同时固定住了棒螺纹部分的上端及振动导线的一端。

3.5.2　强迫振动的谐振子

当激励电流是交流而非直流时，MUL便成了用于研究洛伦兹力的一个谐振子。阻尼主要由铝环中的涡流决定，铝环在木制基座下面，并与磁铁M十分接近。

此仪器对于自由衰减及强迫振动的研究都十分有用。工科学生 Brandon R. Bowden 和 James D. Sipe 曾用 LabVIEW 编程，生成了自由衰减和共振的曲线。

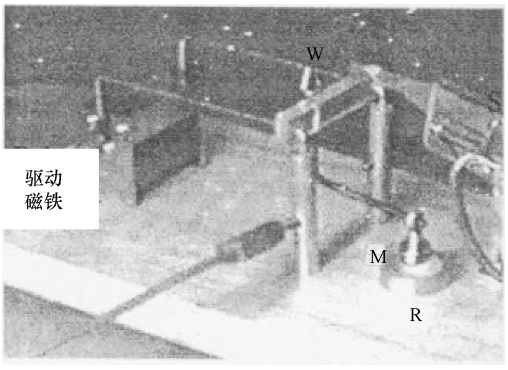


图 3-19　研究共振和洛伦兹力的装置

图 3-20 给出了一个洛伦兹力（共振响应）的例子［在一份实验室书面记录中可找到更多信息（Peter，1998）］。

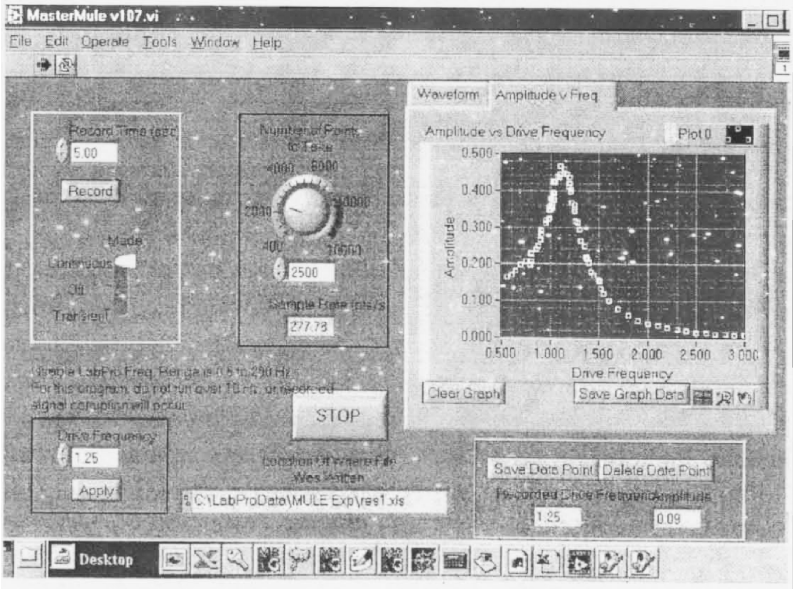


图 3-20　用 MUL 来研究瞬态和共振现象的 LabVIEW 编程屏幕

3.6　多元非线性振子

一个振子既可以有显著的弹性非线性，也可以有显著的阻尼非线性。图 3-21 中所示的机械系统即是一例。

这个仪器是一台改进的延伸仪，它是基于 SDC 传感器设计，用以测量杨氏模量和热膨胀系数的仪器，由 TEL-Atomic 公司出售。我们拆除了一般随仪器一同使用的导线

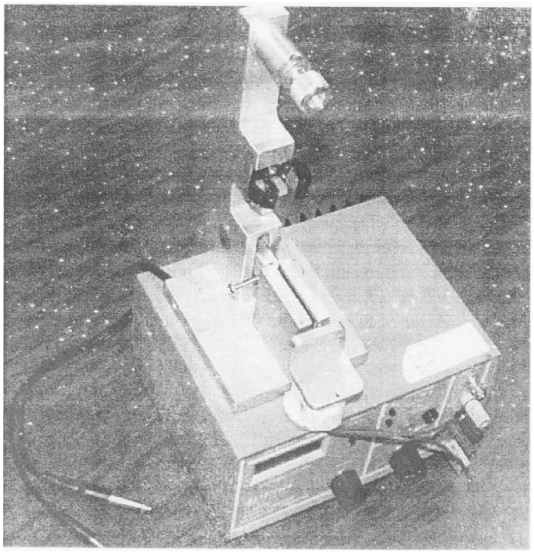


图 3-21　多元非线性的力学振子

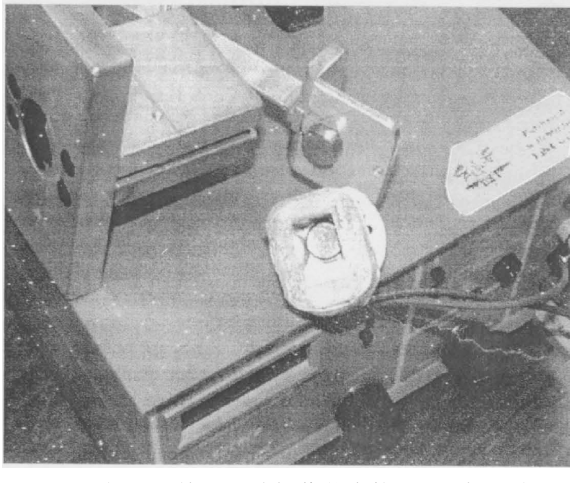


图 3-22　对图 3-21 振子的特写（非操作状态构造），表示稀土磁铁的布置

（和黑的夹钳上装的一个中空高功率电阻在一起），并使用了两块稀土永磁铁。一块磁铁粘在了承重盘的底部，如图 3-22 所示，另一块磁铁粘在了感应器的底部。感应器坐落在用于驱动的强迫振子（套管仪器，Pasco）的上方。我们将这对磁铁放置得很近使得它们相互排斥，因而也就支撑了延伸仪移动臂的质量。

研究非线性系统需要一个线性传感器，也就是说传感器的任何非线性贡献必须忽略不计。图 3-23 表示仪器的校正结果，以及用于研究的幅值范围的线性响应。

假设这个振子的势能有下述的形式

$$U(x)=\frac{b}{x^{s}}+cx \tag{3-5}$$

当把小质量放在盘上时，通过测量 x 来估计参数。在双对数坐标上（使用传感器校正常数 550V/m），一个线性回归拟合得出 $b=1.02\times10^{-5}$，$n=1.526$，$c=0.304$（国际单位制）。图 3-24 中的图清晰地展示了势能的非谐性，复原力在压缩（x 减小）时比拉伸时大。这个特征会使人联想到原子间的势能，对于热膨胀产生了非谐性。

由于弹性非谐性，平均位置依赖于振动幅值，从图 3-25 所示的自由衰减曲线中显然可见。

如图 3-26 所示，我们发现这个振子的阻尼也是非线性的。

如图 3-27 所示，当振幅较大时，这个振子显现出了迟滞效应。从图 3-27 中我们还能看出，无论频率高低，幅值跳跃的位置都取决于调整振子的方式。通过比较图 3-27 和图 3-20 的屏幕图像可以看出，这些跳跃（众所周知的是弹性非线性）与线性振子形成鲜明对比。

这个研究中还有一个意外，那就是振动的频率。一般来说，振子不能带动驱动器。而且，首选的频率并非一定和 6.01Hz 的自由衰减频率相同。图 3-27 显示了一些频率（是用功率谱测出的）。图 3-27 中所示的 3% 的频率跳跃并不是真实的，而是 1024 点变换的有限分辨率所导致的人为假象。

图 3-27 说明了为什么非线性阻尼测量要在自由衰减中进行。图 3-25 说明了指数拟合为何对一些振子变得毫无意义。幸运的是，我们能够使用 STFT 来确定 Q 的幅值依赖性。

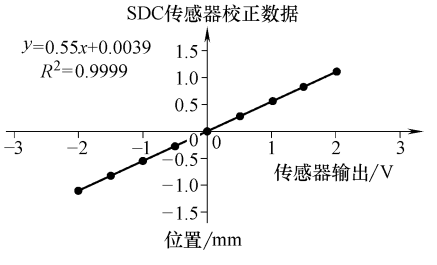


图 3-23　用于测量多元非线性振子的传感器校正数据

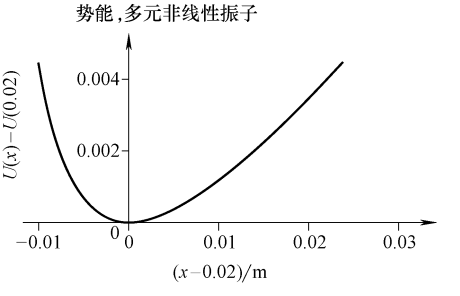


图 3-24　振子势能函数曲线

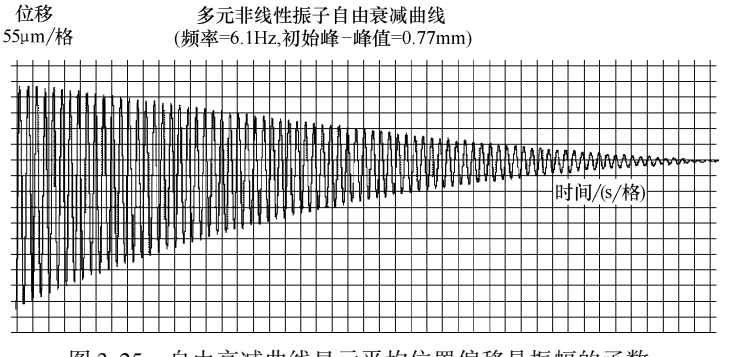


图 3-25　自由衰减曲线显示平均位置偏移是振幅的函数（减少传感器电压对应增加 x）振动频率 6.01Hz

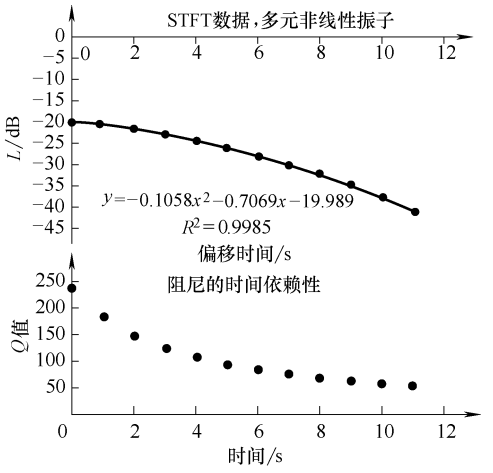


图 3-26　用短时傅里叶变换确定的自由衰减特性

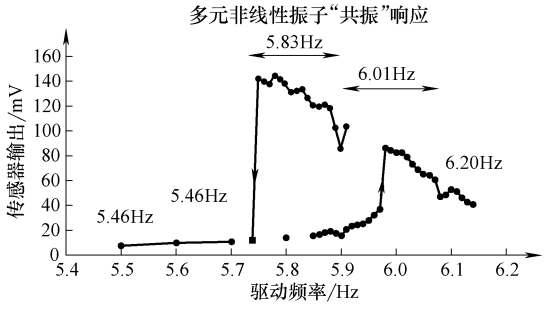


图 3-27　振子共振响应（稳态）

3.7　多振型振动

3.7.1　系统

在工程中，多振型振动非常普遍。如果不说绝大多数，也可以说很多情况下振型具有混合特征，虽然在某些情况下它们太小了以至于观察不到。非线性对于这些问题的重要性尚未被广泛接受，所以在此提供一个案例来说明此类振动的显著特征。我们用一个长 24cm、直径 0.31mm 的被垂直定位（悬挂起来）的钨丝作为振子，并用此振子得到自由衰减的记录。钨丝的顶端被夹钳夹住，底部粘上了一个矩形板，这个矩形板长 11.3cm、宽 1.3cm、厚 0.8mm。我们是从双面铜电路板上切下的这块板。如图 3-28 所示，这个板被固定在一个电容器的两固定板之间。

对于图片画面，我们将这个仪器拆开并将那个板放在了底部电极的上边。操作中，这块板是放在上下两个静电极之间的（间隔为 4mm），并且在振动中没有任何机械接

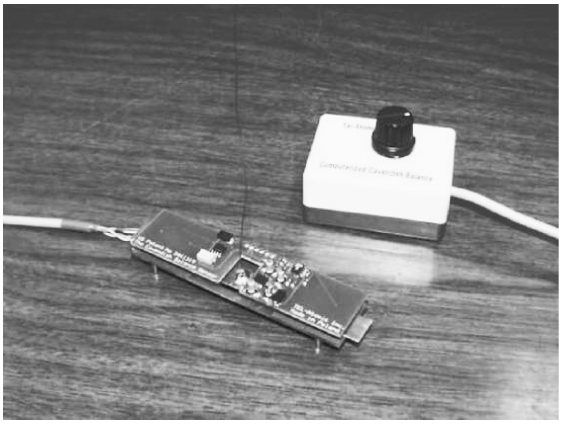


图 3-28　用于监测振子多模态的传感器照片

触。可以看出，含有上电极的电路板有着多于 12 个的电子元件，这些是表面贴装技术类型的。探测器是 SDC 类型的，其特殊的体现就是在波兰为 TEL-原子公司制造的、用于电脑控制的卡文迪什平衡单摆的 Jackson　MI 探测器。

如图 3-28 所示，钨丝蜷缩一团而非笔直，此即预料中的非线性的重要来源。为此，不要说制作一个大直径的、相当直的钨丝有多困难，去除钨丝的蜷缩也不容易。

3.7.2　一些实验结果

图 3-29 展示了一个我们用这个仪器做出的衰减记录的案例。

3.7.3　短时傅里叶变换

如图 3-29 所示，当多振型出现在衰减中时，我们不可能用时间数据轻易地估计出所有振型的 Q 值。我们可以用一个叫做短时傅里叶变换的技术，以 FFT 估计衰减，它与诸如 LabVIEW 的采集系统相关，嵌入在不同的软件包当中。使用 Dataq A/D 转换器自带的万能软件，我们可以简单地使用同等的技术手册。用点的数量来定义一个 FFT 值（通常都是 2 的倍数），它与记录中的点的个数相比要少得多。在自始至终一直增加的某段上做一个人工扫描，在时间增加的方向上对每个位置都做一个独立的 FFT 运算。为了说明这个强大的工具，图 3-30 展示了对应图 3-29 上数据开始、数据结尾的谱。

所有的振型皆随时间衰减，衰减的速度对于那些与 1.19Hz、2.19Hz 主要振型频率和、差相一致的振型来说，衰减通常都很快。表 3-4 以 dB 为单位给出了被认为两倍的谱的强度。凡是记录行末尾出现空的，都表明此值稍微偏小。

表中的分贝值 L 参考的是 ADC 的位数大小（16 对应着 65536）。在传感器输出电压方面，我们用 Dataq 将其定义为

$$L = 20\lg(32768 \times xV/FS) \tag{3-6}$$

式中，FS 是由增益设定决定的满刻度电压。

在本章的其他地方，分贝值是用一个不同的参考值来计算的。例如，对于一根 FFT

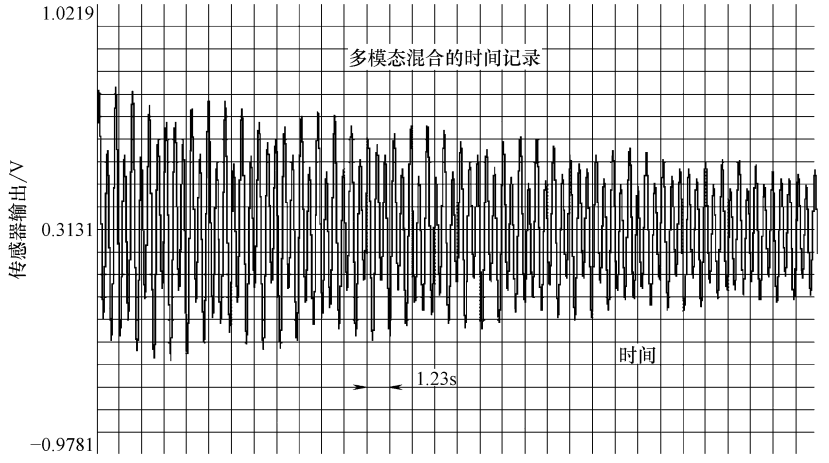


图 3-29　多模态振子自由衰减案例

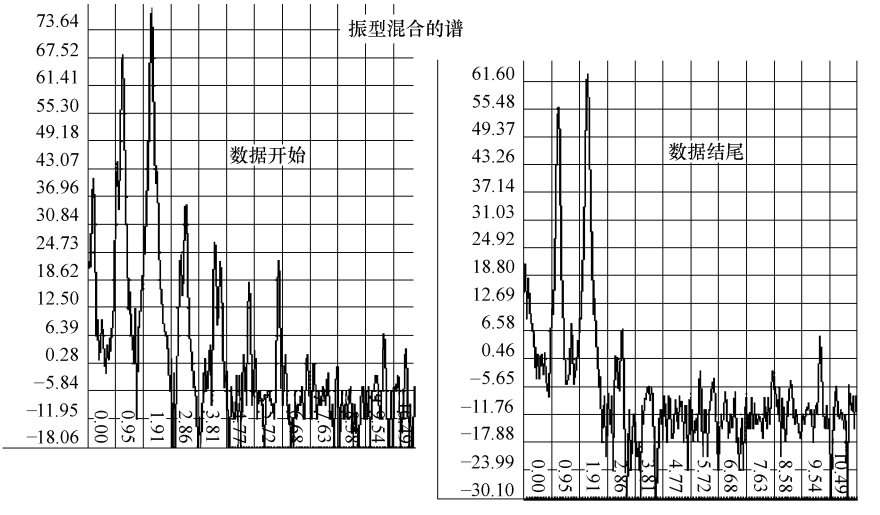


图 3-30　对应图 3-29 数据开始、数据结尾的谱
（谱的强度用分贝 dB 表示，横坐标频率用 Hz 表示）

谱线 f，有实部 $\mathrm{Re}(f)$ 和虚部 $\mathrm{Im}(f)$，其分贝强度使用下式计算

$$L = 20\lg\left[\sqrt{\mathrm{Re}^2(f) + \mathrm{Im}^2(f)} \Big/ \left[\frac{n}{2}\right]\right] \tag{3-7}$$

式中，n 是 FFT 中点的数量。这对于确定噪声等级来说非常方便。例如，对于后图显示的电子噪声，我们发现其 SDC 传感器的背景噪声为 – 120dB 级，此噪声对应一个微伏。由此噪声级定义的位置分辨率大约为 500nm，也就是在可见光波长的数量级上。

本案例中研究的蜷缩着的导线有两个主振型，高频率（2.19Hz）为扭转振型，低频率（1.19Hz）为摆动振型。如果导线是完全弹性的，则摆动振型的频率比可能导致的频率稍高一些，且成为一个单摆（摆长 24cm，频率 1.02Hz）。摆动振型是二维的

(与所谓的圆锥摆等效)，但是传感器只能对（第一阶）垂直于电极的长轴线方向的运动做出响应。同样应当指出，相对于扭转响应而言，此运动仍为衰减运动，其原因就是第 2 章中讨论过的机械共模抑制特性。

表 3-4　图 3-30 中某些谱线的谱强度

频率/Hz	记录开始/dB	记录结尾/dB
2.19	78.3	63.0
1.19	68.1	55.6
1.00	44.6	
0.19	40.8	
3.38	35.0	6.7
4.34	26.7	
4.53	22.4	
6.53	22.9	
5.53	17.8	

人工 STFT 用于分析图 3-29 所示的数据，从而估计出三个不同振型的衰减历史，两个主振型（扭转和摆动）以及另一个振型，它的频率是两个主振型频率之差，即 1Hz 的那个。图 3-31 显示了结果，其中使用了汉宁窗，并且当做 1024 点变换时，记录中点的总数允许有 5 个等时间间隔的 FFT。

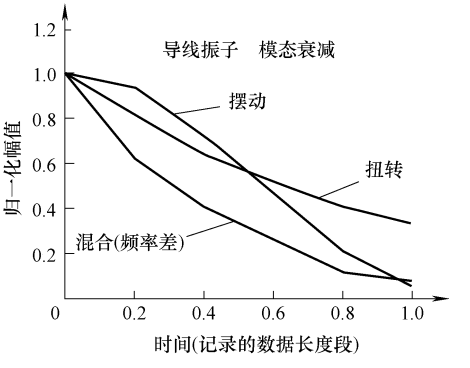


图 3-31　导线振子模态衰减
(用手动 STFT 确定)

尽管扭转振型的衰减看起来非常符合指数形式，但是在两个振型之间有一个大的拍(从图 3-29 中可以容易地看到)。拍自身不能产生一个频率为 1.0Hz 的混合信号，但是在线性系统中拍可以在较弱的摆动振型中引起幅值变化。

3.7.4　非线性影响——振型混合

谱中至少有两个信号是非线性的结果，也就是谱线对应两个主要模态频率的和与差——分别是 3.38Hz 和 1.00Hz。如果振子和探测器的系统是完全线性的，那么这样的和与差情形是不可能的。还需要指出的是，这些混合振型并非传感器非线性导致的，如前面所述，我们应当尽力避免传感器非线性的情况出现。

预期混合信号的幅值大致遵守下列关系：

$$A_m \propto A_1 A_2 \tag{3-8}$$

为了验证这个前提，我们使用了 STFT 来估计式（3-8）中指出的三个成分中每一个的幅值。相对于每个的初始值，其幅值均归一化，并用其结果生成了图 3-32 中的图像。

在做变换时，一个给定振型的幅值通过采用该模态谱线的强度（以 dB 为单位）的

峰值得到，根据

$$A \propto 10^{L/20} \tag{3-9}$$

其中，使用20作为基准因子是因为谱的强度是以电压来计算的。虽然校正常数（使用V/m和V/rad）可以用来表示幅值（单位为米或弧度），但是对于振型，这样做没有任何意义。

这些实例的混合指数用下述表达式定义

$$index = \frac{A_m}{\sqrt{A_1 A_2}} \tag{3-10}$$

这和光学中遇到的表达式很像。可以看到，频率的和、差与理论期望值是合理的接近。

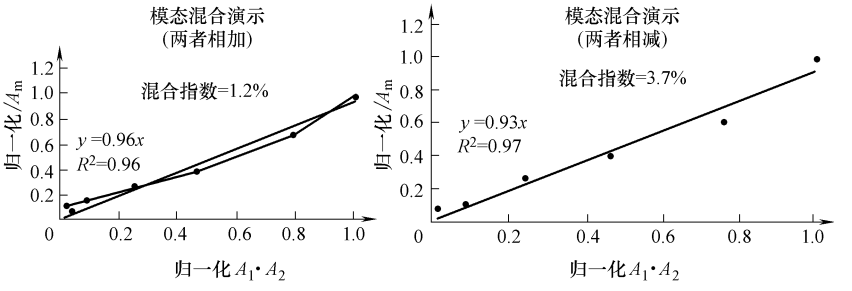


图3-32　根据式（3-8）支持非线性模态混合的证据

3.8　机械噪声之源——内摩擦

第2章中曾讲到，内摩擦不仅导致阻尼的产生，还对显著的1/*f*型机械噪声贡献良多。图3-33为此论述提供了支持。

为了消除空气的影响，试验中（靠近铝管端部的铅球就像一个轴线上布置着一对刚性质点）的摆是在高度真空当中操作的。我们是通过移除了顶部质量、测量振动到达最小值之后的运动（频率大约为1Hz）来得到电子噪声的；一些摆动的模态仍然存在，是由于泵的噪声穿过了真空软管。类似的，泵的振动对长周期的摆激起了一个模态（3.5Hz处尖锐谱线，右边的谱图）。在这个模态中，铅块相对于固定轴朝着相同的方向移动（类似于二氧化碳分子的弯曲模式）。有趣的是，看到对于周期5.7s以上的噪声并无连续的振动存在。观测出的机械噪声应包括其双稳态，这对于硬化之前的这类系统（伴随着强烈的力干扰）并不陌生。在重新放好上部质量（之前为了测量电子噪声拿下来过），并泵入操作压力（低于5μm汞高）之后，采集到了图3-33中的数据。

观测到的机械噪声是1/*f*类（对于$f<1.5$Hz），此范围内电子噪声贡献显著。只要低于1Hz，电子噪声就比机械噪声小一个数量级。

我们稳定好摆并过了一夜，然后又使其做了数个自由衰减（通过倾斜腔室来初始化），才收集了图3-34所示的数据。

可以看到，机械噪声多半在外面已经被解决掉了，剩下的是一些电子噪声。

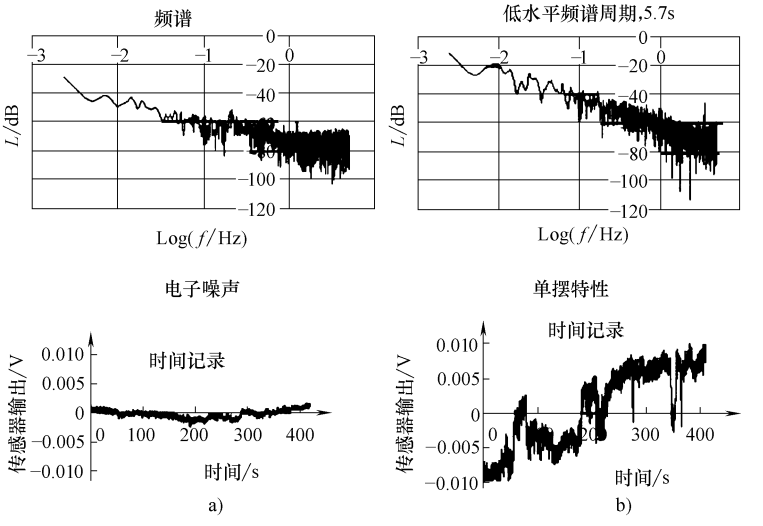


图 3-33　功率谱和相应的时间记录展示的噪声

a）电子类噪声　b）机械类 1/f 噪声

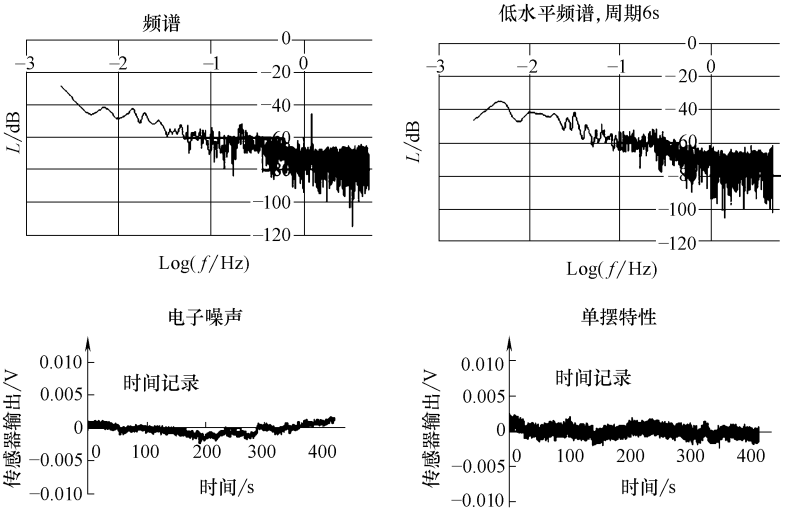


图 3-34　试验在单摆稳定之后进行的数据

3.9　黏性阻尼——需要谨慎

最近的实验已经显示出了黏性阻尼重要的微妙之处（Peters，2003a，2003b，2003c，2003d）。这是个事实：在一个指定的频率下的耗散足可以这样建模——在微分

方程中的速度项前面简单地乘以一个系数。但是，称这个系数是常数则是不合适的。因为阻尼系数依赖于频率并且它包含了振动所在的流体的密度和黏度。

一些工程师早就知道这个历史术语，经常简单地将其处理成一个球做简谐运动。在此情况中作用在球面上的摩擦力可以合理地近似为

$$f_{\text{谐波}} = 6\pi\eta a\left(1 + C_{\text{H}}\frac{a}{\delta}\right)v$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}\left(\text{当 } v\to 0\text{时}, C_{\text{H}}\to 1\right) \tag{3-11}$$

式中，ω 是振动的角频率；a 是球半径；至于流体，η 和 ρ 分别是黏度和密度。只有在零频率的极限下阻尼才能减小到预期中的基于黏性摩擦的斯托克斯定律的形式（稳流）。

使用摆的运动方程的式（3-11），得出 Q

$$Q = \frac{I\omega}{6\pi\eta a\left(1 + \dfrac{a}{\delta}\right)L^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}} \tag{3-12}$$

式中，I 是转动惯量；L 是轴到球心的距离。通常，a/δ 远远大于 1，所以阻尼取决于球的表面积而非球的半径。这些黏性阻尼的复杂性总结在表 3-5 中。

我们提供了对于 Q 值估计的合理的实验验证，正如图 3-35 所示。

本例中的仪器是一个复合摆，其质量放在转轴的上方，而在通常质量的位置是在轴下面。我们在摆的底部通过一个小球来提供水的阻尼。它浸在矩形容器的水里。

若忽略了式（3-12）中的历史条件，则会谬之千里。比如，在水阻尼的情况下，阻尼可能被低估 1000% ~3000%，如图 3-36 所示。

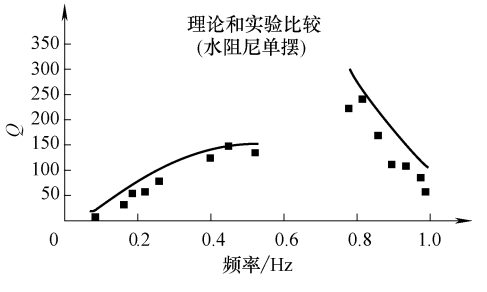


图 3-35　单摆-水阻尼理论和实验比较

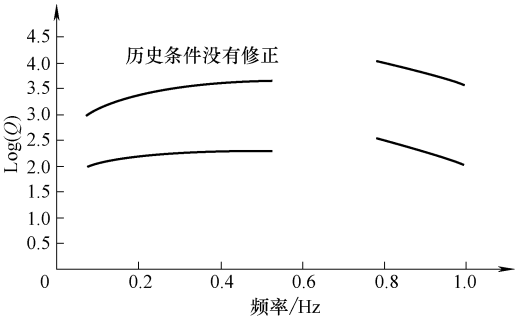


图 3-36　如果忽略历史条件的话，阻尼估计中如何出现巨大误差的说明

在频率较低时，修正摆的滞后阻尼同样很重要。图 3-37 展示了未修正所犯的重大错误。

对于某些情况，浮力以及流体的附加质量对于振动频率的影响亦很显著，如图3-38所示。

表 3-5　黏性阻尼的复杂性

摩擦力并不仅是黏度 η 的函数，它同样取决于密度 ρ 和角频率 ω

$$f_{\text{谐波}} = 6\pi\eta a\left(1 + C_{\text{H}}\frac{a}{\delta}\right)v, \delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}, (\text{当 } v \to 0 \text{ 时}, C_{\text{H}} \to 1)$$

因而导致了黏性阻尼 Q 值的复杂的频率依赖性

$$Q = \frac{I\omega}{6\pi\eta a\left(1 + \frac{a}{\delta}\right)L^2}, \delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}$$

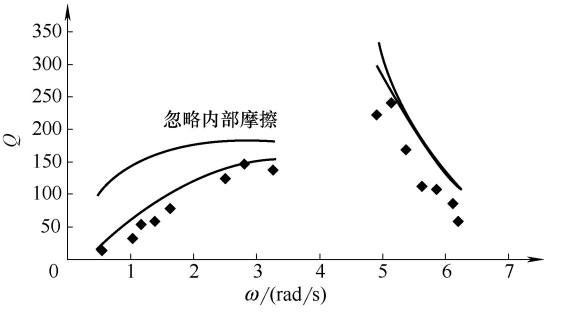


图 3-37　由于没能识别单摆的迟滞阻尼成分造成的显著低频误差的说明

3.10　空气的影响

如图 3-37 所示，比起与振子相互作用的流体影响，低频运动更易受内摩擦的影响。最重要的流体当然是空气。一个真实的内外部影响之间的描述需要在真空中研究振子。仅仅去除大部分的空气是不够的，因为直到碰撞间的平均自由路径成为腔尺寸显著比例之前，气体的黏度能够惊人地保持稳定。

理论上可以粗略地估计空气的影响，尽管只是对于最简单的几何形体（比如球）适用。在这些情况下，可以使用式（3-11）（考虑历史条件，使用合适的黏度、密度值）。在一些情况下，也可以用实验的手段来估计空气影响的值，正如下面给出的例子——黄铜与焊剂杆摆。

鉴于焊剂的延展性，和硬得多的黄铜比起来，焊剂（铅锡合金）的内摩擦很大。我们研究了摆的每一种材料，每个都长 50cm，都有大概 3mm 的直径。使用的技术是 3.4.4 节（上述案例 4）中描述的光电门法。与之前的研究不同，棒上没有夹持任何铅质量——但是使用了相同的可调节刀锋。

图 3-39 清楚地展示了焊锡摆的内摩擦远大于黄铜摆。

我们为每一个衰减曲线做了一个非线性拟合，将其质量因子的历史绘成速度幅值的一个函数，如图 3-40 所示。

考察图 3-40 中的那对铜摆曲线。在速度为 10cm/s 时，这对铜摆的 Q 值差异显著（387 比 266），而在速度为 50cm/s 时，这对铜摆的 Q 值几乎相等。这主要是空气阻力

带来的后果，因为在较大的幅值时，空气阻力是速度的三次方。这点黄铜要比焊剂重要，因为黄铜的内摩擦更小。

由于这两种材料内摩擦的巨大差异，焊剂摆对于空气影响的一阶修正，就是将焊剂的 $1/Q$（原始数据）减去黄铜的 $1/Q$，取倒数，得到了考虑焊剂内摩擦的 Q（修正值）。这在图 3-41 中已经做了。

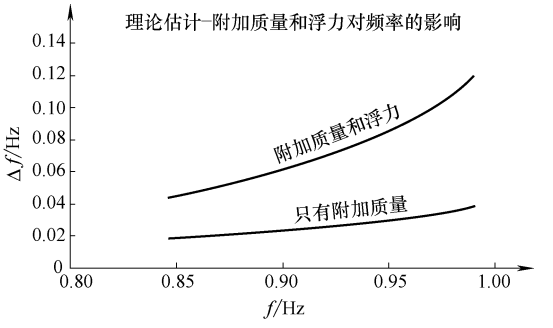


图 3-38　演示流体特性是如何影响频率和振子阻尼的案例

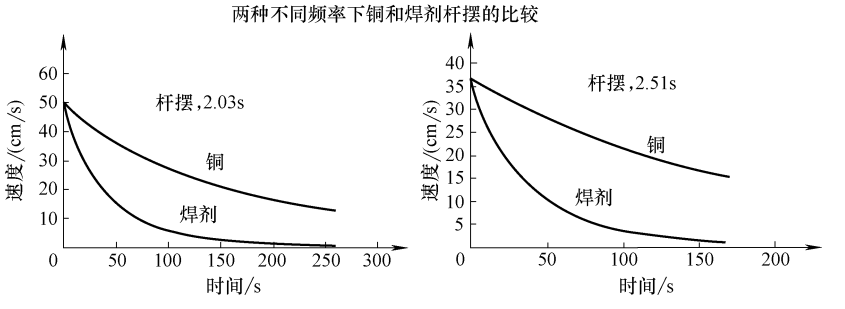


图 3-39　两种不同频率下铜和焊剂杆摆自由衰减曲线
［焊剂的内部摩擦较大，其中速度是杆最高点的峰值（幅值），
位置接近轴线上面 22cm］

从图 3-41 中可以看出，内摩擦阻尼不是简单迟滞的（恒 Q 值），而它是幅值的一个函数。从实线与虚线极为接近中还可以看出，也就是说空气对于焊剂摆的影响与内摩擦相比要小许多。相比之下，对于铜摆来讲，空气影响与内摩擦相比在同一个数量级上（在大幅值时略大）。

我们至少研究了两个频率，因为阻尼的频率变化对于内、外摩擦是不同的（注意：虽然周期是幅值的函数，但是对比于阻尼的改变，非等时数量是很小，并且此处可以忽略不计。）这两个摆在 2.03s 和 2.51s 情形的周期是匹配的。对于纯迟滞（内摩擦）阻尼来讲，理论上无论黄铜还是焊剂摆，短周期的 Q 值应为长周期 Q 值的 1.53 倍。如果阻尼只是黏性的，这个倍数应该为 1.24。至于焊剂摆，在速度为 10cm/s 的情况下（已修正），此倍数为 1.66 = 131/71，对黄铜摆，倍数则为 1.46 = 387/266。虽然，焊剂摆的倍数比预期的 1.53 要高，但是其差别在个别 Q 值的实验不确定度范围内，且根据其

他更具体的实验结果，其误差在5% ~10%附近。

黄铜的倍数（1.46）正如预期的那样，在1.24 ~1.53之间，这是因为空气的影响和内摩擦是可以相提并论的。

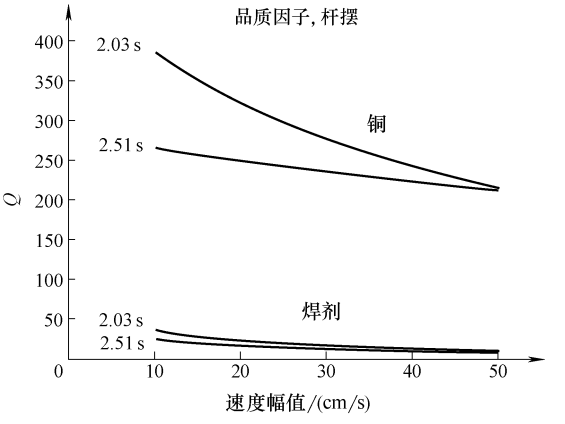


图3-40　演示杆摆幅值依赖性的阻尼，摆的制造材料（图中显示了两种不同的振动匹配周期，单位为s）

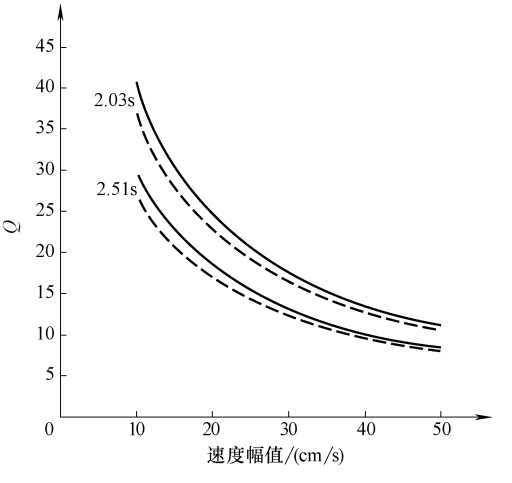


图3-41　仅由焊剂摆内部摩擦引起的品质因子估计值的幅值依赖性（虚线表示对空气阻尼修正前的Q值）

参 考 文 献

Barkhausen, H., *Z. Phys.*, 20, 401, 1919.

Cromer, A., Stable solutions using the Euler approximation, *Am. J. Phys.*, 49(5), 455–459, 1981.

de Silva, C.W. 2006. *Vibration, Fundamentals and Practice*, 2nd ed., Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL.

Fraden, J. 1996. *Handbook of Modern Sensors, Physics, Designs, & Applications*, 2nd ed., AIP Press (Springer), Secaucus, NJ.

Peters, R., Fourier transform construction by vector graphics, *Am. J. Phys.*, 60, 439, 1992.

Peters, R., Mercer physics laboratory experiment, described online at http://physics.mercer.edu/labs/sho.htm, 1998.

Peters, R., Tutorial description of the symmetric differential capacitive (SDC) sensor, online at http://www.telatomic.com/sdct2.html, 2002.

Peters, R., Graphical explanation of the speed of the Fast Fourier Transform, online at http://arxiv.org/html/math.HO/0302212, 2003a.

Peters, R., Nonlinear damping of the "linear" pendulum, online at http://arxiv.org/pdf/physics/03006081, 2003b.

Peters, R., Oscillator damping with more than one mechanism of internal friction dissipation, online at http://arxiv.org/html/physics/0302003/, 2003c.

Peters, R., Anisotropic internal friction damping, online at http://arxiv.org/html/physics/0302055, 2003d

Peters, R., Folded pendulum measurements of the Earth's free oscillations, online at http://physics.mercer.edu/petepag/eigen.html, 2004.

Portevin, A. and Le Chatelier, M., Tensile tests of alloys undergoing transformation, *C. R. Acad. Sci.*, 176, 507, 1923.

Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S., and Vetterling, W. 1986. *Numerical Recipes — The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wielandt, E., *Seismometry*, section: Electronic Displacement Sensing, online at http://www.geophys.uni-stuttgart.de/seismometry/hbk_html/node1.html, 2001.

4 结构和设备隔震

摘要

对于抑制承受简弦或地震地面激励的结构和设备来说，在本章将简单回顾隔震概念，包括橡胶支座、滑动支撑、并联基础隔震装置和法国电力系统在内的各种隔离设备的机理，这些将在4.2节中和它们的数学模型一起首先提到；对于承受简弦激励、用弹性类支撑隔震的结构-设备系统动态响应的封闭形式的解将在4.3节中推导。这样一个解能够使得我们解释结构和设备在激励作用下的各种特性。弹性支座能帮助加长结构振动的基本周期，从而减少传递到上层建筑的加速度。在4.4节和4.5节中，将用状态空间增量积分方法来研究一个被滑动支撑隔震的有或者没有弹性力作用下的结构-设备系统的振动行为。通过引入一个摩擦滑动界面，这个结构-设备系统的运动将会被从地面激励中解耦出来，后者的影响也就缓解了。通过在隔震装置中接入一个弹性装置，使得由滑动隔震器引起的剩余基础位移减少。然而，这个弹性装置可能使得系统对低频激励成分更灵敏。在4.6节中，有关基础隔震装置的设计问题、设计规范和指导方针中的一些概念将会一起讨论。这章所用的注释列在本章的最后。

4.1 概述

通常来说，结构设计者们关注那些受地震影响的建筑、桥梁和其他土木工程结构的安全。最近一段的地震记录表明：像1994年的北岭（美国）地震、1995年的神户（日本）地震和1999年的台湾（中国）集集镇大地震能造成一些设计不好的建筑或大楼破坏或倒塌，同时也会引起一些设计好的建筑由于内部装置的损坏或失效而遭到破坏。这些结构和装备的损坏也分别称为结构性和非结构性损坏，它们能对这些建筑里的居民和人员的生命构成很大的危害。像医院、发电厂、电信中心、高精度工厂之类的这些关键服务系统一部分的设备，由于设备损坏所造成的生命和经济损失十分巨大。因此，建筑和相关设备在一场强震中的持续安全性在地震工程中引起了高度重视。在这方面，通过减少从地面传递到上层建筑的地震力的基础隔震被证明是一个保护建筑和附加设备的有效方法（Yang等，2002）。

对于安装在较重的主系统上的轻量副系统来说，轻量副系统的响应（即设备）已经被证明是受到地震中的四个主要动态特性的影响（Igusa和Der Kiureghian，1985a，1985b，1985c；Yang和Huang，1993）。第一件事情就是调谐，这就意味着设备的固有频率和建筑的固有频率吻合。这样的话会放大设备的响应，因为轻量副系统的作用就像

重型主系统的吸振器一样。第二件事情就是产生相互作用，这关系到主系统和副系统运动之间的反馈效应，忽视其相互作用的反馈影响可能会导致高估组合系统的真实响应。第三件事情就是非经典阻尼，它可能会在两个系统的阻尼属性截然不同时出现，因而组合系统的固有频率和振型只能够用复数来表示。在这样的环境下，通常的基于模态叠加的响应谱分析就不适用了。最后一件事情就是空间耦合，当副系统安装于多个位置时，空间耦合和多种支撑运动的影响相关。通过考虑无弹性效应，Igusa（1990）提出了一个等效线性技术，用于研究一个无弹性随机振动下二自由度主-副系统的响应特性。他的研究结果表明弱非线性的存在有助于减少耦合系统的响应。Huang 等（1994）用等效线性的概念探索了在白噪声激励下的安装在一个屈服主结构上的线性副系统的响应和可靠性。他得出的结论是：这个副系统通过增加设备阻尼或者把设备安装在主结构的更高位置能够减少自身的响应。

由于一个副系统的质量和刚度是远远小于主结构的质量和刚度，因而当一个人进行动态分析时会发生组合系统的相互作用和系统矩阵的病态。为了解决这个问题，一些研究人员选择从地面运动去评估副系统的响应。为了避免求解大型特征值问题，并考虑建筑和设备之间的相互作用，Villaverde（1986）运用响应谱技术来分析结构-设备组合系统，安装在结构上的轻量副系统在地震下的最大响应用建筑和设备的固有频率和模态振型来表示。为了考虑设备-结构之间的相互作用，Suarez 和 Singh（1989）提出了一个用于计算组合系统的动态特性分析流程，它是借助模态属性来计算地面频谱。Lai 和 Soong（1990）提供了一个用于评估主-副结构耦合系统响应的统计能量分析技术，这个技术基于功率平衡方程，也就是输入主系统的功率等于主系统消耗的功率加上传递给副系统的功率。采用均方凝聚法，Chen 和 Soong（1994）通过计算这个多自由度主-副系统在随机激励下的响应来研究其相互作用的效果。之后，Chen 和 Soong（1996）推导了一个解决动载下的结构-设备系统的均方响应的精确解，揭示出存在一个能减少置于主结构上设备的振动的最佳阻尼比。Gupta 和他的同事在考虑设备和结构的相互作用下研究受到地震激励的主结构多个支撑下的副系统的响应（Dey 和 Gupta，1998，1999；Chaudhuri 和 Gupta，2002）。他们的研究结果表明，当考虑到土壤-结构之间的相互作用（SSI）时，设备-结构系统的响应将受 SSI 的影响，土壤非常坚硬的条件除外。

另一方面，通过在设备-建筑系统的基础上提供隔震系统，做了大量的研究工作，目的是为了减少从地面传递而来的地震力。基于理论和实验研究，Kelly 和 Tsai（1985）揭示对于那些安装在地基有弹性支撑的隔震建筑内的轻量级设备，能有效地实现防止地震。Inaudi 和 Kelly（1993）提出了一个有地基隔震楼面的混合隔震系统，用于保护安装在建筑（承受支撑运动）上的高度灵敏设备。考虑了扭转和平移的效应，Yang 和 Huang（1998）研究了安装在弹性支撑上扭转振动建筑内的轻量设备的地震响应。他们的研究结果表明通过安装地基隔震装置的办法来有效地减少设备-建筑系统的响应，研究结果还表明存在一个安装设备的最佳位置。Juhn 等（1992）演示了一系列安装在滑动地基隔震装置上建筑的实验结果。他们得出结论是：当输入运动由低频振动组成时，副系统的加速响应会被放大。在这种情况下，滑动支撑没有考虑为一种有效地隔震装

置，这也就意味着地基隔震结构是不适合在土壤松软的建筑场地使用的。

关注把滑动支撑作为地基隔震装置，Lu 和 Yang（1997）研究了在地震激励下的滑动主结构上的一个设备的响应。他们的研究结果表明，设备的响应通过在建筑的地基安装滑动支撑能得到有效的减少，这个结果是同那些有着固定地基的结构比较得出的。为了克服有着滑动地基的结构系统的滑动和非滑动阶段的不连续性，Yang 和他的同事们提出了一个虚拟的弹簧模型来模拟滑动和非滑动的机理（Yang 等，1990，2000；Yang 和 Chen，1999）。这个模型将在本章后面章节中描述。Agrawal（2000）采用了相同的虚拟弹簧模型来研究有滑动支撑的扭转耦合结构上安装的设备响应。他的结论表明，滑动支撑同固定地基的结构相比能有效地减少设备响应。然而，在设备的固有频率和结构的基频吻合的调谐区域内，设备的响应可能会由于扭转耦合结构偏心量的增加而被反向放大。

建筑隔震问题近年来已经受到越来越多的研究人员和工程师的关注，这得益于世界范围内高精工厂的建设。（隔震）这方面的要求也越来越严格，目的是为了减少由于环境和人为原因造成的振动（Rivin，1995；Steinberg，2000）。为了使灵敏的电子设备能在苛刻的环境下正常工作，Veprik 和 Babitsky（2000）提出了一个最小化电子设备内部器件响应为目标的隔震装置设计的优化程序。对于保护高科技设备免受微弱振动或者环境振动的影响，Yang 和 Agrawal（2000）演示了被动混合楼面隔震系统在减轻设备响应方面比被动或者混合地基隔震系统更有效。Xu 和他的同事研究了安装在混合平台上的一批高科技设备的响应，这个平台也是安装在楼层上的（Xu 等，2003；Yang 等，2003）。他们的理论和实验研究都表明，这个由钢板弹簧、油液减震器和带速度反馈控制的电磁作动器组成的混合平台在减缓高科技设备的振动响应上比被动平台更有效。

本章的目标就是概括介绍各种基础隔震装置的振动特性。本章的组成概括如下。在 4.2 节中，介绍和解释各种当今常用隔震装置的机理。在 4.3 节中，用一个由弹簧和缓冲器单元组成的三自由度系统来模拟一个由弹性支撑隔震的结构-设备系统，从中得到对受到简谐激励隔震系统的动态响应的封闭解；也对系统部件的动态响应作了评价。在 4.4 节和 4.5 节中，将研究被滑动支撑隔离的结构-设备系统在有或者没有弹性性能的条件下的振动行为。另外，还将介绍使用基于增量积分程序的相关数值方法来分析有滑动隔震装置的结构系统。

4.2 基础隔震系统机理

图 4-1 所示为一个承受支撑运动的结构系统的简化模型。

对于这个单自由度系统，运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g \tag{4-1}$$

式中，m 是质量；c 是阻尼系数；k 是刚度；x 是系统的位移；$\ddot{x}_g$ 是地面加速度。假设这个系统成线性弹性，那么响应采用杜哈梅（Duhamel）积分公式，可以得到响应 $x(t)$ 为

$$x(t) = \frac{1}{\Omega_d}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\, e^{-\zeta\Omega(t-\tau)} \sin\Omega_d(t-\tau)\,d\tau \tag{4-2}$$

其中系统固有角频率 Ω、有阻尼的固有角频率 Ω_d 和阻尼比 ζ 定义如下：

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4-3a}$$

$$\Omega_d = \Omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{4-3b}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\Omega} \tag{4-3c}$$

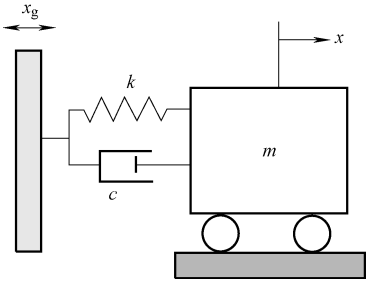


图 4-1　单自由度系统模型

与之相对应的，结构无阻尼振动周期 T 和有阻尼振动周期 T_d 为

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4-4a}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4-4b}$$

对于给定的支撑运动加速度 $\ddot{x}_g$，单自由度系统的振动位移 x 和加速度 $\ddot{x}$ 可能和系统的振动周期 T 和阻尼比 ζ 有关。因此，就某一场地震来说，通过先选择它的阻尼比，并使用方程式（4-2），那么对于给出 m、c、k 和系统的振动周期，就能计算出峰值位移 x。对于较宽的振动周期 T，在保证阻尼比常数的情况下重复上面的计算过程，就可以得到类似图 4-2 的响应曲线。通过改变阻尼比 ζ，我们能得到某一地震下单自由度结构的位移响应谱和伪加速度响应谱，就像在图 4-2 和图 4-3 中分别展示的一样。

由图 4-2 和图 4-3 我们可以很容易地得出一个结论：结构的振动周期越短，它受到地震作用后的位移也就越小，但同时它的加速响应也就越大。现在，我们考虑一个具有常数阻尼比 ζ 的结构，它的周期从 T_1 增加到 T_2。正如图上可以观察到的：结构的位移从 D_1 增加到 D_2，但加速度从 A_1 减小到 A_2。这样的特点被称为周期漂移效应。另一方面，正如从图 4-2 中可以看出的，通过增加结构的阻尼比，结构的位移大幅下降。这对加速度响应同样成立，如图 4-3 所示。然而，一个大的阻尼比也使结构对于地面震动特性变化不那么灵敏，正如我们在两个图上所见的曲线越平滑，结构的阻尼比也就越高。根据上述两个响应谱，我们可以知道基础隔震的原理就是延长结构的振动周期来保护结构，也就是说使用那些能让传递到结构的地震力大幅减少的基础隔震装置。与此同时，在基础隔震器上引入额外阻尼来控制基础隔震装置的相对位移不至于超出容许极限。

为了实现通过延长结构的振动周期来起到保护结构的作用，安装在建筑和地基之间的隔震装置必须在水平方向有伸缩性，但在垂直方向要有足够的刚度来承受来自建筑上层的重载。有了这种装置，结构的振动周期将会大大延长，且也会从预期地震的主要频率范围中转移走。以下是在工程实践中经常使用的四种隔震装置的基本特点。

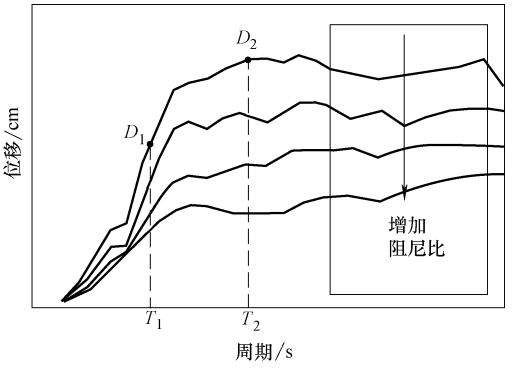


图 4-2　位移响应谱图

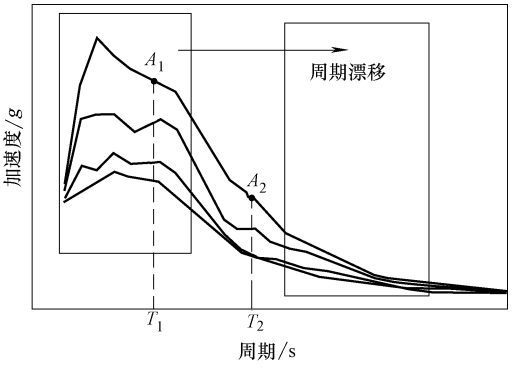


图 4-3　伪加速度响应谱图

4.2.1　弹性隔震系统

对于从事隔震研究的研究人员和工程师来说，属于基础隔震器类的弹性支撑为大家所熟知。它通常是由交替层的钢和硬质橡胶组成的，且因为它的组成成分，因而也被称为叠层橡胶支撑。这种支撑形式刚度较大，足以承载垂直载荷，且在有侧向力作用时有弹性。这种能进行水平变形的能力使支撑部件能极大地减少从地面传递来的结构基础剪切力。而弹性支撑的一个主要作用就是通过增加整个系统的振动周期来减少传递到上层建筑的剪切力，所以弹性支撑也必须在垂直载荷的作用下提供足够的刚度。让我们考虑一个使用弹性支撑的结构，给它一个支撑加速度$\ddot{x}_g$，如图 4-4 所示。把这个隔震结构看做一个单自由度系统，那么根据和弹性支撑的刚度相比上层建筑是刚体的假定，整个系统的运动方程可以写成

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c+c_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_b \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m\ddot{x}_g \\ m_b\ddot{x}_g \end{Bmatrix} \tag{4-5}$$

式中，m、c、k 分别表示质量、阻尼系数和上层建筑的刚度；m_b、c_b、k_b 分别表示基础板的质量、阻尼系数和刚度；x 和 x_b 分别表示上层建筑和基础的位移。

在实际情况中，将通过安装叠层橡胶支撑来减小传递到上层建筑的地震力，代价是支撑会有很大的相对位移。如果能把大的阻尼引入到支撑或者隔震系统中，那么大位移问题就可以缓减。为了解决这个问题，已经设计出了带有中央铅芯插件的叠层橡胶支撑（Yang 等，2002）。为了模拟铅芯橡胶支撑系统（LRB）的动态特性，他们提出了一个等效线性系统，其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c+c_{eq} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+k_{eq} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_b \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_g \\ m_b\ddot{x}_g \end{Bmatrix} \tag{4-6}$$

式中，c_{eq}和k_{eq}分别表示 LRB 系统的线性等效阻尼系数和刚度。用带有线性阻尼和刚性系数弹性支撑隔震的结构-设备系统，在受到简弦激励和地震激励下的动态特性，将在 4.3 节中分别采用解析和数值方法来研究。

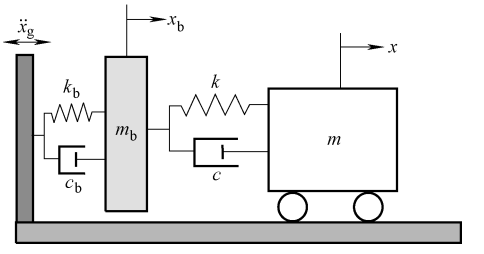


图 4-4　带弹性支撑的基础隔震模型

4.2.2　滑动隔震系统

另一个增加隔震结构水平方向弹性的方法就是在地基和结构底部之间插入滑动或者摩擦表面。通过滑动界面传递到建筑上层的剪切力大小受静摩擦力的限制，它等于上面建筑的重量和摩擦系数的乘积。摩擦系数在实际工程中要尽可能地保持较低数值。然而，摩擦系数也必须足够大来提供足够的摩擦力抵御大风和小型地震而不产生滑动。由于滑动系统没有占优势的振动周期，所以当结构受到一个有着宽频内容的地震作用时它通常不受频率的影响。正如之前提到的那样，当一个滑动结构受到地面运动激励时，可能在滑动和非滑动阶段之间重复出现过渡。为了研究这样一个过渡阶段，Yang 等（1990）提出在结构基础板和下面基础之间假想一个弹簧来模拟滑动装置的静-动摩擦力。参考图 4-5，结构的运动方程可以写成

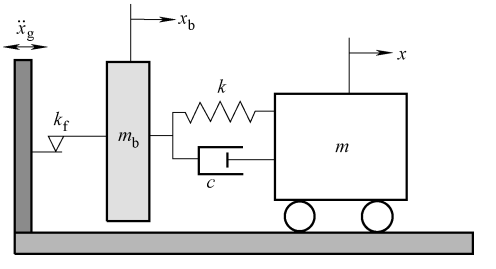


图 4-5　带滑动支撑的基础隔震模型

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c+c_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_b \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 \\ f_r \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_g \\ m_b\ddot{x}_g \end{Bmatrix} \tag{4-7}$$

式中，k_f是虚拟弹簧的刚度。摩擦力f_r可以表达为

$$f_r=\begin{cases} k_f(x_b-x_{b0}) & \text{无滑动阶段} \\ \pm\mu(m+m_b)g & \text{滑动阶段} \end{cases} \tag{4-8}$$

式中，x_{b0}表示虚拟弹簧在无滑动阶段的初始伸长量；μ 表示摩擦系数；g 是重力加速度。当考虑到简弦和地震激励时，有关虚拟弹簧的概念将在本章 4.4 节中滑动结构的分析中提到。

4.2.3　带弹性装置的滑动隔震系统

滑动结构会遇到的一个特殊问题就是在地震之后会有剩余位移。为了补救这个位移带来的缺陷，滑动表面通常被做成一个凹的形状，目的是为隔震结构提供重回中心的装置。这个想法来自于摩擦摆系统（FPS），如图 4-6 所示，它就是利用一个球形表面帮助上层结构在激励作用下产生一个回到中心的力。为了保证滑动结构能回到它原来的位置，采用如高张力弹簧和弹性支撑这样的装置作为辅助系统来提供恢复力。以前，滑动隔震系统已经被成功地应用到了重要建筑的保护上，如核电站、应急消防水塔、大型化学储备罐等，使它们免受剧烈地震的毁坏。

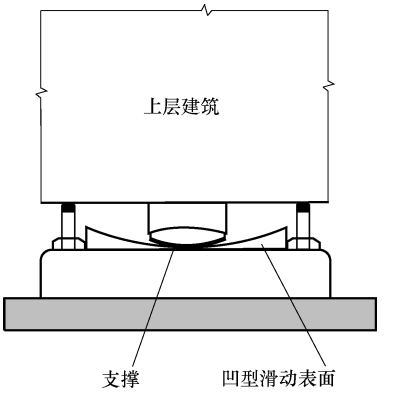


图 4-6　摩擦摆系统

为了提高滑动隔震装置在强震下的性能，Mostaghel（1984）、Mostaghel 和 Khodaverdian（1987）提出了弹性-摩擦基础隔震器（RFBI）来控制传递到建筑上层的剪切力，与此同时又保证剩余位移在一个允许的范围内。RFBI 设备基本上就是由一个中央胶芯和有聚四氟乙烯涂层的钢盘组成的，它提供了一个摩擦阻力来保持系统在非滑动模式下状态免受大风和小型地震激励的影响，且支撑的橡胶成分提供的恢复力限制了最大滑动位移。对于一个安装了 RFBI 结构（图 4-7）的运动方程可以写为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c+c_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+k_b \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_b \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 \\ f_r \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_g \\ m_b\ddot{x}_g \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}9)$$

在 RFBI 中存在的界面摩擦力、且在方程式（4-9）中出现的 f_r 可看做能量耗散的途径。带弹性装置的滑动隔震装置支撑的结构-设备系统在简弦和地震激励下的行为将在 4.5 节中介绍。

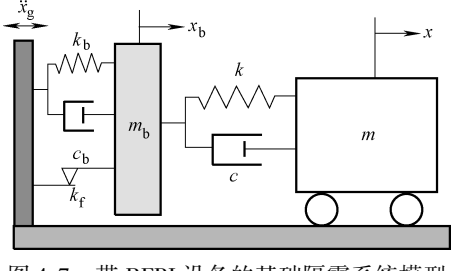


图 4-7　带 RFBI 设备的基础隔震系统模型

4.2.4　法国电力系统

为了有效限制基础隔震结构和其内置副系统的加速度，比如核电站系统受到强震激励时，Gueraud 等（1985）提出了法国电力系统（EDF）。EDF 系统的设计概念是在建筑地基位置串联安装弹性支撑和滑动装置。对于不强烈的地面运动，EDF 系统表现得就像一个弹性支撑，在支撑运动结束后返回原先位置，而在强震的情况下，EDF 系统会表现得像个滑动装置。EDF 系统在一些影响大的地震后可能会有一些剩余位移。由于 EDF 系统的滑动机理，建筑上层的最大水平加速度会维持在一个确定的范围内（Gueraud 等，1985；Park 等，2002），与此同时通过摩擦界面传递到建筑上层的剪切力

比静摩擦力要小。对于在图 4-8 中展示的 EDF 系统的数学模型，滑动和非滑动状态的运动方程可以写为

（a）非滑动阶段：

$$\begin{Bmatrix} m\ddot{x} \\ m_b\ddot{x}_b \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & c_{EDF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \\ \dot{x}_{EDF} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k+k_f & -k_f \\ 0 & -k_f & k_f+k_{EDF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_b \\ x_{EDF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\ddot{x}_g \\ -m_b\ddot{x}_g \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4-10a}$$

（b）滑动阶段：

$$\begin{Bmatrix} m\ddot{x} \\ m_b\ddot{x}_b \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & c_{EDF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \\ \dot{x}_{EDF} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k & 0 \\ 0 & 0 & k_{EDF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_b \\ x_{EDF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\ddot{x}_g \\ -m_b\ddot{x}_g \mp \mu(m+m_b)g \\ \pm\mu(m+m_b)g \end{Bmatrix} \tag{4-10b}$$

式中，c_{EDF}和k_{EDF}分别表示 EDF 系统的阻尼和刚度；x_{EDF}表示系统位移。

4.2.5 结语

为了减小传递到结构的地震力和避免地震引发的对结构上安装设备的潜在可能破坏，基础隔震是一个有效的结构设计方法。安装了基础隔震装置后，结构的振动周期将会极大地增加，且移离了预估地震的主要频率范围。相应地，传递到结构的地震力能大大地减小。在这一节中，介绍了在工程实践中常用的四种隔震装置的机理。由于像弹性支撑或滑动隔震之类的基础隔震装置在水平方向有相对较软的刚度，因而地震之后出现的剩余位移可能会在被保护的结构上引起问题。为了补救这个漏洞，也为了更好地确保基础隔震结构能复位到它原先的位置，RFBI 系统被用来控制传递到上层建筑的剪切力，同时保证剩余位移在一个允许的范围内。另外，尽管可能 EDF 系统会在地震后产生一些剩余位移，但为了限制在强震下基础隔震建筑内置副系统的加速度，比如核电站系统的，EDF 系统可以用作基础隔震的替换装置。

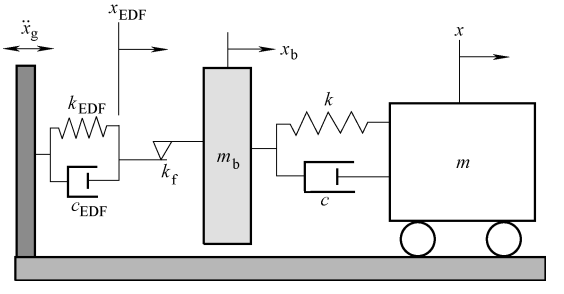


图 4-8　带 EDF 装置的基础隔震系统模型

4.3 带弹性支撑的结构-设备系统

为了达到如印制电路板、半导体工厂和灵敏医疗设备等一些高科技设备正常运作的严格要求，控制灵敏的结构-设备系统的过量振动的需求，对于结构设计师来说已经变成了一个急需关注的问题。而且，这些高科技设备在一场重大地震中可能会遭受极大的损害。使用弹性隔震系统来减小从地面传递来的地震力是被设计师采用的最普遍的一种

办法。在这一节中，将研究弹性支撑在保护结构-设备系统免受水平地面运动的性能。

4.3.1　带有弹性支撑的基础隔震系统的公式推导

通过把建筑、内置设备和隔震结构-设备系统的基础作为一个集中质量系统建模，我们能够建立带有弹性支撑的结构-设备隔震系统的数学模型，如图 4-9 所示。下面就是受到地面加速度$\ddot{x}_g$激励的基础隔震结构-设备系统的运动方程：

$$\begin{Bmatrix} m_e\ddot{x}_e \\ m_s\ddot{x}_s \\ m_b\ddot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e & -c_e & 0 \\ -c_e & c_s+c_e & -c_s \\ 0 & -c_s & c_s+c_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_s \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & -k_e & 0 \\ -k_e & k_s+k_e & -k_s \\ 0 & -k_s & k_s+k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_e \\ x_s \\ x_b \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_e \\ m_s \\ m_b \end{Bmatrix} \ddot{x}_g \tag{4-11}$$

式中，m 表示质量，c 表示阻尼系数，k 表示系统刚度。另外，下标 e、s、b 分别表示设备、上层结构和基础的自由度。图 4-9 中的符号在表 4-1 中有注释。应该提到的是，方程式（4-11）中出现的弹性支撑刚度 k_b是一个和系统的边界状况有关的系统参数。k_b 的值比 k_s 小也就代表系统是被柔性支撑所隔震。与之相反的是，如果 k_b 的值比较大，意味着结构是刚性支撑。

表 4-1　符号定义

符　　号	定　　义
c_e, c_s	设备和上层结构的阻尼系数
k_e, k_s	设备和上层结构的刚度
k_b	弹性支撑刚度或隔震系统弹性刚度
m_e, m_s, m_b	设备、上层结构和基础板质量
$x_e(t), x_s(t), x_b(t)$	设备、上层结构和基础板相对于地面的位移
$\ddot{x}_g(t)$	地面加速度
μ	滑动隔震系统摩擦系数
ω_b	隔震系统频率
ω_e, ω_s	设备和上层结构的频率
ω_g	地面激励频率
ζ_e, ζ_s	设备和上层结构的阻尼比

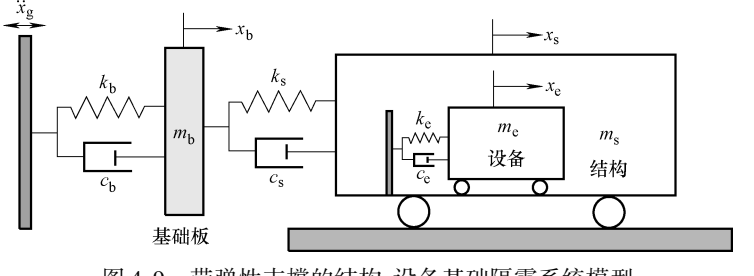


图 4-9　带弹性支撑的结构-设备基础隔震系统模型

4.3.2 自由振动分析

如果在方程式（4-11）中不考虑阻尼项和外力项，那么自由振动的运动方程可以写为

$$\begin{Bmatrix} m_e\ddot{x}_e \\ m_s\ddot{x}_s \\ m_b\ddot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & -k_e & 0 \\ -k_e & k_s+k_e & -k_s \\ 0 & -k_s & k_s+k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_e \\ x_s \\ x_b \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4-12}$$

通过求解这个方程，我们能得到带弹性支撑的结构-设备系统的固有频率和模态振型。但是就当前问题来说，弹性支撑的水平刚度设计成比上层建筑的低很多。相对于整体系统一阶振型来说，上层建筑必须表现得像刚体一样，这也就意味着设备、上层建筑和地基在自由振动下的位移响应能看做基本相等，也就是 $x_e = x_s = x_b$。通过引入这么一个条件到方程式（4-12）中，等效的单自由度基础隔震系统的运动方程可以写为

$$(m_e + m_s + m_b)\ddot{x} + k_b x = 0 \tag{4-13}$$

方程式（4-13）表明，基础隔震系统的基频可以通过 $\omega_1 \approx \sqrt{k_b/(m_e+m_s+m_b)}$ 近似计算。而且，如果考虑到固定地基的情况，让地基的响应等于 0，即 $x_b = \ddot{x}_b = 0$，结构-设备隔震系统能简化成地基固定系统，因此运动方程就变为

$$\begin{Bmatrix} m_e\ddot{x}_e \\ m_s\ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_s+k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_e \\ x_s \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4-14}$$

正如我们所知道的那样。

4.3.3 结构-设备隔震系统在简谐激励下的动力学

封闭解的好处就是能让我们检验所考虑问题中涉及的关键参数。这正是在这儿需要找寻的。对于一个地面简谐激励 x_g，其幅值为 X_g，也就是 $x_g = X_g e^{i\omega t}$，把它代入式（4-11），可以得到：

$$\begin{Bmatrix} m_e\ddot{x}_e \\ m_s\ddot{x}_s \\ m_b\ddot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & -k_e & 0 \\ -k_e & k_s+k_e & -k_s \\ 0 & -k_s & k_s+k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_e \\ x_s \\ x_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_e \\ m_s \\ m_b \end{Bmatrix} X_g\omega^2 e^{i\omega t} \tag{4-15}$$

相应的系统的稳态响应为

$$\begin{Bmatrix} x_e \\ x_s \\ x_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_e \\ X_s \\ X_b \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \tag{4-16}$$

其中 X_e、X_s 和 X_b 分别代表设备、结构和地基的振幅。

将式（4-16）代入式（4-15），可得到

$$\begin{bmatrix} k_e - m_e\omega^2 & -k_e & 0 \\ -k_e & k_s+k_e-m_s\omega^2 & -k_s \\ 0 & -k_s & k_s+k_b-m_b\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_e \\ X_s \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_e \\ m_s \\ m_b \end{Bmatrix} X_g\omega^2 \tag{4-17}$$

从而解得系统的 X_e、X_s 和 X_b，它们分别为

$$X_e = \frac{X_s + X_g f_e^2}{1 - f_e^2} \tag{4-18a}$$

$$X_b = \frac{X_s + \varepsilon_b f_s^2 X_g}{1 + k_b/k_s - \varepsilon_b f_s^2} \tag{4-18b}$$

$$X_s = \frac{\left[m_s + \dfrac{m_e}{1 - f_e^2} + \dfrac{m_b}{1 + k_b/k_s - \varepsilon_b f_s^2}\right] X_g \omega^2}{1 + \dfrac{k_b - m_b\omega^2}{1 + k_b/k_s - \varepsilon_b f_s^2} - \left(m_s + \dfrac{m_e}{1 - f_e^2}\right)\omega^2} \tag{4-18c}$$

式中，X_e 和 X_b 分别为设备和基础的振幅，它们都可以用结构㊀的振幅 X_s 表示。式(4-18)中的参数可由下面的公式来定义：

$$f_e = \omega/\omega_e \tag{4-19a}$$

$$f_s = \omega/\omega_s \tag{4-19b}$$

$$\varepsilon_b = m_b/m_s \tag{4-19c}$$

$$\omega_e = \sqrt{k_e/m_e} \tag{4-19d}$$

$$\omega_s = \sqrt{k_s/m_s} \tag{4-19e}$$

最后，结构、设备和基础的稳态绝对加速度响应可以用地面加速度 $\ddot{x}_g$ 来表示：

$$a_s = \ddot{x}_s + \ddot{x}_g = -(X_s + X_g)\omega^2 e^{i\omega t} = \frac{k_b \ddot{x}_g}{D(\omega)} \tag{4-20a}$$

$$a_e = \ddot{x}_e + \ddot{x}_g = -\frac{(X_s + X_g)\omega^2 e^{i\omega t}}{1 - f_e^2} = \frac{k_b \ddot{x}_g}{(1 - f_e^2)D(\omega)} \tag{4-20b}$$

$$a_b = \ddot{x}_b + \ddot{x}_g = -\frac{[X_s + X_g + (k_b/k_s)X_g]\omega^2 e^{i\omega t}}{1 + k_b/k_s - \varepsilon_b f_s^2} = \frac{[D^{-1}(\omega) + k_s^{-1}]k_b \ddot{x}_g}{1 + k_b/k_s - \varepsilon_b f_s^2} \tag{4-20c}$$

$$D(\omega) = (k_b - m_b\omega^2) - (1 + k_b/k_s - \varepsilon_b f_s^2)\left(m_s + \frac{m_e}{1 - f_e^2}\right)\omega^2 \tag{4-20d}$$

正如我们看到的那样，结构-设备系统中各个部分的加速度响应主要取决于弹性支撑的刚度 k_b。特别的是，使用刚度更小的支撑能使传递到建筑上层的剪切力大大地减少，正如在方程式（4-20a）中表明的那样。这就解释了为什么一个弹性支撑能被用作减少结构-设备系统的基础剪切力的有效的隔震装置。相反，如果把支撑刚度 k_b 做成无限大，即让 $k_b \to \infty$，那么式（4-20）的加速度响应将简化为

$$a_s = \frac{(1 - f_e^2)\ddot{x}_g}{(1 - f_e^2)(1 - f_s^2) - \varepsilon_a f_s^2} \tag{4-21a}$$

$$a_e = \frac{\ddot{x}_g}{(1 - f_e^2)(1 - f_s^2) - \varepsilon_a f_s^2} \tag{4-21b}$$

㊀ 原文是基础，有误。译者注

$$a_b = \ddot{x}_g \tag{4-21c}$$

以上公式考虑了罗必塔法则，其中 $\varepsilon_{be} = m_e/m_s$。从式（4-21c）中可以看出，结构基础的加速度等于地面加速度。很明显，现在需要解决的问题是将其简化为一个有着刚性基础的二自由度系统，而这样的话就可以借助式（4-21a）和式（4-21b）解决。

一些重要的高科技设施，如半导体工厂和医疗设备，对于振动非常灵敏，特别是共振的时候。为了考虑共振的影响，我们让地面激励频率 ω 和设备频率 ω_e 吻合，也就是让 $f_e = 1$ 或 $\omega_e = \omega$。在这种情形下，式（4-20）中的系统加速度响应简化为

$$a_s = 0 \tag{4-22a}$$

$$a_e = -\frac{k_b \ddot{x}_g}{k_e[1 + (k_b - m_b\omega_e^2)/k_s]} \tag{4-22b}$$

$$a_b = \frac{k_b \ddot{x}_g}{k_s/k_b - m_b\omega_e^2} \tag{4-22c}$$

由于地面激励频率和设备频率吻合，所以设备表现得像是建筑的振动吸收器。因为这个原因，设备的响应被极大地放大了，就像式（4-22b）所展示的那样，而结构的响应则被完全压制了，正如式（4-22a）所表明的那样。而且，如果设备的频率和结构-设备隔震系统的基频相等，即 $\omega_e(\approx\omega) = \sqrt{k_b/(m_e + m_s + m_b)}$，那么在式（4-22）中的系统响应能够被表述为

$$a_s = 0 \tag{4-23a}$$

$$a_e = \frac{-k_b \ddot{x}_g}{k_e[1 + (m_s + m_e)\omega_e^2/k_s]} \tag{4-23b}$$

$$a_b = \frac{k_b \ddot{x}_g}{k_s/k_b - m_b\omega_e^2} \tag{4-23c}$$

由于设备的质量远远小于结构的质量，所以前面的方程可以进一步简化为

$$a_s = 0 \tag{4-24a}$$

$$a_e = \frac{-k_b \ddot{x}_g}{k_e(1 + \omega_e^2/\omega_s^2)} \tag{4-24b}$$

$$a_b = \frac{k_b \ddot{x}_g}{k_s(1 + \omega_e^2/\omega_s^2)} \tag{4-24c}$$

正如式（4-24b）所表明的那样，设备的加速度响应取决于基础和设备的刚度比 k_b/k_e。

对于前面提到的共振情况 $\omega_e = \omega$，让我们考虑结构频率等于设备频率的情况，也就是 $\omega_e = \omega_s$。在这种情况下，式（4-22）中的系统响应方程可以简化为

$$a_s \approx 0 \tag{4-25a}$$

$$a_e \approx \frac{-k_b \ddot{x}_g}{\varepsilon_e[k_s(1 - \varepsilon_b) + k_b]} \tag{4-25b}$$

$$a_b = \frac{k_b \ddot{x}_g}{k_s(1 - \varepsilon_b) + k_b} \tag{4-25c}$$

这意味着设备的加速度响应会被极大地放大，正如式（4-25b）揭示的在质量比 ε_e（$=m_e/m_s$）相对小、同时刚度比 k_b/k_s 较大的时候。这种现象叫做设备调谐。

另一方面，当激励频率 ω 和隔震系统的基本频率 ω_1 吻合、也就是 $\omega(\approx\omega_1)=\sqrt{k_b/(m_e+m_s+m_b)}$ 的时候，那么结构-设备隔震系统的共振响应将会激发。考虑到实际高科技设备的首要原则是减少设备的振动，而不是建筑的振动，通过比较式(4-20a)和式（4-20b）中的分母，可以假定 $|1-f_e^2|\geqslant 1$ 或者 $f_e=\omega/\omega_e\geqslant\sqrt{2}$ 的条件对于一个好的设计足够了，这等同于：

$$\frac{\omega_e}{\omega_s}\leqslant\sqrt{\frac{k_b/k_s}{2[1+(m_b+m_e)/m_s]}} \tag{4-26}$$

由于实际情况中，一个基础隔震结构的基本频率 ω_s 通常较低，所以设备与结构连接的水平刚度必须达到足够的柔软以便满足式（4-26）。当然，这只是在设计设备过程中实现减震需要遵循的指导之一。

4.3.4 演示性案例

之前提到的方程是通过忽略结构系统的阻尼和假定地面做简谐运动的条件下得到的。在实际情况中，结构系统总是存在一些阻尼的，而且地面运动也是随机的。解决这种问题的唯一方法是使用可用的数值方法。在这一节中，将采用 Newmark（1959）提出的 Newmark β 方法（$\gamma=1/2$，$\beta=1/4$）来解决二阶微分方程式（4-11），它拥有数值稳定的优势。

我们考虑一个由弹性支撑隔震的结构-设备系统，如图 4-9 所示，其参数在表 4-2 中给出。正如所看到的，设备频率是结构频率的 5 倍，即 $\omega_e=5\omega_s$（$=8.34$Hz）。采用 1940El Centro 地震（NS 分量）峰值地面加速度（PGA）激励为 341.55Gal[㊀]，如图 4-10 所示。通过特征值分析得到基础隔震系统的自然频率是 2.46、21.41 和 52.74rad/s。根据 4.3.2 节，由于在结构-设备系统上安装的弹性支撑，系统的基本频率大幅减少，大约等于 $\omega_1\approx\sqrt{k_b/(m_e+m_s+m_b)}=2.51$rad/s。从这个例子可以知道，把一个基础隔震系统建模成一个单自由度系统，这对于振动的第一阶频率是有好处的。

从图 4-11 中可以看出，对于系统的结构加速度，通过安装弹性支撑能有效减少固定基础结构的主震响应。然而，正如图 4-12 所示，由于软支撑的安装，隔震系统的基础位移大得多，同时也衰减得慢得多，甚至比主震还慢。

在图 4-13 中，比较了隔震基础和固定基础情况下设备的加速度响应。正如我们所看到的，固定基础结构的主震响应能够通过安装弹性支撑来抑制的。而且，图 4-11 表明设备响应似乎和结构响应是相同的，这是由于设备与结构之间刚性连接，正如设备较高的频率所揭示的那样的问题。对于当前这个案例，弹性支撑减小设备响应的效用是显而易见的。

㊀ 原书为 gal 应是 Gal（伽），$1\text{Gal}=10^{-2}\text{m/s}^2$。

表 4-2　模拟采用的系统参数（4.3.4 节）

设备		上部结构		隔震系统	
参数	数值	参数	数值	参数	数值
质量 m_e	3t（$=m_s/100$）	质量 m_s	300t	质量 m_b	100t（$=m_s/3$）
水平刚度 k_e	8258kN/m	水平刚度 k_e	33030kN/m	水平刚度 k_b	2546kN/m
阻尼系数	15.74kN·m/s	阻尼系数	314.79kN·m/s	阻尼系数	50.46kN·m/s
频率 $\omega_e \approx \sqrt{k_e/m_e}$	52.47rad/s	频率 $\omega_s \approx \sqrt{k_s/m_s}$	10.46rad/s	频率 $\omega_b \approx \sqrt{k_b/m_b}$	5.05rad/s

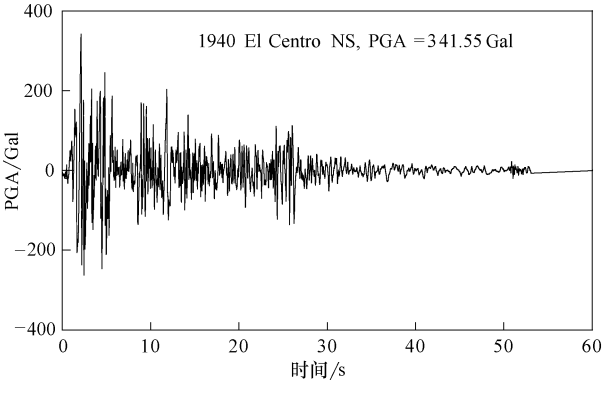


图 4-10　1940EI Centro 地震波形（NS 分量）

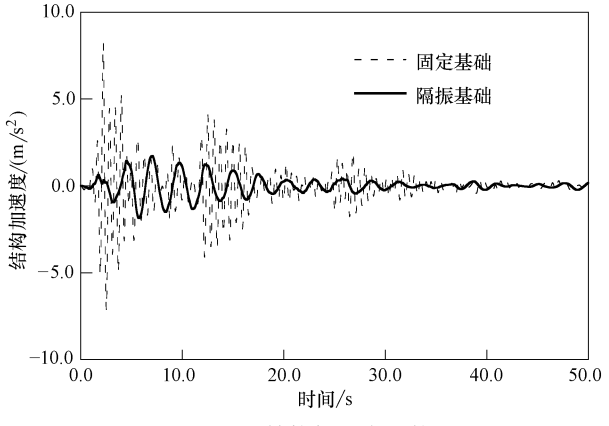


图 4-11　结构加速度比较

对于高科技设备，工程师们可能担忧外部激励引起的设备调谐效果，比如地震和交通诱导造成的振动。为了研究对结构-设备隔震系统的这种影响，绘制设备最大加速度-频率比 ω_e/ω_s 函数曲线，如图 4-14 所示。正如我们所看到的，当设备的频率接近结构-设备隔震系统的基本频率时，也就是当 $\omega_e = 2.51$rad/s 或者 $\omega_e/\omega_s = 0.24$ 的时候，设备响应会极大地放大。为了避免这种情况的出现，建议将隔震装置同时安装在结构的基础

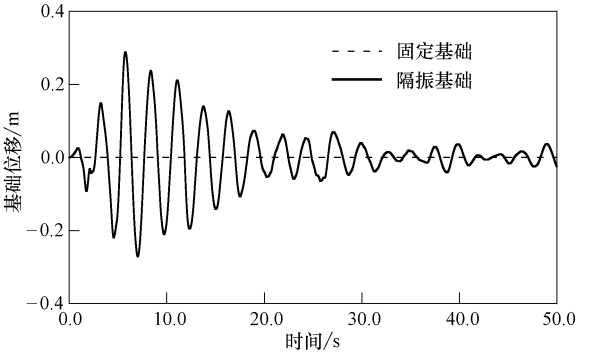


图 4-12　基础位移比较

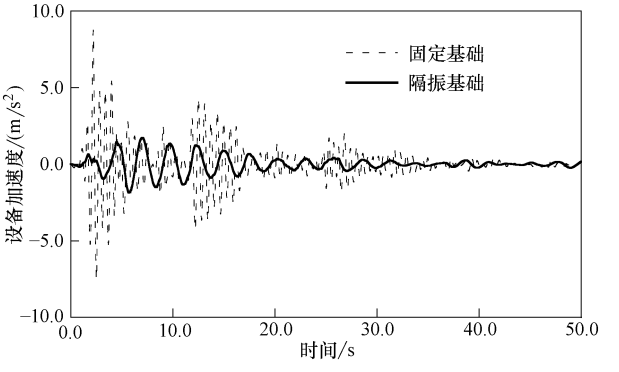


图 4-13　设备加速度的比较

和设备的基础上。从图 4-14 中可以看出，设备的水平刚度较小会导致设备响应由于调谐效应而增大。然而，当设备的刚度进一步减小时，设备将会达到另一个隔震状态，在这种情况下，设备响应将会大幅衰减，正如相对小的 ω_e/ω_s 区域所表明的那样。可以通过将表 4-2 中的参数代入式（4-26）来得到频率比 ω_e/ω_s 的界值，得到一个 ω_e/ω_s 的临界比 = 0. 168，它同图 4-14 中标记的数值 0. 16 非常接近。

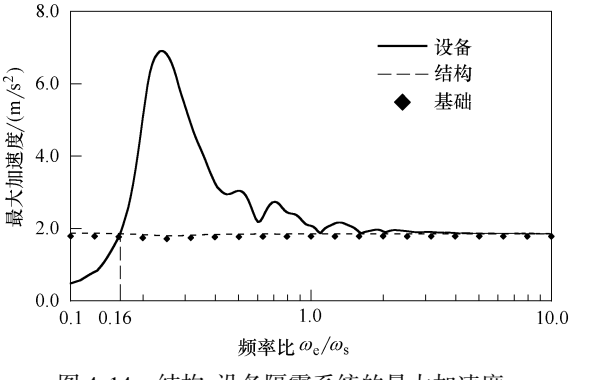


图 4-14　结构-设备隔震系统的最大加速度

4.3.5 结语

本节中探讨了一个采用弹性支撑隔震受到地面激励的结构-设备系统的数学模型的动态响应。基于简谐支撑运动的结构-设备隔震系统的封闭解，我们知道地面激励的频率和设备频率相吻合使得设备表现得像结构吸振器一样，设备的加速度响应将大幅放大。对于优先考虑减轻设备振动而不是结构振动的情况，式（4-26）提供了一个设备设计的指导路线，这在数值案例中已得到了验证。

4.4 滑动隔震系统

对于结构系统的抗震保护来说，滑动隔震可能是一种有效方法。通过在结构基础垫块下面放置滑动隔震器，可以大大减少地面激励传递给结构的力。当前，到处可以看到滑动隔震器（Naeim 和 Kelly，1999）。滑动隔震器通常由带摩擦表面的滑块组成。源于该原因，该隔震器也称为摩擦隔震器。当遇到地震时，一旦地震水平分力超过支撑的最大摩擦力［根据库仑理论，该摩擦力等于法向接触力乘以滑动表面静（或动）摩擦系数］，滑块将沿着摩擦接触表面滑动。由于以上原因，传递给上部结构的地震力一般要小于隔震器的最大摩擦力。很明显，对于设计滑动隔震系统来说，最大摩擦力是一个重要参数，因为它决定了系统何时开始滑动及决定传递给上部结构的剪切力有多大。

滑动结构的运动由两种不同的状态构成，分别为滑动状态和粘连（或非滑动）状态。在任何运动的瞬间，结构只能处于两种状态中的一种。尽管在每种状态下，滑动结构可以建模成为一个线性系统，但是两种状态的运动控制方程是不同的。因此，滑动结构的总的特性是非线性的。如此的非线性导致了滑动结构频响中出现了次谐波共振（Mostaghel 等，1983；Westermo 和 Udwadia，1983），并使得动态响应变得更加复杂。在一些应用场合，滑动隔震系统已经设计成带自动定心的装置（或弹性装置），因此在地震过后结构可以滑回起先位置（Mokha 等，1991）。这种类型的滑动系统称为弹性滑动隔震系统，将在 4.5 节中讨论。自动定心装置提供了一些优点，但不可避免要带来一些不利之处，这个将在 4.5 节中讨论。

本节的目的在于考察滑动隔震结构的抗震性能，并考察安装在结构上的设备部件的动态行为。这里不考察自动定心装置。首先推导下面带有摩擦元件的结构非线性动力学方程；然后，呈现两种求解非线性动力学方程的数值方法：剪力平衡方法和虚拟弹簧方法；最后，采用假定的数据来呈现滑动结构和安装在它上面设备的谐波响应与抗震性能。在本节，假定滑动系统的摩擦系数属于库仑类型，也就是时不变常数。为了简化起见，这里对静摩擦系数和动摩擦系数不加区分，或者说对动摩擦力和最大静摩擦力不加区分。

4.4.1 数学建模和公式推导

4.4.1.1 运动方程

带附加设备的滑动隔震结构的力学简图如图 4-15 所示，其可以用图 4-16 所示的三

自由度质量-弹簧-阻尼系统力学模型来表示，其中的参数已在表 4-1 中注明。当结构系统受地震激励时，运动方程可以表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}_1\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{g}}(t)+\boldsymbol{L}_2 f(t) \tag{4-27}$$

其中矢量 $\boldsymbol{x}$ 表示整个结构系统的动态响应：

$$x(t)=\begin{Bmatrix} x_{\mathrm{e}}(t) \\ x_{\mathrm{s}}(t) \\ x_{\mathrm{b}}(t) \end{Bmatrix} \tag{4-28}$$

方程式（4-27）中的质量、阻尼和刚度矩阵定义如下：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{\mathrm{e}} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\mathrm{b}} \end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{\mathrm{e}} & -c_{\mathrm{e}} & 0 \\ -c_{\mathrm{e}} & c_{\mathrm{e}}+c_{\mathrm{s}} & -c_{\mathrm{s}} \\ 0 & -c_{\mathrm{s}} & c_{\mathrm{s}} \end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{\mathrm{e}} & -k_{\mathrm{e}} & 0 \\ -k_{\mathrm{e}} & k_{\mathrm{e}}+k_{\mathrm{s}} & -k_{\mathrm{s}} \\ 0 & -k_{\mathrm{s}} & k_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \tag{4-29}$$

载荷分布矢量为

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\boldsymbol{L}_2=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4-30}$$

注意到方程中隔震装置摩擦力 $f(t)$ 不是常数，被移到了方程右边。这个非线性力在分析过程中需要专门处理，将在后面解释。

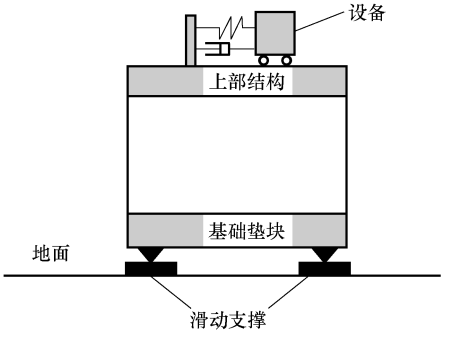


图 4-15　带滑动支撑的隔震结构-设备系统示意图

对于系统处理来说，上述的运动方程可以在状态空间中进一步描述为（Meirovitch，1990）

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{E}\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{g}}(t)+\boldsymbol{B}f(t) \tag{4-31}$$

其中状态矢量 $\boldsymbol{z}(t)$ 和系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的定义如下：

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) \end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{4-32}$$

激励和摩擦分布矢量为

$$\boldsymbol{E}=\begin{Bmatrix} -\boldsymbol{L}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{4-33}$$

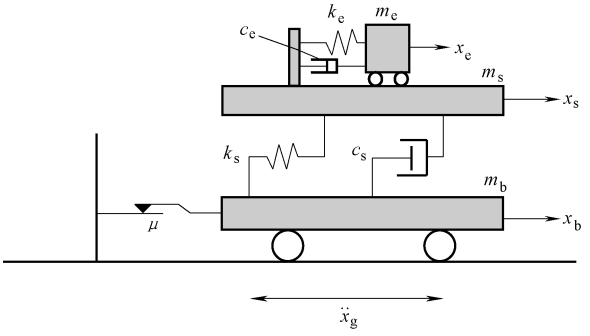


图 4-16　带滑动支撑的隔震结构-设备系统力学简图

4.4.1.2　粘连和滑动状态条件

正如上面所述，滑动结构在任何瞬时的运动都有两种可能的状态，即粘连（或非滑动）和滑动状态。以下是滑动结构必须满足的条件：

（1）粘连状态：

$$|f(t)| < f_{\max} = \mu W \tag{4-34a}$$

$$\dot{x}_b(t) = 0 \tag{4-34b}$$

式中，μ 是摩擦系数；W 是结构总重。根据先前的公式，粘连状态的摩擦力是未知的，其幅值小于最大摩擦力 $f_{\max}$，其数值等于 μ 和 W 的乘积，这时结构的滑动速度为零。只要摩擦力满足式（4-34a），那么滑动系统就处在粘连状态，否则它就转变为滑动状态。

（2）滑动状态：

$$f(t) = -\operatorname{sgn}[\dot{x}_b(t)] f_{\max} = -\operatorname{sgn}[\dot{x}_b(t)] \mu W \tag{4-35a}$$

$$\dot{x}_b(t) \neq 0 \tag{4-35b}$$

式中，函数 sgn（x）表示变量 x 的符号。根据式（4-35a）和式（4-35b），滑动状态的摩擦力，其幅值等于最大摩擦力 $f_{\max}$，但方向与滑动速度相反；另外，隔震装置的滑动速度仍然未知。

4.4.2　数值分析方法

剪切力平衡方法和虚拟弹簧方法这两种数值方法通常用于分析滑动隔震结构系统，本节将对它们进行介绍。通过采用离散时间状态空间公式，两种方法以递增的方式进行计算，该方式适用于多自由度滑动系统分析。

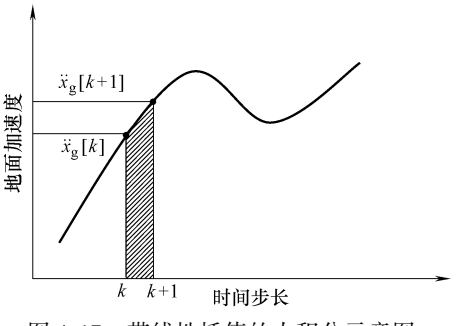


图 4-17　带线性插值的力积分示意图

4.4.2.1　剪切力平衡方法

考虑到状态空间方程式（4-31），并假定地面加速度和摩擦力在每个时间间隔内线性变化，如图 4-17 所示。方程式（4-31）可以写成如下的增量形式（Meiro-

vitch，1990）：

$$\boldsymbol{z}[k+1]=\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{z}[k]+\boldsymbol{E}_0\ddot{x}_{\mathrm{g}}[k]+\boldsymbol{E}_1\ddot{x}_{\mathrm{g}}[k+1]+\boldsymbol{B}_0 f[k]+\boldsymbol{B}_1 f[k+1] \tag{4-36}$$

其中符号 $x[k]$ 表示变量 x 在第 k 步计算得到。方程式（4-36）中的其他系数矩阵定义为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\Delta t}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta t^i}{i!}\boldsymbol{A}^i \tag{4-37}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\left[(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}+\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{A})^{-2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}})\right]\boldsymbol{B} \tag{4-38a}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}=\left[-(\boldsymbol{A})^{-1}+\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{A})^{-2}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{I})\right]\boldsymbol{B} \tag{4-38b}$$

式中，Δt 表示用于分析的时间步长。除了式（4-38a）和式（4-38b）中的 $\boldsymbol{B}$ 应该用矩阵 $\boldsymbol{E}$ 替换外，矩阵 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{E}_1$ 的计算可以和 $\boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{B}_1$ 相类似。在一些应用场合，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可能不可逆，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$并不总是存在。如果出现这种情况，我们可以采用下面公式计算 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_1$（且和 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{E}_1$ 类似）：

$$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{*}\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_1=(\hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{*})\boldsymbol{B} \tag{4-39}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{*}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^{i+1}}{i!(i+2)}\boldsymbol{A}^i,\hat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{d}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^{i+1}}{(i+1)!}\boldsymbol{A}^i \tag{4-40}$$

注意在方程式（4-36）右侧，在第 k 个时间步长处，唯一的未知项是摩擦力 $f[k+1]$；因此，$f[k+1]$ 必须在下一时间步长响应 $z[k+1]$ 计算之前确定下来。王等（1998）提出了剪力平衡方法用于计算摩擦力 $f[k+1]$。通过这种方法，首先假定滑动结构在第（$k+1$）时间步长处于粘连状态，故此时式（4-34b）给出的条件必须满足：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{b}}[k+1]=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}[k+1]=0 \tag{4-41}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是关系矩阵，对于图 4-16 所示的模型，$\boldsymbol{D}$ = [0　0　1　0　0　0]。把方程式（4-36）中的 $z[k+1]$ 代入方程式（4-41）中，我们可以求得（$k+1$）时间步长的摩擦力估计值为

$$\bar{f}[k+1]=-(\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_1)^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{z}[k]+\boldsymbol{B}_0 f[k]+\boldsymbol{E}_0\ddot{x}_{\mathrm{g}}[k]+\boldsymbol{E}_1\ddot{x}_{\mathrm{g}}[k+1])=0 \tag{4-42}$$

式中，带上画线的 $\bar{f}[k+1]$ 表示摩擦力是估计值，它由假定滑动结构处于粘连状态而来。如果系统并不处于粘连状态，那么这个假定值可能并不是真实值。$\bar{f}[k+1]$ 的物理含义在于它表明平衡剪切力需要结构在（$k+1$）时间步长仍然处于粘连状态，因此，$\bar{f}[k+1]$ 的符号表示了隔震系统提供的阻力方向。尽管 $\bar{f}[k+1]$ 可能不是真正的摩擦力，但是它在确定实际状态（粘连或滑动）和滑动隔震结构实际摩擦力方面起着重要的作用，正如下面基于方程式（4-34a）和方程式（4-35a）所描述的。

（1）如果 $|\bar{f}[k+1]|<f_{\max}$，那么系统处于“粘连状态”，且摩擦力为

$$f[k+1]=\bar{f}[k+1] \tag{4-43}$$

（2）如果 $|\bar{f}[k+1]|\geqslant f_{\max}$，那么系统处于“滑动状态”，且摩擦力为

$$f[k+1]=\mathrm{sgn}(\bar{f}[k+1])f_{\max} \tag{4-44}$$

正如可以看到的，方程式（4-35a）中的 sgn［$\dot{x}_b(t)$］被方程式（4-44）中的 sgn（$\bar{f}[k+1]$）所替代。这样的替换被证明具有正当理由的，因为 $\bar{f}[k+1]$ 的符号表明了在（$k+1$）时间步长阻力的方向。一旦采用方程式（4-43）或方程式（4-44）确定了正确的摩擦力 $f[k+1]$，那么它就可以替换代入方程式（4-36）中，以得到下一步长的响应 $z[k+1]$。图 4-18 给出了剪力平衡法的计算流程图。

4.4.2.2 虚拟弹簧法

虚拟弹簧方法最初由杨等（1990）提出，用于分析滑动结构。Lu 和 Yang（1997）把该方法推广到状态空间用于分析安装在滑动结构上的设备。通过在基础垫块和地面之间采用虚拟弹簧 k_f（图4-19）这种方法来表示滑动或摩擦机理。虚拟弹簧 k_f 在滑动状态时数值为零，在粘连状态时数值非常大。在引入了虚拟弹簧后，方程式（4-29）中的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以作如下修改：

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(k_f)=\begin{bmatrix} k_e & -k_e & 0 \\ -k_e & k_e+k_s & -k_s \\ 0 & -k_s & k_s+k_f \end{bmatrix} \tag{4-45}$$

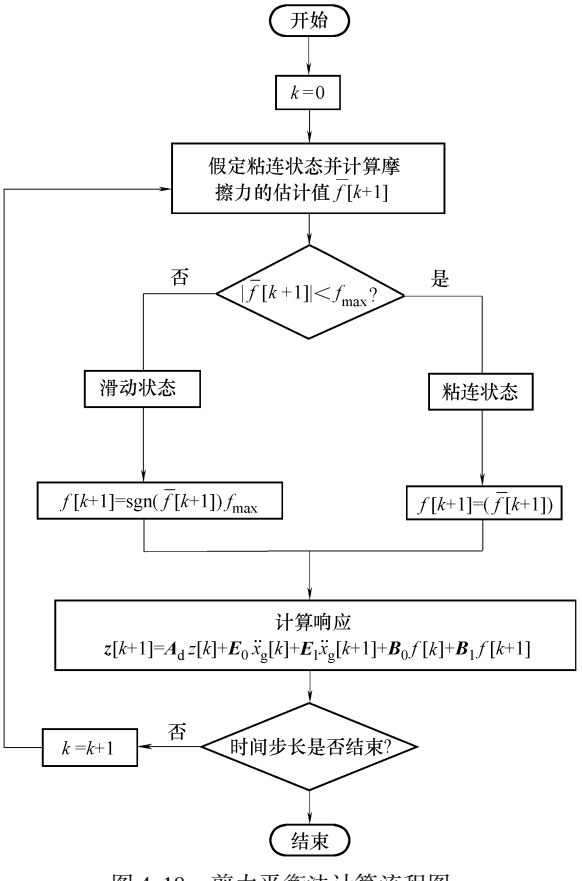


图 4-18　剪力平衡法计算流程图

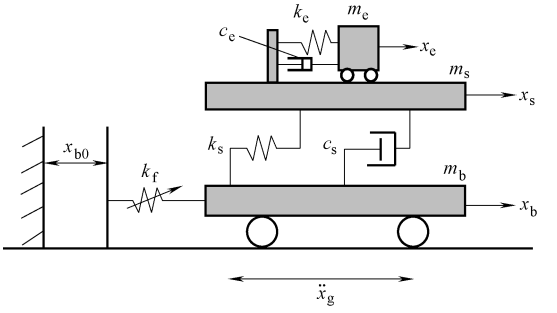


图 4-19 带虚拟弹簧的隔震结构模型

相应地，方程式（4-31）的状态空间动力学方程应该修改为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{A}(k_f)\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{E}\ddot{x}_g(t)+\boldsymbol{B}\widetilde{f}(t) \tag{4-46}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(k_f)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}(k_f)\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{4-47}$$

根据滑动系统的当前状态，方程式（4-46）中的虚拟刚度 k_f 和修改的摩擦力项 $\widetilde{f}(t)$ 可以取下面两种情形中的一种：

（1）粘连状态

$$\begin{aligned}k_f&=\alpha k_s\\ \widetilde{f}(t)&=k_f x_{b0}\end{aligned} \tag{4-48}$$

（2）滑动状态

$$\begin{aligned}k_f&=0\\ \widetilde{f}(t)&=-\operatorname{sgn}(\dot{x}_b(t))\mu W\end{aligned} \tag{4-49}$$

在式（4-48）中，符号 α 表示非常大的常数，x_{b0} 表示虚拟弹簧在粘连状态时的初始伸长量（x_{b0} 的计算将在后面解释）。注意修改的摩擦力项 $\widetilde{f}(t)$ 可能不是真正的摩擦力。真正的摩擦力可以按下面公式来确定：

（1）粘连状态

$$f(t)=k_f[x_b(t)-x_{b0}] \tag{4-50}$$

（2）滑动状态

$$f(t)=\widetilde{f}(t) \tag{4-51}$$

根据式（4-50）和式（4-51），粘连状态隔震系统的实际摩擦力等于虚拟弹簧的内力，而在滑动状态实际摩擦力等于修改的摩擦力 $\widetilde{f}(t)$。根据先前两个公式计算的摩擦力应该服从式（4-34a）和式（4-35a）给出的条件。

对于分别施加的粘连状态和滑动状态的式（4-48）和式（4-49）条件，方程式（4-46）的运动方程实际上表示了两个不同的方程。特别的，方程式（4-46）和方程式（4-48）一起描述了粘连状态的结构运动，而方程式（4-46）和方程式（4-49）描述了滑动状态的结构运动。由于滑动系统在某个时刻可以在两种状态之间切换，因而毫无疑

问整个系统特性应该看做非线性的。然而，在每一种状态下，由方程式（4-46）和方程式(4-48)或方程式（4-46）和方程式（4-49）描述的系统特性都是非线性的。

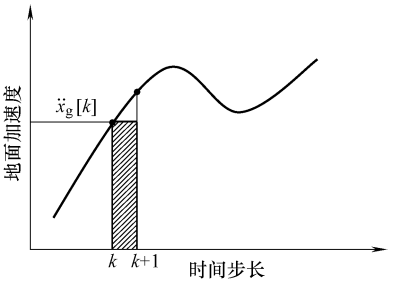


图 4-20　常力积分示意图

下面将介绍基于虚拟弹簧概念的数值解思路。设 Δt 代表时间增量，它通常是一个非常小的数值，且假定在每个时间增量 Δt 内，地面加速度和摩擦力是常数（图 4-20）。相应的，方程式（4-46）的时间离散解可以写成如下的增量形式（Meirovitch，1990）：

$$\boldsymbol{z}[k+1]=\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{z}[k]+\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}\ddot{x}_{\mathrm{g}}[k]+\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}\widetilde{f}[k] \tag{4-52}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(k_{\mathrm{f}})\Delta t}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta t^{i}}{i!}\boldsymbol{A}(k_{\mathrm{f}})^{i} \tag{4-53}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})=\boldsymbol{A}^{-1}(k_{\mathrm{f}})[\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{E} \tag{4-54a}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})=\boldsymbol{A}^{-1}(k_{\mathrm{f}})[\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{B} \tag{4-54b}$$

当系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$ 的计算可以采用下面公式替代：

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta t^{i}}{i!}\boldsymbol{A}(k_{\mathrm{f}})^{i-1}\right]\boldsymbol{E} \tag{4-55}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{f}})=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta t^{i}}{i!}\boldsymbol{A}(k_{\mathrm{f}})^{i-1}\right]\boldsymbol{B} \tag{4-56}$$

式（4-52）是增量形式的滑动系统的解，这是因为响应 $\boldsymbol{z}[k+1]$ 可以根据上一步的解 $\boldsymbol{z}[k]$ 计算。注意：正如虚拟弹簧在滑动状态和粘连状态可取不同的值一样，式(4-53）和式（4-54）中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}$ 也有两组可能的值。然而，一旦选定了时间步长 Δt，对于每种状态来说系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}$ 就保持常数。因此，它们仅需在增量程序的开始计算一次。上面描述的虚拟弹簧方法的计算流程图如图 4-21 所示。

滑动结构两种状态下的动态方程和它的时间离散解已在上面给出。下面将描述如何确定滑动结构从一种状态切换到另一种状态的过渡时间。一旦过渡时间确定下来后，最初的时间步长应该根据反映的过渡点进行缩减（Yang 等，1990）。

（1）从粘连状态过渡到滑动状态

正如式（4-34a）所表明的，滑动隔震结构保持粘连状态的条件就是基础下面的静摩擦力应该小于它的最大值 $f_{\max}$。一旦摩擦力超过了这个最大值，系统就开始滑动。采用了虚拟弹簧法，静摩擦力按照虚拟弹簧内力来计算，如式（4-50）所示。基于以上的考虑和式（4-50），滑动系统由粘连状态转换到滑动状态的条件为

$$|f(t_0)|=|k_{\mathrm{f}}[x_{\mathrm{b}}(t_0)-x_{\mathrm{b}0}]|=f_{\max}=\mu W \tag{4-57}$$

式中，t_0 表示结构开始滑动的过渡时间；k_{f} 是粘连状态下式（4-48）给出的弹簧刚度。由于粘连状态下采用的虚拟弹簧刚度 k_{f} 数值非常大，因而由弹簧伸长带来的基础位移

偏差在粘连状态下将非常小，可以忽略不计。实际上，过渡时间 t_0 可能并不精确落在所考虑的时间离散点上。弹性恢复力在当前的时间步第 k 步上很有可能小于最大值 $f_{\max}$，但在下一个时间步长上大于最大值 $f_{\max}$。如果属于这种情况的话，那么必须采用类似二分法这样的数值方法来锁定基于式（4-57）考虑的时间间隔 $[k\Delta t,(k+1)\Delta t]$ 内的过渡时间 t_0。

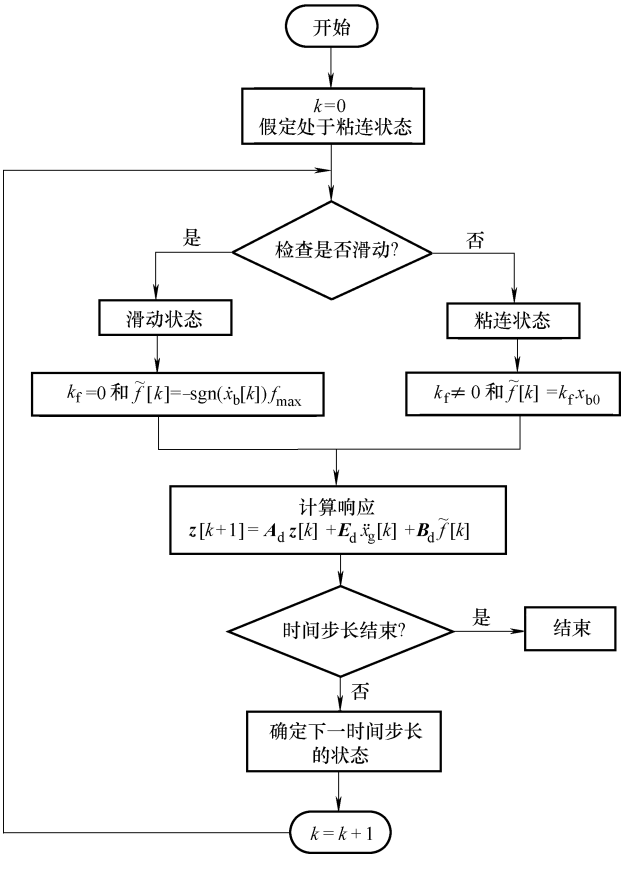


图 4-21　虚拟弹簧法计算流程图

（2）从滑动状态过渡到粘连状态

滑动状态的结构可以回归到粘连状态，只要满足以下两个条件。

（ⅰ）基础垫块相对地面的相对速度达到零，即 $\dot{\xi}_b(t_0)=0$，其中 t_0 为过渡时间。

（ⅱ）用 $\bar{f}(t_0)$ 表达的静摩擦力估计值小于最大静摩擦力，即 $\bar{f}(t_0)<f_{\max}$。这里，静摩擦力估计值 $\bar{f}(t_0)$ 被定义为剪切力，如果假定系统处于粘连状态，则需要 $\bar{f}(t_0)$ 平衡上层结构的运动，这类似式（4-42）中的 $\bar{f}[k+1]$。让基础垫块相对地面的相对速度和相对加速度都为零，即 $\ddot{\xi}_b(t_0)=\dot{\xi}_b(t_0)=0$，则摩擦力的估计值可以从基础垫块的隔离体中计算得到：

$$\bar{f}(t_0) = m_b \ddot{x}_g(t_0) - k_s[x_s(t_0] - x_b(t_0)) - c_s \dot{x}_s(t_0) \tag{4-58}$$

对于从滑动状态转换到粘连状态的滑动结构，上面提及的两个条件必须同时满足。一旦结构进入粘连状态，应该设$f(t_0)$等于$\bar{f}(t_0)$，且把它设为初始摩擦力。为了平衡起见，基础垫块的初始位移x_{b0}应该按照下式计算：

$$x_{b0} = x_b(t_0) - [\bar{f}(t_0)/k_f] \tag{4-59}$$

式中，k_f是式（4-48）对应粘连状态给出的值。

关注上面提及的两个条件，可能发生的只有第一个条件：$\dot{\xi}_b = 0$得到满足，而计算的$\bar{f}(t_0)$仍然大于f_{max}。如果属于这种情况，滑动系统不应该当做到粘连状态的过渡。进一步说，该状态应该看做在下一时间步长滑动方向反向的标志。对应的，摩擦力$f(t_0)$应该设为等于滑动摩擦力，而不是估计值$\bar{f}(t_0)$。

4.4.3 滑动隔震系统的模拟结果

4.4.3.1 数值模型和地面激励

在本节，将采用剪力平衡法分析图4-16所示的滑动结构-设备隔震系统。尽管考虑的滑动结构和设备都是单自由系统，但对采用这种方法来解决多自由度系统不存在任何问题。表4-3列出了仿真中采用的系统参数，计划用该模型模拟一个小的五层楼的钢筋混凝土框架结构。基于当前分析的要求，考虑两种激励方式，分别为谐波激励和地震激励。谐波激励主要考虑用于滑动系统的频率响应，而地震激励主要用于研究地震强度的影响。对于谐波激励，采用下面的正弦地面加速度：

$$\ddot{x}_g(t) = 0.5g\sin\omega_g t \tag{4-60}$$

式中，ω_g表示激励频率；g是重力加速度。对于地震激励，考虑的是1940 EI Centro地震（NS分量），它的波形已在图4-10中给出。因为研究的原因，将对地震的PGA值进行调整。选择与响应减小有效性有关的三个参数作为指标，它们分别是：基础位移（基础漂移）、结构加速度和设备加速度。在4.4.3节展示的所有图中，符号μ用来表示滑动隔震系统的摩擦系数，“固定”一词表示对应基础固定结构的响应。

表4-3 仿真中采用的系统参数（4.4.3节）

设备		上部结构		隔震系统	
参数	数值	参数	数值	参数	数值
质量m_e	3t($=m_s/100$)	质量m_s	300t	质量m_b	100t($=m_s/3$)
频率ω_e	$5\omega_s$或可变	频率ω_s	1.67Hz	摩擦系数μ	0.05,0.1,0.25
阻尼比ζ_e	5%	阻尼比ζ_s	5%	—	—

4.4.3.2 结构的谐波响应

（1）时程响应

对于承受$\omega_g = 1$Hz谐波激励的隔震系统来说，采用不同摩擦系数计算得到的基础位移展现在图4-22和图4-23上。正如我们所见的，在前几个周期内基础位移很快达到稳态响应。与此同时，采用较小的摩擦系数导致在稳态响应取得之前有较大的恒久位移。

根据图 4-24 所示的结构加速度，我们可以观察得到：带较小摩擦系数的滑动结构，稳态响应可以很快取得，实现结构加速度有较大减少。图 4-24 上令人感兴趣的是，基础固定（图中用“固定”一词表示基础固定结构，全节同）的案例的响应显露出有清晰的 1s 的周期，而在滑动案例中，响应受到高频信号的污染，它是由于滑动-粘连过渡引起的。

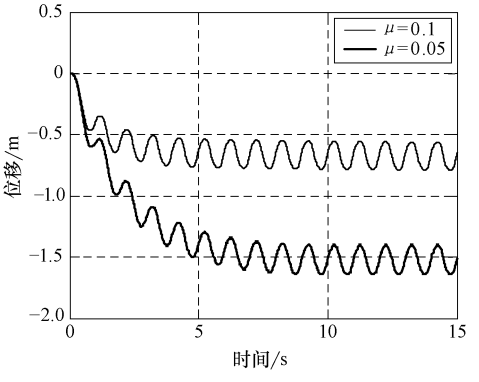


图 4-22 基础位移的比较
（$\omega_g = 1\text{Hz}$；$\omega_e = 5\omega_s$）

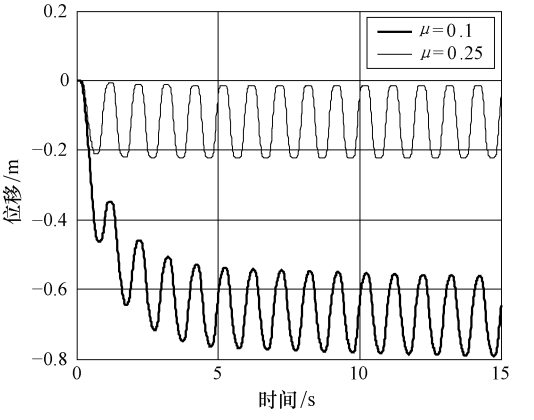


图 4-23 基础位移的比较
（$\omega_g = 1\text{Hz}$；$\omega_e = 5\omega_s$）

（2）迟滞特性

为了解振动控制中采用的非线性装置的力学特性，通常画出图来显示装置的力-位移关系，该图也称为迟滞回线（Soong 和 Dargush，1997）。图 4-25 表示系统承受 $\omega_g = 1\text{Hz}$谐波激励的滑动隔震系统迟滞回线，其中 $\mu = 0.1$ 和 $\mu = 0.25$。在该图上，水平轴和垂直轴分别表示基础位移和剪切力（也就是垫块下面的摩擦力）。就像许多其他摩擦单元或摩擦装置一样，滑动支撑的迟滞回线的形状是矩形。这个矩形的高度等于最大摩擦力，它取决于摩擦系数，而迟滞回线的宽度由滑动基础的位移决定。当摩擦系数减少时，回线高度也减少，而宽度却增加。该迟滞回路的总面积等于滑动支撑耗散的能量。

（3）频率响应

图 4-26 展示了考虑激励频率下 4 种不同摩擦系数：$\mu = 0.05$、0.1、0.25 和 ∞（对应基础固定状态）结构的最大加速度。这里，结构的最大加速度意指稳态加速度响应。根据对图 4-26 的观察，可以得到：

① 与基础固定的情况相比，在所考虑的频率范围内采用较小摩擦系数的滑动结构可以减少结构加速度。

② 滑动装置可以有效地抑制与上层结构系统 1.67Hz 固有频率有关的主要共振响应。

③ 当摩擦系数 μ 从 ∞ 下降到 0.05 时，和结构固有频率有关的主要共振频率从基础固定的 1.67Hz 移频到较高数值。

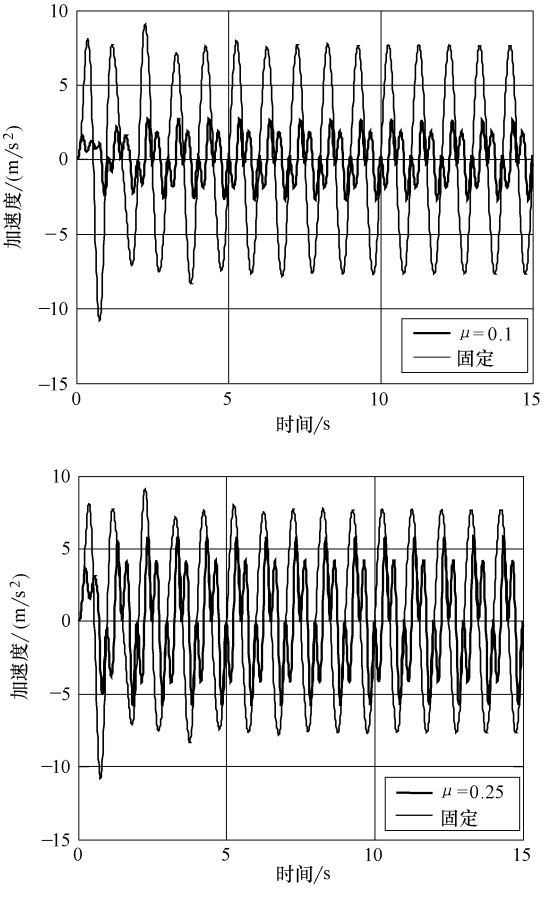


图 4-24　结构加速度的比较（$\omega_g = 1\text{Hz}$；$\omega_e = 5\omega_s$）

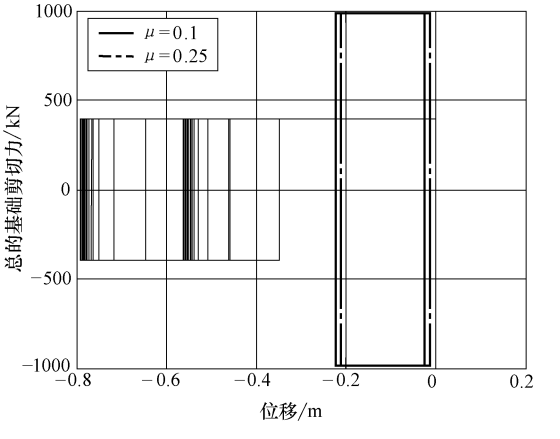


图 4-25　滑动支撑的迟滞回线（$\omega_g = 1\text{Hz}$；$\omega_e = 5\omega_s$）

④ 对于 $\mu=0.05$、0.1、0.25 的滑动情形，除了主要的共振峰以外，在较低的激励频率范围内还存在一些次要的峰值，这种现象称为次谐波共振。对于较大的摩擦系数，比如 $\mu=0.25$，次谐波共振甚至比主要共振的数值还大。

图 4-27 显示了不同摩擦系数下最大基础位移的频率响应。以下是观察到的现象：

① 摩擦系数越大，基础漂移越小。

② 基础位移在较低的激励频率处有较大的幅值，且幅值随激励频率的增加单调减少。

③ 较大的基础漂移出现在较低的激励频率处，这是由于图 4-22 上观察到的初始永久位移造成的。

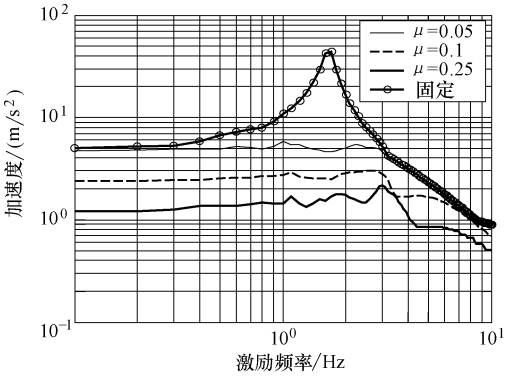


图 4-26　结构最大加速度与地面激励频率之间的关系（$\omega_e=5\omega_s$）

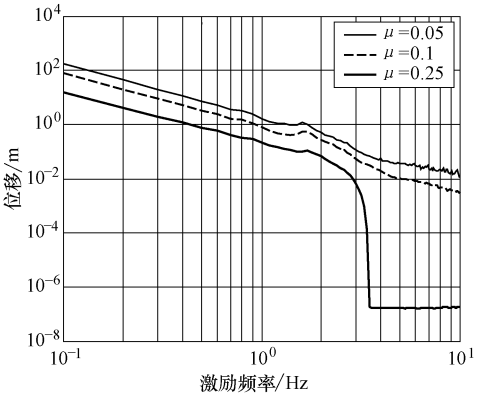


图 4-27　基础最大位移与地面激励频率之间的关系（$\omega_e=5\omega_s$）

4.4.3.3　设备的谐波响应

（1）时程响应

考虑设备的固有频率等于 5 倍的结构频率，也就是 $\omega_e=5\omega_s$。对于 $\omega_g=1\text{Hz}$ 的正弦激励情形，图 4-28 展示了安装在结构上的设备在 $\mu=0.1$、$\mu=0.25$ 及基础固定情形下求得的加速度响应。正如我们所见的，在几个振动周期内设备会很快趋于稳定状态。在

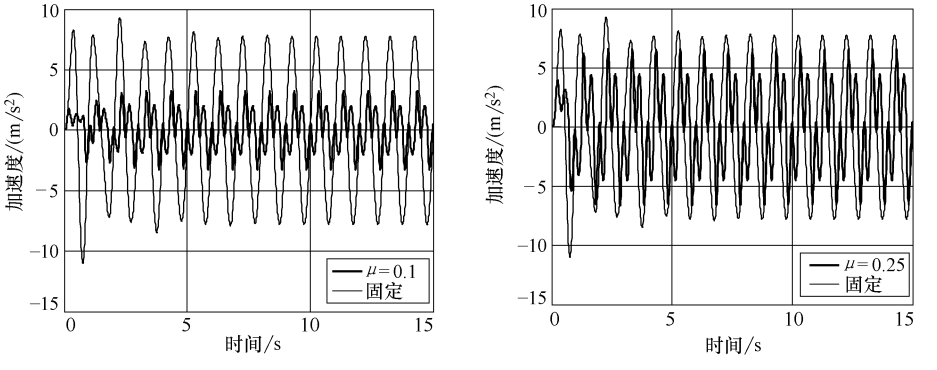


图 4-28　设备加速度的对比（$\omega_g=1\text{Hz}$；$\omega_e=5\omega_s$）

较小的摩擦系数下，设备响应就能得到有效抑制。此外，图 4-28 显示的设备振动波形要稍微大于图 4-24 所示的主结构的振动波形，这主要是由于采用了相对硬的设备，也就是 $\omega_e = 5\omega_s$。

（2）频率响应

对于 $\omega_e = 5\omega_s$（ =8.34Hz）的设备，图 4-29 画出了作为激励频率函数的加速度响应曲线。通过把图 4-29 与图 4-26 相比，我们可以看到：设备和主结构的频响曲线有很大的相似性，除了图 4-29 上出现的第二个共振峰，即 8.34Hz 的设备固有频率外。从图 4-29 上观察到的其他现象有：

① 与基础固定相比，滑动隔震系统分别衰减了 1.67Hz、8.34Hz 结构和设备的共振峰。但是，前者的衰减效果要比后者明显。

② 正如主结构所表示的那样，在共振峰及频率处，设备也显露出相同的次谐波共振。当摩擦系数 μ 从 ∞（对应基础固定）减到 0.05 时，和结构有关的主要共振峰漂移到一个较高的值，然而，与设备有关的共振频率仍然保持不变。

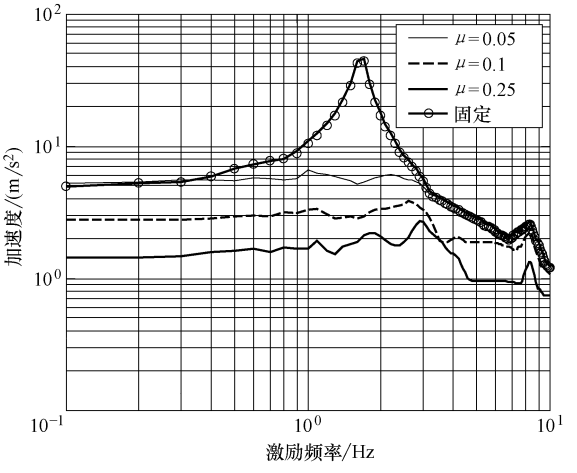


图 4-29　设备最大加速度与地面激励频率关系曲线（$\omega_e = 5\omega_s$）

（3）设备调谐效果

设备调谐效果参照设备频率调谐到结构频率也就是 $\omega_e = \omega_s$ 的情形。图 4-30 显示了当出现设备调谐时的频响曲线。与图 4-29 相比，该图展现了以下几点现象：

① 当出现设备调谐时，滑动隔震系统仍然减缓了设备的主要共振峰，但是衰减的效果却大大降低了。

② 尽管仍然能够观察到次谐波共振，但是设备的相关频率已明显不同于主结构的那些频率。

③ 不管摩擦系数 μ 如何从 ∞ 变化到 0.05，最大共振响应频率仍然等于调谐设备的 1.67Hz 固有频率。

4.4.3.4　结构地震响应

（1）时程响应

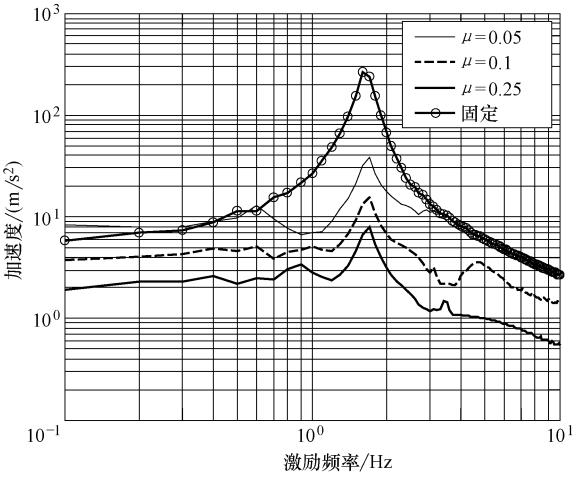


图 4-30 用于分析设备调谐的设备最大加速度与地面激励频率关系曲线（$\omega_e = \omega_s$）

对于受到0.5gPGA 的 EI Centro 地震激励的隔震系统来说，图4-31 和图4-32 分别画出了滑动隔震系统的结构加速度和基础位移，且图 4-31 中画出了基础固定的响应。正如我们在图 4-31 中所观察到的：对于基础固定结构在 0 ~ 10s 出现的主振峰响应已被 $\mu = 0.1$ 和 $\mu = 0.25$ 的隔震系统有效地抑制。大概 80% 和 60% 的最大结构加速度分别被 $\mu = 0.1$ 和 $\mu = 0.25$ 的隔震系统所抑制。另一方面，图 4-32 演示了 $\mu = 0.1$ 时较好振动抑制效果的取得是以较大基础位移为代价的。有意思的是：可以看到图 4-32 曲线的水平段实际上代表了滑动隔震系统的粘连状态，这对揭示所涉及的滑动-粘连机理是十分有用的。

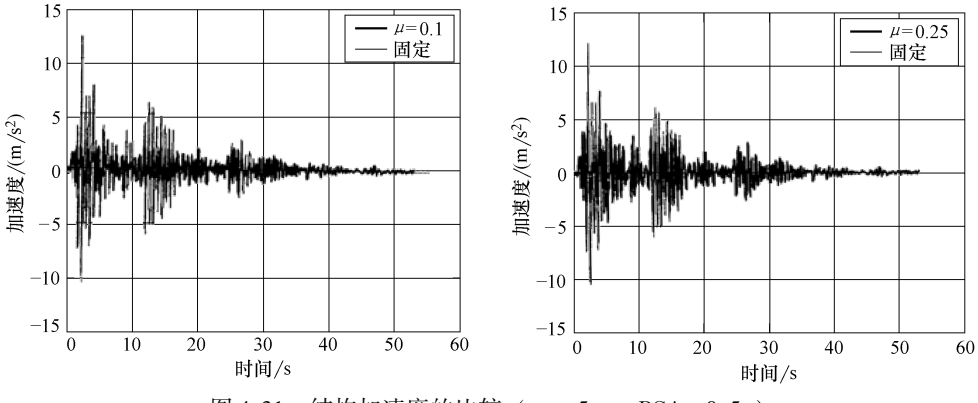


图 4-31 结构加速度的比较（$\omega_e = 5\omega_s$，PGA = 0.5g）

（2）地震强度的影响

图 4-33 和图 4-34 分别画出了结构最大加速度与 PGA、基础最大位移与 PGA 的关系曲线。正如我们在图 4-33 中所观察到的：对于基础固定情形下结构的最大加速度正比于地震强度，而在所有的滑动状态下，结构的最大加速度在 PGA 达到一个确定的值后

本质上停留在一个常数上。换句话说，结构最大响应的降低和隔震效果随地震强度的增加而增加。比如，对于$\mu=0.1$的情形，图 4-33 展示了在地震强度 PGA = 0.2g 时结构加速度降低了大约 60%，而在地震强度 PGA = 1.0g 时结构加速度降低了 90% 以上。然而，正如图 4-34 所揭示的，上面结构响应的降低的取得是以基础位移变大为代价的。对于相同的 PGA 地震强度，较小摩擦系数的滑动隔震系统具有较好的减震效果，但是伴随着较大的基础位移。

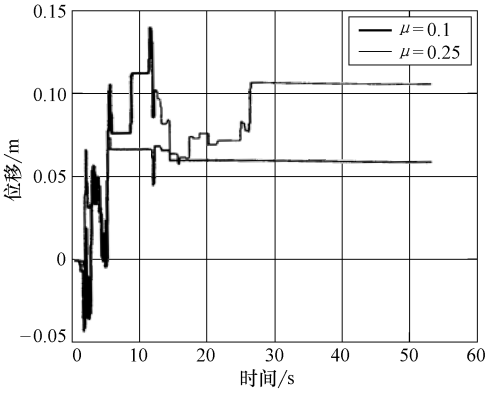


图 4-32　基础位移的比较（$\omega_e=5\omega_s$，PGA = 0.5g）

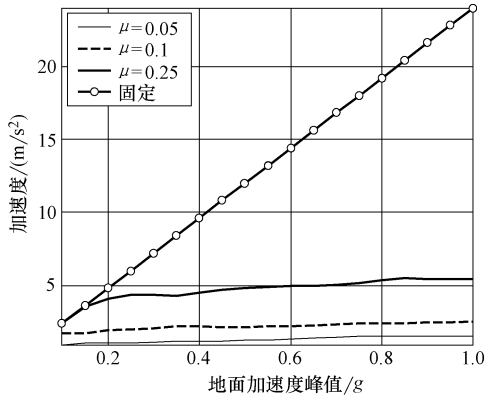


图 4-33　结构最大加速度与 PGA 之间的关系曲线（$\omega_e=5\omega_s$）

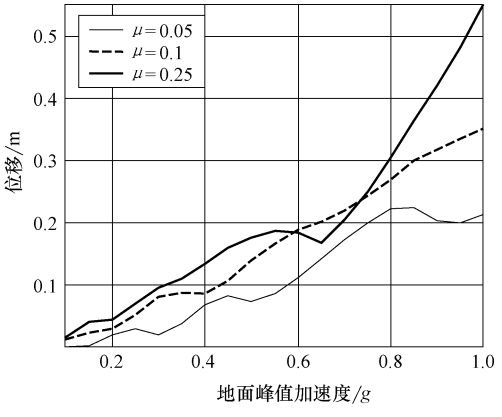


图 4-34　基础最大位移与 PGA 之间的关系曲线（$\omega_e=5\omega_s$）

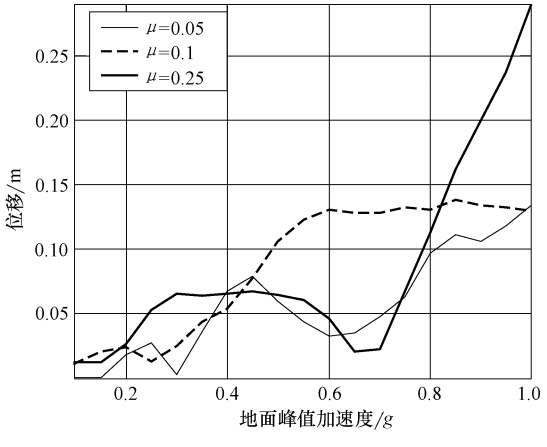


图 4-35　残余基础位移与 PGA 之间的关系曲线（$\omega_e=5\omega_s$）

残余基础位移定义为结构振动停止后结构永久的基础位移。这个基础位移在研究滑动结构方面具有重要意义。图 4-35 展示了作为地震强度 PGA 函数的残余基础位移。第一眼看图 4-35，未能看出该图揭示地震强度和残余位移之间存在什么关系，这是因为较大的 PGA 值导致的是较小的残余基础位移。不过，PGA 在取值 $0.1g \sim 1g$ 的范围内，对残余位移取平均值后，对于摩擦系数 $\mu = 0.05$、0.1 和 0.25，我们分别得到 $x_{res} =$ 0.083、0.084、0.084m。这些数值表明，较小的摩擦系数一般会导致较大的残余基础位移。然而，当摩擦系数 μ 趋近于零时，残余位移趋近于常数，等于永久地面位移。

4.4.3.5　设备的地震响应

（1）时程响应

考虑设备的固有频率等于 5 倍的结构频率，也就是 $\omega_e = 5\omega_s$（ = 8.34Hz）。对于受到 0.5gPGA 的 EI Centro 地震激励的隔震系统来说，图 4-36a 和图 4-36b 画出了对应 $\mu =$ 0.1 和 $\mu = 0.25$ 计算的设备加速度时程响应，且图中画出了基础固定的响应。正如我们在图中所观察到的：对于基础固定结构在前 10s 出现的主振峰响应已被安装的 $\mu = 0.1$ 和 $\mu = 0.25$ 的隔震系统有效地抑制。如果选择更小的摩擦系数，则可以取得更高的减震效果。

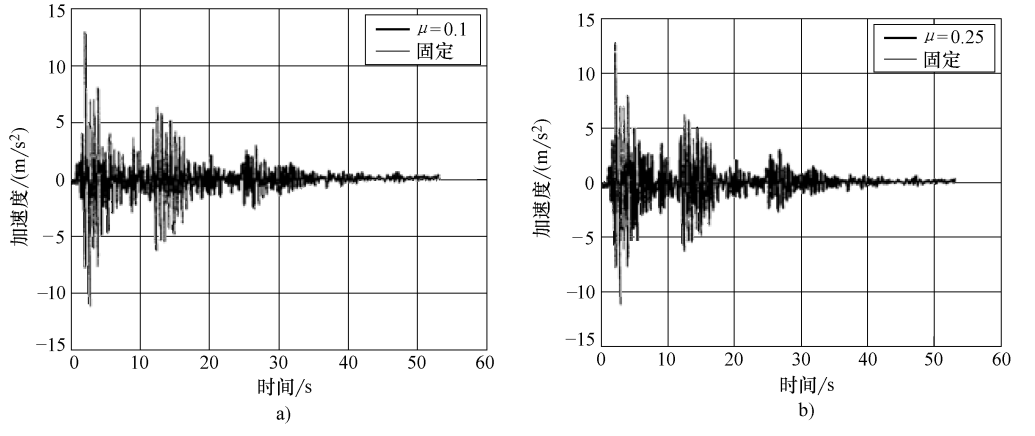


图 4-36　设备加速度的比较（$\omega_e = 5\omega_s$，PGA = 0.5g）

（2）地震强度的影响

图 4-37 展示了作为 PGA 函数的设备最大加速度曲线。由于采用了相对硬的设备（$\omega_e = 5\omega_s$），所以图 4-37 所示的曲线和图 4-33 所示的主结构曲线图相似，但数值略高。因此，对图 4-33 取得的观察结果适用于图 4-37，至于设备部件在其他频率处的最大响应将在下面讨论。

（3）设备调谐效果

为了研究设备的调谐效果，图 4-38 展示了作为设备频率函数的设备最大加速度曲线。正如我们所见的，对于所考虑的所有摩擦系数 μ，当设备频率移到接近 1.67Hz（基础固定）的结构固有频率时，设备响应是放大的。注意：由于当摩擦系数下降时滑动隔震结构的共振频率飘向更高值（参见图 4-26），所以在图 4-38 上出现最剧烈的调谐

效果的频率也随μ的下降从1.67Hz移到更高的数值。然而，结论是：通过选择较小的摩擦系数μ，则由调谐影响引起的设备响应的放大可以得到有效的抑制。

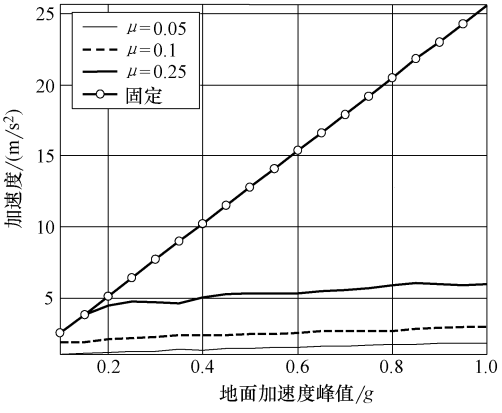


图4-37　设备最大加速度与PGA之间的关系曲线（$\omega_e = 5\omega_s$）

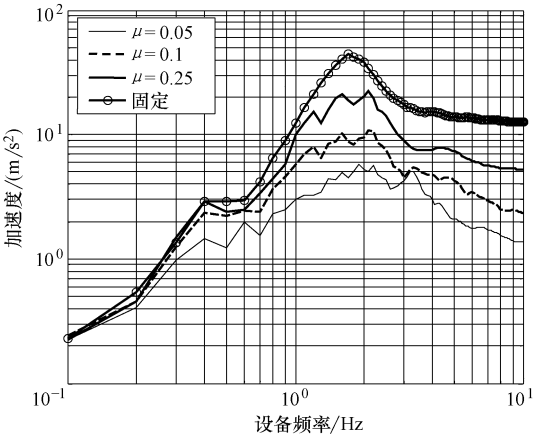


图4-38　设备最大加速度与设备频率之间的关系曲线（PGA=0.5g）

4.4.4　结语

本节探讨安装了设备部件的滑动隔震结构系统的动态特性。由于滑动表面引起的摩擦力并不保持常数，所以滑动隔震结构划分到非线性动力学系统一类。为了处理此类非线性系统，用公式表示了两种方法：剪切力平衡法和虚拟弹簧法，这两种都以增量形式出现，适用于直接求解。通过选择滑动隔震结构-设备模型，就可以分析承受谐波和地震激励下的结构和设备响应。对于谐波激励情形，分析结果表明结构和安装的设备的共振响应能够得到很好的抑制，即使当设备频率调谐到结构频率处，效果依然良好。对于地震激励情形，研究结果表明结构-设备振动响应衰减的程度随地震PGA数值的增加而增加。然而，较小摩擦系数的滑动系统却具有较高的隔震效果，这是以较大基础位移为代价的。

4.5　带复原装置的滑动隔震系统

在4.4节中，展示了在不考虑复原装置（自动定心）情形下滑动隔震结构系统的相关分析方程。由于这个原因，在滑动隔震系统上会出现相当大的残余位移，这已由数值计算表明。如果把滑动隔震器概念用于实际结构上，那么把残余基础位移控制在一定限值内是很重要的，这是因为对于某些工程应用来说，残余基础位移是不允许的。比如，残余基础位移可能扭曲水管和电力网络，改变隔震结构和邻近建筑的距离，并加大大楼入口处的裂口。因而，实际上通过插入能提供复原力的装置来完善滑动隔震系统。但是，对于确定的地面运动来说，附加的复原力也可能带来一些负面影响，这些信息对结构设计者来说是不明朗的，这些将在后面的数值研究中加以说明。

正如图4-39所表明的，至少存在两种方法来实现滑动隔震系统中的复原装置。图4-39a显示的是一种隔震系统，它把弹性支撑和滑动支撑组合在一起（Chalhoub和Kelly，1990），其中弹性支撑用来提供复原力，滑动支撑用来把结构系统从地面运动中解耦；另一方面，复原装置也可以合并到各个滑动支撑中，其方式与4.2.3节中描述的RFBI（Mostaghel和Khodaverdian，1987）一样，或与图4-39b描述的FPS类似（Mokha等，1991）。FPS隔震系统已在许多存在的大楼和桥梁上得到应用。一个典型的FPS支撑由一个球形滑动面和一个滑动件构成，其通常有非常低的摩擦系数的光滑涂层。把FPS装置放置到结构下面，当地震来临时滑动件将在球形表面上滑动，结构的重力和滑动曲面为系统提供复原力，使系统回到它的起始位置。FPS支撑的复原刚度取决于滑动曲面的曲率半径和支撑分担的结构重量。

本节瞄准探索由带复原功能的滑动系统来隔震的结构-设备系统特性。为了讨论的方便，带复原装置的系统将称为复原滑动隔震系统（RSI），先前研究过的、不带复原装置的滑动系统称为纯滑动隔震系统（PSI）。

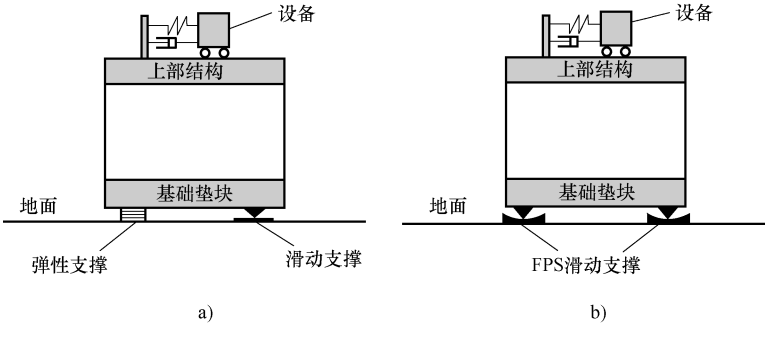


图4-39　由带复原功能的滑动支撑隔震的结构-设备系统示意图
a）组合式隔震系统　b）摩擦式单摆系统（FPS）

4.5.1 数学建模和公式推导

图 4-39 展示的两种 RSI 系统可以用图 4-40 给出的数学模型来表示，图中符号已在表 4.1 中定义。图 4-40 给出的 RSI 模型不同于图 4-16 给出的 PSI 模型，这是因为在图 4-40 中加入了一根刚度为 k_b 的线性弹簧，来模拟隔震装置的复原力。很明显，一个 RSI 模型可以考虑为一个摩擦单元和一个弹簧单元的并联组合。由于增加了复原刚度，系统的固有频率也就增加了一个。这个新引进的频率，称为隔震频率，取决于复原刚度，可以近似表示为

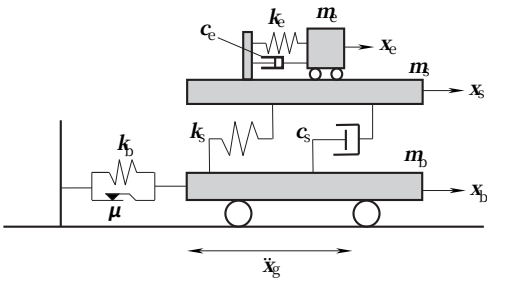


图 4-40　由带复原功能的滑动支撑隔震的结构-设备系统的力学模型图

$$\omega_b = \sqrt{k_b/(W/g)} \tag{4-61}$$

式中，W 是结构-设备隔震系统的总重。采用的隔震频率的设计值为 0.33 ~ 0.5Hz，也就是振动周期为 2 ~ 3s（Naeim 和 Kelly，1999）。

对于图 4-39a 所示的组合类的滑动式隔震系统，复原刚度 k_b 的实际值由安装的弹性支撑的总的水平刚度决定。另一方面，对于图 4-39b 所示的 FPS（摩擦单摆系统）隔震系统，对于较小的隔震位移，复原刚度 k_b 近似由下式给出：

$$k_b = \frac{W}{R} \tag{4-62}$$

式中，R 为滑动表面曲率半径。把式（4-62）代入式（4-61）中，我们可以证明 FPS 的隔震周期等于单摆的振动周期；也就是

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_b/(W/g)}} = 2\pi\sqrt{R/g} \tag{4-63}$$

当图 4-40 所示的滑动隔震系统受到地面运动激励时，它的运动方程可以准确地写成式（4-27）一样的形式，也就是

$$\boldsymbol{M}\ddot{x}(t) + \boldsymbol{C}\dot{x}(t) + \boldsymbol{K}x(t) = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{L}_1\ddot{x}_g(t) + \boldsymbol{L}_2 f(t) \tag{4-64}$$

先前公式中采用的所有变量与方程式（4-28）~ 式（4-30）定义的一样，当然刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 除外，它可以按照下面来修改：

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_e & -k_e & 0 \\ -k_e & k_e + k_s & -k_s \\ 0 & -k_s & k_s + k_b \end{bmatrix} \tag{4-65}$$

注意：方程式（4-64）中不是常数的摩擦力 $f(t)$ 被放到了方程的右边，而维持常数的复原刚度 k_b 被式（4-65）的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 所包括。但是，如果隔震系统总的剪切力 $s(t)$ 具有意义，那么它应当算作摩擦力和复原力之和（图 4-40），也就是：

$$s(t) = k_b x_b(t) + f(t) \tag{4-66}$$

方程式（4-64）给出的运动方程可以重新表达为下面的一阶状态空间方程：

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{E}\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)+\boldsymbol{B}f(t) \tag{4-67}$$

矩阵 $\boldsymbol{z}(t)$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的定义和方程式（4-32）与方程式（4-33）中定义的一样，但除了系统矩阵 $\boldsymbol{A}$，考虑到刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中增加了复原刚度 k_{b}，所以应该修改矩阵 $\boldsymbol{A}$。

4.5.2 数值分析方法

如果我们把式（4-67）表示的 RSI 系统运动方程与式（4-31）表示的 PSI 系统运动方程相比较，可以得出：两个方程的非线性唯一源头来自于相同项，即摩擦力 $f(t)$。因此，4.4.2 节提到的剪切力平衡法（王等，1998）和虚拟弹簧方法（杨等，1990）这两种方法，对分析 RSI 系统仍然有效，不需要修改。不过，由于结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 增加了复原刚度 k_{b}，所以系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变得非奇异和可逆了。这给包括式（4-38a）和式（4-38b）中的 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 在内的相关系数矩阵计算带来了便利。在 4.5.3 节中，将采用剪切力平衡法计算 RSI 系统的响应。

4.5.3 带复原装置的滑动隔震系统的仿真结果

4.5.3.1 数值模型和地面激励

在本节将讨论图 4-40 所示的滑动隔震系统模型的动态特性。设备、结构和隔震装置分析所用的数据见表 4-4。为了便于比较，表 4-4 所选择的一些数据和表 4-3 中的相同。特别的是，选择的隔震频率 $\omega_{\mathrm{b}}=0.4\mathrm{Hz}$ 落在了通常的 0.33～0.50Hz 范围内。再次要说的是，考虑的两种地面激励分别为简弦和地震激励。对于简弦激励，地面加速度波形类同于式（4-60）给出的波形；而对于地震激励，采用的是不同 PGA 级别的 1940EI Centro 地震，它们的加速度波形已在图 4-10 中给出。采用简弦激励，主要用于研究滑动隔震系统的频响，而采用地震激励的主要目的在于研究地震强度的影响。这里将展现对包括结构、设备在内的 RSI 系统计算得到的动态响应，且重点放在和具有相同参数的 PSI 系统的比较上。类似于 4.4.3 节所做的，将采用符号 μ 表示所有图中的滑动隔震系统的摩擦系数，且“固定”一词表示基础固定结构。

表 4-4 仿真中采用的系统参数（4.5.3 节）

设备		上部结构		隔震系统	
参数	数值	参数	数值	参数	数值
质量 m_{e}	3t（$=m_{\mathrm{s}}/100$）	质量 m_{s}	300t	质量 m_{b}	100t（$=m_{\mathrm{s}}/3$）
频率 ω_{e}	$5\omega_{\mathrm{s}}$ 或可变	频率 ω_{s}	1.67Hz	摩擦系数 μ	0.05,0.1,0.25
阻尼比 ζ_{e}	5%	阻尼比 ζ_{s}	5%	隔震频率 ω_{b}	0.4Hz

4.5.3.2 结构的谐波响应

（1）时程响应

考虑一个 RSI 系统承受 $\omega_{\mathrm{g}}=1\mathrm{Hz}$ 的简弦激励。RSI 系统的基础位移和结构加速度分别在图 4-41 和图 4-42 上画出。很明显，RSI 系统的基础位移和结构加速度在前几个周

期内就达到了稳态谐波响应了。然而，正如图 4-42 所示，较小的滑动摩擦系数（$\mu = 0.1$）对抑制结构振动加速度可能更加有效。但是，正如图 4-41 所表明的，以上效果的取得是以产生较大基础位移为代价的。把图 4-41 所示的 RSI 系统的结果和图 4-23 所示的 PSI 系统结果进行比较，弹性机构以较小的滑动摩擦系数（$\mu = 0.1$）在消除永久基础位移方面的效果是明显值得肯定的。尽管 RSI 和 PSI 这两个系统在基础位移上有较大差别，但在图 4-42 和图 4-24 上分别所示的这两个系统的结构加速度在波形和响应幅值上是极其相似的。这就暗示，对于简弦激励来说，RSI 系统的弹性机构对隔震效果没有影响。

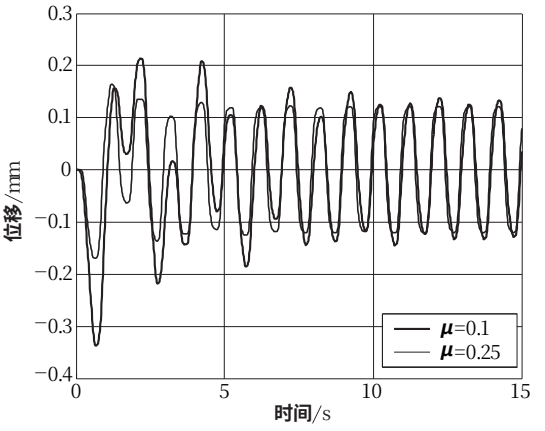


图 4-41　基础位移的比较（$\omega_g = 1\text{Hz}$，$\omega_e = 5\omega_s$）

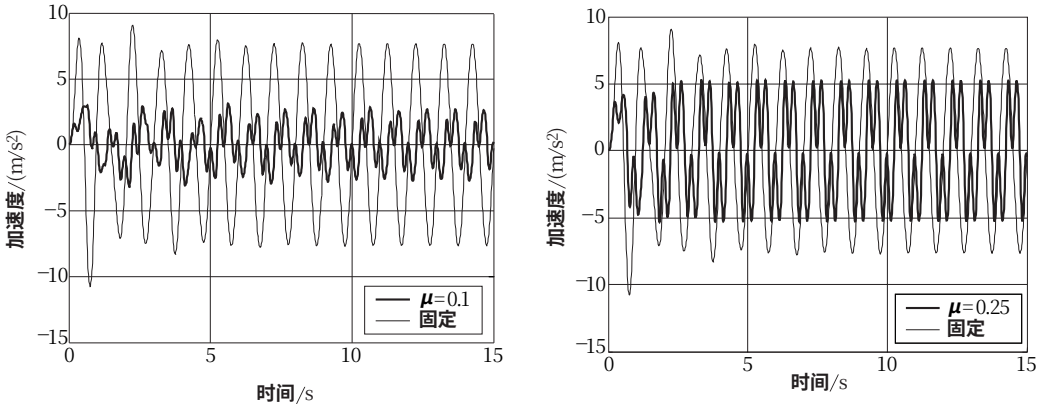


图 4-42　结构振动加速度的比较（$\omega_g = 1\text{Hz}$，$\omega_e = 5\omega_s$）

（2）迟滞特性

图 4-43 反映的是一个 $\mu = 0.1$ 和 $\mu = 0.25$ 的 RSI 系统承受 $\omega_g = 1\text{Hz}$ 的简弦激励作用下的迟滞回线，其中垂直轴线代表由式（4-66）计算得到的支撑总剪切力 $s(t)$。有意思地看到：RSI 系统的迟滞回线是一个平行四边形，它的上下两条边的斜率精确地代表了弹性基础总刚度 k_b，而四边形的高度和宽度分别由最大摩擦力和最大基础位移决定。当摩擦系数减少时，平行四边形的高度也减少，但是宽度会增加。迟滞回线总面积代表了 RSI 系统耗散的部分能量。值得关注的是，当弹性基础总刚度 k_b 减少到零时，迟滞回线的平行四边形缩减为一个矩阵，且等同于图 4-25 所示的 PSI 系统的迟滞回线。

（3）频率响应

图 4-44 反映的是四种不同摩擦系数：$\mu = 0.05$、0.1、0.25 和 ∞（基础固定）情形

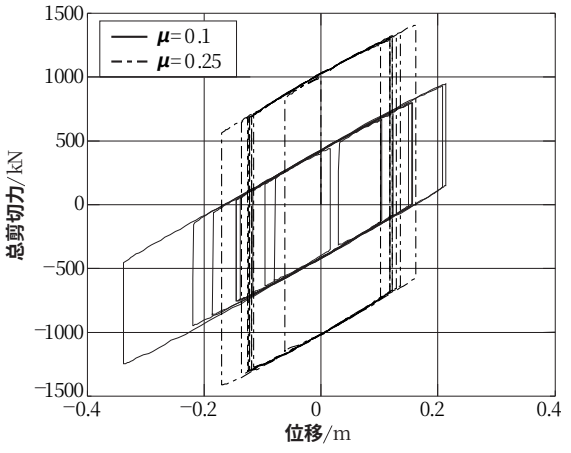


图 4-43 具有弹性的滑动支撑迟滞回线（$\omega_g = 1\text{Hz}$，$\omega_e = 5\omega_s$）

下结构稳态响应的最大加速度值。根据该图，可以得到以下观察结果：

① 与基础固定相比，出现在结构频率 $\omega_s = 1.67\text{Hz}$ 附近的共振峰被 RSI 系统有效抑制，但是诱发了较低频率范围内（对于所研究的案例，频率低于 0.6Hz）更大幅值的共振。进一步的研究表明新近诱发的共振和隔震频率 $\omega_b = 0.4\text{Hz}$ 有关。这个观察结果适用于所有的摩擦系数 μ。

② 对于 RSI 系统来说，采用较小的摩擦系数 μ 将在较高频率范围内比如频率大于 0.6Hz 范围内带来较小的响应，但在较低频率范围内产生更大响应。

③ 尽管 RSI 和 PSI 系统可以有效去除 1.67Hz 左右结构频率的共振峰，但是 RSI 系统具有边际效应，在隔震频率 ω_b 处产生了一个更低频率的共振峰。这就暗示 RSI 系统对激励频率更敏感。

图 4-45 反映的是不同摩擦系数情形下 RSI 系统最大基础位移的频率响应。和

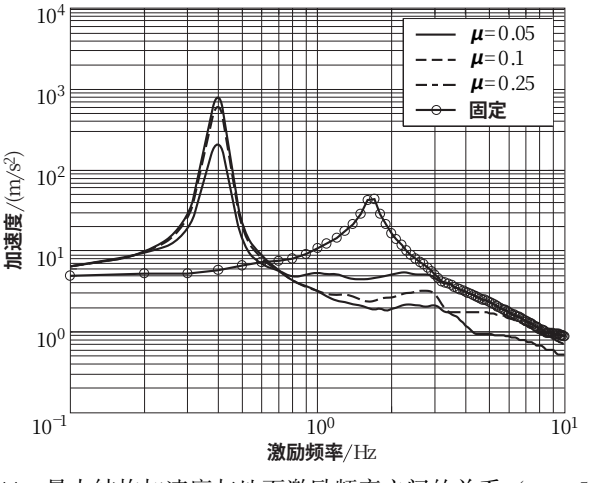


图 4-44 最大结构加速度与地面激励频率之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

图 4-27反映的 PSI 系统结果相比，可以清晰地看到 RSI 系统的弹性机构极大地减低了非共振激励范围内基础位移，但是当激励频率接近隔震频率 ω_b 时，RSI 系统却放大了基础位移。根据图 4-44 和图 4-45，我们可以观察看到：RSI 系统的结构加速度和基础位移将在隔震频率处（通称设计成低于 0.5Hz）出现共振。这就意味着当遭遇包含低频（长周期）激励的地面运动时，RSI 系统可能无效或不安全。这种振动激励出现在近断层地震上，它包含了长周期、脉冲波形（Jangid 和 Kelly，2001；Lu 等，2003）。结构设计师在设计 RSI 系统时应该小心它的边际效应。

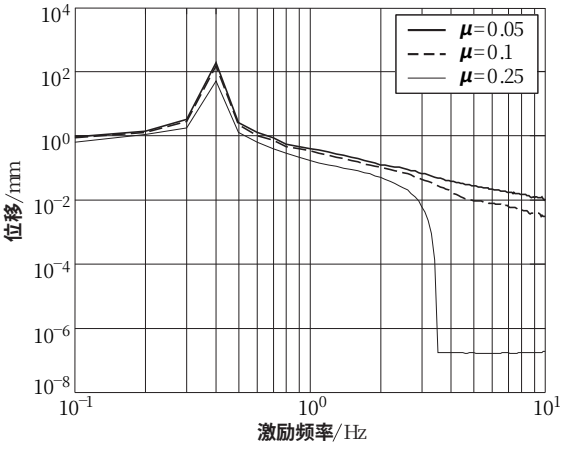


图 4-45　最大基础位移与地面激励频率之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

4.5.3.3　设备的谐波响应

（1）时程响应

考虑一套设备连接在 RSI 系统上，设备固有频率 $\omega_e = 5\omega_s = 8.34$Hz。图 4-46a 和 4-46b分别展示了 $\mu = 0.1$、$\mu = 0.25$ 及基础固定的情形下设备的简弦加速度响应。正如所见的，设备加速度已被较低摩擦系数（$\mu = 0.1$）的 RSI 系统所抑制。然而，图 4-46 所示的加速度波形类同于图 4-28 所示的 PSI 系统。这就暗示，对于给定的激励来说，引入 RSI 系统的弹性机构并不改变设备特性。

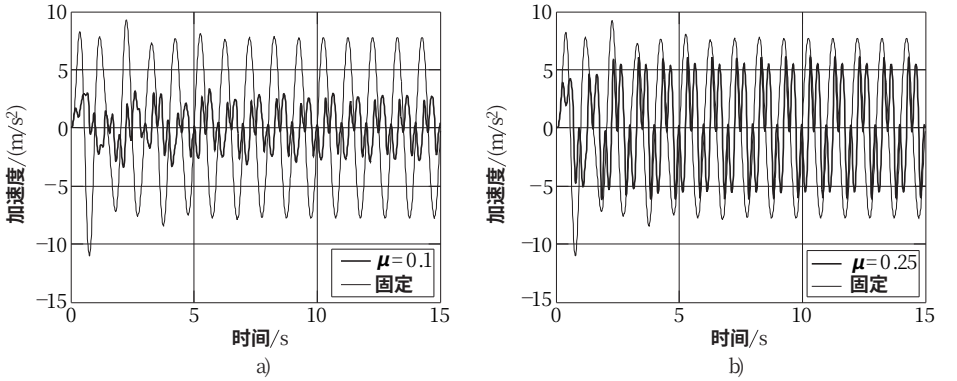


图 4-46　设备加速度的比较（$\omega_g = 1$Hz，$\omega_e = 5\omega_s$）

（2）频率响应

图 4-47 反映的安装设备（其固有频率 $\omega_e = 5\omega_s = 8.34\text{Hz}$）加速度频响曲线。对照图 4-47 和图 4-44，发现设备和主结构的频响曲线类似，但除了图 4-47 上出现的、大约为 8.34Hz 设备固有频率有关的共振峰。由于存在如此的相似性，先前对图 4-44 所作的分析同样适用于图 4-47 所反映的安装设备。

（3）设备的调谐效果

图 4-48 展示的是当安装设备固有频率调谐到结构固有频率处（$\omega_e = 5\omega_s$ 时）设备的频响曲线。类似于图 4-44 所示的结构频响曲线，与 RSI 系统相连的设备同样会在 0.4Hz 的隔震频率处出现共振。对于与 PSI 系统相连的设备不会出现这样的共振（参见图4-30）。通过对照图 4-48 所示的调谐案例和图 4-47 所示的非调谐案例，我们得出以下结果：

① 即当设备调谐时，尽管隔震效果降低，但 RSI 系统也减轻了与结构固有频率 1.67Hz 有关的设备共振峰。

② 调谐效果对 0.4Hz 隔震频率有关的共振响应没有影响。

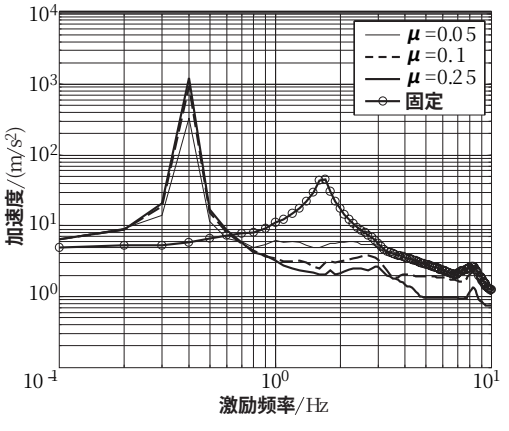


图 4-47 最大结构加速度与地面激励频率之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

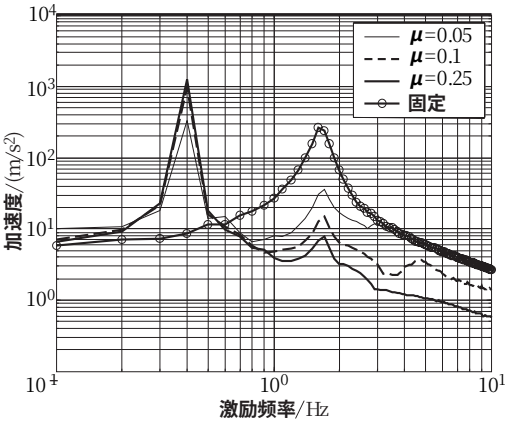


图 4-48 设备最大加速度与地面激励频率之间的关系（处于调谐状态，$\omega_e = 5\omega_s$）

4.5.3.4 结构地震响应

（1）时程响应

对于承受 PGA = 0.5g 大小的 EI Centro 地震激励的 RSI 系统来说，图 4-49 和图 4-50 分别展示了结构加速度和基础位移。通过比较图 4-49 和对应 PSI 系统的图 4-31，我们可以观察到：就响应波形和响应幅值来说，RSI 系统和 PSI 系统的结构加速度一般类似。这两个系统都可以非常有效地降低最大结构加速度，比如对于 $\mu = 0.1$，降低了大约 80%。但是，在图 4-50 所示的 RSI 系统和图 4-32 所示的 PSI 系统之间在基础位移上存在重大差异。比如对于 $\mu = 0.1$，装有 RSI 系统的结构最大基础位移降低了大约 30%，而残余基础位移降低了大约 70%，这个通过比较图 4-50 和图 4-32 可以看到。这就意味着 RSI 系统的弹性机构在降低最大基础位移和残余位移方面，尤其是后者起着很大的作用。

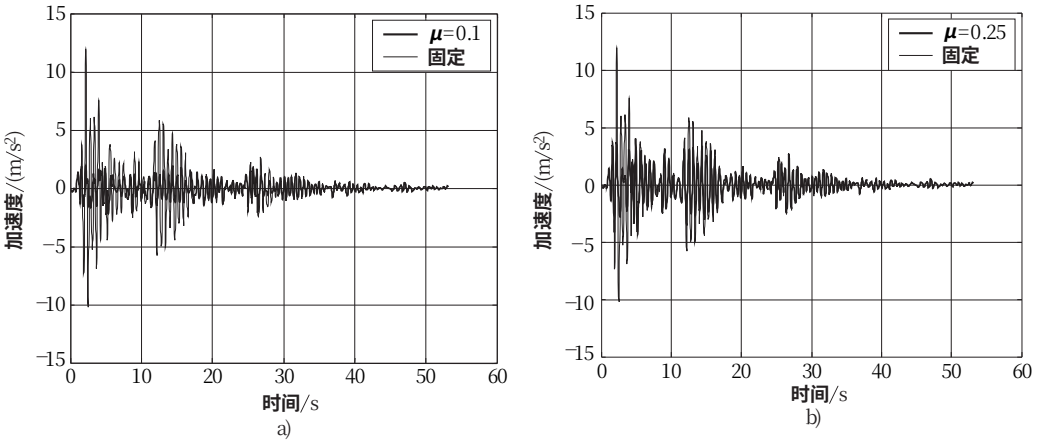


图 4-49　结构加速度的比较（$\omega_e = 5\omega_s$，PGA = 0.5g）

尽管得到了以上观察结果，但是我们不应该忘记这一场地震的频率成分和下一场地震的不同。正如图 4-44 和图 4-45 所示，RSI 系统一般对低频激励敏感，且可能在隔震频率处共振。因此，如果 RSI 系统承受了一场含有更低频率成分而不同于 EI Centro 的地震，那么很可能出现的最大结构响应会超过 PSI 系统。

（2）地震强度的影响

图 4-51 和图 4-52 分别展示了 RSI 系统的最大结构加速度和基础位移与 PGA 之间的关系。这两个图表明：当地震强度从 0.1g 增加到 1g 时，结构加速度减少的量是以增加 RSI 系统的数量获得，而与此同时最大基础位移是增加的。通过比对图 4-51、图 4-52 和 PSI 系统的图 4-33、图 4-34，我们可以观察得出：尽管 PSI 系统诱导了一个稍微大的基础位移，但是 RSI 和 PSI 系统对 EI Centro 地震隔震得同样好。另一方面，不同于 PSI 系统的响应，RSI 系统采用较小的摩擦系数并不总是带来较低的结构加速度，这点可以通过比对图 4-33 和图 4-51 中表示的 $\mu = 0.1$、$\mu = 0.25$ 及 PGA 大于 0.8g 的最大结构加速度响应。这个归功于在较大 PGA 水平下较大基础位移引起了较大的弹性力。

（3）残余基础位移

图 4-53 展示了 RSI 系统的残余基础位移与 PGA 之间的关系。对于给定的摩擦系数 μ，很难建立起地震强度和残余位移之间的关系，这是因为更大的 PGA 在某些情况下可能会导致较小的残余基础位移。然而，如果我们从 0.1g ~ 1g 范围内对残余位移取平均值，那么可以得到下面的计算值：x_{res} = 0.0065m、0.011m 和 0.014m，它们分别对应于 $\mu = 0.05$、0.1 和 0.25。这些数值表明：较小的摩擦系数导致了较小的残余基础位移，这点可以归功于具有较小摩擦系数的 SRI 系统，因为该系统在地震之后很容易复位到初始状态。另一方面，图 4-53 和代表 PSI 系统的图 4-35 的比对揭示出：对于相同的摩擦系数 μ，RSI 系统极大地减少了残余位移。这可能是 RSI 系统弹性结构提供的一项优点。

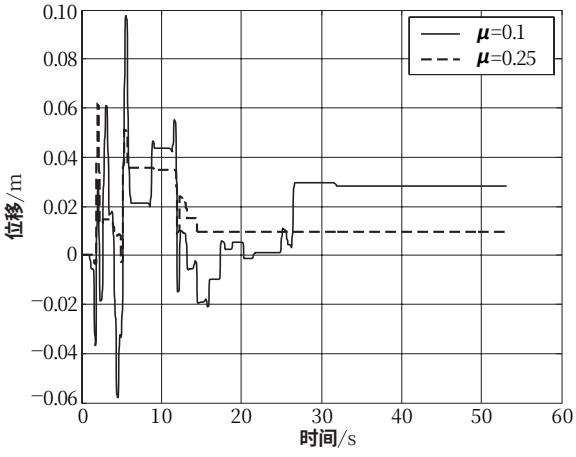


图 4-50　基础位移的比较（$\omega_e = 5\omega_s$，PGA = 0.5g）

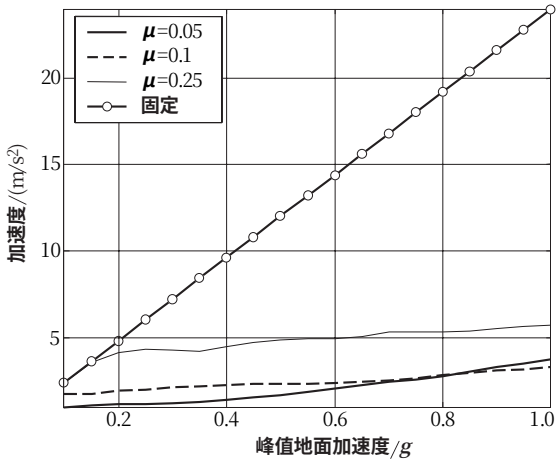


图 4-51　最大结构加速度与 PGA 之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

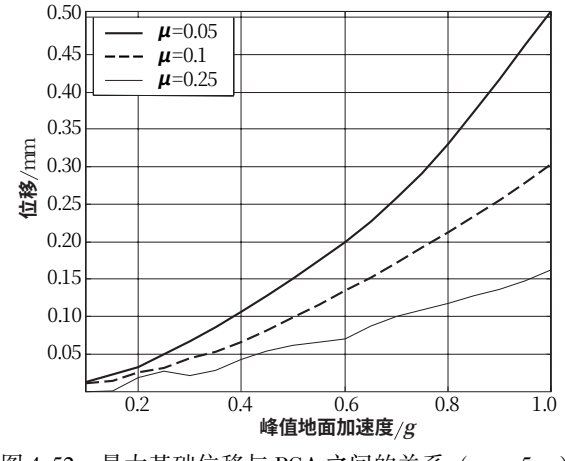


图 4-52　最大基础位移与 PGA 之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

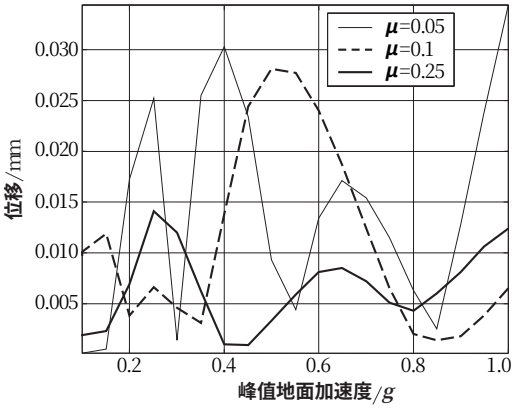


图 4-53　残余基础位移与 PGA 之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

4.5.3.5　设备的地震响应

（1）时程响应

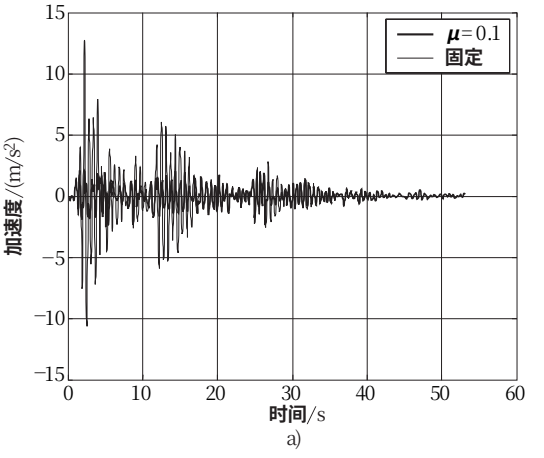
假设设备固有频率等于 5 倍的结构频率，即 $\omega_e = 5\omega_s = 8.34\text{Hz}$。图 4-54a 和 4-54b 分别展示了 $\mu = 0.1$、$\mu = 0.25$ 及基础固定的情形下安装在 RSI 系统上、承受 $0.5g$ PGA EI Centro 地震激励的设备加速度响应。正如所见的，基础固定系统的前 10s 出现的设备主要冲击加速度响应已被摩擦系数（$\mu = 0.1$ 或 0.25）的 RSI 系统所有效抑制。较小摩擦系数，即 $\mu = 0.1$ 取得的振动降低效果尤为明显。对照图 4-54 和代表 PSI 系统的图 4-36，我们可以看出：对于所考虑的地震和设备频率范围来说，RSI 系统的弹性结构对设备响应的减震影响并不重要。

（2）地震强度的影响

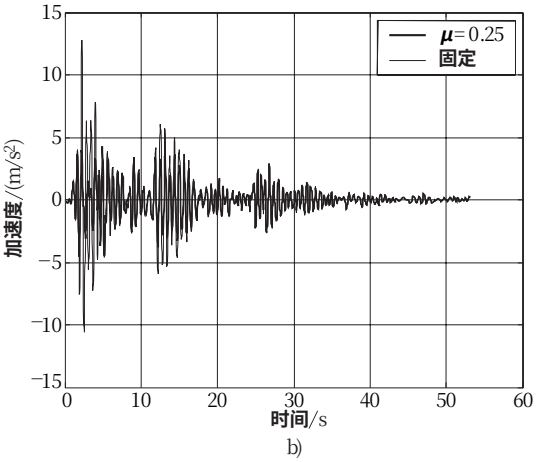
图 4-55 展示了最大设备加速度与地震 PGA 之间的关系。这个图表明：对于考虑的所有摩擦系数 μ，当地震强度从 $0.1g$ 增加到 $1g$ 时，结构加速度的减少的量是以增加 RSI 系统获得的。由于仿真计算中假定设备刚度相对较大（即 $\omega_e = 5\omega_s$），因此图 4-55 所示的曲线类同于图 4-51 所示的主结构曲线，故先前对图 4-51 所作的分析同样适用这里的分析。下面将讨论具有其他固有频率设备部件的最大响应。然而，通过比对图4-55 和（代表 PSI 系统）图 4-37，我们可以看到弹性结构对设备响应影响小，但只在采用较小摩擦系数（$\mu = 0.05$ 或 0.1）和 PGA 值较大时发生。

（3）设备的调谐效果

为了研究设备调谐效果，图 4-56 展示了设备频率从 0.1 ~ 10Hz 范围内设备的最大加速度响应。正如所见的，对于考虑的所有摩擦系数 μ，当设备固有频率调谐接近结构固有频率即 $\omega_e = \omega_s = 1.67\text{Hz}$ 时设备响应得到放大，这就意味着调谐放大了设备响应。但是，采用较小摩擦系数 μ 可能有助于减少调谐引起的设备最大响应的放大。最后，通过对图 4-56和图 4-38（代表 PSI 系统）的比较，反映出对于固有频率大于 1Hz 的设备部件来说，这两个图非常相似，但是对于较低固有频率的设备部件来说，这两个图是不同的。这就意味着对于所考虑的地震来说，RSI 系统的弹性结构对较硬刚度的设备响应没有影响。



a)



b)

图 4-54 设备加速度的比较（$\omega_e = 5\omega_s$，PGA = 0.5g）

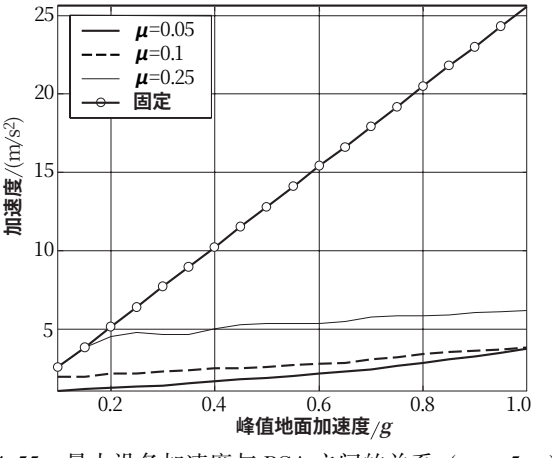


图 4-55 最大设备加速度与 PGA 之间的关系（$\omega_e = 5\omega_s$）

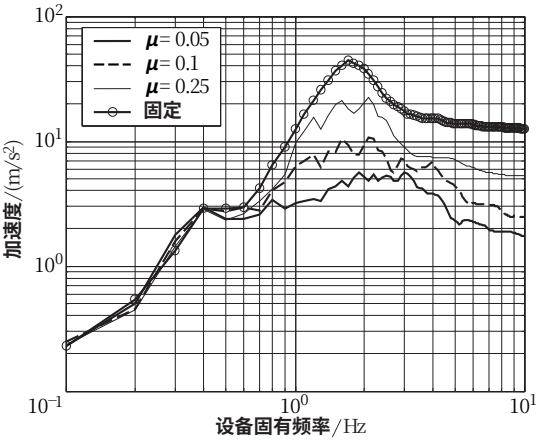


图 4-56　最大设备加速度与设备固有频率之间的关系（PGA = 0.5g）

4.5.4　结语

本节研究了简弦和地震激励下由 RSI 系统隔震的结构-设备的特性。研究了结构和设备两者的响应，且特别重点描述了 RSI 系统的弹性机构在其中的影响。数值仿真结果表明：当承受简弦激励时，RSI 系统是能够抑制与结构和设备有关的结构共振峰，但是由于引入了弹性刚度，因而也诱导了靠近隔震频率的共振响应。因此，RSI 系统比 PSI 系统对地面激励的频率内容特别是低频成分更加敏感。就地震响应而言，数值仿真结果表明 RSI 系统的弹性机构可以大大减少残余基础位移。只要在隔震频率处 RSI 系统没有激起共振，那么弹性机构对结构和设备的加速度响应的影响较小。总的来说，RSI 和 PSI 这两个系统可以用作减低结构和设备振动加速度响应的有效工具。

4.6　与地震隔离设计有关的话题

4.6.1　设计方法

隔震技术研究超过了 30 多年，已经变得成熟了。包括美国、日本、新西兰、中国台湾、中国和欧洲国家在内的地震多发地区已经形成他们自己的设计规范、规则或指南（Fujita，1998；Kelly，1998；Martelli 和 Forni，1998）。尽管研究的大多数设计规范是基于结构动力学理论，但是设计规范中勾勒出来的设计细节在各个国家中是不相同的。而寻求不同设计规范的综合解释并不是本节的目的，本节只对设计规范中蕴藏的概念作一简要概述。对于更多细节，感兴趣的读者可以参读每种规范，或参读 Naeim 和 Kelly 或 Skinner 等著的书。这里介绍的设计概念是基于《统一建筑规范》（UBC，1994，1997）。

基于基础隔震装置多样性的现状，因而撰写的设计规范或规则并不详细介绍隔震系统。比如：在《统一建筑规范》（UBC，1997 版）中，没有一款特殊的隔震系统被认可

为可以接受的；相反，它要求每一种隔震系统对于所需的位移具有稳定性、在重复循环载荷下性能并不降低，并在位移增加时阻力也能增加。

基础隔震的设计方法可以分为静态分析和动态分析。静态分析适用于建造在相对硬的土壤上的刚性和规则建筑（在垂直和水平方向）。在另一方面，动态分析用于不规则或长周期上层建筑或建造在相对软的土壤上的建筑隔震系统上。对于复杂的设计案例，静态分析可能用于初期设计阶段以便草签或初步确定隔震设计参数，而动态分析用于最后设计阶段，目的在于调整或最后确定隔震系统的设计细节。对于简单的设计案例，静态分析也就足够了。

4.6.2 静态分析

对于静态设计，设计规范中已专门制定了一套计算公式，因此工程师可以非常容易地计算出下面设计参数（按设计序列展示）：最大隔震器位移 D；隔震器总剪切力 V_b；上层结构总基础剪切力 V_s；施加在每层楼面的地震载荷 F_i。这些公式是基于简化的隔震模型推导出来的，并假定隔震系统可以详细化（尽管大多数隔震系统非线性），且上部结构可以建模成一个刚性模块。这么一种简化模型考虑是合情合理的，因为隔震结构的位移是集中在隔震面上，这暗示上部结构表现得像刚体模块。基于这样的模型，在推导公式中只考虑了把上部结构处理为刚体的一阶振型。这也解释了为什么静态分析仅适用于刚体和规则结构。

4.6.2.1 最大隔震器位移的计算

静态分析的隔震设计一般从计算最大隔震器位移 D 开始，它取决于下面几个因素：

$$D = D(Z, N, S, T_{ef}, \zeta_{ef}) \tag{4-68}$$

式中，Z 表示地震区域系数；N 表示近断层系数，S 是土壤条件系数；T_{ef}是有效隔震周期；ζ_{ef}是有效隔震阻尼。比如，在《统一建筑规范》（UBC，1994 版）中，根据 1.0 ~ 3.0s 周期内常速频谱推导的公式描述如下：

$$D = \frac{0.25ZNST_{ef}}{B} \tag{4-69}$$

式中，B 为阻尼系数，并按下式给出：

$$B = B(\zeta_{ef}) \approx 0.25(1 - \ln\zeta_{ef}) \tag{4-70}$$

在式（4-69）中，系数 Z、N 和 S 取决于隔震结构的地基建造条件；然而，系数 T_{ef} 和 ζ_{ef}只取决于所选择的隔震系统特性。系数 T_{ef}和 ζ_{ef}称为隔震系统的“有效”周期和阻尼，因为它们经常通过线性化非线性隔震系统来获得。下面将解释线性化隔震系统的方法，并给出计算 T_{ef}和 ζ_{ef}的公式。假设图 4-57 给出的是根据部件测试得到的非线性隔震系统的力-位移关系图（迟滞回线）。这个隔震系统的有效刚度 k_{ef}按下式计算：

$$k_{ef} = \frac{F^+ - F^-}{2D} \tag{4-71}$$

其中 F^+、F^-分别表示测试时最大的正力和负力。根据式（4-71）取得线性化刚度后，再根据单自由度振动系统的振动理论，可以计算得到对应的 T_{ef}和 ζ_{ef}的等效值，也就是

$$T_{ef}=2\pi\sqrt{\frac{W}{k_{ef}g}} \tag{4-72}$$

$$\zeta_{ef}=2\pi\left(\frac{A}{k_{ef}D^2}\right) \tag{4-73}$$

式中，W 是结构重量；g 是重力加速度；A 是图 4-57 所示的迟滞回线所包围的面积。

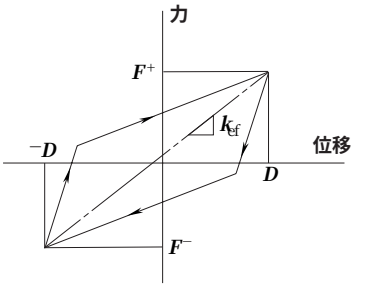


图 4-57　隔震系统典型的力-位移关系图

4.6.2.2　最大隔震器剪切力的计算

在获得了最大隔震器位移 D 后，可以根据下面公式估计最大隔震器剪切力 V_b：

$$V_b=k_{ef}D \tag{4-74}$$

很明显，当系统产生位移 D 时，上面的公式代表的是作用在隔震系统上的等效静态力。在某些设计规范中，V_b 也看做是隔震系统下面的设计载荷。

4.6.2.3　总的基础剪切力的计算

上部结构总的基础剪切力 V_s 可以按照下面公式计算

$$V_s=\frac{k_{ef}D}{R_I} \tag{4-75}$$

式中，R_I 代表考虑结构延性的缩减系数（延性系数），当结构承受的地震强度超过设计值时，R_I 的数值将发生变化。在某些设计规范中，V_s 也看做隔震系统上面的设计载荷。

4.6.2.4　每层楼面剪切力的计算

计算完成上面的总的基础剪切力 V_s 后，采用公式来分配这总剪切力到隔震结构的每层楼面上。比如，在《统一建筑规范》（UBC，1997 版）中，作用在每层楼面上的剪切力 F_i 按下面公式计算：

$$F_i=V_s\frac{h_iw_i}{\sum_{j=1}^{n}h_jw_j} \tag{4-76}$$

式中，n 代表楼层的数目；w_i 是每层楼的重量；h_i 是隔震面以上第 i 层的高度。注意 F_i 的总和（$i=1$，2，3，…，n）必须等于 V_s。

图 4-58 展示了静态分析的一般流程。一旦设计参数 D、V_b、V_s 和 F_i 按照设计规范都确定了下来，那么这些参数就可以用于结构部件和隔震器零件的详细设计中。然而，在大多数应用场合，由于在设计开始阶段，隔震系统的测试数据是得不到的，因此计算参数 D 所需的 k_{ef}、T_{ef}和 ζ_{ef}对设计者来说是未知的。如果发生这种情况的话，设计可以从假设的 k_{ef}、T_{ef}和 ζ_{ef}数值开始，这些数值是根据经验值或类似隔震器先前测试数据来获得的。在完成了初步设计后，将制造出隔震器原型机，并进行测试。根据测试获得的 k_{ef}、T_{ef}和 ζ_{ef}实际值将用于随后的规范公式中，来更新设计参数 D、V_b、V_s。然而，我们可以看到，根据式（4-71）得到的线性化隔震器刚度 k_{ef}是设计参数 D 本身的函数，且根据式（4-72）和式（4-73）得到的 T_{ef}和 ζ_{ef}也是设计参数 D 的函数。为了获得 k_{ef}、T_{ef}

和ζ_{ef}，在设计的初始阶段，需要 D 的初始猜测值。因而，设计步骤可能需要重复循环直到最后一次循环迭代得到的 D 的最终值和初始值 D_0 之间的差小于一个允许值。图4-58就表示了这么一个循环迭代过程。

4.6.3 动态分析

动态分析按下面两种形式中的一种进行：响应谱分析和时程分析。响应谱分析一般涉及响应谱和模态叠加等概念的应用。由于这些概念主要来自于线性系统的动力学，因此响应谱分析仅适用于具有线性特性的隔震系统。当遇到隔震系统或上部结构显现高度非线性时，需要采用时程分析。

由于动态分析一般依赖于计算机程序，所以在设计规范的动态分析章节很少给出计算公式。然而，对于一个成功的时程分析来说，设计者必须准备好以下三个基本要素：

① 一套有代表性的地面运动输入。

② 隔震器和上部结构的精确的数学模型。

③ 计算机程序，它能够进行非线性时程分析。这三个基本要素将在下面解释。

4.6.3.1 地面运动输入

隔震系统的响应在很大程度上取决于所挑选的地面运动的输入，该输入一般以地面加速度形式来表示。每个地面运动都称为一条记录事件。所挑选的事件必须代表地基条件和土壤特性。设计规范通常规定用于分析的最小事件数目。每个地面运动事件必须归一化，目的在于所有时间能够相互比较，并且能够和规范规定的目标谱进行比较。在统一建筑规范（UBC，1997 版）中，在响应谱中获得每个事件的归一化系数，然后把它应用到记录数据的时域分析中。特别地，在统一建筑规范（UBC）中，以下场合需要地基特定的地面运动：

① 隔震结构位于柔软的土壤上。

② 隔震结构位于活跃断层特定距离内（比如 10km）。

③ 隔震结构具有较长的振动周期（比如大于 3s）。

4.6.3.2 数学模型

在进行任何时程分析之前，必须构造精确反映隔震系统和上部结构力学特性的数学模型。如果隔震系统是非线性的，那么必须识别出非线性参数，目的在于构造的数学模型能够正确描述隔震系统的迟滞特性。在许多场合下，假定隔震系统是非线性的，但上部结构是线性的。建立一个正确的数学模型对获得时程分析中可靠的结论是非常关键的。

4.6.3.3 计算机程序

实际上，时程分析的任务是通过采用计算机程序来完成的。上面提到的数学模型特性将被输入到分析程序中。选择的计算机程序应该能够模拟带可选非线性元素结构的三维特性。为了完成隔震设计和分析目的，已经研发了易于掌握的在个人电脑运行的若干种分析程序。应用范围较广的一些程序有（但不局限于这些）：ETABS（ETABS，2004）、非线性 SAP-2000（SAP，2000）和 3D-BASIS（Nagarajaiah 等，1993）。大多数

这些程序都提供一套针对广泛使用的具有线性和非线性参数的隔震器元件的嵌入式数学模型。设计者采用这些程序可以很容易建立起所考虑的隔震结构的数学模型，指定所选隔震器元件参数，并在个人电脑上进行非线性时程分析。

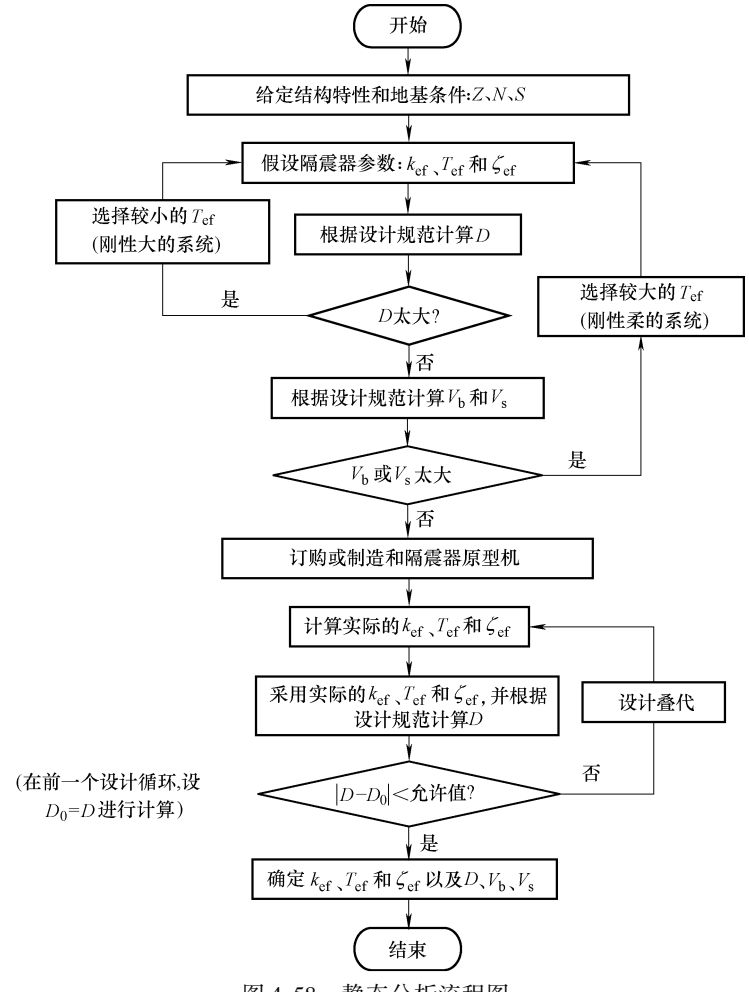


图 4-58　静态分析流程图

4.6.4　结语

在本节，简要回顾了结构隔震的设计概念。设计方法既可以基于静态分析或可以基于动态分析。强调了每种设计方法中应该考虑的基本要素，并且强调了用于计算相关参数的一些相关公式。我们确信，有了本节介绍的概念和程序，读者应该对结构和设备基础隔震设计程序和流程有了一个广泛的了解。

致谢：作者感谢中国台湾高雄第一科技大学建筑工程系的研究生吴程艳，她制作了本章的一些图片。

量纲

符号	参数	符号	参数
c, c_s	上部结构的阻尼系数	T_d	上部结构有阻尼的固有振动周期
c_e	设备的阻尼系数	T_{ef}	有效隔震周期
c_{EDF}	EDF 系统的阻尼	V_b	隔震系统总剪切力
D	最大隔震器位移	V_s	上部结构总基础剪切力
f_r	界面摩擦力	w_i	第 i 层楼面重量
F_i	施加在第 i 层楼面上的地震载荷	W	上部结构总重
k, k_s	上部结构刚度	$x, x_s(t)$	上部结构相对于地面的位移
k_b	隔震系统刚度	$x_b(t)$	基础垫块相对于地面的位移
k_e	设备刚度	$x_e(t)$	设备相对于地面的位移
k_{EDF}	EDF 系统刚度	$\ddot{x}_g(t)$	地面加速度
k_f	滑动隔震系统中虚拟弹簧刚度	Z	区域系数
k_{ef}	隔震系统的有效刚度	μ	滑动隔震系统的摩擦系数
m, m_s	上部结构质量	ω_b	隔震系统的频率
m_b	基础垫块质量	ω_e	设备的频率
m_e	设备质量	ω_g	地面激励频率
n	大楼的楼层	ζ_e	设备阻尼比
N	近断层系数	ζ_{ef}	隔震系统的有效阻尼比
R_I	延性系数	ζ, ζ_s	上部结构的阻尼比
S	土壤系数	Ω_d	有阻尼的固有频率
T	上部结构固有振动周期	Ω, ω_s	上部结构的固有频率

参 考 文 献

Agrawal, A.K., Behaviour of equipment mounted over a torsionally coupled structure with sliding support, *Eng. Struct.*, 22, 72–84, 2000.

Chalhoub, M.S. and Kelly, J.M. 1990. Earthquake simulator test of a combined sliding bearing and rubber bearing isolation system, Report No. UCB/EERC-87104, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA.

Chaudhuri, S.R. and Gupta, V.K., A response-based decoupling criterion for multiply-supported secondary systems, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 31, 1541–1562, 2002.

Chen, G. and Soong, T.T., Energy-based dynamic analysis of secondary systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 120, 514–534, 1994.

Chen, G. and Soong, T.T., Exact solutions to a class of structure–equipment systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 122, 1093–1100, 1996.

Dey, A. and Gupta, V.K., Response of multiply supported systems to earthquakes in frequency domain, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 27, 187–201, 1998.

Dey, A. and Gupta, V.K., Stochastic seismic response of multiply-supported secondary systems in flexible-base structures, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 28, 351–369, 1999.

ETABS, Integrated Analysis, Design and Drafting of Building Systems, Version 8, Software by Computers and Structures Inc., Berkeley CA, 2004.

Fujita, T., Seismic isolation of civil buildings in Japan, *Prog. Struct. Eng. Mater.*, 1, 295–300, 1998.

Gueraud, R., Noel-Leroux, J.P., Livolant, M., and Michalopoulos, A.P., Seismic isolation using sliding-elastomer bearing pads, *Nucl. Eng. Des.*, 84, 363–377, 1985.

Huang, C.D., Zhu, W.Q., and Soong, T.T., Nonlinear stochastic response and reliability of secondary systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 120, 177–196, 1994.

Igusa, T., Response characteristic of inelastic 2-DOF primary–secondary system, *J. Eng. Mech., ASCE*, 116, 1160–1174, 1990.

Igusa, T. and Der Kiureghian, A.D., Dynamic characteristic of two-degree-of-freedom equipment–structure systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 111, 1–19, 1985a.

Igusa, T. and Der Kiureghian, A.D., Dynamic response of multiply supported secondary systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 111, 20–41, 1985b.

Igusa, T. and Der Kiureghian, A.D., Generation of floor response spectra including oscillator–structure interaction, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 13, 661–676, 1985c.

Inaudi, J.A. and Kelly, J.M., Minimum variance control of base-isolation floors, *J. Struct. Eng., ASCE*, 119, 438–453, 1993.

Jangid, R.S. and Kelly, J.M., Base isolation for near-fault motion, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 30, 691–707, 2001.

Juhn, G., Manolis, G.D., Constantinou, M.C., and Reinhorn, A.M., Experimental study of secondary systems in base-isolated structure, *J. Struct. Eng., ASCE*, 118, 2204–2221, 1992.

Kelly, J.M., Seismic isolation of civil buildings in USA, *Prog. Struct. Eng. Mater.*, 1, 279–285, 1998.

Kelly, J.M. and Tsai, H.C., Seismic response of light internal equipment in base-isolated structures, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 13, 711–732, 1985.

Lai, M.L. and Soong, T.T., Statistical energy analysis of primary–secondary structural systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 116, 2400–2413, 1990.

Lu, L.Y. and Yang, Y.B., Dynamic response of equipment in structures with sliding support, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 26, 61–77, 1997.

Lu, L.Y., Shih, M.H., Tzeng, S.W., and Chang, C.S. 2003. Experiment of a sliding isolated structure subjected to near-fault ground motion, In *Proceedings of the Seventh Pacific Conference on Earthquake Engineering*, February 13–15, Christchurch.

Martelli, A. and Forni, M., Seismic isolation of civil buildings in Europe, *Prog. Struct. Eng. Mater.*, 1, 286–294, 1998.

Meirovitch, L. 1990. *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York.

Mokha, A.S., Constantinous, M.C., Reinhorn, A.M., and Zayas, V.A., Experimental study of friction-pendulum isolation system, *J. Struct. Eng., ASCE*, 117, 1201–1217, 1991.

Mostaghel, N., 1984. *Resilient-friction Base Isolator*, Report No. UTEC 84-097, University of Utah, Salt Lake City, UT.

Mostaghel, N. and Khodaverdian, M., Dynamics of resilient-friction base isolator (R-FBI), *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 15, 379–390, 1987.

Mostaghel, N., Hejazi, M., and Tanbakuchi, J., Response of sliding structures to harmonic support motion, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 11, 355–366, 1983.

Naeim, F. and Kelly, J.M. 1999. *Design of Seismic Isolated Structures: From Theory to Practice*, Wiley, New York.

Nagarajaiah, S., Li, C., Reinhorn, A.M., and Constantinou, M.C. 1993. 3D-BASIS-TABS: Computer program for nonlinear dynamic analysis of three dimensional base isolated structures, Technical report NCEER-93-0011, National Center for Earthquake Engineering Research, Buffalo, NY.

Newmark, N.M., A method of computation for structural dynamics, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 85, 67–94, 1959.

Park, K.S., Jung, H.J., and Lee, I.W., A comparative study on aseismic performances of base isolation systems for multi-span continuous bridge, *Eng. Struct.*, 24, 1001–1013, 2002.

Rivin, E.I., Vibration isolation of precision equipment, *Precision Eng.*, 17, 41–56, 1995.

SAP 2000. Integrated Structural Analysis and Design Software, Software by Computers and Structures, Inc., Berkeley, CA.

Skinner, R.I., Robinson, W.H., and Mcverry, G.H. 1993. *An Introduction to Seismic Isolation*, Wiley, New York.

Soong, T.T. and Dargush, G.F. 1997. *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, Wiley, New York.

Steinberg, D.S. 2000. *Vibration Analysis for Electronic Equipment*, 3rd ed., Wiley, New York.

Suarez, L.E. and Singh, M.P., Floor spectra with equipment–structure–equipment interaction effects, *J. Eng. Mech., ASCE*, 115, 247–264, 1989.

UBC 1994. Uniform building code, *International Conference of Building Officials,* Whittier, CA.

UBC 1997. Uniform building code, *International Conference of Building Officials,* Whittier, CA.

Veprik, A.M. and Babitsky, V.I., Vibration protection of sensitive electronic equipment from harsh harmonic vibration, *J. Sound Vib.*, 238, 19–30, 2000.

Villaverde, R., Simplified seismic analysis of secondary systems, *J. Eng. Mech., ASCE*, 112, 588–604, 1986.

Wang, Y.P., Chung, L.L., and Liao, W.H., Seismic response analysis of bridges isolated with friction pendulum bearings, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 27, 1069–1093, 1998.

Westermo, B. and Udwadia, F., Period response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, *11*, 135–146, 1983.

Xu, Y.L., Liu, H.J., and Yang, Z.C., Hybrid platform for vibration control of high-tech equipment in buildings subject to ground motion. Part 1. Experiment, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 32, 1185–1200, 2003.

Yang, J.N. and Agrawal, A.K., Protective systems for high-technology facilities against microvibration and earthquake, *Struct. Eng. Mech.*, 10, 561–575, 2000.

Yang, Y.B. and Chen, Y.C., Design of sliding-type base isolators by the concept of equivalent damping, *Struct. Eng. Mech.*, 8, 299–310, 1999.

Yang, Y.B. and Huang, W.H., Seismic response of light equipment in torsional buildings, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 22, 113–128, 1993.

Yang, Y.B. and Huang, W.H., Equipment–structure interaction considering the effect of torsion and base isolation, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 27, 155–171, 1998.

Yang, Y.B., Lee, T.Y., and Tsai, I.C., Response of multi-degree-of-freedom structures with sliding supports, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 19, 739–752, 1990.

Yang, Y.B., Hung, H.H., and He, M.J., Sliding and rocking response of rigid blocks due to horizontal excitations, *Struct. Eng. Mech.,* 9, 1–16, 2000.

Yang, Y.B., Chang, K.C., and Yau, J.D. 2002. Base isolation. In *Earthquake Engineering Handbook*, W.F. Chen and C. Scawthorn, Eds., CRC Press, Boca Raton, FL, chap. 17.

Yang, Z.C., Liu, H.J., and Xu, Y.L., Hybrid platform for vibration control of high-tech equipment in buildings subject to ground motion. Part 2. Analysis, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 32, 1201–1215, 2003.

5 振动控制

摘要

本章制订了振动控制系统的基本原理（也可参考第 7 章）。本章主题直接或间接涉及许多重要的内容。它们包括振动控制系统的真正实现、非线性控制策略、实际硬件实现，作动器宽带需求、可靠性以及费用。进一步说，在实际振动控制系统设计过程中，必须考虑以下几种关键因素：重量、尺寸、形状、重心、动态扰动的形式、允许的系统响应、外界环境以及使用期限。牢记以上要求，一般振动控制系统设计步骤与流程也就掌握在手了。

5.1 简介

减少建筑和结构上的振动级问题出现在各种工程领域、技术和工业中。在当今大多数的机电一体化系统中，对于如反应或动量轮、旋转装置和电动机等大量设备对系统的运行和性能来说都是必不可少的。但是，这些设备也可能是有害振动源，它们可能明显地影响到任务性能、效率和运行的精准性。因此，振动控制是必须的。一些技术的运用，要么是去限制，要么是去改变这些系统的振动响应特征。近几年来，振动控制系统的实际执行领域已经引起人们的极大兴趣。本章将先介绍振动控制系统设计与执行的基本理论概念，然后介绍振动控制的进展和控制技术。本章还将介绍一些和可变结构控制（VSC）、弹性结构压电振动控制相关的实际进展，并介绍振动控制系统的设计步骤与流程的小结。本问题的更进一步的处理方法参见本书第 7 章。

5.1.1 隔振与吸振

隔振，要么把振动源与关注的系统（力传递性，参见图 5-1a）之间隔离开来，要么把设备与连接点的振动隔离开来（位移传递，参见图 5-1b）。与一般的隔振器不同，振动吸收装置是由一个次级系统（通常是质量-弹簧-阻尼三元素组成）连接到主要装置上，以保护该主要装置免于振动（参见图 5-1c）。通过恰当地选择质量、刚度和阻尼，可以使主系统的振动达到最小化（Inman，1994）。

5.1.2 吸振与振动控制

在振动控制方案中，为了调节或跟踪期望的运动轨迹，而与此同时又抑制系统的振

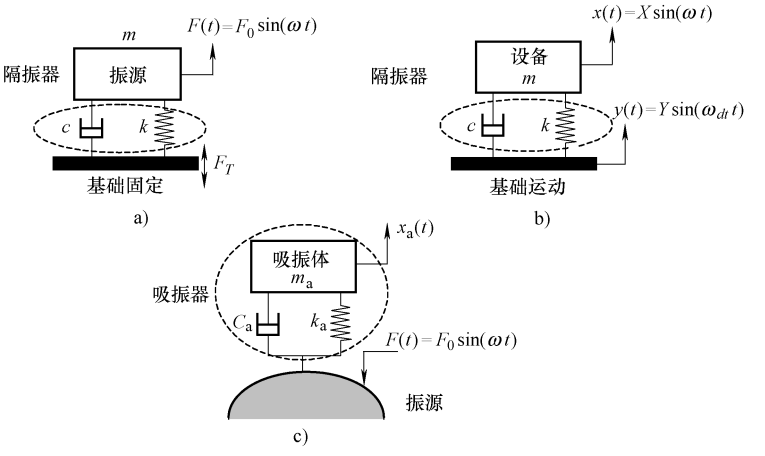


图 5-1 隔振的形式

a）基础隔振的力传递 b）保护设备不受基础振动的位移传递

c）抑制主系统振动的吸振器应用

动瞬变，需要改变施加在系统上的驱动力或驱动力矩。这种控制问题具有相当的挑战性，这是因为在跟踪目标运动的同时还要实现稳定系统的瞬间振动。一些控制方法已经发展并在一些领域中得到应用，诸如最优控制（Sinha，1998）、有限元方法（Bayo，1987）、模型参考自适应控制（Ge 等，1997）、自适应非线性边界控制（Yuh，1987）和包括 VSC 方法在内的其他几种技术（Chalhoub 和 Ulsoy，1987；de Querioz 等，1999；de Querioz 等，2000）。

正如之前所谈论到的，在振动吸收器系统中，添加一个次级系统来最小化兴趣点（或连接点）振动能量，并把振动能量传递到其他组件或使振动能量以热量形式耗散。图 5-2 演示了对平移和旋转弹性梁振动控制的比较示意图（包括单输入振动控制和多输

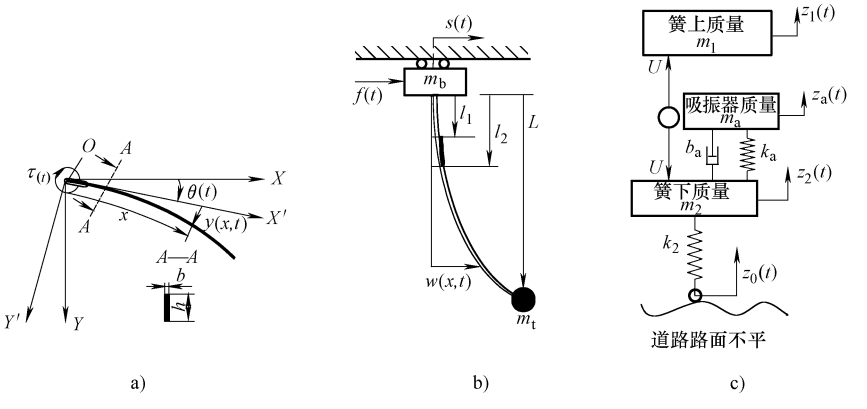


图 5-2 振动控制系统比较示意图

a）单输入同步跟踪及振动控制 b）多输入跟踪与振动控制

c）带有动力减振器的一个两自由度的车辆模型

入振动控制设置），这个原理图能够充分代表许多工业机器人的机械手以及用于汽车悬架系统的吸振器。

5.1.3 振动控制系统分类

在文献中提到的被动系统、主动系统和半主动系统，是振动控制系统中三种最常用的控制系统，它们既可以做隔振器，也可以做成吸振器（参见图 5-3，Sun 等，1995）。一个振动控制系统究竟是主动、被动还是半主动系统，取决于是否需要依靠外部力量实现其振动控制功能。一个被动振动控制包括一个弹性元件（刚度）和一个能量消散装置（阻尼），这样既能吸收振动能源，又能加载到干扰振动的传递路径上（参见图 5-3a，Korenev 和 Reznikov，1993）。在最高敏感度的频率范围内，这种装置的振动控制系统性能最好。对于宽带激励频，可以通过优化系统参数来极大的提高它的执行性能（Puksand，1975；Warburton 和 Ayorinde，1980；Esmailzadeh 和 Jalili，1998a）。但是，这种优化的实现，是以降低窄带抑制特性为代价的。

被动振动控制在结构应用上具有明显的限制，因为应用中面临带宽内高度不确定性的干扰问题。为了弥补这种缺陷，采用了主动振动控制系统。引入附加主动力 $u(t)$ 作为吸振器的一部分（参见图 5-3b），用不同的方法来操控系统，使得其对干扰源作出更多的响应（Soong 和 Constantnou，1994；Olgac 和 Holm-Hansen，1995；Sun 等，1995；Margolis，1998）。半主动振动操控系统，是主动与被动系统的结合，主要目的在于减少大量的外部能量，也能实现所需要的性能特性，参见图 5-3c（Lee-Glauser 等，1997；Jalili 和 Esmailzadeh，2002）。

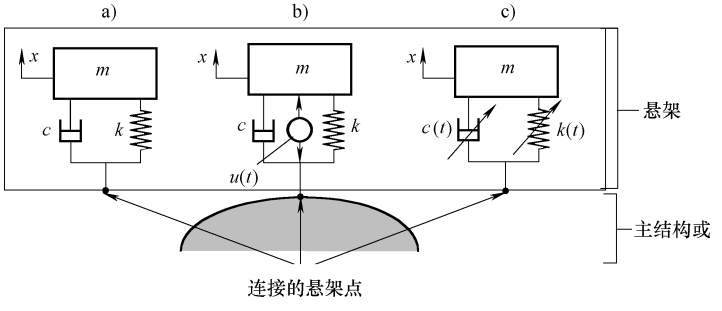


图 5-3 带有三种不同类型悬架系统的典型主结构

a）被动系统 b）主动系统 c）半主动系统

5.1.4 振动控制系统的性能特性

在振动控制系统的设计中，常常会遇到使用宽带负荷、在选择需要的刚度和阻尼时频率范围不可能满足单一选择。如果不能获得设计所需要的响应特性，那么主动振动控制系统也许能为宽带干扰提供一个有吸引力的振动控制选择。但是主动振动控制系统会诱发振动不稳定，此时需要更大的控制努力。这是个很严重的问题，因为它会阻止主动

振动控制系统在大多数工业领域的正常使用。另一方面，被动控制系统经常会被“失谐”现象所束缚。失谐也就意味着系统达不到原本设计的抑制振动的能力。这源于下列几种原因之一：

① 振动控制系统可能退化或者结构参数偏离最初的正常设计值。

② 主设备本身的结构参数发生变化。

③ 激励频率或干扰性质随时间变化。

一个半主动（也称为自适应被动）振动控制系统通过有效地集成调谐控制方案与可调谐被动控制装置解除了这些限制。为此，主动控制力发生器换成了诸如阻尼可变、刚度可变的调制可变装置（参见图 5-3c；Hrovat 等，1988；Nemir 等，1994；Franchek 等，1995）。这些被称为悬架系统的“可调参数”的可变部件是通过一个调谐控制来销售出去，且造成半主动振动诱导实现优化操作。因为它们的低能量需求和低成本，所以越来越多的人关注这些系统。智能材料以及可调阻尼器和吸振器方面的最新进展也大大促进了这些系统的适用性（Garcia 等，1992；wang 等，1996；Shaw，1998）。

5.2 振动控制系统概念

5.2.1 简介

几乎长达一个世纪，动力吸振器已被证明是一个有用的减振装置，并且在数以百计类型的场合中得到了广泛推广。它和振动体形成弹性连接，来减轻连接处的有害振动（参见图 5-3）。本节概述了三种类型振动控制系统的概念设计和理论背景，也就是被动、主动和带有相关实际应用的半主动振动控制系统。

5.2.2 被动振动控制

在所有的振动控制、吸振器系统中，基本命题就是适当调整吸振器参数，比如在感兴趣的频率间隔内，系统变成振动能量的吸收剂。为了解释潜在概念，我们考虑一个单自由度的主系统连接一个单自由度的吸振器（参见图 5-4）。控制动力学方程表示为

$$m_a\ddot{x}_a(t)+c_a\dot{x}_a(t)=c_a\dot{x}_p(t)+k_ax_p(t) \tag{5-1}$$

$$m_a\ddot{x}_a(t)+c_a\dot{x}_a(t)=c_a\dot{x}_p(t)+k_ax_p(t) \tag{5-2}$$

式中，$x_p(t)$ 和 $x_a(t)$ 分别代表主结构和吸振器的位移；$f(t)$ 是外力；k_a 为吸振器刚度、c_a 为阻尼系数，其他各项参数见图 5-4 定义。在拉氏域中激励力和主系统位移之间的传递函数公式为

$$TF(s)=\frac{X_p(s)}{F(s)}=\left\{\frac{m_as^2+c_as+k_a}{H(s)}\right\} \tag{5-3}$$

其中

$$H(s)=\{m_ps^2+(c_p+c_s)s+k_p+k_a\}(m_as^2+c_as+k_a)-(c_as+k_a)^2 \tag{5-4}$$

且 $X_a(s)$、$X_p(s)$ 和 $F(s)$ 分别是 $x_a(t)$、$x_p(t)$ 和 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

5.2.2.1 简弦激励

当激励变化时，吸振器一般调谐到扰动频率处。在这种情况下，由谐波激励引起的系统稳态位移可以表示如下：

$$\left|\frac{X_p(j\omega)}{F(j\omega)}\right| = \left|\frac{k_a - m_a\omega^2 + jc_a\omega}{H(j\omega)}\right| \quad (5\text{-}5)$$

其中 ω 是扰动频率，并且 $j = \sqrt{-1}$。接着选择恰当的参数调谐方案以最小化主系统在外部扰动 $f(t)$ 下的振动。

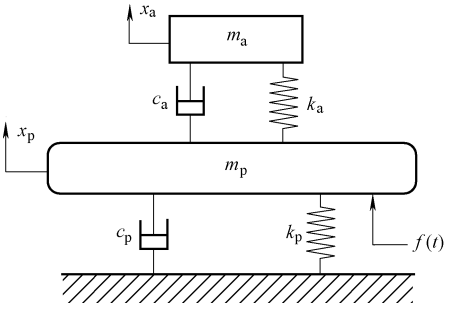


图 5-4 被动吸振器在单自由度主系统上的应用

对于完整的振动衰减，稳定状态要求 $|X_p(j\omega)|$ 为 0。因此根据方程式（5-5），吸振器理想刚度和阻尼表示为

$$\begin{aligned} k_a &= m_a\omega^2 \\ c_a &= 0 \end{aligned} \quad (5\text{-}6)$$

注意调谐条件只是吸振器元素（m_a，k_a 和 c_a）的一个函数。也就是说，吸振器调谐不需要从主系统中获取信息，因此说它的设计是独立的。对于单频运用，吸振器分系统零阻尼理论上可以带来提升的性能。然而，在实际中，为了在吸振器质量与其位移之间维持合理平衡，才引入了阻尼。因此，有关此类应用的设计努力，重点在于精密调谐吸振器到干扰频率，并把阻尼控制到适当的水平。参考 Snowdon 文献（1968），可以证明吸振器在存在阻尼时，如果可调刚度和阻尼按下面公式选择，则实现了最佳调谐与阻尼：

$$\begin{aligned} k_{opt} &= \frac{m_a m_p^2 \omega^2}{(m_a + m_p)^2} \\ c_{opt} &= m_a\sqrt{\frac{3k_{opt}}{2(m_a + m_p)}} \end{aligned} \quad (5\text{-}7)$$

5.2.2.2 宽带激励

在宽带振动控制中，为了在一个频率范围中最大限度地耗散振动能量，吸振器子系统一般设计成要给主结构增加阻尼，并改变主结构的共振特性。因此，吸振器设计的目的就是通过吸振器参数矢量 $\boldsymbol{p} = \{c_a k_a\}^T$ 调整吸振器参数，使得频率传递函数[$FTF(\omega) = |TF(s)|_{s=j\omega}$]峰值幅值最小。也就是我们搜寻 $\boldsymbol{p}$：

$$\min_{\boldsymbol{p}}\left\{\max_{\omega_{min}\leqslant\omega\leqslant\omega_{max}}\{|FTF(\omega)|\}\right\} \quad (5\text{-}8)$$

另外，我们选择主系统的位移响应均方值（MSDR）作为振动抑制性能指标。也就是说，吸振器的参数矢量 $\boldsymbol{p}$ 的选择如 MSDR 一样：

$$E\{(\bar{x}_p)^2\} = \int_0^\infty \{FTF(\omega)\}^2 S(\omega)\,d\omega \quad (5\text{-}9)$$

在所需的宽带频率范围内实现最小化。$S(\omega)$ 是激励力 $f(t)$ 的功率谱密度函数，*FTF* 是先前定义的函数。

这种优化在 $\boldsymbol{p}$ 矢量空间中受制于一定的约束，其中只有正矢量是可以接受的。一旦确定了吸振器阻尼特性 c_a 和 k_a，那么在弹簧和阻尼因素上使用调整机构就可以实现。这被看做是一种半主动调节程序，因为动态结构上没有增加能量。这种可调悬架元件的概念装置和半主动处理问题将在后面 5.2.5 节中讨论。

5.2.2.3 案例研究

下面举个简单的例子来帮助大家更好地认识动力吸振器在被动和最佳的主动吸振装置中的效率。对于图 5-4 所示的简单系统，采用下面的名义结构参数（参数符号上加一横线）：

$$\begin{aligned}\overline{m}_p &= 5.77\text{kg}, \overline{k}_p = 251.132\times10^6\text{N/m}, \overline{c}_p = 197.92\text{kg/s}\\ \overline{m}_a &= 0.227\text{kg}, \overline{k}_a = 9.81\times10^6\text{N/m}, \overline{c}_a = 355.6\text{kg/s}\end{aligned} \tag{5-10}$$

这些数据来自一项实际测试设置，它们通过设计来优化（Olgac 和 Jalili，1999）。也就是说 *FTF* 的峰值已经最小化了（图 5-5 的细线）。当初始刚度与阻尼增加 5% 时（如在操作中），主系统的 *FTF* 就会大幅增加（图 5-5 虚线），对于当前的主系统来说，吸振器再也不是最佳的吸振器了。当吸振器基于第 8 个优化问题（指 Olgac 和 Jalili 参考文中的）进行优化时，重新调谐设置的数据如下：

$$k_a = 10.29\times10^6\text{N/m}, c_a = 364.2\text{kg/s} \tag{5-11}$$

它们产生了一个更好的频率响应（图 5-5 黑实线）。

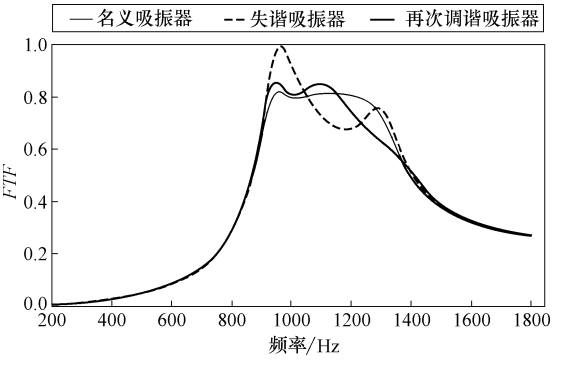


图 5-5 名义吸振器、失谐吸振器和重置调谐吸振器的频率传递函数（*FTF*s）

（源自 Jalili，N 和 Olgac，N，AIAA J. Guidance Control Dyn.，23，961-970，2001）

通过扫频测试，在不同频率处，吸振器效率得到了更好的论证。对于此种情况，激励振幅固定在一个单位值，频率从 1860 ~ 1970Hz 每 0.15s 变化一次。图 5-6 中分别给出带有名义调谐、失谐和重置调谐吸振器的主系统响应。

5.2.3 主动振动控制

正如之前讨论的，被动吸振是应用阻力或者反应装置，它们要么吸收振动能量，

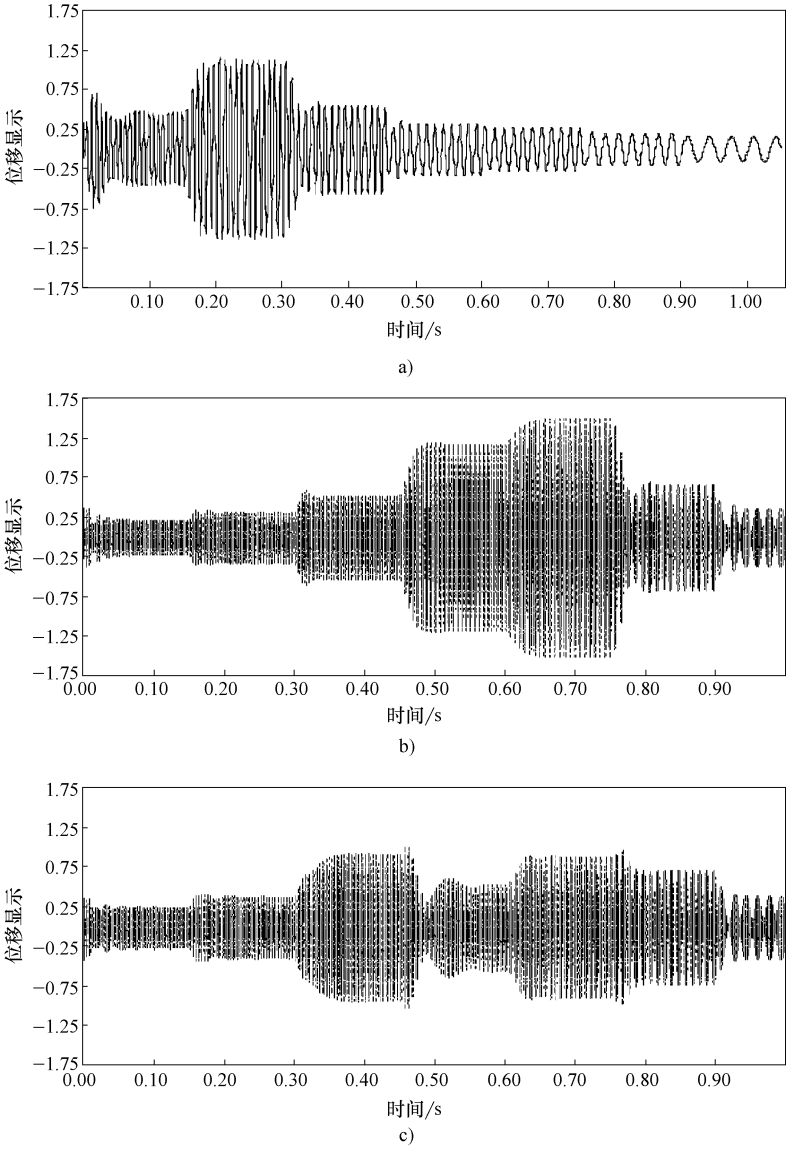


图 5-6　在 1860、1880、1900、1920、1930、1950 和 1970Hz 的频率变化下，每 0.15s 频率扫描一次

a）名义调谐吸振器设置　b）失谐吸振器设置　c）重置调谐的吸振器

（源自 Jalili，N 和 Olgac，N，AIAA J. Guidance Control Dyn.，23，961-970，2001）

要么把载荷加到干扰振动的传递路径上（Korenev 和 Reznikov，1993；图 5-7 的末端）。即使带有最优的吸振器参数（Warburton 和 Ayorindc，1980；Esmailzadeh 和 Jalili，1998a），被动吸振在结构应用上具有极大的限制，因为存在高度不确定性的宽带干扰。

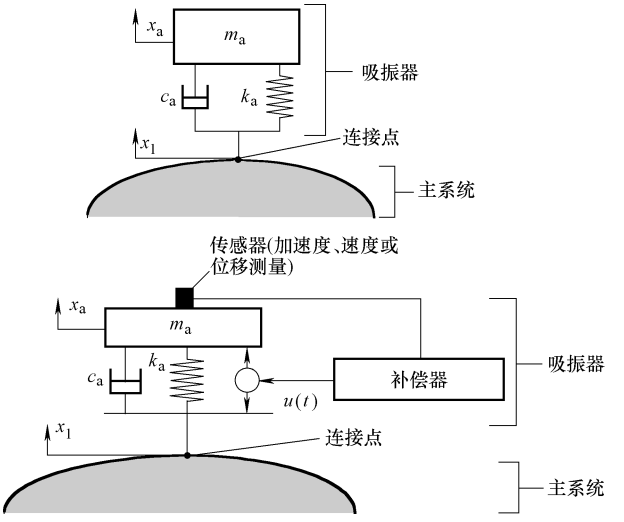


图 5-7 被动（末端）和主动（底部）吸振器装置的基本结构

主动振动抑制设计的应用就是为了弥补这些限制。带有附加主动力 $u(t)$（见图 5-7 底部），吸振器用不同的算法来控制，使它能对主扰动能更加积极响应（Sun 等，1995；Margolis ，1998；Jalili 和 Olgac，1999）。一种带有调谐振动的新型吸振器就是主动谐振吸振器（ARA）（Knowles 等，2001b）。ARA 的概念与延迟谐振器的概念有些接近（Olgac 和 Holm-Hansen，1994；Olgac，1995）。在吸振器子系统内采用一个简单的位置（速度或加速度）反馈，延迟谐振器就能使吸振器子系统的主导特征根处于虚轴上，从而实现共振。一旦 ARA 变成共振，它就能在该频率上形成完美的振动吸收。这种主动振动控制系统的概念化的设计与实施问题，以及实际的应用，将会在 5.3 节中讨论。

5.2.4 半主动振动控制

半主动（SA）振动控制系统具有大部分完全主动系统所具有的性能特征，因此有着广泛的应用。SA 悬架的概念很简单：用连续可调节的元件取代主动力作动器，该调节元件可以变化和/或变动能量耗散率以响应瞬时运动状态（Jalili，2002）。

5.2.5 可调整振动控制单元

可调整振动控制单元通常由可变化的刚度和阻尼组成的，目前已经投入大量的努力来发展和实施这种具有广泛用途的装置。这种装置的应用例子包括电流变（ER）（Petek，1992；Wang 等，1994；Choi，1999）、磁流变（MR）（Spencer 等，1998；Kim 和 Jeon，2000）、流体阻尼器和可变孔径阻尼器（Sun 和 Parker，1993）、可控摩擦背带（Dowell 和 Cherry，1994）和变刚度与变惯性装置（Walsh 和 Lamnacusa，1992；Nemir 等，1994；Franchek 等，1995；Abe 和 Igusa，1996）。在这部分，将对这样的概念装置的调节性能进行简要概述。

5.2.5.1 可变阻尼减振器

一个常用和有效地减少瞬态和稳态振动的方法是改变半主动振动控制系统中的阻尼。大量的有关半主动控制阻尼设计工作，在1960—1980年期间就有了研究（Crosby和Karnopp；Karnopp等，1974），这些研究是关于土木结构振动控制，比如建筑和桥梁（Hrovat等，1983）和减少机床振动（Tanaka和Kikushima，1992）。此后，半主动减振器已有不同的应用，从火车（Strihersky等，1998）、其他越野车（Horton和Crolla，1986）到军用坦克（Miller和Nobles，1988）。近年来，半主动思想在工业产品改进和精品化的概念引起了人们极大的兴趣（Karnopp，1990；Emura等，1994）。智能材料的最新进展引领新的半主动减振器的发展，它们被广泛应用于不同领域中。

鉴于这些半主动（SA）减振器、电流变（ER）和磁流变（MR）可能成为最佳的潜在硬件，成为传统的可变孔的液压阻尼器（Sturk等，1995）的替代品。从实际情况来看，对悬架来说，MR是很有发展潜能的，因为它可以操作，例如，在汽车电池电压下就可以，而电流变阻尼器是基于高压电场的。鉴于它们在今天的SA阻尼技术中的重要性，我们在此简要回顾一下SA阻尼器的基本工作原理。

（1）电流变流体阻尼器或减震器

电流变（ER）流体是这样一种材料，当它们受到电势作用时，它们的材料特性可发生瞬间的可逆变化（图5-8）。最重要的变化是与材料的复剪切模量变化有关，因此ER流变可以有效地应用在具有可变阻尼的SA减振器中。最初ER阻尼振动控制的想法出现在汽车悬架上，随后应用到了其他领域（Austin，1993；Petek等，1995）。

基于ER流体阻尼器的流体运动可分为剪切模式、流动模式和挤压模式。然而，ER流体的流变特性是以剪切模式进行评估的（Choi，1999）。因此，ER流体阻尼器提供了为SA系统使用的自适应黏性和摩擦阻尼（Dimarogonas-Andrew和Kollias，1993；Wang等，1994）。

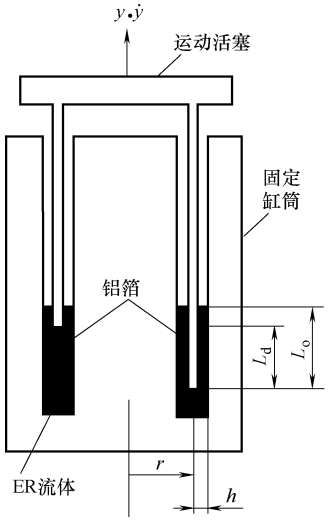


图5-8 电流变（ER）减震器构造示意图

（来源：Choi. S. B.，ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control，121，134-138，1999）

（2）磁流变流体阻尼器或减震器

MR流体是类似ER流体的磁物质，通常由微米大小的磁性极化粒子分散在载体介质为矿物油或硅油等中。当加载磁场时，形成粒子链、流体成为半固体，这种现象类似于ER流体的塑性特征（图5-9）。只要提供高带宽的设备，流变平衡的过渡就可以在几毫秒内实现（Spencer等，1998；Kim和Jeon，2000）。

5.2.5.2 可变刚度弹簧单元

与可变阻尼器不同的是，SA弹簧或随时间变化的刚度的研究一直和隔振（Hubard

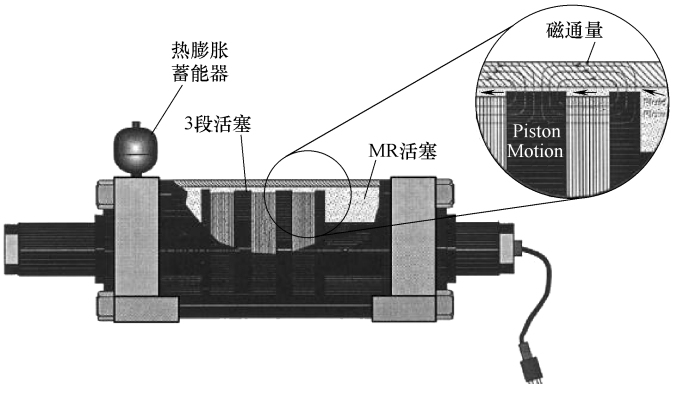


图 5-9 MR 减震器构造示意图

（来源：Spencer，B. F. 等，Proc. 2nd World Conf. on Structural Corarol，1998）

和 Marolis，1976）、结构控制、振动衰减（Sun 等，1995，以及后面的参考文献）紧密相连。变刚度是一个对 SA 阻尼很有前途的实际补充，因为在 5.2 节讨论的基础上，我们知道为适应不同的条件，吸振器的阻尼和刚度都应该进行优化。显然，吸振器刚度对最佳操作有显著影响（甚至超越阻尼元素；Jalili 和 Olgac，2000b）。

不像可变阻尼减振器，改变有效刚度要求更高的能量（Walsh 和 Lamnacusa，1992）。半主动或低功耗的变刚度技术的实施是在有限的频率范围内，改变有效刚度意味实现复杂、高成本等（Nemir 等，1994；Franchek 等，1995）。因此，在实践中同时调整吸振器阻尼和刚度，以减少所需的能量。

（1）可变刚度（直接法）

主要目标就是直接改变弹簧的刚度来优化振动抑制特性，如式（5-8）和式（5-9）所给出的。可以利用不同的技术，方法从传统的可变板簧到磁致伸缩材料的智能弹簧。四自由度的大楼使用了一个可调刚度的吸振器（图 5-10），其中弹簧穿过卡圈，且弹簧一侧与吸振器质量块相连，而另一侧与驱动齿轮相接（Franchek 等，1995）。因此。弹簧有效圈数 N 的改变也就带来了一个可变弹簧刚度 k_a：

$$k_a = \frac{d^4 G}{8D^3 N} \tag{5-12}$$

式中，d 是弹簧钢丝直径；D 是弹簧直径；G 是剪切刚度模量。

（2）可变有效刚度（间接法）

在大多数 SA 的应用场合中，直接改变刚度并不总是可行的，或者可能需要更大的控制力。对于这种情况，可替代的方法是利用改变有效的调谐比（$\tau = \sqrt{k_a/m_a}/\omega_{主系统}$），从而形成可调的共振频率。

在 Liu 等（2000）的文献中，提出了一个 SA 振颤抑制方案，该方案使用外部存储刚度的差分变化。正如图 5-11 所示，电动机驱动丝杠旋转，滑块沿着它移动，从而改变了恢复力矩，并带来存储俯仰刚度的变化。

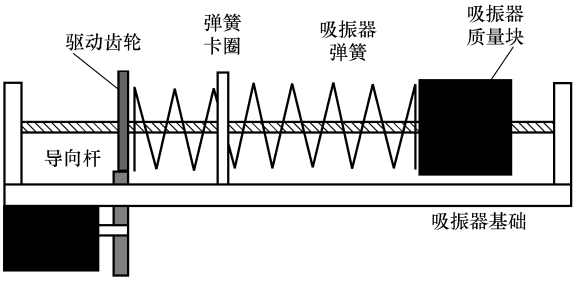


图 5-10　可变刚度吸振器在四自由度大楼上应用

（来源：Franchek M. A et 等，J. Sound Vib.，189，565-585，1995）

一种使用双端悬臂梁中间携带集中质量的 SA 吸振器是最近推出的（Jalili 和 Esmailzadeh，2002），其中运动质量的位置是可调的（见图 5-12）。图 5-13 显示了一个 SA 吸振器可调节有效惯性的机构（Jalili 等，2001；Jalili 和 Fallahi，2002）。SA 吸振器安装在一个箱子里，它由一根携带移动滑块的杆和弹簧、阻尼器构成。移动滑块在杆上的位置 r_v 是可调的，因而也就提供了一个可调谐的共振频率。

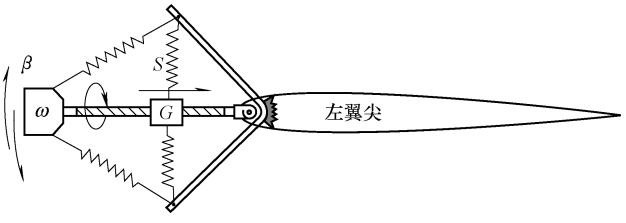


图 5-11　SA 振颤抑制使用可调俯仰刚度

（来源：Liu，H. J 等，J. Sound Vib，229，199-205，2000）

5.2.5.3　其他可变单元

智能材料的最新进展带来了新的 SA 振动控制系统发展，它对悬架的元件间接影响。Wang 等把一个 SA 压电晶体网络（1996）用于结构振动控制。在外部 RL 电路中可变电阻和电感用做实时自适应控制参数。

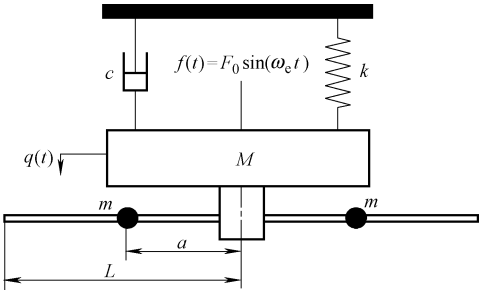


图 5-12　一种带通过移动质量 m 实现可变调谐、两端悬臂梁吸振器的主系统

（来源：Jalili，N. 和 Esmailzadeh，E.，J. Multi-Body Dyn，216，223-235，2002）

另一种可调悬架就是所谓的混合处理（Fujita 等，1991）悬架。混合设计有两种模式：主动模式和被动模式。在主动模式下，其目标就是降低控制力，相对小的振动被降低，而被动模式是用于大的振动。类似于混合处理，半自动的方法结合了 SA 和主动悬架的优点，

并受益于它们中单个方案的优点，同时又消除了它们的不足之处（Jalili，2000）。通过改变可调的结构特性（在 SA 单位）和控制参数（激活单元的），进行搜索以尽量使得在一定约束下目标函数最小。目标函数反映了性能特性。

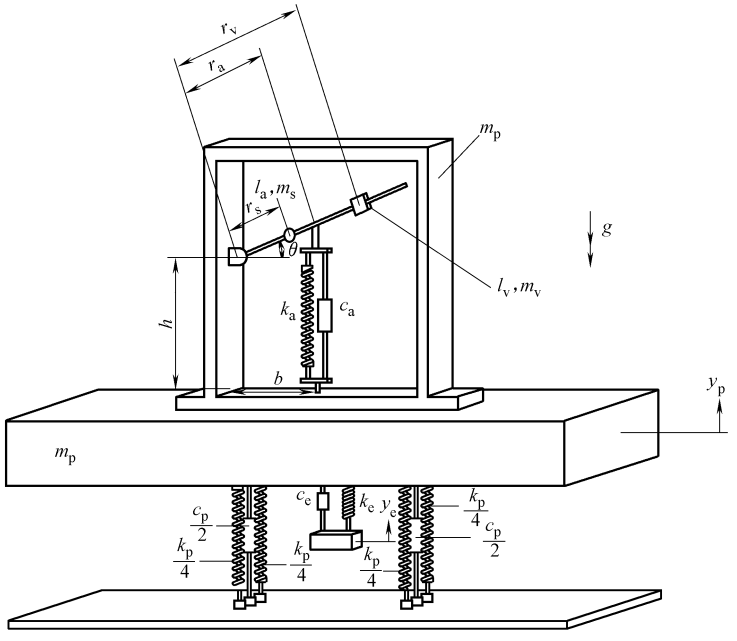


图 5-13　可调的有效惯性吸振器示意图

（来源：Jalili，N el 等，Int. J. Model Simulat，21，148-154，2001）

5.3　振动控制系统的设计与实现

5.3.1　简介

本节介绍振动控制系统设计和实施的基本概念。这些系统可分为两类：吸振器和振动控制系统。本节还介绍了与 ARAs 相关的实际发展和压电柔性结构振动控制。

5.3.2　吸振器或减振器

使用各种动态减振器已有效地降低了柔性结构不需要的振动。主动吸收的概念提供了一个宽带衰减振动频率以及实时可调性两大优势。很显然，对于组合系统来说，主动控制可能是一个不稳定因素，因此，组合系统（主系统和吸振器子系统）的稳定性必须进行评估。

主动调谐吸振器方案，是利用谐振产生机制形成的基本概念。对于这一点，通过主动装置中增加的一个控制力（参见图 5-7 底部），把一个稳定的主系统（见图 5-7 末端）被迫变成一个略微稳定的系统。产生这种共振条件的概念设计在图 5-14 上进行了

演示，其中系统的主导特征根（极点）移动了，并放在了虚轴上。然后吸振器成为一个能够模仿附着点主系统的振动能量的共振子。虽然似乎有许多方法来产生这样的共振，但只有两个被广泛接受的实际吸振器共振子会在接下来讨论。

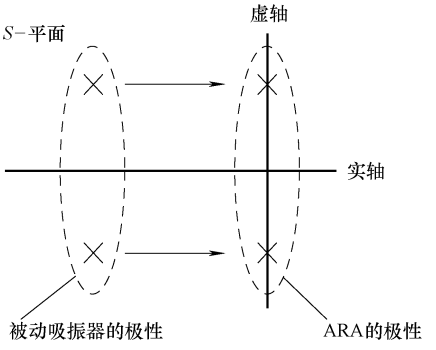


图 5-14　通过把特征方程的极性放在虚轴上的主动谐振吸振器的概念

5.3.2.1　延迟谐振吸振器

近来，主动吸收振动策略-延迟谐振器（DR）被认为是第一种主动吸振器，它在一根弹性梁上工作（Olgac 和 Jalili，1998；Olgac 和 Jalili，1999）。DR 吸振器在消除所连接对象单频振动上提供了一些有吸引力的特征（Olgac 和 Holm-Hansen，1994；Olgac，1995；Renzulli 等，1999），其中有些是实时可调的（这点是主动控制吸振器独有的性质），且实施简单。此外，这种单自由度的吸振器也可以进行调谐，以应付多个振动频率（Olgac 等，1996）。尤其重要的是这种组合系统（也就是主结构和吸振器一起），当 DR 在一根弹性梁上工作时，是渐近稳定的。

（1）延迟谐振器概念介绍

这里简单介绍 DR 的概念。仅考虑吸振器的动力学运动方程为

$$m_a\ddot{x}_a(t)+c_a\dot{x}_a(t)+k_a x_a-u(t)=0$$
$$u(t)=g\ddot{x}_a(t-\tau) \tag{5-13}$$

其中，$u(t)$ 表示延迟的加速度反馈力。这个方程拉普拉斯变换后得到的特征方程为

$$m_a s^2+c_a s+k_a-gs^2e^{-\tau s}=0 \tag{5-14}$$

当没有反馈力（$g=0$）时，该结构的两个特征根（极）分散在复平面的左半部分。然而，当 g 和 $\tau>0$，这两个有限稳定根还辅以无穷多个额外的有限值的根。注意特征方程（5-14）的特征根（极点）是离散分布（例如在 $s=a+j\omega$），且以下关系成立：

$$g=\frac{|m_a s^2+c_a s+k_a|}{|s^2|}e^{\tau a} \tag{5-15}$$

其中　｜　｜表示参数的幅值。

由式（5-15），可以得到以下结论：

① 对于 $g=0$：存在两个有限值的稳定极点，且所有剩余的极点都在 $a=-\infty$ 处。

② 对于 $g=+\infty$：在 $s=0$ 处存在两个极点，其余的极点在 $a=+\infty$ 处。

考虑到这些情况，并考虑到对于给定的时间延迟 τ、并且 g 从 0 到 ∞ 变化时，根位置的连续性，很明显，方程（5-14）的这些根会从稳定的复平面左半边平面移动到不稳定的右半平面上。对于某一临界增益 g_c，一对极点达到虚轴。在此工作点，DR 成为一个完美的谐振器，且虚特征根是 $s=\pm j\omega_c$，其中 ω_c 是谐振频率，$j=\sqrt{-1}$。角标“c”意味在虚轴上的根轨迹的交叉。把理想值 $s=\pm j\omega_c$ 代入方程（5-14），可以得到我们关注的控制参数 g_c 和 τ_c 为

$$g_c = \frac{1}{\omega_c^2}\sqrt{(c_a\omega_c)^2 + (m_a\omega_c - k_a)^2}$$

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c}\left\{\arctan\left[\frac{c_a\omega_c}{m_a\omega_c^2 - k_a}\right] + 2(l-1)\pi\right\}, l = 1, 2, \cdots \tag{5-16}$$

当使用这些 g_c 和 τ_c 时，DR 结构在频率 ω_c 处模仿谐振器频率。反过来，这种谐振子，在频率 ω_c 处形成一个单频**理想吸振器**。因此，控制目标就是在略微稳定的点稳定住 DR 吸振器。有关 DR 稳定的进一步讨论，可以参考 Olgac 和 Holm-Hansen（1994）及 Arid Olgac 等（1997）文献。

（2）振动减振器在柔性梁上的应用

我们把一个常规梁看做一个主系统，并与吸振器相连，还带有简弦力激励，如图5-15所示。激励点位于②处，吸振器位于①处。梁被认为是一个均匀截面梁，并且符合欧拉-伯努利假设。梁的参数都假定为常数和统一的。相对梁未变形的、自然轴线的弹性变形由 $y(x, t)$ 表示，且在下面的公式推导中，点（.）和撇（′）符号分别表示对时间变量 t 和位置变量 x 的偏导数。

根据这些假设，系统的动能可以写成

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_0^L\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}m_a\dot{q}_a^2 + \frac{1}{2}m_e\dot{q}_e^2 \tag{5-17}$$

采用线性应变表示这个系统的势能：

$$U = \frac{1}{2}EI\int_0^L\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}k_a\{y(a,t) - q_a\}^2 + \frac{1}{2}k_e\{y(b,t) - q_a\}^2 \tag{5-18}$$

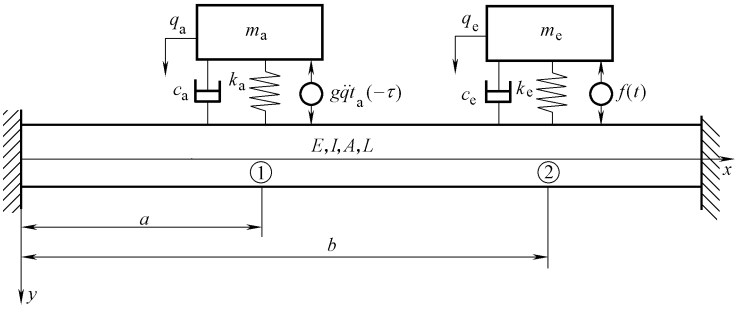


图 5-15 梁-吸振器-激励系统

（来源：Olgac，N 和 Jalili，N.，J. Sound Vib.，218，307-331，1998）

应用 Hamilton 原理，可以推导得到系统运动方程。然而，为帮助稳定分析，我们借助了一个假设模态的扩充和拉格朗日方程。具体来说，y 是 Galerkin 近似的有限和：

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x)q_{bi}(t) \tag{5-19}$$

这些模态振型之间的正交性条件也可以推导得到（Meirovitch，1986）：

$$\int_0^L \rho\Phi_i(x)\Phi_j(x)\mathrm{d}x = N_i\delta_{ij}$$

$$\int_0^L EI\Phi''_i(x)\Phi''_j(x)\mathrm{d}x = S_i\delta_{ij} \tag{5-20}$$

其中，i，$j=1$，2，…，n；δ_{ij}是克氏符号。在式（5-20）中，设$i=j$，就可以定义N_i和S_i。

吸振器的反馈、作动器的激振力，以及吸振器与激振器中的阻尼耗散力在拉格朗日表达式中被认为是非保守力。然后，推导运动方程。

吸振器的动力学方程为

$$m_a\ddot{q}_a(t) + c_a\{\dot{q}_a - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(a)\dot{q}_{bi}(t)\} + k_a\{q_a(t) - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(a)q_{bi}(t)\} - g\dot{q}_a(t-\tau) = 0 \tag{5-21}$$

激振器的动力学方程为

$$m_e\ddot{q}_e(t) + c_e\{\dot{q}_e - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(b)\dot{q}_{bi}(t)\} + k_e\{q_e(t) - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(b)q_{bi}(t)\} = -f(t) \tag{5-22}$$

最后，梁的动力学方程表示为

$$N_i\ddot{q}_b(t) + S_iq_b(t) + c_a[\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(a)\dot{q}_{bi}(t) - \dot{q}_a(t)]\Phi_i(a) + c_e[\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(b)\dot{q}_{bi}(t) - \dot{q}_e(t)]\Phi_i(b)$$
$$+ k_a[\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(a)q_{bi}(t) - q_a(t)]\Phi_i(a) + k_e[\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(b)q_{bi}(t) - q_e(t)]\Phi_i(b) + g\Phi_i(a)\ddot{q}_a(t-\tau)$$
$$= f(t)\Phi_i(b), i = 1,2,\cdots,n \tag{5-23}$$

式（5-21）~式（5-23）形成了$n+2$个二阶微分耦合方程组。

通过选择适当的反馈增益，吸收器可以调整到所需的共振频率ω_c处。反过来，当梁被频率为ω_c的单一频率激励时，这种情况迫使梁在点①处一动不动。这个结论是通过式（5-21）的拉普拉斯变换和吸振器的反馈控制得到的。总之，

$$Y(a,s) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(a)Q_{bi}(s) = 0 \tag{5-24}$$

其中，$Y(a, s) = \Im\{y(a, t)\}$，$Q_a(s) = \Im\{q_a(t)\}$和$Q_{bi}(s) = \Im\{q_{bi}(t)\}$。式（5-24）在时域中可以重新写为

$$y(a,t) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(a)q_{bi}(t) = 0 \tag{5-25}$$

这表明吸振器连接点的稳态振动被消除。因此，吸振器在激励频率处模仿共振子的振动，并且在附着点吸收了所有的振动能量。

（3）组合系统的稳定性

在上一节中，我们推导得到的梁-激振器-吸振器系统运动方程是最常见的形式。如前所述，实际上，主动吸振中反馈控制的引入是一种不稳定的引入。

组合系统的拉普拉斯变换采用以下形式（Olgac 和 Jalili，1998）

$$\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{Q}(s) = \boldsymbol{F}(s) \tag{5-26}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}(s)=\begin{Bmatrix}Q_{\mathrm{a}}(s)\\Q_{\mathrm{e}}(s)\\Q_{\mathrm{b1}}(s)\\\vdots\\Q_{\mathrm{bn}}(s)\end{Bmatrix}_{(n+2)\times 1};\boldsymbol{F}(s)=\begin{Bmatrix}0\\-F(s)\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}_{(n+2)\times 1},$$

$$\boldsymbol{A}(s)=\begin{pmatrix}m_{\mathrm{a}}s^2+c_{\mathrm{a}}s+k_{\mathrm{a}}-gs^2\mathrm{e}^{-\tau s} & 0 & -\Phi_1(a)(c_{\mathrm{a}}s+k_{\mathrm{a}}) & \cdots & -\Phi_n(a)(c_{\mathrm{a}}s+k_{\mathrm{a}})\\0 & m_{\mathrm{e}}s^2+c_{\mathrm{e}}s+k_{\mathrm{e}} & -\Phi_1(b)(c_{\mathrm{e}}s+k_{\mathrm{e}}) & \cdots & -\Phi_n(b)(c_{\mathrm{e}}s+k_{\mathrm{e}})\\m_{\mathrm{a}}\Phi_1(a)s^2 & m_{\mathrm{e}}\Phi_1(b)s^2 & N_1s^2+cs+S_1(1+\mathrm{j}\delta) & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\m_{\mathrm{a}}\Phi_n(a)s^2 & m_{\mathrm{e}}\Phi_n(b)s^2 & 0 & \cdots & N_ns^2+cs+S_n(1+\mathrm{j}\delta)\end{pmatrix}$$

(5-27)

为了评估组合系统的稳定性，对特征方程 $\det[\boldsymbol{A}(s)]=0$ 的根进行分析。特征方程反馈的存在（吸振器的超越延迟项）使得评估变得复杂。根轨迹图观察方法可以应用到整个系统中。典型的是增加反馈增益导致不稳定，图上对应的是根从复平面左半部移动至右半部。这张图也得到组合系统稳定运行的频率范围（Olgac 和 Jalili，1998）。

（4）实验方案和结果

用来验证结论的实验方案如图 5-16 所示。主结构是一个 3/8in[㊀] × 1in × 12in 钢梁（2），两端固定在花岗岩地板上（1）。一个压电作动器（3）与反应质量块（4）是用来产生横梁的周期性扰动。一个类似的执行机构-质量方案构成了 DR 吸振器（5 和 6）。这两个装置都位于距离梁中心 1/4 处的位置，并成对称分布。用于实施 DR 的反馈信号，是从安装在吸收结构的反应质量上的加速度计（7）中得到。安装在梁上的另外一个加速度计（8）是唯一一个在抑制振动过程中监测梁振动和对 DR 吸振器的性能进行评价的装置。控制是通过一个快速数据采集卡使用 10kHz 的采样来实现的。

这个梁-吸振器-激振器实验方案的有关参数值为

① 梁：$E=210\mathrm{GPa}$，$\rho=1.8895\mathrm{kg/m}$。

② 吸振器：$m_{\mathrm{a}}=0.183\mathrm{kg}$，$k_{\mathrm{a}}=10130\mathrm{kN/m}$，$c_{\mathrm{a}}=62.25\mathrm{Ns/m}$，$a=\mathrm{L}/4$。

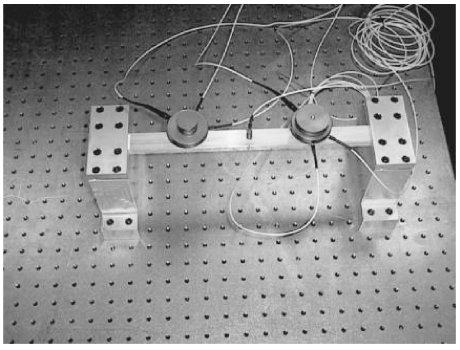
③ 激振器：$m_{\mathrm{e}}=0.173\mathrm{kg}$，$k_{\mathrm{a}}=6426\mathrm{kN/m}$，$c_{\mathrm{a}}=3.2\mathrm{Ns/m}$，$b=3\mathrm{L}/4$。

（5）动态仿真与实验比较

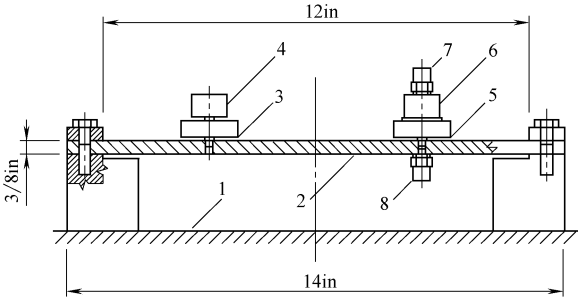
对于眼前的实验，需要测量前两阶模态的固有频率 ω_1 和 ω_2。这两个频率的测量比高阶模态频率测量更精确。表 5-1 提供了固支-固支梁固有频率实验（真实）和分析（理想）结果之间的比较。

出现这些差异有两个原因：第一，实验频率是属于结构阻尼固有频率；第二，它们反映了部分夹紧边界条件的影响。另外，理论频率被评估为无阻尼、理想的固支-固支梁的固有频率。

㊀ 1in = 0.0254m。



a)



b)

图 5-16　用来验证结论的实验方案

a）实验结构　b）装置原理图

（来源：Olgac，N. 和 Jalili，N.，J. Sound Vib，，218，307-331.）

1—地板　2—钢梁　3—压电作动器　4—反应质量块　5,6—DR 吸振器　7,8—加速度计

在观察了模态数目对梁变形的影响后，认为至少要考虑三阶模态。然后，我们比较振动抑制的实验结果与模拟的时域响应。图 5-17 显示了测试时的激励频率 $\omega_c = 1270$ Hz。相应的理论控制参数为：$g_{c理论} = 0.0252$kg 和 $\tau_{c理论} = 0.8269$ms。该频率下的实验控制参数为：$g_{c实验} = 0.0273$kg 和 $\tau_{c实验} = 0.82$ms。激振器激振梁为 5ms，然后触发 DR 调谐。梁的附着点的加速度以指数衰减。对于所有想法和目的，振动抑制大约在 200ms 起效。这个结果和实验数据非常吻合，如图 5-18 所示。唯一明显的区别是在指数衰减的频率内容上。此属性由组合系统的主导极点所支配。然而，在理论分析时，虚部较小。这种差异是细微的差别，不影响早期得出的分析结果。

表 5-1　固支-固支梁固有频率的实验和理论结果对比　（单位：Hz）

模态阶数	峰值频率(实验值)	固有频率(固支-固支,理论值)
1	466.4	545.5
2	1269.2	1506.3

5.3.2.2　主动谐振减振器或吸振器

调谐减振器的一个新颖实施物是 ARA（Knowles 等，2001b）吸振器。ARA 的概念

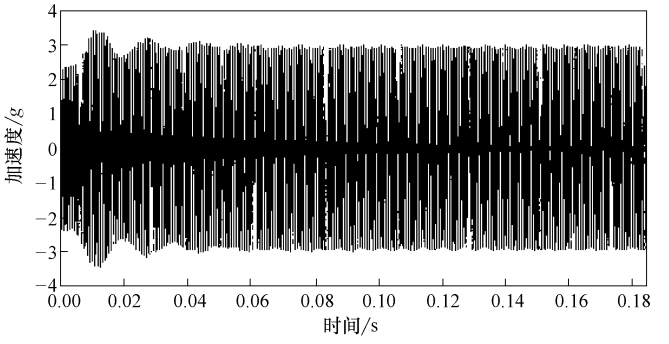


图 5-17 横梁和吸振器对 1270Hz 干扰的响应（分析值）

（来源：Olgac，N. 和 Jalili，N.，J，Sound Vib.，218，307-331）

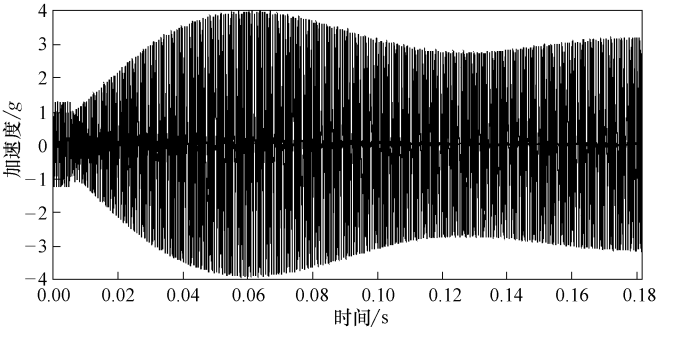


图 5-18 横梁和吸振器对 1270Hz 干扰的响应（实验值）

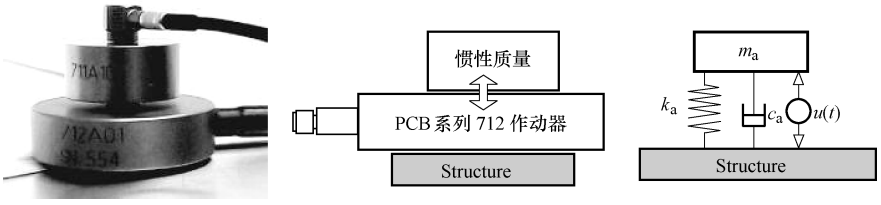
（来源：Olgac，N. 和 Jalili，N.，J，Sound Vib.，218，307-331）

是与延迟谐振器的概念密切相关的（Olgac 和 Holm-Hansen，1994；Olgac 和 Jalili，1999）。在吸振器部分，使用一个简单的位置（或速度或加速度）反馈控制，它强制吸振器的主导特征根位于虚轴上，并因此导致共振。一旦 ARA 变成共振的，那么就在这个频率处，建立了完美的振动吸收。

任何主动吸振器都有一个非常重要的部件，就是作动器单元。智能材料的最新发展导致利用压电陶瓷、形状记忆合金、磁致伸缩材料来研制先进的作动器（Garcia 等，1992；Shaw，1998）。在过去的 20 年中，已利用压电陶瓷作为传统传感器的潜在替代物。这些材料是铅锆钛（PZT）的混合物。通过适当调整锆-钛的比例，PZT 性能可以得到优化，以适应特定的应用场合。具体来说，压电惯性执行机构是一个主动结构振动控制的高效和廉价的解决方案。如图 5-19 所示，它实施作用力于连接结构点处。

（1）PZA 惯性执行机构概览

PZA 惯性执行机构是最常见的，它由两个平行的压电平板制成。如果施加电压，其中一个平板将膨胀，而另一个平板将收缩，从而产生与输入电压成正比的位移。这种执行机构共振可以通过惯性质量的大小来调整（图 5-19）。增加惯性质量会降低谐振频



a) b) c)

图 5-19 作动器单元

a）一个 PCB 系列 712 压电惯性执行机构 b）操作示意图 c）一个简单的单自由度数学模型

（Active Vibration Control Instrumentation，A Division of PCB Piezotronics，Inc，www. pcb. com）

率，而减少质量也会增加共振频率。谐振频率f_T可以表示为

$$f_T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_a}{m_a}} \tag{5-28}$$

式中，k_a是执行机构的有效刚度。m_a被定义为

$$m_a = m_{ePTZ} + m_{惯性} + m_{acc} \tag{5-29}$$

式中，m_{ePZT}是 PZT 的有效质量；$m_{惯性}$是惯性质量；m_{acc}是加速度计的质量。使用一个简单的单自由度系统（图 5-19），PZT 惯性执行机构的参数可以通过实验来测定（Knowles 等，2001a）。这个“参数辨识”问题是一个逆问题。感兴趣的读者可参考 Banks 与 Ito（1988）和 Banks 与 Kunisch（1989）的关于参数估计或微分方程逆问题一般介绍的文献。

（2）主动谐振子减振器概念

ARA 的概念是与 DR 密切相关的（Olgac，1995；Olgac 和 Holm-Hansen，1995；Olfgac 和 Jalili，1998）。DR 在上面所提到的“激活”吸振器子系统内使用一个简单的延迟位置（或速度或加速度）前馈控制来替代补偿器。

当关注闭环系统的稳定性时，ARA 与 DR 吸振器相反，ARA 所提出的控制方案的特征方程在本质上是合理的，因此更容易实现。与 DR 吸振器相似，推荐的 ARA 方法从吸振器的质量上只需要一个信号，这个信号可以是绝对的或相对于附着点的（参见图 5-7 底部）。在信号通过补偿器处理后，会产生一个额外的力，如可以由一个 PZT 惯性执行机构产生。如果补偿参数的设置正确，那么吸收器应该在一个甚至多个频率下表现为一个理想的谐振器。因此，谐振器将在给定频率处从主系统质量中吸收振动能量。被吸振的频率可以实时调整。此外，如果控制器或执行器出现故障，ARA 将仍然作为一个被动吸振器发挥作用，因此它本质上在故障时也是安全的。一个类似的振动吸收方法是由 Filipovic 和 Schroder（1999）为线性系统提出的。然而，ARA 并不局限于线性域。

对于 PZT 惯性执行机构来说，在线性假设的情况下，ARA（见图 5-7 底部）的动力学方程可以表示为

$$m_a\ddot{x}_a(t) + c_a\dot{x}_a(t) + k_a x_a - u(t) = c_a\dot{x}_1(t) + k_a x_1(t) \tag{5-30}$$

式中，$x_1(t)$ 和 $x_a(t)$ 分别表示主系统（在吸振器连接点）和吸振器质量块的位移。由式（5-29）和控制力 $u(t)$ 共同确定的质量 m_a，被设计成能产生位于 ARA 内指定的共振频率。

反馈控制的目标 $u(t)$ 就是把一个耗散结构（见图 5-7 末端）转换成指定共振频率 ω_c 下一个保守的或轻微稳定的结构（见图 5-7 底部）。换句话说，对于组合系统而言，控制目标瞄准在主导极点 $\pm j\omega_c$ 处，其中 $j=\sqrt{-1}$（见图 5-14）。因此，在确定的频率范围内的特别频率处的 ARA 变得稍微稳定。在吸振器部分内，使用简单的位置（或速度或加速度）反馈［如 $U(s)=\overline{U}(s)\ X_a(s)$］，由式（5-30）给出相应的 ARA 动力学方程在拉氏域成为

$$(m_a s^2+c_a s+k_a)x_a(s)-\overline{U}(s)=C(s)X_a(s)=(c_a s+k_a)X_1(s) \tag{5-31}$$

然后这样选择补偿器的传递函数 $\overline{U}(s)$，使得主系统在吸振器的连接点的位移为零，也就是

$$C(s)=(m_a s^2+c_a s+k_a)-\overline{U}(s)=0 \tag{5-32}$$

通过给吸振器特征方程 $C(s)$ 引进共振条件，才能确定补偿器参数，即同时求解方程 $\mathrm{Re}\{C(j\omega_i)\}=0$ 和 $\mathrm{Im}\{C(j\omega_i)\}=0$，其中 $i=1,2,\cdots,l$（l 是被吸振的频率个数）。使用额外的补偿器参数，稳定的频率范围或其他特性可以实时调整。

考虑 $U(s)$ 是基于 ARA 加速度与单一时间常数成比例补偿这种情况，得到

$$U(s)=\overline{U}(s)X_a(s) \tag{5-33}$$

其中，$\overline{U}(s)=\dfrac{gs^2}{1+Ts}$。

然后，在时域里控制力 $u(t)$ 根据下式可以得到

$$u(t)=\frac{g}{T}\int_0^T e^{-(t-\tau)/T}\ddot{x}_a(\tau)\,d\tau \tag{5-34}$$

为了达到理想的谐振子行为，式（5-32）的两个主根被放置在虚轴所需的交叉频率 ω_c 处。将 $s=\pm j\omega_c$ 代入方程式（5-32）中，并求解控制参数 g_c 和 T_c，对于 $\omega=\omega_c$，可以得到：

$$g_c=m_a\left(\frac{c_a^2}{m_a^2\left(\omega^2-\dfrac{k_a}{m_a}\right)}-\frac{k_a}{m_a\omega^2}+1\right)$$

$$T_c=\frac{c_a\sqrt{k_a/m_a}}{\sqrt{m_a k_a}\left(\omega^2-\dfrac{k_a}{m_a}\right)} \tag{5-35}$$

控制参数 g_c 和 T_c 是基于 ARA 的物理性质（即 c_e、k_a 和 m_a）以及干扰频率 ω，说明了 ARA 不需要从它连接的主系统中获取任何信息。然而，当 ARA 的物理属性不能得到高度肯定时，一个自动调谐控制参数的方法必须考虑。这种自动调整建议的稳定保证会将主系统参数带入偏离，因此主系统不能完全解耦。这个问题稍后将在本章中讨论。

（3）ARA 在结构振动控制中的应用

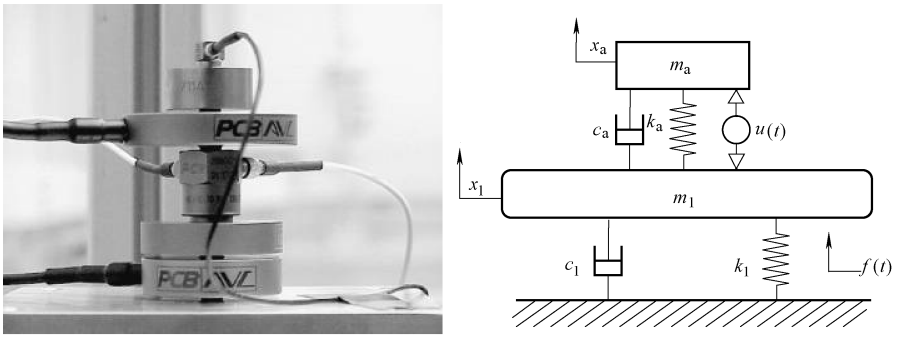
为了演示推荐的 ARA 的成效，考虑一个简单的单自由度主系统受到单频激励的情况。如图 5-20 所示，两个 PZT 惯性作动器用于主系统（型号 712-A01）和吸振器（型号 712 -A02）。每个系统由被动元件（PZT 材料的弹簧刚度和阻尼特性）的主动部分组成，后者的物理参数在表 5-2 中列出。末端作动器作为 ARA 的作动器，其控制力为 $u(t)$，而底部作动器代表主系统的作动器，其承受的激励力为 $f(t)$。

结合系统的控制动力学方程可以表示为

$$m_a\ddot{x}_a(t)+c_a\dot{x}_a(t)+k_a x_a-u(t)=c_a\dot{x}_1(t)+k_a x_1(t) \tag{5-36}$$

$$m_1\ddot{x}_1(t)+(c_1+c_a)\dot{x}_1(t)+(k_1+k_a)x_1(t)-\{c_a\dot{x}_a(t)+k_a x_a(t)-u(t)\}=f(t) \tag{5-37}$$

其中 $x_1(t)$ 和 $x_a(t)$ 分别是主系统和吸振器位移。



a) b)

图 5-20　使用两个 PZT 作动器的 ARA 概念

a）实施　b）数学模型

表 5-2　PCB 系列 712 PZT 惯性执行机构实验确定的参数

PZT 系统参数	PCB712-A01 型号	PCB712-A02 型号
有效质量 m_{ePZT}(g)	7.20	12.14
惯性质量 $m_{惯性}$(g)	100.00	200.00
刚度 k_a(kN/m)	3814.9	401.5
阻尼 c_a(Ns/m)	79.49	11.48

（4）稳定性分析及参数灵敏度

渐近稳定的充分必要条件就是特征方程的所有根具有负实部。对于式（5-36）和式（5-37）表示的线性系统，当利用控制器［式（5-34）］时，组合系统（图 5-20b）的特征方程才能确定下来，且使用劳斯 -赫尔维茨方法才可以得到对应补偿器参数 g 和 T 的稳定区域。

（5）自动调谐的建议

当在实际应用场合（其物理性质不知道或随时间变化）使用推荐的 ARA 结构时，补偿器参数 g 和 T，只提供部分的振动抑制。为了解决这个问题，需要有自整谐方法，

通过 Δg 和 ΔT 来分别调整补偿器参数 g 和 T（Jalili 和 Olgac，1998b；Jalili 和 Olgac，2000a）。对于由式（5-33）给出的带单一时间常数的线性补偿器的情况，主系统位移 $X_1(s)$ 和吸振器位移 $X_a(s)$ 之间的传递函数为

$$G(s)=\frac{X_1(s)}{X_a(s)}=\frac{m_a s^2+c_a s+k_a-\dfrac{gs^2}{1+Ts}}{c_a s+k_a} \tag{5-38}$$

对于 $s=\mathrm{j}\omega$，那么在频域中传递函数可改写为

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{X_1(\mathrm{j}\omega)}{X_a(\mathrm{j}\omega)}=\frac{-m_a\omega^2+c_a\omega\mathrm{j}+k_a+\dfrac{g\omega^2}{1+T\omega\mathrm{j}}}{c_a\omega\mathrm{j}+k_a} \tag{5-39}$$

其中，$G(\mathrm{j}\omega)$ 可以实时通过加速度计读数卷积（Renzulli 等，1999）或其他方法（Jalili 和 Olgac，2000a）来得到。接下来，就是正如在 Renzulli 等（1999）文献中利用的步骤，式（5-39）传递函数的分子必须趋近于零，以抑制主系统振动。这是通过以下设置来完成：

$$G(\mathrm{j}\omega)+\Delta G(\mathrm{j}\omega)=0 \tag{5-40}$$

式中，$G(\mathrm{j}\omega)$ 是实时传递函数；$\Delta G(\mathrm{j}\omega)$ 可以写作为式（5-39）的一个变分形式

$$\Delta G(\omega i)=\frac{\partial G}{\partial g}\Delta g+\frac{\partial G}{\partial T}\Delta T+\text{高阶项} \tag{5-41}$$

由于吸振器估计的物理参数（即 c_a、k_a 和 m_a）都在实际参数的附近，Δg 和 ΔT 应该是小量，并且式（5-41）的高阶项可以忽略不计。使用式（5-40）和式（5-41），并忽略高阶项，可以得到

$$\begin{aligned}\Delta g&=\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]\left[\frac{2Tc_a\omega^2-k_a+k_aT^2\omega^2}{\omega^2}\right]+\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]\left[\frac{c_a-T^2\omega^2c_a+2k_aT}{\omega^2}\right]\\ \Delta T&=\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]\left[\frac{c_a-T^2\omega^2c_a+2k_aT}{g\omega^2}\right]+\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]\left[\frac{k_a-2Tc_a\omega^2-k_aT^2\omega^2}{g\omega^3}\right]+\frac{T}{g}\Delta g\end{aligned} \tag{5-42}$$

式中，g 和 T 是由方程式（5.35）给定的当前补偿器参数；c_a、k_a 和 m_a 是吸振器参数的估计值；ω 是吸振器基础激励频率；$G(\mathrm{j}\omega)$ 是实时获取的传递函数。也就是说，重新调谐控制参数 g 和 T 由以下公式确定：

$$\begin{aligned}g_{\text{新}}&=g_{\text{当前}}+\Delta g\\ T_{\text{新}}&=T_{\text{当前}}+\Delta T\end{aligned} \tag{5-43}$$

式中，Δg 和 ΔT 是由式（5-42）给出的。在通过式（5-43）调整补偿器参数 g 和 T 后，这个过程可以反复进行，直到 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 落在理想的允许值为止。$G(\mathrm{j}\omega)$ 可以实时确定，正如在 Liu 等（1997）文献中所示的：

$$G(\mathrm{j}\omega)=|G(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\mathrm{j}\omega)} \tag{5-44}$$

其中，假设吸振器和主系统位移是时间的谐波函数，有

$$\begin{aligned}x_a(t)&=X_a\sin(\omega t+\phi_a)\\ x_1(t)&=X_1\sin(\omega t+\phi_1)\end{aligned} \tag{5-45}$$

即可以确定幅值和位移。

由式（5-44）的幅值和相位角，传递函数可以由式（5-44）和以下公式确定：

$$|G(j\omega)| = \frac{X_1}{X_a}$$

$$\phi(j\omega) = \phi_1 - \phi_a$$

（6）数值模拟和讨论

为了说明推荐的吸振方法的可行性，下面举一个案例。ARA 的控制律是如式（5-34）给出的与单一时间常数成比例的补偿器。主系统受到单位幅值和频率为 800Hz 的谐波激励。ARA 和主要系统所采用的参数已在表 5-2 中给出。使用 Matlab/Simulink 进行模拟，主系统和吸振器位移的结果在图 5-21 中给出。

由该图可见，主系统振动在大约有 0.05s 后被完全抑制，且在此段时间中，吸振器作为一个稍微稳定的谐振子工作。对于这种情况，所有的物理参数被假定为完全清楚。然而，在实际中，这些参数并不完全清楚，且可能随时间而改变，所以必须考虑与系统参数估计有关的情况。

为了演示推荐的自动调谐方法的可行性，系统标称参数（m_a、m_1、k_a、k_1、c_a、c_1）在模拟中虚拟摄动 10%（即代表实际值）。然而，m_a、m_1、k_a、k_1、c_a、c_1 的标称值是用于计算补偿器参数 g 和 T 的。使用标称参数的模拟计算结果如图 5-22 所示。在图 5-22末端，参数变化的影响是看做主结构的稳态振动。在实验实施时，无疑会遇到这种不希望的响应。因此，自动调谐步骤是必要的。

图 5-22 中间给出了第一个自动调谐迭代的结果，其中调整的控制参数 g 和 T 是根据式（5-43）得出的。人们可以看到，只有一个迭代（参见图 5-22 中间）后主系统响应发生巨大改善。图 5-22 底部表示第二个迭代完成后的结果。该响应和图 5-21 所示的响应非常相似，图 5-21 所示系统的所有参数被假定为完全清楚。

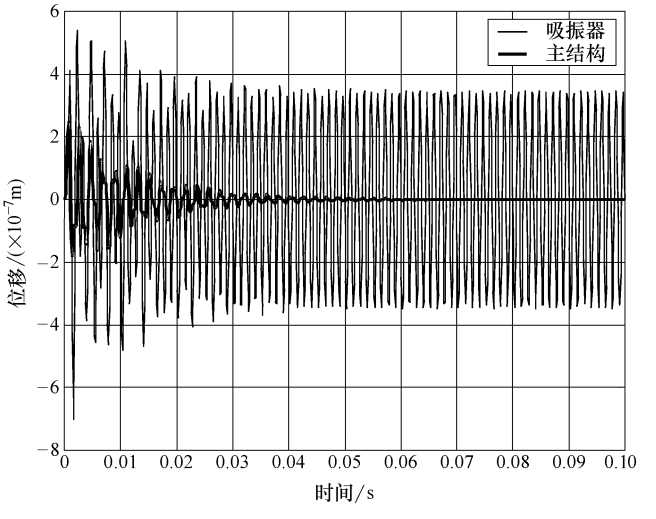


图 5-21　主系统和吸振器位移受到 800Hz 的谐波干扰

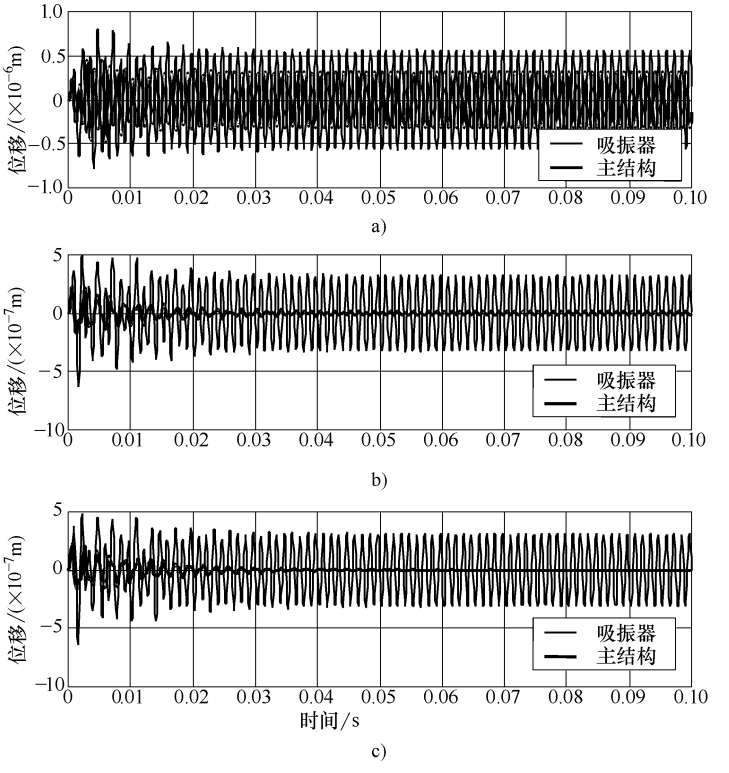


图 5-22 系统响应

a）吸振器标称参数 b）第一轮自动调谐后 c）第二轮自动调谐

5.3.3 振动控制系统

正如前面所讨论的，在振动控制方案中，为了调整或跟踪系统所需的轨迹，同时又抑制瞬态振动，需要改变对系统的控制输入。此控制问题具有相当的挑战性，因为它必须达到运动-追踪目标，同时又要稳定系统的瞬态振动。本节提供了两种最新的控制方法，来调整和跟踪柔性梁。本节还讨论了实验实施。第一种控制方法就是 5.3.3.1 节中讨论的一个单输入振动控制系统；第二种应用方法，除了主要控制输入外，为了改善该系统的振动特性，还采用了二次输入控制，见 5.3.3.2 节。

5.3.3.1 旋转柔性梁的变结构控制

柔性机械臂的振动控制问题包括实现运动跟踪目标，同时稳定手臂的瞬态振动。已经为柔性臂研究出来几种控制方法（Skaar 和 Tucker，1986；Bayo，1987；Yuh，1987；Sinha，1988；Lou，1993；Ge 等，1997；de Querioz 等，1999）。这些方法大多集中在基于模型的控制器设计上，但由于设计模型的不确定性，负荷变化大，忽略了高频率的动态特性，且忽略了设计的控制器的高阶项，因而它们中的一些方法可能并不容易实施。在这些方法中，VSC 特别有吸引力，这是由于其实施的简单性和参数不确定具有鲁棒性

（Yeung 和 Chen，1989；Singh 等，1994；Jalili 等，1997）。

（1）数学建模

如图 5-23 所示，臂的一端是自由的，另一端是刚性地连接到由直流电动机驱动的一个垂直的齿轮轴上。臂被认为是一个均匀截面梁，我们利用欧拉-伯努利假设。作用在输出轴上的控制扭矩 τ 垂直于运动平面。黏性摩擦和存在的、但未建模的电机部分动力学项将通过摄动估计过程予以补偿，这些将稍后在文中解释。由于这里考虑的动力学系统一直在文献中使用，因而我们这里只给出系统偏微分方程（PDE）结果，有兴趣的读者可参考 Junkins 和 Kim（1993）、Luo 等文献的详细推导。

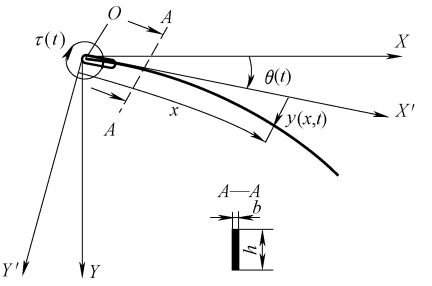


图 5-23　在水平面中发生运动变形的柔性臂

（来源：Jalili，N，ASME J Dyn. Syst. Meas. Control，123，712-719，2001）

该系统动力学方程为

$$I_{\mathrm{h}}\ddot{\theta}(t)+\rho\int_0^L x\ddot{z}(x,t)\,\mathrm{d}x=\tau \tag{5-46}$$

$$\rho\ddot{z}(x,t)+EIz''''(x,t)=0 \tag{5-47}$$

相应的边界条件为

$$z(0,t)=0,z'(0,t)=\theta(t),z''(L,t)=0,z'''(L,t)=0 \tag{5-48}$$

式中，ρ 是手臂的线性质量密度；L 是臂长；E 是杨氏弹性模量；I 是横截面的惯性矩；I_{h} 是在臂根部等效质量惯性矩；$I_{\mathrm{t}}=I_{\mathrm{h}}+\rho L^3/3$ 是总惯性矩，全局变量 z 定义为

$$z(x,t)=x\theta(t)+y(x,t) \tag{5-49}$$

显然，臂振动方程［式（5-47）］是齐次 PDE 偏微分方程，但边界条件［方程式（5-48）］是非齐次的。因此，如果不是不可能，求解封闭形式解将是非常繁琐的。利用 VSC 方法，这些方程及其相关的边界条件可以转换成一个齐次边值问题，正如下面要讨论的。

（2）变结构控制器

控制器的目标就是跟踪臂从初始角 $\theta_{\mathrm{d}}=\theta(0)$ 开始的角位移一直到零位置 $\theta(t\to\infty)=0$，同时最小化弹性臂的振动。为了达到控制建模中不确定性带来的不灵敏，这里采用带额外的扰动估计（SMCPE）包的滑动模式控制的非线性控制方法（Elmali 和 Olgac，1992；Jalili 和 Olgac，1998）。在 Elmali 和 Olgac（1992 年）文献中出现的 SMCPF 方法，有很多吸引力特点，但它存在与截断-模型-基础控制器有关的缺点。另一方面，Zhu 等（1997）提出的无限维的分布式基础控制器设计（IDD），由于它的测量要求，再加上复杂的控制律，因而实际使用有限制。

基于 IDD 基础控制器的想法，我们提出了一个新的控制器设计方法。在这个方法中，引入了一种在线摄动估计机制，并和控制器集成起来，来放松测量要求和简化控制实施。正如 Zhu 等（1997 年）使用的方法，对于端部-振动抑制，需要滑动表面使得非

齐次边界条件变换为齐次边界条件［式5-48）］。为了同时满足振动抑制和鲁棒性要求，被选中的滑动超平面作为一个跟踪（调节）误差和柔性臂振动的组合：

$$\sigma = \dot{w} + \sigma w \tag{5-50}$$

式中，$\sigma > 0$ 是控制参数，且

$$w = \theta(t) + \frac{\mu}{L} z(L,t) \tag{5-51}$$

稍后选择标量 μ。对于刚性联接操纵器来说，当 $\mu = 0$ 时，控制器［式（5-50）］缩减为一个滑动变量（Jalili 和 Olgac，1998a；Yeung 和 Chen，1988）。正如接下来将要讨论的和在 Jalili（2001）文献中详细提到的，滑动变量的动机是为了提供一个合适的边界条件来求解梁方程式（5-47）。

对于由式（5-46）~式（5-48）描述的系统，如果变结构控制器的系统由下式给出：

$$\tau = \psi_{est} + \frac{I_t}{1+\mu}\left(-k\,\mathrm{sgn}(s) - Ps - \frac{\mu}{L}\ddot{y}(L,t) - \sigma(1+\mu)\dot{\theta} - \frac{\sigma\mu}{L}\dot{y}(L,t) \right) \tag{5-52}$$

式中，ψ_{est} 是梁的弹性影响的估计：

$$\psi = \rho \int_0^L x\ddot{y}(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{5-53}$$

k 和 P 是正标量，$k \geqslant 1 + \mu / I_t \left| \psi - \psi_{est} \right|$，$-1.2 < \mu < -0.45$，$\mu \neq -1$，且 sgn（）代表标准的符号函数。那么，在有限的时间内，系统的运动将首先到达滑动模式 $S = 0$，从而以一个时间常数 $1/\sigma$ 的指数收敛到平衡位置 $w(x,t) = 0$（Jalili，2001）。

（3）控制器实现

前面部分内容已表明：通过适当选择控制变量 μ，运动将以一时间常数为 $1/\sigma$ 的指数收敛到 $w = 0$，同时臂在有限时间内停止。虽然控制器的不连续的性质引入了鲁棒机制，我们通过减少所需的测量，作出了对参数变化和未建模动力学不敏感的方案，因此更容易控制实施。其余的测量和永远存在的建模不完善影响，都已通过在线评估过程进行了评估。如前所述，为了简化实施控制和减少测量工作，包括弹性效果 $\left[\int_0^L x\ddot{y}(x,t)\,\mathrm{d}x \right]$ 和永远存在未建模动力学在内的所有不确定性的影响，汇集成一个单一的数量摄动 ψ，它由式（5-53）给出。注意式（5-46），摄动项可表示为

$$\psi = \tau - I_t \ddot{\theta}(t) \tag{5-54}$$

要计算式（5-54）就需要知道未知的控制反馈 τ。为了解决这个两难的因果关系，控制转矩的当前值 τ，被最近的控制 $\tau(t-\delta)$ 所取代，其中 δ 是循环封闭使用的小步长。这种替换在实践中是合理的，因为这种算法实现是基于数字计算机，且采样速度足够高，是满足要求的。此外，在没有测量噪声的情况下，$\ddot{\theta}(t) \approx \ddot{\theta}_{cal}(t) = [\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t-\delta)]/\delta$。

实践中及测量噪声存在的情况下，可以考虑适当的滤波，并结合这些近似导数，这种技术被称为“交换导数”。当 δ 选择的足够小，并且控制器是在一个快速的 DSP 上运行，这种后向差异被证明是有效的（Cannon 和 Schmitz，1984）。此外通过把加速度计粘

在臂的末端，可以得到 $\ddot{y}(L, t)$ 信号。因此，所有所需的信号可用目前的传感器设备测量，故控制器在实践中是可以实现的。虽然这些信号可能相当不准确，但应该指出的是，信号无论是测量的还是估计的，不需要非常准确地知道，因为如果 k 被选择大到足以覆盖测量/信号估计中存在的误差，则可以实现鲁棒滑动控制（Yeung 和 Chen，1989）。

（4）数值模拟

为了显示推荐的控制器的有效性，采用了重量轻的弹性臂（在图 5-23 中，$h \gg b$）。对于数值模拟结果来说，设弹性臂基础的初始角度为 $\theta_d = \theta(0) = \pi/2$，对于其余状态变量设为零初始条件。系统参数列在表 5-3 中。利用假设模态模型（AMM），弹性臂振动［用式（5-47）表示］被截断为三个模态并且在模拟中使用。应该指出，控制器定律［式（5-52）表示］是基于原有的无穷维方程上，并且这种截断仅用于仿真目的。

表 5-3　旋转弹性臂在数值模拟和实验装置中使用的参数

特　　性	符　　号	数　　值	单　　位
弹性臂杨氏模量	E	207×10^9	N/m^2
弹性臂厚度	b	0.0008	m
弹性臂高度	h	0.02	m
弹性臂长度	L	0.45	m
弹性臂线密度	ρ	0.06/L	kg/m
弹性臂基础总惯性	I_h	0.002	kgm^2
变速器速比	N	14:1	—
光源质量	—	0.05	kg
位置传感器灵敏度	—	0.39	V/cm
电机反电动势常数	K_b	0.0077	V/(rad/s)
电动机转矩常数	K_t	0.0077	N·m/A
电枢电阻	R_a	2.6	Ω
电枢电感	L_a	0.18	mH
解码器精度	—	0.087	(°)/计数(count)

我们采用的控制器参数 $\mu = -0.66$，$P = 7.0$，$k = 5$，$\varepsilon = 0.01$ 和 $\sigma = 0.8$。在实践中，考虑未建模动力学和执行器的硬件限制，σ 被选为最大跟踪精度（Moura 等，1997）。虽然这种限制不存在模拟中（带有理想的执行器、高采样频率和完美测量），但 σ 的选择是根据实际实验条件选择的。

模拟计算采样频率 $\delta = 0.0005$s，而对于绘图要求，数据采样率只有 0.002s。对应于推荐的控制方案的系统响应如图 5-24 所示。弹性臂-基础角位置达到所需的位置 $\theta = 0$，大约 4～5s。这是与 $t_s = 4/\sigma$ 的近似稳定时间保持一致（图 5-24a）。只要系统一到达滑模层，$|s| < \varepsilon$（图 5-24d），末端振动就停止（图 5-24b），这表明所提出的控制器技术是可行的。控制力矩表现出一些残余波动，如图 5-24c 所示。这种残余振荡是预料中

的，因为在使用饱和函数时，系统的动作不会被迫留在 $s=0$ 表面（相反，它是被留在 $|s|<\varepsilon$）。滑动变量 s 也在图 5-24d 上显示。为了更好地演示控制器特点，$\mu=0$ 时的系统反应进行了演示（图 5-25）。如前所述，$\mu=0$ 对应刚性连接的滑动变量。臂尖端或末端不希望的振动是明显的（图 5-25b 和 c）。

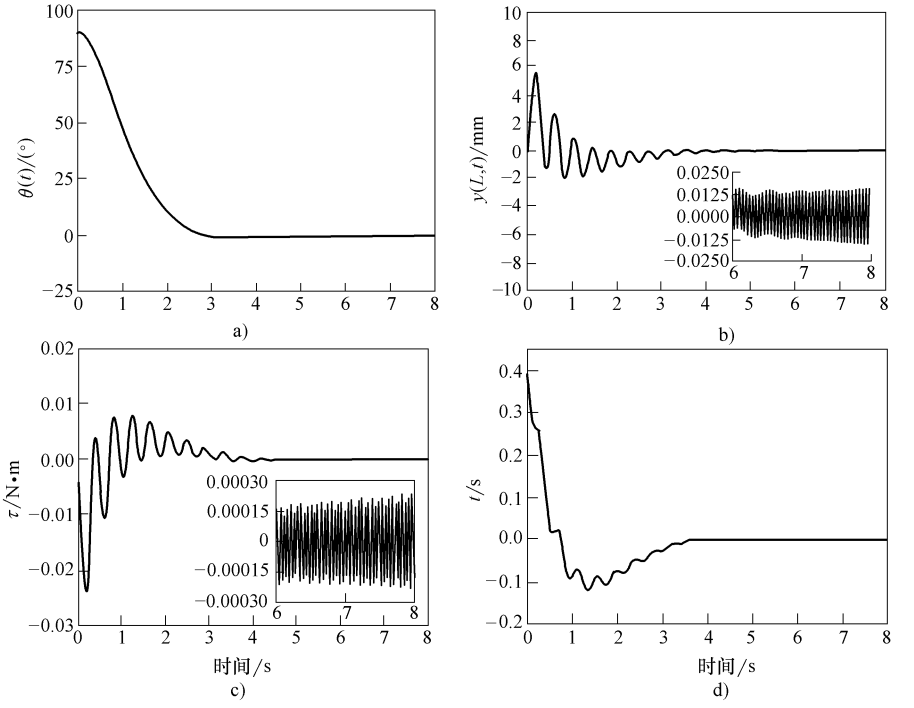


图 5-24 包含弹性臂影响在内的对应于控制器的系统分析响应（$\mu=-0.66$）

a）臂角位置 b）臂尖挠度 c）控制力矩 d）滑动变量时间

（来源：Jalili，N，ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control，123，712-719，2001）

（5）控制实验

为了更好地展示控制器的有效性，我们需要构造和使用试验装置来验证数值模拟结果和在前面的章节中讨论的概念。实验装置如图 5-26 所示。弹性臂是由不锈钢制成的细梁，在模拟中使用相同的尺寸。实验装置的参数列于表 5-3 中。臂的一端固定在坚实的夹具上，它由一个高品质的直流伺服电动机驱动。电动机驱动一个内置的变速器（$N=14:1$），其输出驱动一个消隙齿轮。装备了一个精确的编码器的消隙齿轮是用来测量臂基础的角度，并用来消除间隙。对于臂末端或尾端挠度，一个光源连接到臂的末端，再用安装在旋转基础的一个摄像头检测到该光源信号。

直流电动机可以建模为一个标准的电枢回路，即把电压 U 施加到直流电动机上

$$U=R_a i_a+L_a \mathrm{d}i_a/\mathrm{d}t+K_b\dot{\theta}_m \tag{5-55}$$

式中，R_a 为电枢电阻；L_a 是电枢电感；i_a 电枢电流；K_b 是反电动势（back electro-mo-

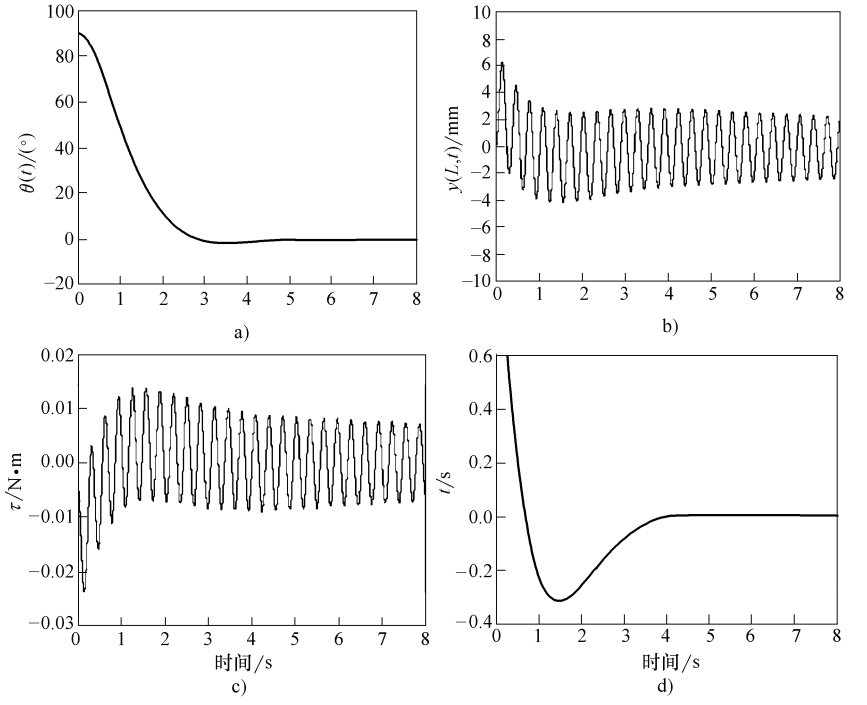


图 5-25　不包含弹性臂影响在内的对应于控制器的系统分析响应（$\mu=0$）

a）臂角位置　b）臂尖挠度　c）控制力矩　d）滑动变量时间

（来源：Jalili，N，ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control，123，712-719，2001）

tive-force，back-EMF）常数；θ_m 是电动机轴位置。电动机转矩 τ_m 与电动机轴的扭矩常数 K_t 有关，可写为

$$\tau_m = K_t i_a \tag{5-56}$$

因而电动机动力学公式成为

$$I_e\ddot{\theta}_m + C_V\dot{\theta}_m + \tau_a = \tau_m = K_t i_a \tag{5-57}$$

式中，C_V 是电动机的等效阻尼常数；$I_e = I_m + I_L/N^2$，是包括电动机惯量 I_m 和变速器、装夹框架、相机惯量 I_L 在内的等效惯量；τ_a 是弹性臂电动机轴上的有效扭矩。

利用变速器的输出轴到电动机轴、并忽略电动机的电气时间常数（L_a/R_a），可以将伺服电动机的输入电压与扭矩（作用在弹性臂上）的关系联系起来：

$$\tau = \frac{NK_t}{R_a}v - \left(C_V + \frac{K_tK_b}{R_a}\right)N^2\dot{\theta} - I_h\ddot{\theta} \tag{5-58}$$

在控制方程的推导中，$I_h = N^2 I_e$ 是采用的臂基础的等效惯量。通过把这个扭矩代入控制定律，得到用于实验的参考输入电压 U。

控制转矩是通过采样频率 10kHz 的数字信号处理器（DSP）进行施加的，而数据记录率为 500Hz（仅供画图用）。DSP 作为一个独立的 CPU 控制程序，以单输入单输出模式运行。大多数的计算和硬件命令在 DSP 卡上完成。对于这种设置，一个专用的

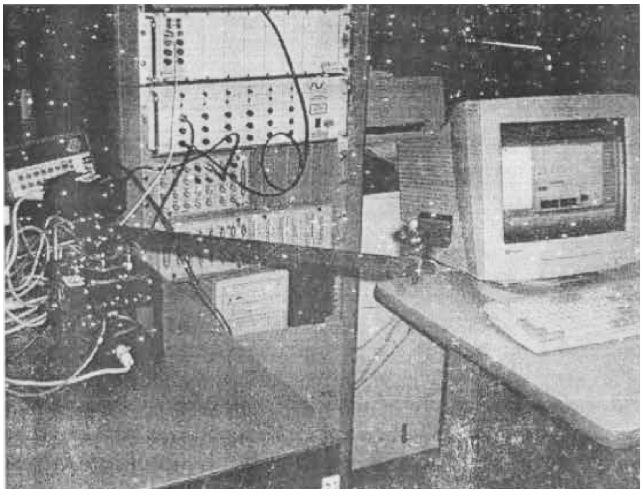


图 5-26 实验设备和实验设置

（来源：Jalili，N.，ASME/Dyn. Syst. Meas. Control，123，712-719，2001）

500MHz 奔腾Ⅲ CPU 用于 PC 主机，和最先进的 Dspace ds1103 PPC 控制器板卡；该板卡配备频率为 333MHz 的摩托罗拉 PC 604e 电源、16 个 ADC 通道和 12 个 DAC 通道作为微处理器。

图 5-27 和图 5-28 展示了与数值模拟部分讨论的类似情况的实验系统响应。图 5-27

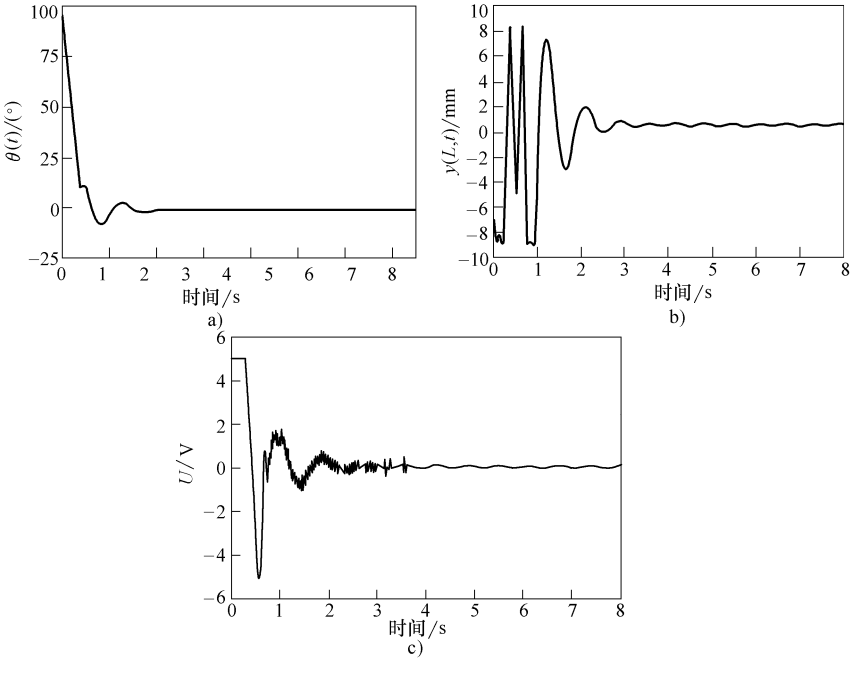


图 5-27 考虑臂弹性影响（$\mu = -0.66$）对应于控制器的系统实验响应

a）臂的角位置 b）梁末端挠度 c）施加在直流伺服电动机上的控制电压

（来源：Jalili，N.，ASME J. Dyn. Syst. Meas. Coutrol，123，712-719，2001）

代表控制器［式（5-52）］作用于弹性梁（$\mu = -0.66$）时系统的响应。正如所看到的，臂基达到了理想的位置（图 5-27a），而梁末端挠度同时停止（图 5-27b）。从抑制振动的特点来看，分析结果（图 5-24）与实验结果（图 5-27）之间良好的对应关系是明显的。应该指出的是，该控制器是以最初的控制方程为基础，且仅与臂-基础角位置和末端挠度测量结果有关。通过推荐的在线摄动估计程序，来补偿如有效载荷的影响（由于末端光源质量的影响，请参阅表 5-3）等未建模动力学和黏性摩擦（在臂的根端）。反过来，当模型和实物之间遇到相当大的偏差时，这表明所提出的控制方案的能力。唯一明显的区别是图 5-27b 和图 5-27c 所示的快速衰减响应。这清楚地表明，电动机处高摩擦在数值模拟中是不考虑的（图 5-24b 和图 5-24c）。当控制器是基于刚性连接设计即 $\mu = 0$ 时，就会获得类似的响应。图 5-28 显示了系统响应。同样，不希望的臂末端振荡是显而易见的。模拟计算（图 5-24 和图 5-25）和实验（图 5-27 和图 5-28）之间的全面吻合是这项工作的重要贡献之一。

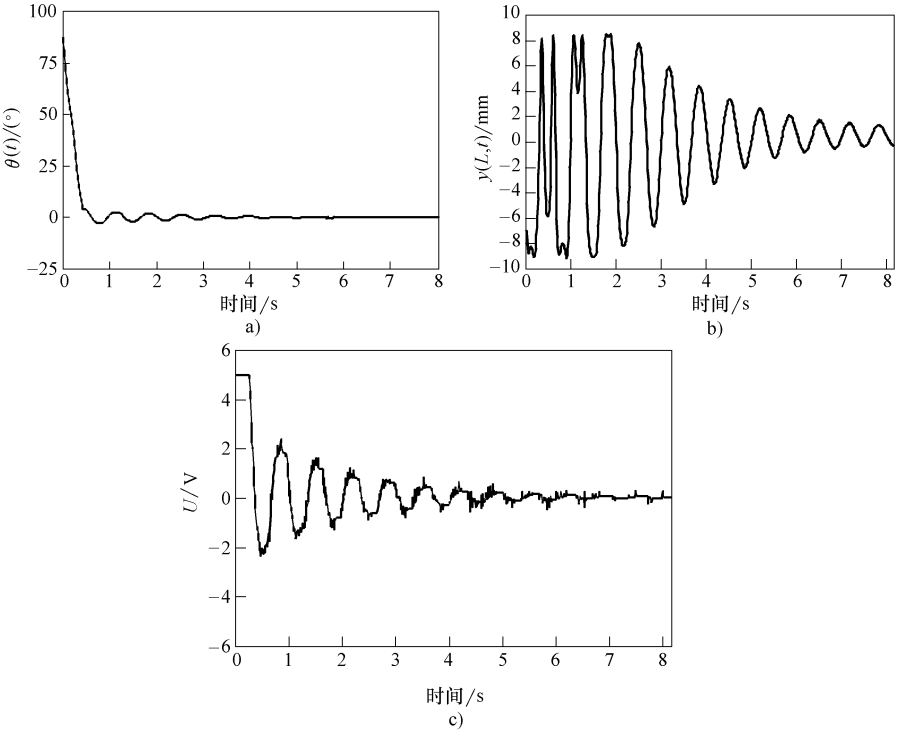


图 5-28　考虑臂弹性影响（$\mu = 0$）对应于控制器的系统实验响应
a）臂的角位置　b）臂末挠度　c）施加在直流伺服电动机上的控制电压
（来源：Jalili，N.，ASME J. Dyn. Syst. Meas. Coutrol，123，712-719，2001）

5.3.3.2　基于观测器的转换柔性梁的压电振动控制

许多工业机器人，尤其是那些广泛用于自动生产组装线的，都是笛卡尔类型（Ge 等，1998）。带有转化基础支持的柔性悬臂梁可以模拟成一个弹性的直角坐标机器人。

传统上，PD 控制策略是用来调节机器人手臂的运动。在轻量级的机器人中，因为沿着臂存在弹性分布，因而基础的运动会造成臂末端的不希望振动。为了消除这种振动，PD 控制器必须带着额外的补偿项升级。为了进一步提高抑制振动的性能（这也是一个高精密制造市场的要求），可利用第二个控制器，如依附臂表面的压电晶体（PZT）贴片执行机构（Oueini 等，1998；Ge 等，1999；Jalili 等，2002）。

在本节中，为了调整臂的运动，提出了基于观测器的控制策略（Liu 等，2002）。利用一个电动激振器控制该基础运动，与此同时压电晶体（PZT）贴片作动器粘在弹性梁表面，用于抑制臂的残余振动。这里的控制目标就是调整臂基础运动，同时又抑制臂的瞬态振动。为了实现这一目标，为调整基础运动选定简单的 PD 控制策略，并为压电晶体电压信号选择李亚普诺夫控制器。推荐的以能量为基础的李亚普诺夫函数的选择自然也就带来了与速度相关的信号，该信号在物理上是不可测量的（Dadfarnia 等，2003）。为了解决这个问题，设计以降维观测器来估计相关的信号速度。对于这一点，控制结构是基于二阶截断模态梁模型。

（1）数学建模

为了模型研究的目的，我们考虑一个均匀的柔性悬臂梁，并在其上面粘合一个压电晶体作动器。如图 5-29 所示，梁的一端被夹持到一个质量为 m_b 的移动基础上，并且一个集中质量 m_t 连接到了梁的自由端。梁的厚度是 t_b、长度为 L，而压电薄膜的厚度和长度分别为 t_b 和 $(l_2 - l_1)$。我们假设 PZT 和梁具有相同的宽度 b。压电晶体作动器是完全粘合在距离梁支撑处 l_1 位置上，作用于基础上的力 $f(t)$ 和施加于压电作动器上的输入电压 $U(t)$ 是唯一的外部影响。

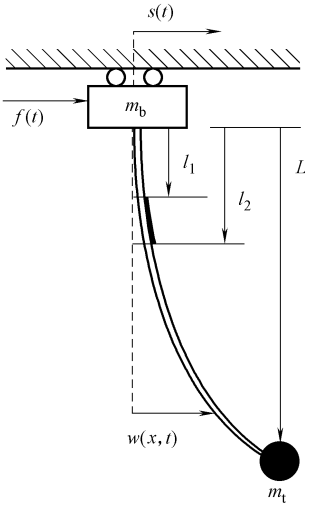


图 5-29 SCARA/直角坐标机器人的示意图（最后一个环节）

如图 5-30 所示，为了建立梁的坐标系统，取 x 轴为梁的纵向方向、z 轴指定为梁的横向方向，且 $z = 0$ 为梁的中面。这个坐标是固定在基础上的。

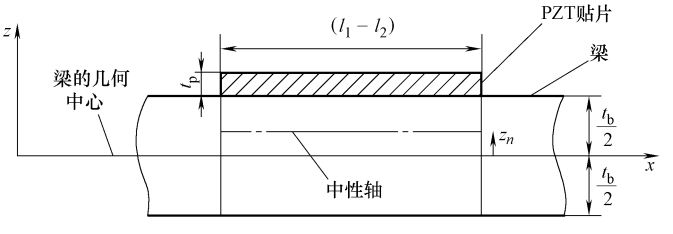


图 5-30 坐标系统

压电材料的基本关系或本构关系如下（Ikeda，1990）：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{cS} - \boldsymbol{hD} \tag{5-59}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{D} \tag{5-60}$$

式中，$\boldsymbol{F} \in \mathrm{R}^6$ 是应力矢量；$\boldsymbol{S} \in \mathrm{R}^6$ 是应变矢量；$\boldsymbol{c} \in \mathrm{R}^{6\times6}$是弹性刚度系数对称矩阵；$\boldsymbol{h} \in \mathrm{R}^{6\times3}$是耦合系数矩阵；$\boldsymbol{D} \in \mathrm{R}^3$ 为电位移矢量；$\boldsymbol{E} \in \mathrm{R}^3$ 是电场矢量；$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{R}^{3\times3}$是介电系数对称矩阵。

采用能量的方法来推导运动方程。忽略电方面的动能，系统的总动能表示为（Liu et al，2002；Dadfarnia 等，2004）：

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2}m_{\mathrm{b}}\dot{s}(t)^2 + \frac{1}{2}b\int_0^{l_1}\rho_{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}}[\dot{s}(t) + \dot{w}(x,t)]^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}b\int_{l_1}^{l_2}(\rho_{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}} + \rho_{\mathrm{p}}t_{\mathrm{p}})[\dot{s}(t) + \dot{w}(x,t)]^2\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}b\int_{l_2}^{L}\rho_{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}}[\dot{s}(t) + \dot{w}(x,t)]^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m_{\mathrm{t}}[\dot{s}(t) + \dot{w}(x,t)]^2 \\ &= \frac{1}{2}m_{\mathrm{b}}\dot{s}(t)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{L}\rho(x)[\dot{s}(t) + \dot{w}(x,t)]^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m_{\mathrm{t}}[\dot{s}(t) + \dot{w}(x,t)]^2 \end{aligned} \tag{5-61}$$

式中，

$$\begin{aligned} \rho(x) &= [\rho_{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}} + G(x)\rho_{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}}]b \\ G(x) &= H(x-l_1) - H(x-l_2) \end{aligned} \tag{5-62}$$

且 $H(X)$ 是海维赛德函数；ρ_{b} 和 ρ_{p} 分别是梁和压电晶体 PZT 的体密度。忽略由于平面运动、W'中二次高阶项引起的重力影响（Esmailzadeh 和 Jalili，1998b），系统总的势能可以表示为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{p}} &= \frac{1}{2}b\int_0^{l_1}\int_{-t_{\mathrm{b}}/2}^{t_{\mathrm{b}}/2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}b\int_{l_1}^{l_2}\int_{-t_{\mathrm{b}}/2}^{t_{\mathrm{b}}/2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}b\int_{l_1}^{l_2}\int_{t_{\mathrm{b}}/2}^{(t_{\mathrm{b}}/2)+t_{\mathrm{p}}}[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}]\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}b\int_{l_2}^{L}\int_{-t_{\mathrm{b}}/2}^{t_{\mathrm{b}}/2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{L}c(x)\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]^2\mathrm{d}x + h_1D_y(t)\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\beta_l(l_2-l_1)D_y(t)^2 \end{aligned} \tag{5-63}$$

其中，

$$c(x) = \frac{b}{3}\left\{\left(\frac{c_{11}^{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}}^3}{4}\right) + G(x)\left\{3c_{11}^{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}}z_{11}^2 + c_{11}^{\mathrm{p}}\left[t_{\mathrm{p}}^3 + 3t_{\mathrm{p}}\left(\frac{t_{\mathrm{b}}}{2} - z_{\mathrm{n}}\right)^2 + 3t_{\mathrm{p}}^2\left(\frac{t_{\mathrm{b}}}{2} - z_{\mathrm{n}}\right)\right]\right\}\right\} \tag{5-64}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{12}t_{\mathrm{p}}b(t_{\mathrm{p}} + t_{\mathrm{b}} - 2z_{\mathrm{n}})/2 \\ \beta_1 &= \beta_{22}bt_{\mathrm{p}} \end{aligned}$$

并且

$$z_{\mathrm{n}} = \frac{c_{11}^{\mathrm{p}}t_{\mathrm{p}}(t_{\mathrm{p}} + t_{\mathrm{b}})}{c_{11}^{\mathrm{b}}t_{\mathrm{b}} + c_{11}^{\mathrm{p}}t_{\mathrm{p}}}$$

式中，c_{11}^{b}和 c_{11}^{p}分别是梁和压电晶体 PZT 的刚度。

使用 AMM 方法，进行梁的振动分析，梁的挠度可写成

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \tag{5-65}$$

$$P(x,t) = s(t) + w(x,t)$$

使用拉格朗日方法，可以得到运动方程为

$$\left[m_b + m_t + \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x\right]\ddot{s}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} m_j \ddot{q}_j(t) = f(t) \tag{5-66a}$$

$$m_i \ddot{s}(t) + m_{di}\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 m_{di} q_i(t) + h_l[\phi_i'(l_2) - \phi_i'(l_1)]D_y(t) = 0 \tag{5-66b}$$

$$h_l \sum_{j=1}^{\infty} \{[\phi'_i(l_2) - \phi'_i(l_1)]q_j(t)\} + \beta_l(l_2 - l_1)D_y(t) = b(l_2 - l_1)U(t) \tag{5-66c}$$

其中

$$m_{dj} = \int_0^L \rho(x)\phi_j^2(x)\,\mathrm{d}x + m_t\phi_j^2(L)$$

$$m_j = \int_0^L \rho(x)\phi_j(x)\,\mathrm{d}x + m_t\phi_j(L) \tag{5-67}$$

根据式（5-66b），计算 Dy(t)，并把它代入式（5-66c）中，得到

$$m_i \ddot{s}(t) + m_{di}\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 m_{di} q_i(t) - \frac{h_l^2[\phi'_i(l_2) - \phi'_i(l_1)]}{\beta_l(l_2 - l_1)} \sum_{j=1}^{\infty} \{[\phi'_j(l_2) - \phi'_j(l_1)]q_j(t)\}$$

$$= -\frac{h_1 b[\phi'_i(l_2) - \phi'_i(l_1)]}{\beta_l} U(t) \qquad (i = 1,2,\cdots) \tag{5-68}$$

这些公式会用于推导控制器方程，将在下面讨论。

（2）控制器方程的推导

利用式（5-66a）和式（5-68），带压电晶体 PZT 的梁二阶模态截断模型方程缩减为

$$\left[m_b + m_t + \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x\right]\ddot{s}(t) + m_1\ddot{q}_1(t) + m_2\ddot{q}_2(t) = f(t) \tag{5-69a}$$

$$m_1 \ddot{s}(t) + m_{d1}\ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 m_{d1} q_1(t) - \frac{h_1^2[\phi'_1(l_2) - \phi'_1(l_1)]}{\beta_l(l_2 - l_1)}$$

$$\{[\phi'_1(l_2) - \phi'_1(l_1)]q_1(t) + [\phi'_2(l_2) - \phi'_2(l_1)]q_2(t)\} = -\frac{h_1 b[\phi'_1(l_2) - \phi'_1(l_1)]}{\beta_l} U(t) \tag{5-69b}$$

$$m_2 \ddot{s}(t) + m_{d2}\ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 m_{d2} \ddot{q}_2(t) - \frac{h_l^2[\phi'_2(l_2) - \phi'_2(l_1)]}{\beta_l(l_2 - l_1)}$$

$$\{[\phi'_1(l_2) - \phi'_1(l_1)]q_1(t) + [\phi'_2(l_2) - \phi'_2(l_1)]q_2(t)\} = -\frac{h_1 b[\phi'_2(l_2) - \phi'_2(l_1)]}{\beta_l} U(t) \tag{5-69c}$$

方程式（5-69）的方程可以写成下面的更紧凑的形式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\Delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{F}_e \tag{5-70}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\psi & m_1 & m_2\\ m_1 & m_{d1} & 0\\ m_2 & 0 & m_{d2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k_{11} & k_{12}\\ 0 & k_{21} & k_{22}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_e=\begin{Bmatrix}f(t)\\ \in_1 U(t)\\ \in_2 U(t)\end{Bmatrix},\ \boldsymbol{\Delta}=\begin{Bmatrix}s(t)\\ q_1(t)\\ q_2(t)\end{Bmatrix} \tag{5-71}$$

和

$$\psi=m_b+m_t+\int_0^L\rho(x)\,dx,\varepsilon_1=-\frac{h_l b}{\beta_l}[\phi_1'(l_2)-\phi_1'(l_1)],\varepsilon_2=-\frac{h_l b}{\beta_l}[\phi_2'(l_2)-\phi_2'(l_1)],$$

$$k_{11}=\omega_1^2 m_{d1}-\frac{h_l^2}{\beta_l(l_2-l_1)}[\phi_1'(l_2)-\phi_1'(l_1)]^2,k_{12}=-\frac{h_l^2}{\beta_l(l_2-l_1)}[\phi_1'(l_2)-\phi_1'(l_1)][\phi_2'(l_2)$$

$$-\phi_2'(l_1)],k_{22}=\omega_2^2 m_{d2}-\frac{h_l^2}{\beta_l(l_2-l_1)}[\phi_2'(l_2)-\phi_2'(l_1)]^2 \tag{5-72}$$

对于式（5-70）描述的系统，如果臂的基础力和 PZT 电压产生的力矩的控制律按下面选择，

$$f(t)=-k_p\Delta s-k_d\dot{s}(t) \tag{5-73}$$

$$U(t)=-k_v[\in_1\dot{q}_1(t)+\in_2\dot{q}_2(t)] \tag{5-74}$$

式中，k_p 和 k_d 是正的控制增益，$\Delta s=s(t)-s_d$，s_d 是设定的所需的点位置；$k_v>0$，是电压控制增益，那么闭环系统是稳定的，此外

$$\lim_{t\to\infty}\{q_1(t),q_2(t),\Delta s\}=0$$

详细证明过程参见 Dadfarnia 等（2004）文献。

（3）控制器实现

控制输入 $U(t)$ 需要从通常是无法测量的速度相关信号 $\dot{q}_1(t)$ 和 $\dot{q}_2(t)$ 中获取信息。Sun 和 Mills（1999）通过对加速度计测得的加速度信号积分解决了这个问题。然而，这种控制器的结构，在某些情况下可能会导致不稳定的闭环系统。本文设计了降维观测器来估计速度信号 $\dot{q}_1(t)$ 和 $\dot{q}_2(t)$。对于这，我们使用了三个可用的信号：基本位移 $s(t)$、臂末端挠度 $P(L,t)$，和梁根部应变 $\varepsilon(0,t)$，即

$$y_1=s(t)=x_1 \tag{5-75a}$$

$$y_2=P(L,t)=x_1+\phi_1(L)x_2+\phi_2(L)x_3 \tag{5-75b}$$

$$y_3=\varepsilon(0,t)=x_1+\frac{t_b}{2}[\phi_1''(0)x_2+\phi_2''(0)x_3] \tag{5-75c}$$

可以看出，开始时三个变量状态可以通过以下公式得到：

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{y} \tag{5-76}$$

由于该系统是可观测的，所以我们可以设计一个降维观测器来估计与速度有关的状态信号。定义 $\boldsymbol{X}_1=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ 和 $\boldsymbol{X}_2=[x_3\ x_4\ x_5]^T$，$X_2$ 的估计值可以设定为

$$\hat{\boldsymbol{X}}_2=\boldsymbol{L}_r\boldsymbol{y}+\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5-77}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{5-78}$$

式中，$\boldsymbol{L}_r \in \mathbf{R}^{3\times 3}$，$\boldsymbol{F} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$，$\boldsymbol{G} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$，$\boldsymbol{H} \in \mathbf{R}^{3\times 2}$，将由观测器极点位移确定。估计误差定义为

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{X}_2 - \hat{\boldsymbol{X}}_2 \tag{5-79}$$

估计误差的导数为

$$\dot{\boldsymbol{e}}_2 = \dot{\boldsymbol{X}}_2 - \dot{\hat{\boldsymbol{X}}}_2 \tag{5-80}$$

把系统的状态空间方程［式（5-77）和式（5-78）］代入方程式（5-80）并化简，得到

$$\dot{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{X}_1 + (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{12} - \boldsymbol{F})\boldsymbol{X}_2 + (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{H})\boldsymbol{u} \tag{5-81}$$

为了迫使估计误差 e_2 变成零，应选择矩阵 $\boldsymbol{F}$ 是赫尔维茨的，并且必须满足以下关系（Liu 等 2002）：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{12} \tag{5-82}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1 \tag{5-83}$$

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_r\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{C}_1^{-1} \tag{5-84}$$

根据理想的观测器极点位移要求选择矩阵 $\boldsymbol{F}$。一旦 $\boldsymbol{F}$ 已知，那么 $\boldsymbol{L}_r$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 可利用式（5-82）~式（5-84）分别确定。速度变量 $\hat{\boldsymbol{X}}_2$ 现在可以由式（5-77）和式（5-78）估计。

（4）数值模拟

为了显示控制器的有效性，图 5-29 所示的柔性梁结构被认为在梁表面上附着了压电晶体作动器。系统参数列于表 5-4 中。

首先，我们认为梁没有压电晶体 PZT 控制。我们采取的 PD 控制增益为 $k_p = 120$ 和 $k_d = 20$。图 5-31 显示了梁无压电晶体控制的结果（只有 PD 力控制为基础运动）。为了调查 PZT 控制器对梁振动的影响，我们考虑电压控制增益 $k_v = 2\times 10^7$。该系统对于带有基于两个模态模型的压电晶体作动器的控制器的响应如图 5-32 所示。对比图 5-31 和图 5-32 上梁的末端位移，表明利用压电晶体 PZT 作动器可以显著抑制梁的振动。

（5）控制实验

为了更好地演示控制器的有效性，构造和使用了一个实验来验证数值模拟结果。实验装置包括带有压电晶体 PZT 作动器和应变传感器附件的一根柔性梁，以及数据采集器、放大器、信号调理器和控制软件。如图 5-33 所示，该设备包括上下表面两侧粘贴有应变传感器和压电晶体 PZT 贴片执行机构的柔性铝梁。梁一端被具有坚固夹具的基础固定，而该基础由一个激振器驱动，激振器由连杆连接到臂底座。实验装置参数见表 5-4。

图 5-34 显示了实验的高层次的控制框图，其中激振器把输入控制力提供给基础，PZT 在梁上施加一个控制力矩。两个激光传感器测量基础的位置和梁末端位移。一个应变计传感器粘贴到梁基础附近，是用来测量动态应变的。以上三个信号通过 ISA MultiQ 数据采集卡传递给计算机。其余所需的控制器信号［式（5-66）］的确定在上节已做过解释。数据采集和控制算法是在一台 AMD Athlon1100 MHzPC 机、在 RT -Linux 的操作系统下运行完成的。MATLAB / Simulink 环境和实时 Linux Target 是用来实施控制器的。

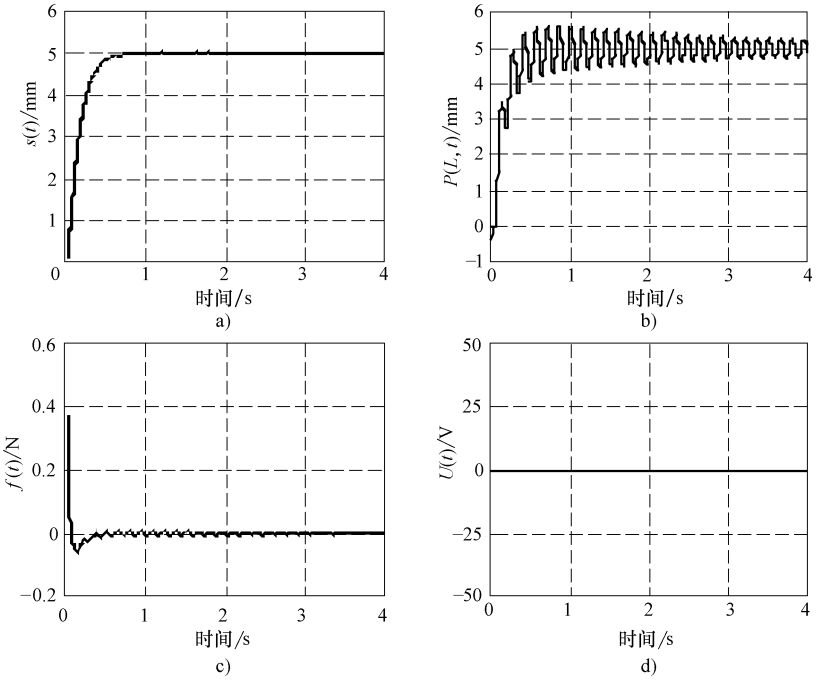


图 5-31　无压电晶体 PZT 控制情况下的数值模拟

a）基础运动　b）梁末端位移　c）控制力　d）压电晶体 PZT 电压

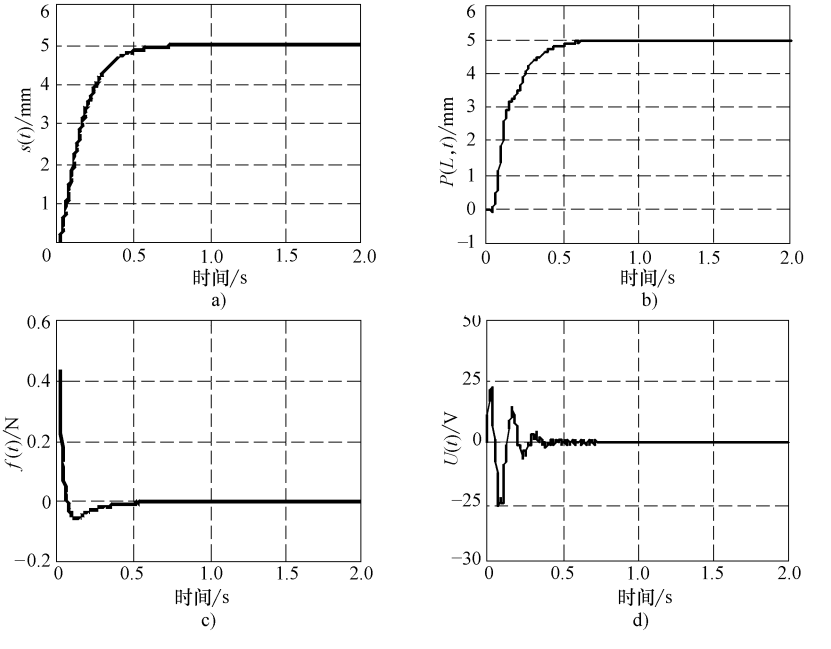


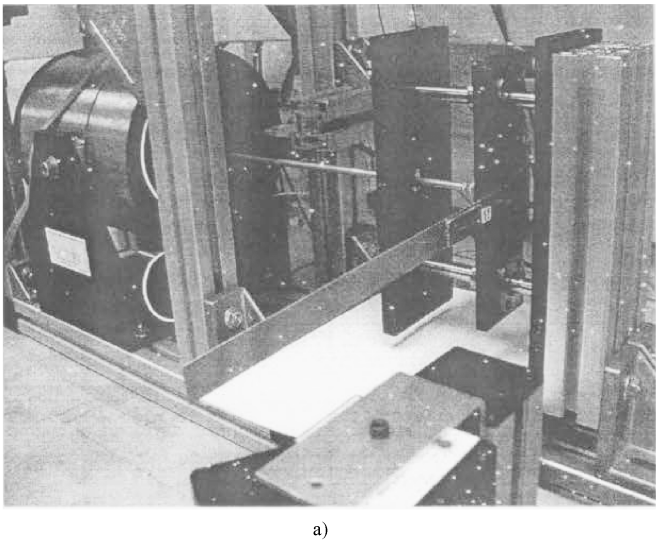
图 5-32　有压电晶体 PZT 控制情况下的数值模拟

a）基础运动　b）梁末端位移　c）控制力　d）压电晶体 PZT 电压

表 5-4 数值模拟和平移梁实验装置所使用的系统参数

特 性	符 号	数 值	单 位
梁杨氏模量	c_{11}^{b}	69×10^{9}	N/m^2
梁厚度	t_b	0.8125	m
梁和 PZT 宽度	b	20	m
梁长度	L	300	m
梁体密度	ρ_b	3960.0	kg/m^3
PZT 杨氏模量	c_{11}^{p}	66.47×10^{9}	N/m^2
PZT 耦合参数	h_{12}	5×10^{8}	V/m
PZT 反介电参数	β_{22}	4.55×10^{8}	m/F
PZT 厚度	t_p	0.2032	mm
PZT 长度	l_2-l_1	33.655	mm
PZT 在梁上的位置	l_1	44.64	mm
PZT 体密度	ρ_p	7750.0	kg/m^3
基础质量	m_b	0.455	kg
梁末端集中质量	m_t	0	kg

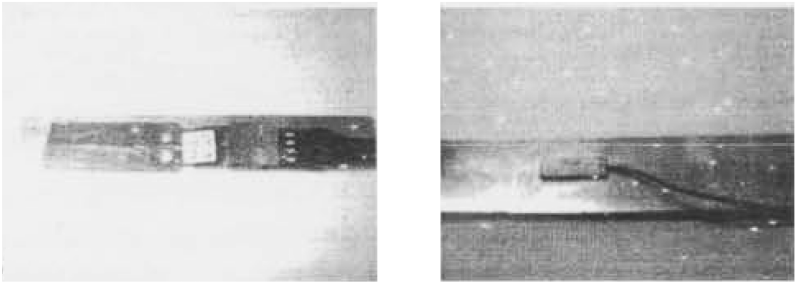
图 5-35 和图 5-36 分别描述了两种基础情况下（即没有 PZT 和有 PZT 控制）的实验结果。实验结果表明：有 PZT 控制的梁振动消除时间不到 1s，而不使用 PZT 控制的梁振动持续超过 6s。实验结果与模拟结果除了在运动开始有些差异外，其余是一致的。在运动开始存在轻微过冲和差异是由于实验（如激振器激振饱和的限制）和建模中未建模动力学（例如摩擦建模）的限制。然而，显而易见的是：PZT 电压控制可以显著抑制梁振动，尽管这种抑制和建模还不太完善。



a)

图 5-33 实验装置

a）整个系统



b) c)

图 5-33 实验装置（续）

b）PZT 作动器，ACX 型号 QP21B c）动态应变传感器（粘贴在梁的另一侧），型号 PCB 740B02

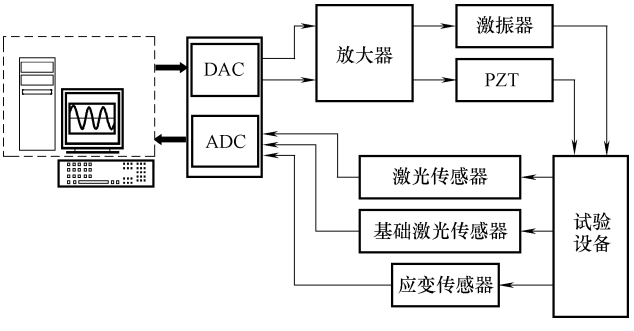


图 5-34 高层次的控制框图

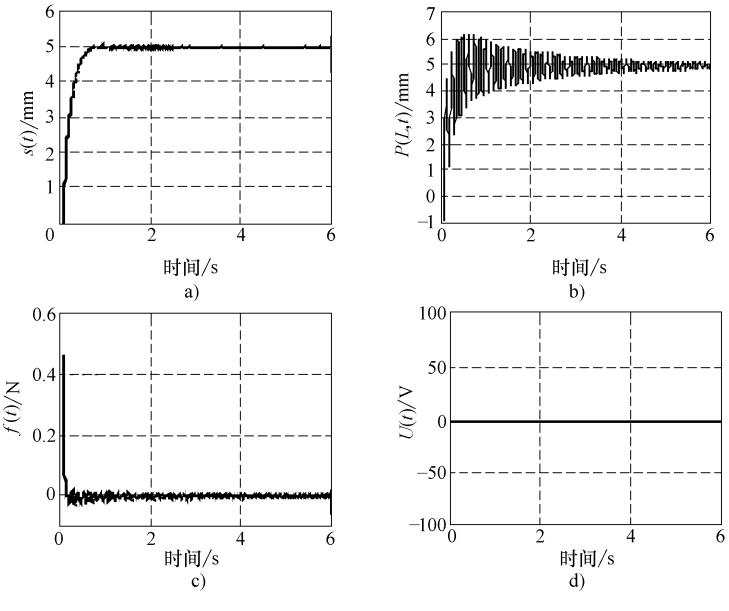


图 5-35 无压电晶体控制情况下的实验结果

a）基础运动 b）梁末端位移 c）控制力 d）压电晶体电压

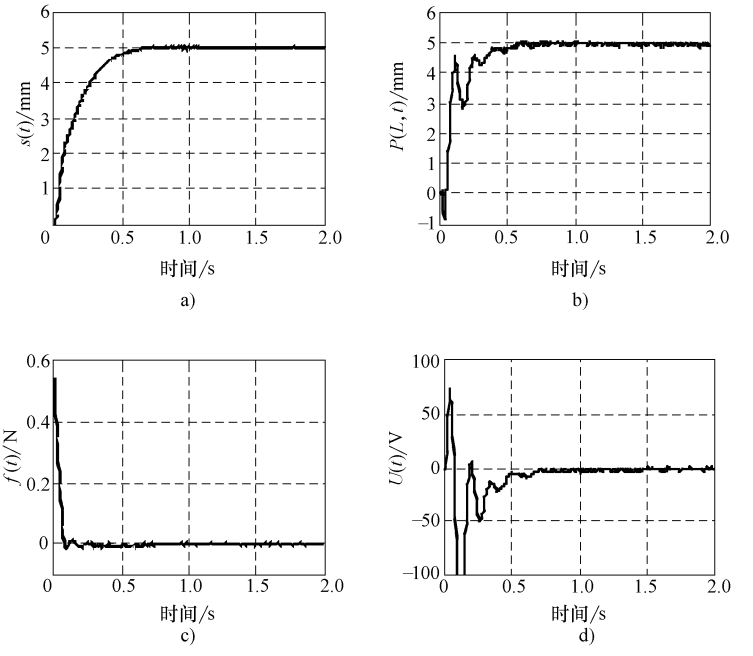


图 5-36 有压电晶体控制情况下的实验结果

a）基础运动 b）梁末端位移 c）控制力 d）压电晶体电压

5.4 实际考虑和相关主题

5.4.1 振动控制设计的步骤摘要

为了选择一个合适的振动控制系统尤其是隔振器，必须考虑很多的因素。

5.4.1.1 静挠度

负载自重下的振动控制系统静态挠度在相当程度上决定了要在隔振器中使用的材料类型。有机材料，如橡胶、软木假设使用上了，它们是能够承受非常大的应变。但是，如果大应变持续了一段时间，那么它们往往会发生漂移或蠕变。另一方面，当应力超过材料的屈服应力时，金属弹簧会发生永久变形，但当应力维持在低于屈服应力时，漂移或蠕变很小。

5.4.1.2 横向刚度

当负载比较大而静挠度较小时，压缩中弹性材料的应变很小。这样的应用很难设计到小载荷场合，除非所需的静挠度很小；否则，小面积和大厚度会导致不稳定的条件。在相当程度上，通过使用海绵橡胶、低模量材料可以克服这种限制。在一般情况下，当负载小时，最好使用传递剪切负荷的橡胶弹簧。

5.4.1.3 环境条件

振动控制系统遭受到恶劣的环境条件是非常常见的。特别是在军事应用中，除了暴露在像臭氧、火箭燃料等物质中外，还会遇到各种极端环境温度。有机材料通常比金属材料更容易受到这些环境条件的影响。然而，由于有机材料优越的机械性能，如重量轻、尺寸小、阻尼大，以及在冲击下并能够存储大量的能量，所以人们正在研制能够承受恶劣条件的有机材料。

5.4.1.4 阻尼特性

在大部分的振动控制应用中，激励覆盖了很宽的频率范围且具有随机属性，因而要求振动控制系统具有足够的阻尼。与金属弹簧相比，合成橡胶具有非常好的阻尼特性，并且它们还消除了在高频时发生的驻波的麻烦。如果一个金属弹簧需要用在高频率下隔振的振动控制应用中，那么应用带有金属弹簧的橡胶垫系列是很常见的，且由于阻尼材料的叠加，也就导致了振动阻尼。

5.4.1.5 重量和空间的限制

弹性材料承载量是由存储的能量所决定的。在大多数情况下，相对于静挠度而言，振动幅值往往相对较小，并且材料的数量可以通过材料中储存的能量与材料在振动控制系统中所完成的功等量换算来计算。

5.4.1.6 动态刚度

在使用橡胶等有机材料的情况下，使用从弹簧的静挠度试验确定刚度、计算固有频率几乎总是比振动的经验值要低，即动态模量大于静态模量。动态和静态模量的比例一般为1~2。在许多振动控制应用中，基于振动控制系统（隔振器）直接安装设备是行不通的，相反，要采用由隔振器支撑的通常是混凝土或重钢制造的一个重的刚体。

5.4.2 未来趋势和发展

近年来，在各种振动控制系统的设计和实施中，人们一直存在相当大的兴趣。在多变量控制的设计方法和现代控制算法的微处理器实施方面的最新进展打开了使用外部控制的被动系统设计的新时代，这些进展有：模糊推理（Yoshimura，1998）、自适应算法（Venhovens，1994）、观测器设计（Hedrick 等，1994）等。

观测在自适应和非线性控制综合领域发生的大量的理论进展（Astrom 和 Wittenmark，1989；Alleyne 和 Hedrick，1995），预计这些技术将在先进的振动控制系统设计中应用。然而，在实际执行中，最好简化这些策略，即可带来简单软件实现。忽视一些性能要求的次优策略可以作为简化方案。

参 考 文 献

Abe, M. and Igusa, T., Semiactive dynamic vibration absorbers for controlling transient response, *J. Sound Vib.*, 198, 5, 547–569, 1996.

Alleyne, A. and Hedrick, J.K., Nonlinear adaptive control of active suspensions, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 3, 94–101, 1995.

Astrom, J.J. and Wittenmark, B. 1989. *Adaptive Control*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Austin, S.A., The vibration damping effect of an electrorheological fluid, *ASME J. Vib. Acoust.*, 115, 136–140, 1993.

Banks, H.T. and Ito, K., A unified framework for approximation in inverse problems for distributed parameter systems, *Control Theor. Adv. Technol.*, 4, 73–90, 1988.

Banks, H.T. and Kunisch, K. 1989. *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*, Birkhauser, Boston, MA.

Bayo, E., A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot, *J. Robotic Syst.*, 4, 63–75, 1987.

Cannon, R.H. Jr. and Schmitz, E., Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot, *Int. J. Robotics Res.*, 3, 62–75, 1984.

Chalhoub, N.G. and Ulsoy, A.G., Control of flexible robot arm: experimental and theoretical results, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 109, 299–309, 1987.

Choi, S.B., Vibration control of flexible structures using ER dampers, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 121, 134–138, 1999.

Crosby, M. and Karnopp, D.C. 1973. The active damper—a new concept for shock and vibration control, *Shock Vibration Bulletin*, Part H, Washington, DC.

Dadfarnia, M., Jalili, N., Xian, B. and Dawson, D.M. 2003. Lyapunov-based piezoelectric control of flexible cartesian robot manipulators, In *Proceedings of the 22nd American Control Conference (ACC'03)*, Denver, CO.

Dadfarnia, M., Jalili, N., Liu, Z., and Dawson, D.M., An observer-based piezoelectric control of flexible cartesian robot manipulators: theory and experiment, *J. Control Eng. Practice*, 12, 1041–1053, 2004.

de Querioz, M.S., Dawson, D.M., Agrawal, M., and Zhang, F., Adaptive nonlinear boundary control of a flexible link robot arm, *IEEE Trans. Robotics Automat.*, 15, 779–787, 1999.

de Querioz, M.S., Dawson, D.M., Nagarkatti, S.P., and Zhang, F. 2000. *Lyapunov-Based Control of Mechanical Systems*, Birkhauser, Boston, MA.

Dimarogonas-Andrew, D. and Kollias, A., Smart electrorheological fluid dynamic vibration absorber, *Intell. Struct. Mater. Vib. ASME Des. Div.*, 58, 7–15, 1993.

Dowell, D.J., Cherry, S. 1994. Semiactive friction dampers for seismic response control of structures, Vol. 1, pp. 819–828. In *Proceedings of the Fifth US National Conference on Earthquake Engineering*, Chicago, IL.

Elmali, H. and Olgac, N., Sliding mode control with perturbation estimation (SMCPE): a new approach, *Int. J. Control*, 56, 923–941, 1992.

Emura, J., Kakizaki, S., Yamaoka, F., and Nakamura, M. 1994. Development of the SA suspension system based on the sky-hook damper theory, *SAE* Paper No. 940863.

Esmailzadeh, E. and Jalili, N., Optimal design of vibration absorbers for structurally damped Timoshenko beams, *ASME J. Vib. Acoust.*, 120, 833–841, 1998a.

Esmailzadeh, E. and Jalili, N., Parametric response of cantilever timoshenko beams with tip mass under harmonic support motion, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 33, 765–781, 1998b.

Filipović, D. and Schröder, D., Vibration absorption with linear active resonators: continuous and discrete time design and analysis, *J. Vib. Control*, 5, 685–708, 1999.

Frahm, H., Devices for damping vibrations of bodies, US Patent #989958, 1911.

Franchek, M.A., Ryan, M.W., and Bernhard, R.J., Adaptive-passive vibration control, *J. Sound Vib.*, 189, 565–585, 1995.

Fujita, T., Katsu, M., Miyano, H., and Takanashi, S., Fundamental study of active-passive mass damper using *XY*-motion mechanism and hydraulic actuator for vibration control of tall building, *Trans. Jpn Soc. Mech. Engrs*, Part C, 57, 3532–3539, 1991.

Garcia, E., Dosch, J., and Inman, D.J., The application of smart structures to the vibration suppression problem, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 3, 659–667, 1992.

Ge, S.S., Lee, T.H., and Zhu, G., A nonlinear feedback controller for a single-link flexible manipulator based on a finite element method, *J. Robotic Syst.*, 14, 165–178, 1997.

Ge, S.S., Lee, T.H., and Zhu, G., Asymptotically stable end-point regulation of a flexible SCARA/cartesian robot, *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 3, 138–144, 1998.

Ge, S.S., Lee, T.H., and Gong, J.Q., A robust distributed controller of a single-link SCARA/cartesian smart materials robot, *Mechatronics*, 9, 65–93, 1999.

Hedrick, J.K., Rajamani, R., and Yi, K., Observer design for electronic suspension applications, *Vehicle Syst. Dyn.*, 23, 413–440, 1994.

Horton, D.N. and Crolla, D.A., Theoretical analysis of a SA suspension fitted to an off-road vehicle, *Vehicle Syst. Dyn.*, 15, 351–372, 1986.

Hrovat, D., Barker, P., and Rabins, M., Semiactive versus passive or active tuned mass dampers for structural control, *J. Eng. Mech.*, 109, 691–705, 1983.

Hrovat, D., Margolis, D.L., and Hubbard, M., An approach toward the optimal SA suspension, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 110, 288–296, 1988.

Hubard, M. and Marolis, D. 1976. The SA spring: is it a viable suspension concept?, pp. 1–6. In *Proceedings of the Fourth Intersociety Conference on Transportation*, Los Angeles, CA.

Ikeda, T. 1990. *Fundamental of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, New York.

Inman, D.J. 1994. *Engineering Vibration*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Jalili, N., A new perspective for semi-automated structural vibration control, *J. Sound Vib.*, 238, 481–494, 2000.

Jalili, N., An infinite dimensional distributed base controller for regulation of flexible robot arms, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 123, 712–719, 2001.

Jalili, N., A comparative study and analysis of SA vibration-control systems, *ASME J. Vib. Acoust.*, 124, 593–605, 2002.

Jalili, N., Dadfarnia, M., Hong, F., and Ge, S.S. 2002. An adaptive non model-based piezoelectric control of flexible beams with translational base, pp. 3802–3807. In *Proceedings of the American Control Conference (ACC'02)*, Anchorage, AK.

Jalili, N., Elmali, H., Moura, J., and Olgac, N. 1997. Tracking control of a rotating flexible beam using frequency-shaped sliding mode control, pp. 2552–2556. In *Proceedings of the 16th American Control Conference (ACC'97)*, Albuquerque, NM.

Jalili, N. and Esmailzadeh, E., Adaptive-passive structural vibration attenuation using distributed absorbers, *J. Multi-Body Dyn.*, 216, 223–235, 2002.

Jalili, N. and Fallahi, B., Design and dynamics analysis of an adjustable inertia absorber for SA structural vibration attenuation, *ASCE J. Eng. Mech.*, 128, 1342–1348, 2002.

Jalili, N., Fallahi, B., and Kusculuoglu, Z.K., A new approach to SA vibration suppression using adjustable inertia absorbers, *Int. J. Model. Simulat.*, 21, 148–154, 2001.

Jalili, N. and Olgac, N., Time-optimal/sliding mode control implementation for robust tracking of uncertain flexible structures, *Mechatronics*, 8, 121–142, 1998a.

Jalili, N. and Olgac, N. 1998b. Optimum delayed feedback vibration absorber for MDOF mechanical structures, In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision Control* (CDC'98), Tampa, FL.

Jalili, N. and Olgac, N., Multiple identical delayed-resonator vibration absorbers for multi-DoF mechanical structures, *J. Sound Vib.*, 223, 567–585, 1999.

Jalili, N. and Olgac, N., Identification and re-tuning of optimum delayed feedback vibration absorber, *AIAA J. Guidance Control Dyn.*, 23, 961–970, 2000a.

Jalili, N. and Olgac, N., A sensitivity study of optimum delayed feedback vibration absorber, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 121, 314–321, 2000b.

Junkins, J.L. and Kim, Y. 1993. *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*. AIAA Educational Series, Washington, DC.

Karnopp, D., Design principles for vibration-control systems using SA dampers, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 112, 448–455, 1990.

Karnopp, D.C., Crodby, M.J., and Harwood, R.A., Vibration control using SA force generators, *J. Eng. Ind.*, 96, 619–626, 1974.

Kim, K. and Jeon, D., Vibration suppression in an MR fluid damper suspension system, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 10, 779–786, 2000.

Knowles, D., Jalili, N., and Khan, T. 2001a. On the nonlinear modeling and identification of piezoelectric inertial actuators, In *Proceedings of the 2001 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (IMECE'01), New York.

Knowles, D., Jalili, N., and Ramadurai, S. 2001b. Piezoelectric structural vibration control using active resonator absorber, In *Proceedings of the 2001 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (IMECE'01), New York.

Korenev, B.G. and Reznikov, L.M. 1993. *Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications*, Wiley, Chichester, England.

Lee-Glauser, G.J., Ahmadi, G., and Horta, L.G., Integrated passive/active vibration absorber for multistory buildings, *ASCE J. Struct. Eng.*, 123, 499–504, 1997.

Liu, Z., Jalili, N., Dadfarnia, M., and Dawson, D.M. 2002. Reduced-order observer based piezoelectric control of flexible beams with translational base, In *Proceedings of the 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (IMECE'02), New Orleans, LA.

Liu, J., Schönecker, A., and Frühauf, U. 1997. Application of discrete Fourier transform to electronic measurements, pp. 1257–1261. In *International Conference on Information, Communications and Signal Processing*, Singapore.

Liu, H.J., Yang, Z.C., and Zhao, L.C., Semiactive flutter control by structural asymmetry, *J. Sound Vib.*, 229, 199–205, 2000.

Luo, Z.H., Direct strain feedback control of flexible robot arms: new theoretical and experimental results, *IEEE Trans. Automat. Control*, 38, 1610–1622, 1993.

Luo, Z.H., Guo, B.Z., and Morgul, O. 1999. *Stability and Stabilization of Finite Dimensional Systems with Applications*, Springer, London.

Margolis, D., Retrofitting active control into passive vibration isolation systems, *ASME J. Vib. Acoust.*, 120, 104–110, 1998.

Meirovitch, L. 1986. *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Miller, L.R. and Nobles, C.M. 1988. The design and development of a SA suspension for military tank, *SAE* Paper No. 881133.

Moura, J.T., Roy, R.G., and Olgac, N., Frequency-shaped sliding modes: analysis and experiments, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 5, 394–401, 1997.

Nemir, D., Lin, Y., and Osegueda, R.A., Semiactive motion control using variable stiffness, *ASCE J. Struct. Eng.*, 120, 1291–1306, 1994.

Olgac, N., Delayed resonators as active dynamic absorbers, US Patent #5431261, 1995.

Olgac, N., Elmali, H., Hosek, M., and Renzulli, M., Active vibration control of distributed systems using delayed resonator with acceleration feedback, *ASME J. Dyn. Syst., Meas. Control*, 119, 380–389, 1997.

Olgac, N., Elmali, H., and Vijayan, S., Introduction to dual frequency fixed delayed resonator (DFFDR), *J. Sound Vib.*, 189, 355–367, 1996.

Olgac, N. and Holm-Hansen, B., Novel active vibration absorption technique: delayed resonator, *J. Sound Vib.*, 176, 93–104, 1994.

Olgac, N. and Holm-Hansen, B., Tunable active vibration absorber: the delayed resonator, *ASME J. Dyn. Syst., Meas. Control*, 117, 513–519, 1995.

Olgac, N. and Jalili, N., Modal analysis of flexible beams with delayed-resonator vibration absorber: theory and experiments, *J. Sound Vib.*, 218, 307–331, 1998.

Olgac, N. and Jalili, N., Optimal delayed feedback vibration absorber for flexible beams, *Smart Struct.*, 65, 237–246, 1999.

Oueini, S.S., Nayfeh, A.H., and Pratt, J.R., A nonlinear vibration absorber for flexible structures, *Nonlinear Dyn.*, 15, 259–282, 1998.

Petek, N.K., Shock absorbers uses electrorheological fluid, *Automot. Eng.*, 100, 27–30, 1992.

Petek, N.K., Romstadt, D.L., Lizell, M.B., and Weyenberg, T.R. 1995. Demonstration of an automotive SA suspension using electro-rheological fluid, *SAE* Paper No. 950586.

Puksand, H., Optimum conditions for dynamic vibration absorbers for variable speed systems with rotating and reciprocating unbalance, *Int. J. Mech. Eng. Educ.*, 3, 145–152, 1975.

Renzulli, M., Ghosh-Roy, R., and Olgac, N., Robust control of the delayed resonator vibration absorber, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 7, 683–691, 1999.

Shaw, J., Adaptive vibration control by using magnetostrictive actuators, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 9, 87–94, 1998.

Singh, T., Golnaraghi, M.F., and Dubly, R.N., Sliding-mode/shaped-input control of flexible/rigid link robots, *J. Sound Vib.*, 171, 185–200, 1994.

Sinha, A., Optimum vibration control of flexible structures for specified modal decay rates, *J. Sound Vib.*, 123, 185–188, 1988.

Skaar, S.B. and Tucker, D., Point Control of a one-link flexible manipulator, *J. Appl. Mech.*, 53, 23–27, 1986.

Snowdon, J.C. 1968. *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*, Wiley, New York.

Soong, T.T. and Constantinou, M.C. 1994. *Passive and Active Structural Control in Civil Engineering*, Springer, Wien.

Spencer, B.F., Yang, G., Carlson, J.D., and Sain, M.K. 1998. Smart dampers for seismic protection of structures: a full-scale study, In *Proceedings of the Second World Conference on Structural Control*, Kyoto, Japan.

Stribersky, A., Muller, H., and Rath, B., The development of an integrated suspension control technology for passenger trains, *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 212, 33–41, 1998.

Sturk, M., Wu, M., and Wong, J.Y., Development and evaluation of a high voltage supply unit for electrorheological fluid dampers, *Vehicle Syst. Dyn.*, 24, 101–121, 1995.

Sun, J.Q., Jolly, M.R., and Norris, M.A., Passive, adaptive, and active tuned vibration absorbers — a survey, *ASME Trans.*, 117, 234–242, 1995 (Special 50th Anniversary, Design issue).

Sun, D. and Mills, J.K. 1999. PZT actuator placement for structural vibration damping of high speed manufacturing equipment, pp. 1107–1111. In *Proceedings of the American Control Conference* (ACC'99), San Diego, CA.

Sun, Y. and Parker, G.A., A position controlled disc valve in vehicle SA suspension systems, *Control Eng. Practice*, 1, 927–935, 1993.

Tanaka, N. and Kikushima, Y., Impact vibration control using a SA damper, *J. Sound Vib.*, 158, 277–292, 1992.

Venhovens, P.J., The development and implementation of adaptive SA suspension control, *Vehicle Syst. Dyn.*, 23, 211–235, 1994.

Walsh, P.L. and Lamnacusa, J.S., A variable stiffness vibration absorber for minimization of transient vibrations, *J. Sound Vib.*, 158, 195–211, 1992.

Wang, K.W., Kim, Y.S., and Shea, D.B., Structural vibration control via electrorheological-fluid-based actuators with adaptive viscous and frictional damping, *J. Sound Vib.*, 177, 227–237, 1994.

Wang, K.W., Lai, J.S., and Yu, W.K., An energy-based parametric control approach for structural vibration suppression via SA piezoelectric networks, *ASME J. Vib. Acoust.*, 118, 505–509, 1996.

Warburton, G.B. and Ayorinde, E.O., Optimum absorber parameters for simple systems, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 8, 197–217, 1980.

Yeung, K.S. and Chen, Y.P., A new controller design for manipulators using the theory of variable structure systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 33, 200–206, 1988.

Yeung, K.S. and Chen, Y.P., Regulation of a one-link flexible robot arm using sliding mode control technique, *Int. J. Control*, 49, 1965–1978, 1989.

Yoshimura, T., A SA suspension of passenger cars using fuzzy reasoning and the filed testing, *Int. J. Vehicle Des.*, 19, 150–166, 1998.

Yuh, J., Application of discrete-time model reference adaptive control to a flexible single-link robot, *J. Robotic Syst.*, 4, 621–630, 1987.

Zhu, G., Ge, S.S., Lee, T.H. 1997. Variable structure regulation of a flexible arm with translational base, pp. 1361–1366. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA.

6 直升机旋翼调谐

摘要

直升机离厂之前其旋翼需要加以调谐，以保证直升机的振动水平能够满足不同飞行状态的需求。对此，依据振动幅值和相位，有三种不同的调谐可以施用于每个旋翼上。在这一章中（同样参见第 7 章）将会讨论针对叶片调谐的基本概念，并且会介绍三种在根本途径上有所差异的方法。首先，介绍基于神经网络的方法，即把前馈网络训练成一种反向模型，其叶片调谐对直升机振动有影响，并且使用这一反向模型来决定叶片的调谐。另外一种方法是基于概率的方法，这种方法基于振动部件概率密度的随机模型最大化了成功选择叶片调谐的可能性。第三种方法是自适应方法，其使用了一个区间模型来代表叶片调谐对直升机振动影响的范围，并以此来处理飞机振动所蕴含的非线性和随机性。这种方法包含了过程先验知识，即通过依据叶片调谐和直升机振动之间的敏感度系数来定义区间模型的初始系数，然后将这些系数转化进区间中，并且在每次调谐后更新这些系数来提升这一模型估测的准确性。旋翼调整的细节会通过一个案例学习来进行详细介绍，这个案例将会说明自适应方法如何应用。

6.1 概述

直升机旋翼调谐（轨迹和平衡）是一个为了降低飞机振动和旋翼振动发散而调整旋翼叶片的过程。下面介绍用于 Sikorsky 黑鹰直升机（H-60）的旋翼调整。最初的测量是让飞机通过六种不同的状态，在这期间旋翼的轨迹和振动的测量值会被记录下来。光学传感器会观测叶片的竖直位置并由此实现对旋翼的轨迹观测。振动则由两个固定在座舱的加速度计 A 和 B 根据每个叶片旋转的频率测得（图 6-1，细节 B）。这些振动数据矢量组合成为两个部分：A + B 代表直升机的竖直振动；A-B 代表直升机的侧倾运动。在表 6-1 中给出了一个包含六种飞行状态的峰值振动水平和相对参考叶片的峰值角度位置数据，并且包含了一个轨迹数据的样本。图 6-1 中的六种飞行状态是：地面（fpm）、盘旋（hov）、80 节（80）、120 节（120）、145 节（145）以及最大水平速度（vh）。轨迹数据表明了每个叶片相对于平均位置的竖直位置。

为了保证轨迹和每次旋转的振动落在技术要求内，有三种形式的调整可用于旋翼系统：俯仰控制杆调整、配平片调整以及平衡重量调整（图 6-1）。通过一定数量的凹槽来延伸或者收缩俯仰控制杆，从而改变旋翼叶片俯仰。正向推杆调整意味着延伸。配平片是旋翼叶片拖尾边缘的可调整表面，它影响了机翼空气动力学俯仰力矩，并最终影响

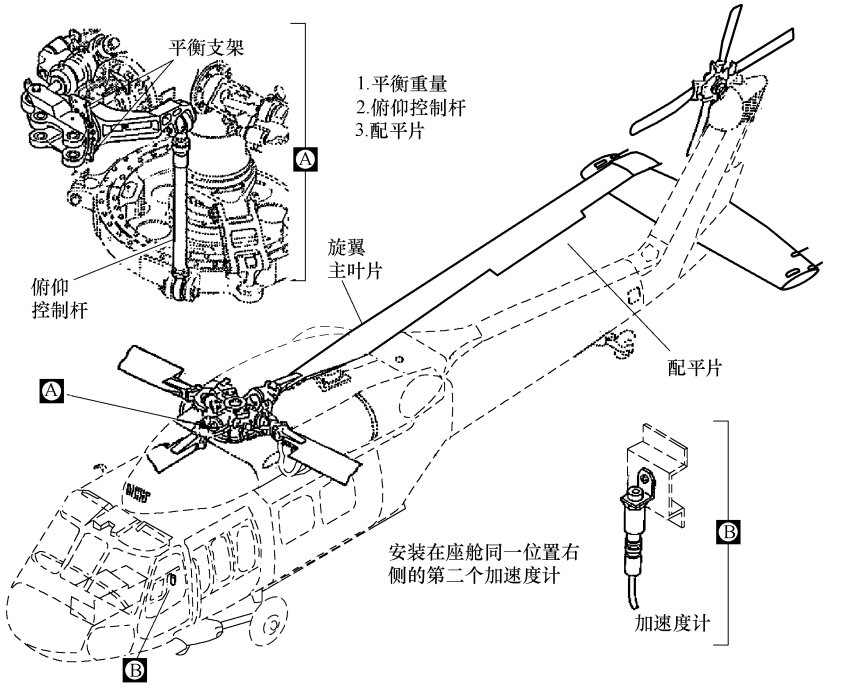


图 6-1 飞机上加速度计 A 和 B 的安装位置、旋翼叶片调整（推杆、配平片和旋翼轮毂重量）的图解

表 6-1 飞行试验时记录的轨迹和平衡的一般数据

飞行状态	振动			
	A + B		A – B	
	幅值/(in/s)	角度(°)	幅值/(in/s)	角度/(°)
fpm	0.19	332	0.38	272
hov	0.07	247	0.10	217
80	0.02	86	0.04	236
120	0.04	28	0.04	333
145	0.02	104	0.07	162
vh	0.10	312	0.12	211
飞机状态	轨迹/mm			
	叶片编号 1	叶片编号 2	叶片编号 3	叶片编号 4
fpm	–2	3	1	–2
hov	–1	3	0	–2
80	1	11	1	–13
120	2	13	–1	–14
145	5	18	–3	–20
vh	2	13	–1	–14

了它们的振动特性。配平片调整是以千分之一英寸来度量的，正负向变化分别代表着向上和向下配平。最后，通过添加或移除旋翼浆毂处平衡重量来改变叶片质量，实现调节振动。平衡重量以盎司来测量，正调整代表着增加重量。在 Sikorsky 黑鹰 H-60 直升机的例子中，该旋翼有四个主旋翼叶片，总共 12 种调整旋翼的方式（即是说，每个叶片有三种调整）。在这些调整之中，平衡重量主要影响了地面振动，因此它们一般不用于飞行中的调整。此外，因为四叶片飞机结构中旋翼叶片的对称性对反相叶片提供了完全相等的调整效果，所以反相叶片对的叶片调整的结合形式可以作为输入。据此，输入矢量可以定义为

$$\Delta \boldsymbol{x} = [\,\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \Delta x_4\,]^{\mathrm{T}} \tag{6-1}$$

其中 Δx_1 和 Δx_3 被定义为分别针对于 1/3 叶片组合和 2/4 叶片组合的（简单）配平片调整（ΔT），而 Δx_2 和 Δx_4 代表着分别针对于 1/3 叶片组合和 2/4 叶片组合的俯仰控制杆调整（ΔP）。叶片组合和叶片单个调整之间的关系具有以下形式

$$\Delta x_1 = \Delta T_3 - \Delta T_1 \tag{6-2}$$

$$\Delta x_2 = \Delta P_3 - \Delta P_1 \tag{6-3}$$

$$\Delta x_3 = \Delta T_4 - \Delta T_2 \tag{6-4}$$

$$\Delta x_4 = \Delta P_4 - \Delta P_2 \tag{6-5}$$

在理想情况下，对任何两个不同尾数的飞机施加完全相等的调整应该带来完全相等的振动改变。但在实际情况中，不同尾数的等同调整出现了振动改变量存在着相当显著的不一致性。这可能更多源自于飞行条件的不规则性，包括天气和叶片调整的误差，而不是因为诸如飞机和旋翼叶片的不相似性引起的。

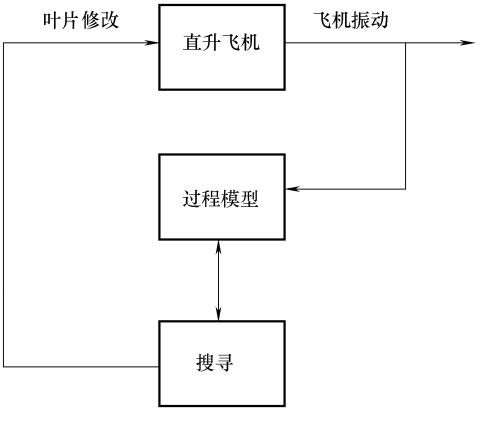


图 6-2　当前各种方法所用的策略

实质上，当前所有旋翼轨迹和平衡系统都依赖于图 6-2 中所展示的策略，即以此策略刚刚完成的飞行测量被用作寻找新的叶片调整的基础。对于叶片调整的寻找由“过程模型”引导（图 6-2），其代表了振动改变和叶片调整之间的关系。旋翼调谐的一个困难之处在于超过自由度数的方程（4 个输入来控制 24 个输出），其转变成了一个一对多个的映射。另一个困难之处是源自于振动测量中出现的大的噪声。

传统的旋翼调整方法运用了线性关系来定义过程模型，并且运用模型的反演来简化搜寻过程。因此，传统方法的缺点在于其忽视了轨迹和平衡潜在的非线性关系与振动噪声，以及对由于考虑最极端的振动组成成分、需要加快模型反演综合结论的有限能力。在试图囊括过程中潜在非线性关系的尝试中，Taitel 等（1995）用实际的轨迹和平衡数据训练一组神经网络将振动测量映射到叶片调整上，并同时评估了结论的优良性。实际

上，他们基于这些结果发展出了一个反向模型，从历史轨迹和平衡数据上来说这个结论都是有效的，并且他们提供了一个正向的模型来评估这个结论。这个模型的潜在优势是可以在过去的结论中插入某些东西来得到潜在的非线性关系和振动噪声。它的缺点在于它只能运用于有大量轨迹和平衡历史数据的直升机，并且它的结论只能局限于历史数据。

另一个由传统方法分离出来的方法是 Ventres 和 Hayden（2000）所提出来的，他们在频率领域定义了叶片调整和振动的关系，并且把这些关系引伸到了高阶振动。他们采用最优化方法搜寻一个能够减少每次旋转产生的振动以及更高阶振动的调整。据此，这一方法有能力提供一个全面的结论，但是它太忽视了叶片调整和飞机振动之间潜在的非线性关系以及测量中的噪声。

最新的关于旋翼调整的结论是出自于 wang 等（2005a，2005b），它被设计来得到振动的随机性和调谐过程中潜在的非线性关系。第一个结论，是基于概率的方法，潜在的模型包含了两个组成成分：一个确定成分和一个概率成分。这一方法依赖于概率模型来估测振动的测量值满足技术要求的可能性，并由此来寻找能最大化这可能性的叶片调整。概率模型中的可能性测度是依据于从历史轨迹和平衡数据得到的概率分布计算得到的。第二个结论是一个自适应方法，它运用了区间模型来处理过程中潜在的非线性关系和振动噪声。这一方法同样包含了针对旋翼调整过程学习提供适应，依据叶片调整和直升机振动之间的灵敏度系数来初始化区间模型的系数。然而，它在第一次迭代后就修改了这些系数以使得其更好地代表获得的振动测量值。这一方法，在搜寻合适的叶片调整中，考虑了从所有飞行状态获得的振动数据，因此它有能力提供综合结论。这一章节的剩余部分将讨论上述三种方法，来作为各种适合的旋翼调整结论的代表，并且最后会有一个案例分析来说明自适应方法的应用。

6.2 基于神经网络的调谐

一如前文所提，针对于四叶片飞行器的旋翼调谐应指定一系列简要的调整来减少振动，然后从细节上扩展这些调整来满足轨迹需求。同样的策略也被用于神经网络系统中，如图 6-3 所示（Taitel 等，1995）。系统中的第一个网络被称为选择网，它决定了压缩或简化的叶片调整（输出），该调整会导致振动（输入）的一个给定的改变。为了消除振动，飞行中振动测量的负被用作这个网络的输入。然后通过压缩的模拟网络预测它们对振动的影响，并由此对压缩的调整有效性进行验证。从理论上来说，这些被模拟的振动改变应该和飞机的振动测量值相反，这样它们的和才能为零。然而，由于神经网络模型的不精确性和噪声，因而振动的最终值很可能不为零。为了防止振动最终值不符合要求（通常来讲，0.2in/s），压缩或简化的调整或许会被精细化，这要通过将最终振动反馈给选择的网络。这个反馈过程由图 6-3 所示的反馈虚线所描述。需要注意的是，压缩或简化的模拟网也可以当做一个诊断工具来显示特性是否超过了正常值。例如，一个振动值与网络预测值有着明显差异的飞机或许有缺陷的部件。

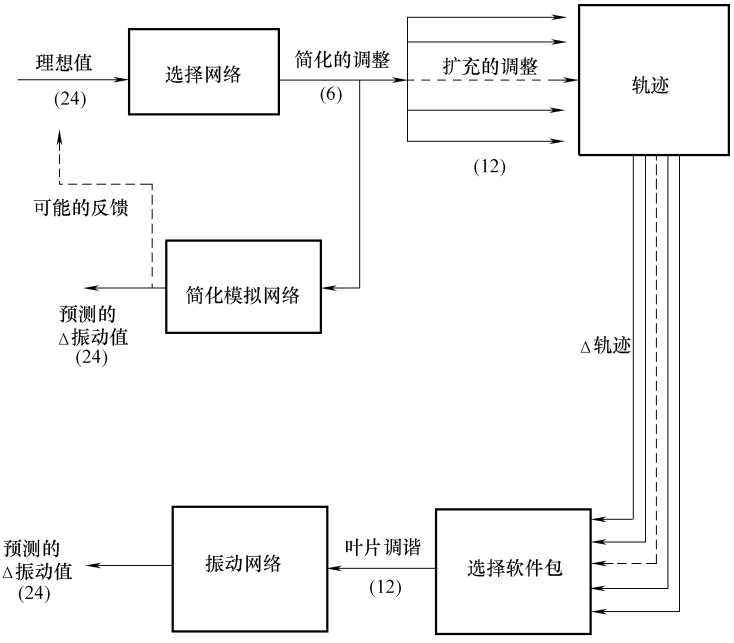


图 6-3　旋翼调谐示意图（括号里的数表示网络输入或输出数）

就如传统方法一样，一旦压缩或简化的结论被确定后，那么需要被扩展到细节形式来满足旋翼轨迹要求。一如前文所提，压缩或简化的一组调整可能被看做细节调整的限制，以保证振动结果不会破坏轨迹。每一个细节调整都是最终旋翼调谐的候选方案，最终将由轨迹网和选择程序包来决定哪一组细节调整提供了最好的轨迹性能。为了达到选择的目的，轨迹网模仿了由于候选细节调整带来的轨迹改变，随后将这些改变加入到由飞行所得的原始轨迹测量中来估测最终的轨迹。细节调整产生最小的估测轨迹（如最大翼展最小）被选作旋翼调谐问题的最终结论。被选择的这组细节调整随后将接受振动网络的检测，该振动网络与压缩或简化的模拟网相似，因而它是一个独立的选择调整的鉴别器。

6.3　基于概率的调谐

这一方法的显著贡献就是它引入了成功找到搜寻叶片调整标准的可能性（Wan 等，2005）。这个方法推测了各种减少振动的调整组的效率，并且选择了能够最大概率产生可接受振动的调整组。这个方法的概念将由文中一个简单的例子加以解释。如果由目前飞行所测量出的振动被定义为 $V_j(k-1)$，依据模型估测的振动改变用 $\Delta\hat{V}_j(k)=f(\Delta x)$ 代表，那么预测的下次飞行的振动可以定义为

$$\hat{V}_j(k)=V_j(k-1)+\Delta\hat{V}_j(k) \tag{6-6}$$

$$V_j(k)=\hat{V}_j(k)+\hat{e}_j(k) \tag{6-7}$$

式中，$V_j(k)$ 表示下次飞行的振动测量值。在旋翼调整过程中，调整是基于预测的振动值 $\hat{V}_j(k)$ 选择的，然而目标是用振动测量值所定义的。这其中所包含的概率模型考虑了振动测量中不可避免的不确定性。根据式（6-7），振动测量的平均值等于预测振动值加上预测误差的平均值。然而，由于预测的振动具有确定性的性质，所以振动测量值的概率分布和预测误差的一样。据此，尽管振动测量的名义值可以通过叶片调整来控制，但其在技术要求区域内的最优位置应当由概率分布所决定。对于预测误差 $\hat{e}_j(k)$ 而言，其均值为零并且是服从正态分布的，如图 6-4 所示，将预测振动值放置于技术要求范围中心处，就等同于最大化振动测量值落在该区域的概率，因此叶片调整成功的可能性可以通过预测误差概率密度函数落在技术要求范围内的面积来测量。具有最高可能性的叶片调整即为完美调整。

然而，旋翼调整的最主要的问题是有限的自由度数量，这个困难排除了预测振动的完美位置。这一点在图 6-5 上由一个例子给出，该例子中两个振动成分都放在技术要求区域的中央，但是只有一个调整。如果我们假设调整 Δx 对两个振动成分改变的影响 $\Delta\hat{V}_j(k)$，它可以表示为一个线性的模型：

$$\Delta\hat{V}_j(k) = a_{ij}\Delta x$$

这样预测振动成分的位置会被限制在图 6-5 所示的 L 线上。如该图所示，因为不可能把预测振动成分放置在中心，所以需要选取一个折中的位置。在这一方法中，最好的折中位置是保证了最大概率、满足振动测量技术要求的位置。这一位置，以两个振动成分为例，最大化 $P_r[(V_1, V_2) \in S] = \int_{(V_1,V_2)\in S} p(V_1, V_2)\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2$。该式表明了预测振动的放置需要了解振动成分的联合密度函数 $p(V_1, V_2)$。在独立振动成分具有同概率分布这种理想情况下，具有等概率 $P_r[(V_1, \cdots, V_n) \in S]$ 的轨迹点聚集在超球表面上。图 6-5 所示案例就是一个两分量振动的理想轨迹，其聚集点是一组以原点为圆心的圆（参见图 6-5），并导致点 P 作为线 L 上最靠近技术要求圆中心的最优折中点。然而，当这两个振动分量相关或具有不同分布时，点 P 并不代表最优的位置。一般情况下等概率轨迹是椭圆，就像图 6-5 所显示的一样，点 Q 是线 L 上放置预测振动的最优位置。这里自由度数的不充分性说明加重了振动调谐，其中有 24 个相关振动分量需要通过 4 个简化叶片定位在技术要求区域内。对于 24 个组成元素的振动测量值矢量 $V(k) = [V_{c1}(k), V_{s1}(k), \cdots, V_{c12}(k), V_{s12}(k)]$ 来说，V_c 和 V_s 分别表示每个振动测量值的余弦和正弦分量，第 k 次飞行振动测量的联合密度函数 $V(k)$ 可以用一个 N 维高斯函数来描述：

$$p[V(k)] = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\boldsymbol{\Phi}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\hat{e}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\hat{e}(k)\right] \tag{6-8}$$

$$\hat{e}(k) = V(k) - V(k-1) - C\Delta x(k) \tag{6-9}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}$ 为预测误差的协方差矩阵。现在，如果 $\Gamma = \{|V_j| = \sqrt{V_{cj}^2 + V_{sj}^2} \leqslant \alpha,\ j = 1, 2, \cdots, 12\}$ 定义了 24 维欧几里得空间的技术要求区域，那么可以通过最大化振动测量值落在可行区域的概率来选择叶片调整 Δx^*（参见表 6-2）。一般的，有

$$\Delta x^* = \arg_{\Delta x}\max\left[P_r[V(k) \in \Gamma] = \int_{\Gamma} p[V(k)]\mathrm{d}V(k)\right] \tag{6-10}$$

表 6-2　基于概率调谐的小结

对于输入矢量：

$$\Delta \boldsymbol{x} = [\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4]^{\mathrm{T}}$$

其中 Δx_1 和 Δx_3 被定义为分别针对于 1/3 叶片组合和 2/4 叶片组合的(简单)配平片调整，而 Δx_2 和 Δx_4 代表着分别针对于 1/3 叶片组合和 2/4 叶片组合的俯仰控制杆调整(ΔP)。可以通过最大化振动测量值落在可行区域的概率来选择叶片调整 Δx^*。一般的，有

$$\Delta x^* = \arg_{\Delta x}\max\left[P_{\mathrm{r}}[V(k) \in \Gamma] = \int_{\Gamma} p[V(k)]\,\mathrm{d}V(k)\right]$$

式中，$P_{\mathrm{r}}(V(k))$表示振动测量值的概率，Γ 表示在 24 维欧几里德空间中的技术要求区域，$p(V(k))$表示服从 N 维高斯函数分布的第 k 次飞行振动特征的联合密度函数：

$$p(V(k)) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \mid \boldsymbol{\Phi} \mid^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\hat{e}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\hat{e}(k)\right]$$

且

$$\hat{e}(k) = V(k) - V(k-1) - C\Delta x(k)$$

表示振动预测误差。

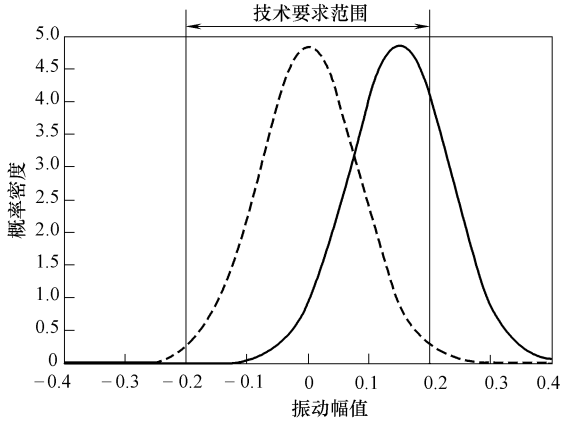


图 6-4　把预测的振动值布置在技术要求范围内改进做法的演示

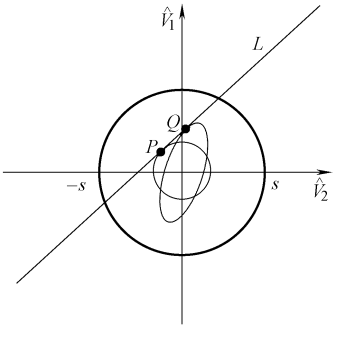


图 6-5　振动分量落在技术要求范围内的限制布置的二维平面案例

6.4　自适应调谐

图 6-6 即为这一方法的示意图（Wang 等，2005）。如同其他方法一样，它运用了一个过程模型作为寻找合适叶片调整的基础，但是它用了区间模型来取代线性模型，并用区间模型来适应过程的非线性和测量噪声。根据这个模型，将先估测可行的过程区域，用以包括会导致可接受振动预测的调整，然后把这个可行区域用于搜寻最小化模型振动的叶片调整。如果这些调整的运用不会产生令人满意的振动，那么区间模型会被更新来为下一次飞行更好地预测可行区域以及改进优化叶片调整选择。自适应调谐的重要参数总结在表 6-3 中。

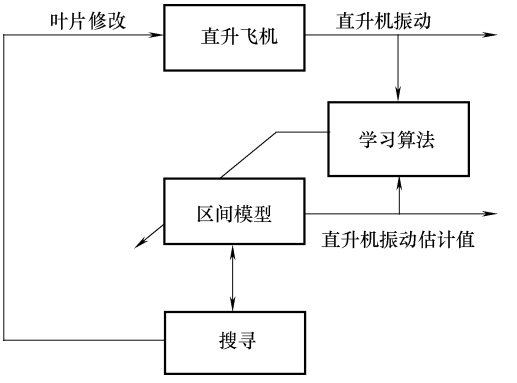


图 6-6 推荐的调谐方法所用的策略

表 6-3 自适应调谐小结

在自适应调谐中,每个振动分量定义为:

$$\Delta\overleftrightarrow{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \overleftrightarrow{C}_{ji}\Delta x_i (j = 1,2,\cdots,m)$$

其中每一个系数定义为一个区间:

$$\overleftrightarrow{C}_{ji} = [C_{Lji}, C_{Uji}]$$

C_{Lji}和 C_{Uji}分别表示每个输入 Δx_i 和输出 $\Delta\overleftrightarrow{y}_j$ 之间灵敏度系数上、下限当前值,然后通过最小化目标函数来搜寻叶片调整:

$$S = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \text{距离}(x_c, x_e)}{\left[\prod_{s=1}^{N_s} \text{距离}(x_c, x_s)\right]^{1/N_s}}$$

式中,x_c 表示在可行区域内候选组叶片调整;x_e 表示在可行区域内任何一组叶片调整;x_s 表示先前选择的一组叶片调整;N_e 和 N_s 分别表示估计的可行叶片调整数和先前选择的叶片调整数。

6.4.1 区间模型

为了考虑振动的随机性和非线性，区间模型（Moore，1979）被定义来代表由叶片调整造成的飞机振动。这里的区间模型有着如下的形式：

$$\Delta\overleftrightarrow{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}_{ji}\Delta x_i, j = 1,2,\cdots,m \tag{6-11}$$

其中，每个系数都被定义为一个区间：

$$\overleftrightarrow{C}_{ji} = [C_{Lji}, C_{Uji}]$$

在上面的模型中，有着双向箭头↔的变量表示区间变量，C_{Lji}和 C_{Uji}分别表示每个输入 Δx_i 和输出 $\Delta\overleftrightarrow{y}_j$之间灵敏度系数上、下限当前值。$\Delta\overleftrightarrow{y}_j$表示当前输入 Δx_1，…，Δx_n 变化引起的第 j 个输出变化的估计范围。

由适度非线性输入/输出关系的区间模型提供的拟合如图 6-7 所示，其中输出范围是相对于一个探索输入估测得到的。根据式（6-11），预测的输出范围将会变得很大，

因此会变得不精确，因为选择的潜在的输入远离现在的输入（产生较大的 Δx_i）。当尝试多路输入时，这个区间模型的潜在缺点将很大程度地被降低，因而多路输入的引入将会使区间模型能够利用多路输入来估测输出范围。在潜在的输入值 x_i 处预测的输出值，可以相对之前引入的任何一组输入进行计算，并由此产生 $\ddot{y}_j$ 的不同估测值（这是由于不同的 Δx_i 引起的）。为了处理估测值的多样性，$\ddot{y}_j$ 被定义为所有 $\ddot{y}_j$ 估测值的公共值域（Yang，2000）。图 6-8 中演示了采用以上共同规则得到估计值 $\ddot{y}_j$，并指出了运用这种估测方法使得系统的非线性可以用分段方式表示。可以看到：如果缺乏输出估测值范围之间的公共性，会导致部分输入-输出关系不能用区间模型表示。然而，在这样的情形下，区间模型和输入-输出关系之间缺少兼容性关系可以通过学习得到的系数区间来修正。

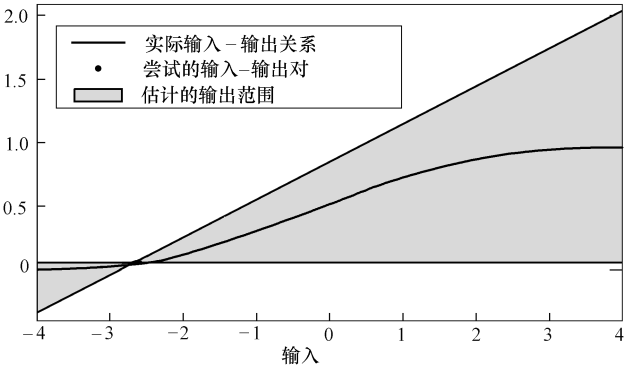


图 6-7　通过采用一个参考输入的区间模型估计输出范围

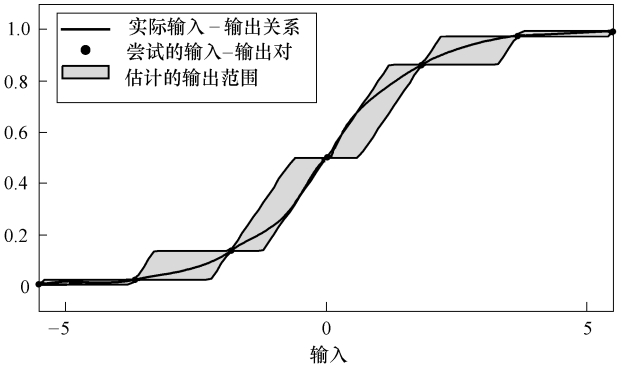


图 6-8　通过采用 7 个参考输入的区间模型估计输出范围

6.4.2　可行区域的估计

可行区域由所有的会减少飞机振动、满足技术要求的叶片调整组构成。可行区域通过比较单个估测值 $\ddot{y}_j$ 和对应的限制值估计而出，目的是确定对应的叶片调整是否属于可行区域。在这一方法中，即使区间 $\ddot{y}_j$ 部分覆盖了振动限制值，但对应的叶片调整也会被

估计的可行区域所包括。上述的基于单个输出估计可行区域的程序也会通过单输出估计的可行区域交集来延伸至多路输出。

6.4.3 叶片调整的选择

叶片调整提供了可行区域的坐标，因此，其需要提供一个输入空间的平衡覆盖。就其本身而言，叶片调整选择变成了等同于最大化选择的叶片调整与原叶片调整的距离，并把它们带到更接近于可行域中心。这个目标可以通过最小化下面的目标函数来实现：

$$S = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \text{距离}(x_c, x_e)}{\left[\prod_{s=1}^{N_s} \text{距离}(x_c, x_s)\right]^{1/N_s}}$$

式中，x_c 表示在可行区域内候选组叶片调整；x_e 表示在可行区域内任何一组叶片调整；x_s 表示先前选择的一组叶片调整；N_e 和 N_s 分别表示估计的可行叶片调整数和先前选择的叶片调整数。注意当后选组叶片调整 x_c 接近先前选择的叶片调整时，$\left(\prod_{s=1}^{N_s} \text{距离}\right)^{1/N_s}$ 将变得非常小，且当后选组叶片调整 x_c 远离可行域中心时，$\sum_{e=1}^{N_e} \text{距离}(x_c, x_e)$ 将变得非常大。通过最小化 S，选择得到的候选组叶片调整就可以避免以上极值。

6.4.4 学习

尽管安装灵敏度系数定义的区间模型可以为调谐提供合适的初始基础，但是它并不是旋翼调谐过程最具代表性的。就其本身而言，它也不能把这个搜寻过程传递到最后。推荐方法的一个显著特点就是学习能力，它可以使得它自己精细知识基础。为这个目的，模型系数通过考虑每组系数上下极限新值来更新。其目标就是使得系数范围尽可能小，而同时又确保区间模型包络采集的输入-输出数据。学习问题可以定义为：

$$\text{Min}E = \sum_{m=1}^{K-1} \sum_{k>m}^{K} \left\{ [y_L(m,k) - y(k)]^2 + [y_U(m,k) - y(k)]^2 \right\} \tag{6-12}$$

约束条件：

$$y_U(m,k) \geqslant y(k) \tag{6-13}$$

$$y_L(m,k) \leqslant y(k) \tag{6-14}$$

$$C_{Ui} - \gamma \geqslant C_{Li} \tag{6-15}$$

式中，K 表示到目前为止收集的总的采样点数；$y_L(m, k)$ 和 $y_U(m, k)$ 分别表示第 k 次采样点相对于第 m 次采样点估计的输出范围上下限；$y(k)$ 表示第 k 次采样点实际输出值；C_{Ui}、C_{Li} 表示第 i 个系数区间的上界和下界；参数 γ 是一个小正数以控制系数的范围。

大多数的方法都可以潜在地被改造适用于调整系数区间，例如梯度下降（Ishibuchi 等，1993）或者非线性规划，但不能被用来进行旋翼调整，因为他们需要大量的训练数据并且它们对于代表过程先验知识的系数初值有着一致性。作为一种选择，设计学习算

法是用于处理缺少轨迹和平衡数据、而又同时保持对系数初值的真实性。在这种算法中，最初逐点设为灵敏度系数的区间模型系数，在每次飞行后都会用两个步骤来调整：扩大和缩小。首先，对于当前尾数完成的所有飞行振动测量值与现在的区间模型估计的输出值域相匹配。如果任何测量值不满足估计值的上界或者下界，那么系数区间将被一小步一小步逐步扩大，且输出范围用更新过的区间模型来重新估计。当估计的输出范围包括了所有的测量值时，系数区间的扩大就停止。在这一点上，即使更新过的区间模型提供了输入-输出数据的拟合，它还是可能被过度补偿。为了矫正这种情况，系数区间通过选择新的上下界候选项来收缩。

收缩-放大学习算法公式为

$$\Delta C_{\mathrm{L}i} = -\eta\delta_{\mathrm{L}}\Delta x_i(m,k) \tag{6-16}$$

$$\Delta C_{\mathrm{U}i} = -\eta\delta_{\mathrm{U}}\Delta x_i(m,k) \tag{6-17}$$

其中，在放大阶段，δ_{L} 和 δ_{U} 定义为

$$\delta_{\mathrm{L}} = \begin{cases} \Delta y_{\mathrm{L}} & [\Delta x_i(m,k) > 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{L}} > 0] \\ \Delta y_{\mathrm{U}} & [\Delta x_i(m,k) < 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{U}} < 0] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6-18}$$

$$\delta_{\mathrm{U}} = \begin{cases} \Delta y_{\mathrm{U}} & [\Delta x_i(m,k) > 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{U}} < 0] \\ \Delta y_{\mathrm{L}} & [\Delta x_i(m,k) < 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{L}} > 0] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6-19}$$

在收缩阶段，它们定义为

$$\delta_{\mathrm{L}} = \begin{cases} \Delta y_{\mathrm{L}} & [\Delta x_i(m,k) > 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{L}} < 0] \\ \Delta y_{\mathrm{U}} & [\Delta x_i(m,k) < 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{U}} > 0] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6-20}$$

$$\delta_{\mathrm{U}} = \begin{cases} \Delta y_{\mathrm{U}} & [\Delta x_i(m,k) > 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{U}} > 0] \\ \Delta y_{\mathrm{L}} & [\Delta x_i(m,k) < 0 \text{且} \Delta y_{\mathrm{L}} < 0] \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6-21}$$

且

$$\Delta x_i(m,k) = x_i(k) - x_i(m) \tag{6-22}$$

$$\Delta Y_{\mathrm{L}} = Y_{\mathrm{L}}(m,k) - y(k) \tag{6-23}$$

$$\Delta Y_{\mathrm{U}} = Y_{\mathrm{U}}(m,k) - y(k) \tag{6-24}$$

对于迭代过程中每个系数区间而言，这个步骤会被重复直到目标函数 E［式（6-12）］被最小化。E 的最小值保证了在最小可行域内对系数区间的有限调整。

在调谐的开始，可用于学习的有限的输入-输出数据不能提供过程的综合表示。因此，系数区间不应该剧烈地缩小直到足够的输入-输出数据变得可用。因此，每一个系数区间的长度［$C_{\mathrm{L}i}$，$C_{\mathrm{U}i}$］被每次调谐迭代的最小的区间长度所限制：

$$\min L = \{C_{\mathrm{U}i}(0) - C_{\mathrm{L}i}(0)\}(1-\beta)^n \tag{6-25}$$

式中，$\beta \in [0,1]$ 控制了系数区间的缩小比例；n 代表调谐迭代的次数。当 $\beta = 0$ 时系数

区间不能缩小，而当 $\beta=1$ 时可以无限缩小。通常选择 β 接近于 0 的数。

6.5 案例分析

区间模型（IM）方法的应用曾在黑鹰直升机的研究中被提及。较理想地说，新提出的方法的性能应当在各方面与传统方法逐一比较评估。然而，这种评估要求用一种方法调谐飞机，然后复原到原状态后，再用另一种方法来调谐。由于这样做太过昂贵而且也不实用，于是模拟时一种折中评估方法被采用。因此，在图 6-6 中用区间模型“前馈模型”模块代表了过程仿真模型的“直升机”模块。

6.5.1 仿真模型

考虑到叶片调谐对直升机振动的潜在非线性影响和振动测试中表现出的高度噪声水平，多层神经网络是最适合的建模框架。利用历史平衡数据对一系列的神经网络进行训练，来说明振动变化和机翼调整之间的关系，振动的随机性也由添加随机数到网络输出中来体现。

总共有 102 套振动数据被用来训练和检验神经网络。网络的输入是俯仰控制杆和反向叶片对配平片的组合式叶片调整，网络的输出是两次连贯飞行之间的振动变化。由于振动数据是既有大小又有方向的矢量（参见表 6-1），振动数据转换到笛卡尔坐标系中，所以每一个矢量要素都可以说明 6 种飞行状态中每一个的 A + B 或者 A – B 振动量的余弦或者正弦变化（表 6-1）。在这个案例分析中，每个神经网络模型都由 4 个输入和 1 个输出组成，因而所有 24 个神经网络训练后完全诠释振动成分。另外，所有的振动测量也可以用一个神经网络来表示，但是这样的网络太难以训练了。正式而言，能表达不同飞行状态下振动余弦和正弦的神经网络输出用 $V_{cj}(k)$ 和 $V_{sj}(k)$ 分别定义如下：

$$\hat{V}_{sj}(k)=V_{sj}(k-1)+\Delta V_{sj}(k)+R_{sj}(k) \tag{6-26}$$

$$\hat{V}_{cj}(k)=V_{cj}(k-1)+\Delta V_{cj}(k)+R_{cj}(k) \tag{6-27}$$

$$\Delta V_{sj}(k)=F_{sj}(\Delta x) \tag{6-28}$$

$$\Delta V_{cj}(k)=F_{cj}(\Delta x) \tag{6-29}$$

$$\hat{V}_{j}(k)=\sqrt{\hat{V}_{sj}(k)^2+\hat{V}_{cj}(k)^2} \tag{6-30}$$

这里，输入矢量 $\Delta \boldsymbol{X}=\{\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3\}$ 表示一组复合叶片调谐，每一个对应的函数 F_{cj} 和 F_{sj} 表示了由神经网络代表的连续两次飞行之间的振动变化，$R_{sj}(k)$ 和 $R_{cj}(k)$ 表示由于考虑到网络测量噪点而添加到输出上的随机数。每一个网络都由两个隐形层构成，第一隐形层和第二隐形层分别有 4 个和 8 个处理单元。为了避免过度培训，这 102 套数据被平均分成了两个相等部分，一部分用来网络训练，另一部分用来检验它的性能。根据高斯分布 N(μ，σ^2)、均值为 μ、方差为 σ^2 产生随机数：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}e_i \tag{6-31}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(e_i - \hat{\mu})^2 \tag{6-32}$$

式中，M 表示总的数据组；e_i 表示振动测量值和期望值之间的差，可以表示成：

$$e_j(k) = V_j(k) - V_j(k-1) - \Delta V_j(k) \tag{6-33}$$

对于由神经网络模型估计的振动变化数据和图 6-9 所示的实际振动变化数据进行了一一比较。结果表明预测值十分接近实际振动变化值。

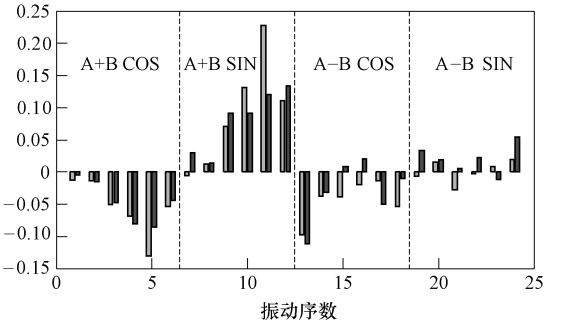


图 6-9　模拟的振动变化和实际振动变化之间比较案例

6.5.2　区间（IM）建模

在对黑鹰直升机的研究中，为了近似表达 6 种飞行状态中每一个的 A + B 或者 A - B 振动量的余弦或者正弦变化，一共需要构建 24 个 IM 模型。IM 模型可表示为

$$\overleftrightarrow{V}_{cj}(k) = V_{cj}(k-1) + \sum_{i=1}^{4}\overleftrightarrow{C}_{cji}(k-1) + \Delta x_i(k) \tag{6-34}$$

$$\overleftrightarrow{V}_{sj}(k) = V_{sj}(k-1) + \sum_{i=1}^{4}\overleftrightarrow{C}_{sji}(k-1) + \Delta x_i(k) \tag{6-35}$$

$$\overleftrightarrow{V}_j(k) = \sqrt{\overleftrightarrow{V}_{sj}(k)^2 + \overleftrightarrow{V}_{cj}(k)^2} \qquad (i=1,\cdots,4\text{和}j=1,\cdots,12) \tag{6-36}$$

式中$\overleftrightarrow{V}_{cj}(k)$ 和$\overleftrightarrow{V}_{sj}(k)$ 分别表示 6 种飞行状态中每一个的 A + B 或者 A - B 振动量的余弦或者正弦测量值；$\overleftrightarrow{V}_j(k)$ 表示振动的幅值；Δx_i 所表示的含义和式（6-2）~式（6-5）中是一样的。在本研究中，可行域定义为包含了满足符合技术要求条件：$\max\{\min(\overleftrightarrow{V}_1), \cdots, \min(\overleftrightarrow{V}_{12})\} \leqslant 0.2$、与振动估计值有关的所有叶片调谐。上述规定保证了最大振动分量的振动估计下限范围会小于 0.2ips（英尺/秒，工业标准）。这里下限的选择是为了保证可行域尽可能大，从而使得任何有潜力的好的备选叶片调整不会被排除。可行域计算是基于以下范围：俯仰控制杆：［-0.015，0.015］；配平片：［-0.035，0.035］，在这之中有 2000 套随机叶片调整数据被用于可行性评估。满足规定的振动范围的叶片调谐都被包含到了可行域中。

正如早先指出的，推荐的方法采用可行区域作为叶片调谐搜寻基础。因为这个目的，产生目标函数 S 最小值［式（6-12）］的叶片调整组选来应用到直升机上。应该指

出的是，在对振动分量给定了严格的约束条件后，可能会存在不能满足所有约束条件的任何可行叶片调整情况。在这种情况下，产生最大振动估计值最小下限的那组叶片调谐用作折中解。

在每次调谐迭代后区间模型得到更新。对于收缩-放大学习，式（6-25）中的参数 β 设为 1、γ 设为 0，因而系数区间应该没有限制的收缩。针对每个尾翼数叶片的学习是分开完成的，其目的就是为各个尾翼数叶片定制区间模型，也就是区间模型设置为每个尾翼数叶片的灵敏度系数，且在第一次调谐迭代后变得适应了。因而，区间模型对于第一次迭代来说，它实际上是一个逐点模型，且随后采用区间模型形式。

6.5.3 性能评估

对 39 个尾翼叶片测试了区间（IM）模型方法，这些叶片来自现场的实际轨迹和平衡数据可用。对于每个尾翼数叶片，IM 方法是循环使用直到每一个仿真都达到技术要求范围内，或已经达到 5 个步骤循环的上限。

由于振动测量的随机性对旋翼调谐过程施加了随机性，因而旋翼调谐结果不能用确定性方法来评估，这就需要打造考虑确定性的性能度量方法。有这样一种评估调谐效率的方法就是平均调谐迭代数（ATIN），它表示针对调谐每个旋翼数叶片的平均迭代次数。针对 39 个尾翼叶片，IM 方法采用的飞行数目已在表 6-4 中列出，与此同时该表还列出了实际进行的迭代数。这个结果表明相对于实际完成的迭代数，IM 方法需要较小的 ATIN。

表 6-4 IM 方法和实际应用中的调谐迭代次数

旋翼尾号(总共 39 个)	调谐迭代次数	
	实际的	IM 方法
176	1	1
178	1	1
179	3	2
180	1	1
184	2	1
260	4	1
861	1	1
总的迭代次数	71	48
平均调谐迭代数	1.82	1.23

IM 方法的另一个潜在的重要方面就是它的自适应能力，它可以把逐点模型转化成 IM 模型，且紧随其后在第一次迭代后完成了更新。然而，自适应能力在旋翼调谐并不重要，它只提供了有限的训练能力。为了评估学习在 IM 方法性能中的重要性，表 6-4 的结果在表 6-5 中进行了复制，但把学习功能关掉了。尽管调谐每个旋翼叶片所花的迭

代数较少，但 ATIN 指标揭示了带学习功能的 IM 方法在调谐每个旋翼叶片时所需迭代数更少。反过来，这说明了区间模型提高了 IM 方法的性能，因为没有学习功能，在灵敏度系数处，模型维持逐点。然而，也许同样在表 6-5 中有意思的一组结果表明了这样的道理：即使没有学习功能，IM 方法所需的迭代数也比实际场合完成的迭代数要少。给定从相同模型（比如灵敏度系数）中选出和两组结果有关的调谐，IM 方法的更好性能只能归功于取得更加综合效果的比较有效的搜寻策略。

表 6-5　IM 方法（带学习功能和不带学习功能）和实际应用中所需的调谐迭代次数

旋翼尾号#(总共 39 个)	调谐迭代次数		
	实际的	IM 方法	
		带学习功能	不带学习功能
185	3	2	3
186	3	2	3
208	2	2	3
245	3	2	3
260	4	2	3
802	3	2	3
822	3	2	3
总的迭代次数	71	48	62
平均调谐迭代数	1.82	1.23	1.59

旋翼调谐系统一个优点就是有能力在一次迭代时对直升机进行调谐。通过检查一次迭代时尾翼数的数字来评估这个方法的优劣。对于这些结果，为了消除模拟模型和直升机实物之间的差别，只有来自模拟的振动估计值被用于评估调谐的适用性。本研究的结论已在表 6-6 中列出，其中在一次迭代中就调谐好的尾翼叶片数用符号√表示，那些需要多次迭代的尾翼叶片数用符号 × 表示。这个结果表明 IM 方法要比实际的调谐更能满足这个严格的判据，也就进一步证实了那个观点：IM 方法得益于一个更有效的搜索引擎。

表 6-6　根据仿真的振动值在一次迭代完成尾翼叶片调谐得分

旋翼尾号(总共 39 个)	一次迭代就完成调谐	
	实际的	IM 方法
176	√	√
178	×	√
179	√	√
822	×	√
858	×	√
859	√	√
861	√	√
总分	19	30

由于振动测量的随机性，因而重复使用一组调谐可能会带来略微不同的振动测量值。反过来说，当产生的振动接近要求的或规定的阈值时，会造成调谐产生的迭代次数的方差。因此设计出一种方法对提高调谐成功的概率是有益的。

可接受率指数（*AI*）的经验公式定义为

$$AI = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} S_l \tag{6-37}$$

AI 用来表示一个调谐组带来的振动值满足规定要求的次数百分比。在以上公式中，*N* 表示模拟的总的飞行次数，代表相同调谐组重复应用的次数，且

$$S_l = \begin{cases} 1 & \text{如果第 } l \text{ 次模拟飞行的振动可以接受} \\ 0 & \text{如果第 } l \text{ 次模拟飞行的振动不可以接受} \end{cases}$$

表 6-7 列出了实际调谐和选择调谐在第一次迭代时计算得到的 *AI* 数值。这些结果表明：根据对模拟模型振动估计值的可接受性的评估，IM 方法为叶片调谐提供了更高的成功概率。那些显示根据 IM 方法来选择的调谐可以始终如一地在一次迭代内完成对旋翼调谐的结论，揭示出在可行域内的调谐可以实现更好的定位。

表 6-7 实际调谐和选择调谐在第一次迭代时计算得到的 *AI* 数值（试用模式）

旋翼尾号(总共 39 个)	调谐迭代次数	
	实际的	IM 方法
176	0.92	0.87
178	0	0.54
179	0.61	0.52
260	0.40	0.89
261	0.09	0.95
263	0.18	0.12
822	0.00	0.64
857	0.62	0.55
858	0.64	0.93
859	0.94	0.67
861	0.96	0.74
平均值	0.581	0.724

调谐的另一个评价准则可以把它们和实际完成的累加调谐比较后得到。调谐组累加可以定义为

$$\sum x = \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k \tag{6-38}$$

式中，*N* 代表尾翼数叶片实际完成的调谐迭代数的总数；Δx_k 表示第 *k* 次迭代采用的调谐。实际的第一次迭代调谐、实际的调谐累积和根据 IM 方法完成的第一次迭代调谐的

一个案例已在表6-8中列出。这些结果表明：根据IM方法做出的调谐要比实际的第一次迭代调谐更接近于实际的累加调谐。尽管对于直升机来说累加调谐并不是最理想的调谐，但是它已被实践证明是可以代表可接受的一种调谐。IM方法的解与实际累加调谐的接近进一步证明了它的有效性。

表6-8　IM方法的第一次迭代解、Sikorsky生产线的实际解和累加的可接受调谐的比较

叶片编号	修　改		
	实际的第一次迭代修改	CAM	IM第一次迭代修改
801	6，-4，-10，11	2，-4，-4，14	3，-5，-6，12
802	5，2，0，0	9，0，-10，10	8，-2，-5，10
822	6，0，-20，0	10，-4，-23，13	8，-4，-22，6
858	7，0，-14，0	9，-2，-10，3	9，-2，-15，4

6.5.4　结语

未来旋翼调谐系统的逻辑功能就是有能力在飞行过程中调谐叶片。因为这个目的，这些系统需要有能力从错误中吸取教训。它们同样需要能够监测飞行中旋翼系统的状态，当需要比较剧烈的动作来保护飞机时，它们将停止修改叶片参数。就其本身而言，这些系统使用时需要与优秀操作者进行交互（沟通）来阻止不适合调谐的发生，且能够向操作者解释推荐的调谐。

参考文献

Ishibuchi, H., Tanaka, H., and Okada, H., An architecture of neural networks with interval weights and its applications to fuzzy regression analysis, *Fuzzy Sets Syst.*, 57, 27–59, 1993.

Moore, R.E. 1979. *Methods and Applications of Interval Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Taitel, H., Danai, K., and Gauthier, D.G., Helicopter track and balance with artificial neural nets, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, 117, 226–231, 1995.

Ventres, S. and Hayden, R.E. 2000. *Rotor tuning using vibration data only*, American Helicopter Society 56th Annual Forum, Virginia Beach, VA, May 2–4, 2000.

Wang, S., Danai, K., and Wilson, M., A probability-based approach to helicopter track and balance, *J. Am. Helicopter Soc.*, 50, 1, 56–64, 2005a.

Wang, S., Danai, K., and Wilson, M., An adaptive method of helicopter track and balance, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, 2005b, March, in press.

Yang, D.Z. 2000. Knowledge-based interval modeling method for efficient global optimization and process tuning, Ph.D. Thesis. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Massachusetts, Amherst.

7 振动设计与控制

摘要

机械振动的情形有些是受欢迎的类型，而有些是不受欢迎的。不良振动会造成人体不舒适和危害、结构退化和失效、性能恶化、机械和加工故障，以及其他各种问题。本章讨论消除或减少振动的不良影响的各种方法。具体来说，在针对抑制振动的设计和振动控制等一些有意义的主题进行了阐述。系统的减振方法可从动态系统的视角来辨识。通常情况下，一套振动规范会给出简单的阈值（界限）或频谱，其目标是设计或者控制系统以满足这些要求（或规范）。以传递函数（如传递性）为基础的频域技术、使用状态空间描述的时域技术、最优控制和模态控制这些内容在这里进行了展示。这里所说的应用，包括了隔振、旋转和往复机械的平衡、涡动抑制、主动和被动振动控制。

7.1 概述

考虑如图 7-1 所示的振动系统原理图。激励 $\boldsymbol{f}(t)$ 作用于力学系统 S 上，产生振动响应 $\boldsymbol{y}$。我们的目标就是抑制 $\boldsymbol{y}$ 到可接受的范围。显然，存在三种通用做法来达到这个目的：

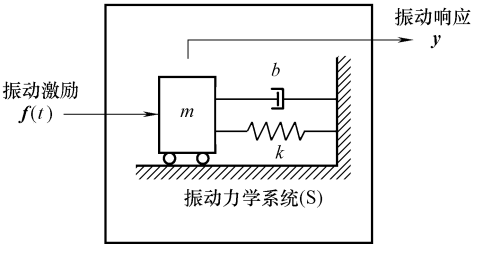


图 7-1 振动力学系统

① 隔振。抑制振动激励，这种方法需要处置 $\boldsymbol{f}$。

② 设计修改。修改或重新设计力学系统，在激励水平相同的情形下，所产生的振动是可以接受的。这种方法需要处置 S。

③ 控制。使用外部设备、通过隐式或显式传感和控制，吸收或耗散振动能量。此方法需要处置 $\boldsymbol{y}$。

针对以上三种类型问题的每一种，我们可以使用多种手段来达到减振的目的。从本质上讲，这些方法中的每一个，一方面都涉及系统的设计（无论是通过重新设计完成还是渐进的设计修改），另一方面通过外部的手段（无源或有源设备）控制振动。注意故障的移除（如通过修理或更换零件解决不对中和故障问题）还可以解决振动问题。这种做法可以归入上述三种类别中的任何一种。

隔振一类问题涉及将机械系统（S）与振动激励（$\boldsymbol{f}$）“隔离”开来，因此这样的激

励信号是在达到系统之前被“滤掉”或耗散。采用妥善设计的悬架系统、悬置和阻尼层属于这一类。设计修改一类问题将涉及根据一套规范和设计准则体系对组件和机械系统结构产生变化。旋转机械平衡和通过模态分析和设计技术的结构修改，都属于这一类问题。控制一类问题将涉及（不使用外部能源）被动装置如动态吸振器和阻尼器，或者是主动控制装置（运行需要外部能源）。在被动控制情况下，控制装置隐式感应振动响应，并消耗该振动（正如有阻尼器的情况），或吸收和储存的能量慢慢耗散（正如有动力吸振情形）。在主动控制的情况下，通过传感器和传感器感应明确地感知振动 $\boldsymbol{y}$。应该作用在系统上、抵消和抑制振动的力由控制器决定，且相应的力量或力矩是通过一个或多个执行机构施加到系统上。

要注意的是，上述三种振动抑制分类可能存在相互重叠。例如，增加悬置（第 1 类）也可作为设计修改（第 2 类）或纳入被动减振器（第 3 类）解释。还应指出的是，通常称为振源改变的一般方法，可以划归到第 1 类或第 2 类中。在这种情况下，其目的是改变或消除振源。振源既可以是外部的（如道路不规则导致车辆的振动）—第 1 类的问题，或内部的（旋转设备的不平衡或不对中导致的周期力、力矩和振动）—第 2 类的问题。与改变内部振源（如旋转机械平衡）相比，改变外部振源（如重铺道路）是非常困难的。此外，外部振动源可能是随机的，且很可能无法改变（如飞机上的空气动力）。

有时，我们为了设计和控制机械系统，将冲击负荷产生的响应与振动激励的响应分开考虑。举例来说，在一些文献中，冲击隔离和振动隔离隶属于不同的话题。实际上这是不必要的。即使振动分析主要涉及周期激励和响应，瞬态和随机振动在实践中也很常见。后两种类型振动信号频带比一个简单的周期信号更宽广。冲击信号按定义是瞬态的，是一个非常短的时间历程（相对于对冲击载荷作用的机械系统主要时间常数而言），因此它将具有很宽的频率段，频域技术仍然适用。此外，时域技术非常适合于处理瞬态信号特别是冲击信号。在这种背景下，冲击激励可视为一种脉冲，其效果是瞬间改变了惯性元素的速度。然后，在时域中，冲击负荷也被视为一个具有初始速度激励的等效自由（非强迫）系统。

7.2 振动限值规范

振动设计与控制程序的主要目标就是必须确保在正常工作条件下，感兴趣的系统不会遇到振动水平超过规定值。那么在这种情况下，制定振动限值的方式变得非常重要。本节将介绍一些常见的振动规范的形式。

7.2.1 峰值规范

一个机械系统振动限值，既可以在时间域规定，也可以在频域中规定。在时域中，最简单的规范是振动峰值水平（通常的加速度单位是 g，即重力加速度）。在这里，隔振、设计或控制技术应确保系统的振动响应峰值不超过规定的水平。在这种情况下，整个系统的运行间隔时间要进行监测，并按规范对峰值进行检查。请注意，在这种情况

下，它是指在具有意义的、特定时间常数时的瞬时峰值，也就是代表振动所用的是瞬时峰值，而不是平均振幅或平均能量。

7.2.2 均方根值规范

振动信号 $y(t)$ 的均方根（RMS）等于该信号的平方的平均，再开根号：

$$y_{\mathrm{RMS}} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T y^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{7-1}$$

注意，平方信号标志着淘汰了信号本身，而实际上使用的是信号能量级。平方信号被平均的周期 T，取决于问题和信号的性质。对于周期信号，一个周期就足够用于平均了。对于瞬态信号，振动系统的几个时间常数（通常是 4 倍的最大时间常数）就足够了。对于随机信号，这个数值应尽可能使用大的数值。

在以 RMS 值为规范的方法中，采用式（7-1）计算加速度响应（通常，加速度单位以 g 表示）的 RMS 值，并与规范值进行比较。在此方法中，振动瞬间爆猝发并没有显著影响，因为它们会由于积分而被过滤掉了，这是所考虑信号的平均能量或平均功率。暴露时间以间接的方式进入到图像中，且方式也不理想。举例来说，一个非常短暂的振动信号最初可能具有破坏性的影响。但是，式（7-1）中采用的 T 越大，则计算得到的 RMS 值越小。因此，在这种情况下，采用较大的 T 值将导致削弱或掩盖潜在的损害。在实践中，暴露在振动信号中时间越长，则造成的伤害越大。因此，当使用如峰值和 RMS 值作为规范时，必须根据暴露时间对它们进行调整。具体来说，一个更大值的规范应该用于较长时间的暴露。

7.2.3 频域规范

只是指定一个单一的振动阈值来限制一个复杂的动态系统的振动情况是不现实的。通常情况下，振动对系统的影响至少取决于以下三个参数：

① 振动水平（峰值、有效值、功率等）。

② 激励频率的内容（范围）。

③ 振动暴露时间。

下面情况尤其如此：因为激励产生的振动环境不一定是单频（正弦）信号，可能是宽带和随机的。此外，针对振动激励的系统响应将取决于它的频率传递函数，频率传递函数又决定了它的共振和阻尼特性。在这种情况下，最好是提供一诺模图在水平轴给出频率（Hz）、垂直轴代表运动变量如位移（m）、速度（m/s）或加速度（m/s^2 或 g）。用上述运动变量的哪一个来代表诺模图的垂直轴并不重要，这是因为在频域中以下关系真实存在：

$$\text{速度} = \mathrm{j}\omega \times \text{位移}$$

$$\text{加速度} = \mathrm{j}\omega \times \text{速度}$$

一个运动形式可能很容易地转化成为其余两项运动表达式中的一种。在每一个表达形式中，假设诺模图的两根轴使用对数尺度，则恒定位移、恒定速度、恒定加速线段均

为直线。

考虑一个简单的机械振动规范限值如下：

$$\text{位移限制值(峰值)} = 0.001\text{m}$$

$$\text{速度限制值} = 0.01\text{m/s}$$

$$\text{加速度限制值} = 1.0g$$

该规范可表示为速度对数与频率对数为轴的诺模图（lg-lg），如图 7-2 所示。

通常，这种频域中的简单规范是不够的。如上所述，系统的行为会根据激励频率范围而变化。例如，人类在运动中产生的晕眩主要在 0.1 ~ 0.6Hz 的低频范围内，而乘坐地面交通车辆乘客的不适感，在垂直方向运动上是 4 ~ 8Hz 的范围、在横向运动上是 1 ~ 2Hz 的范围。对于任何动态系统，特别是在低阻尼范围内，应避免相邻的共振频率，且它应当由共振范围内的低振动限值来规定。此外，振动暴露持续时间应该在规范中明确考虑。例如，图 7-3 给出了地面交通车辆驾驶平顺性的规范，其中较低的振动水平是针对长途旅行的。

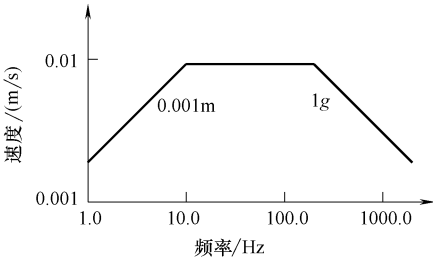


图 7-2　机械运行时的振动规范（诺模图）

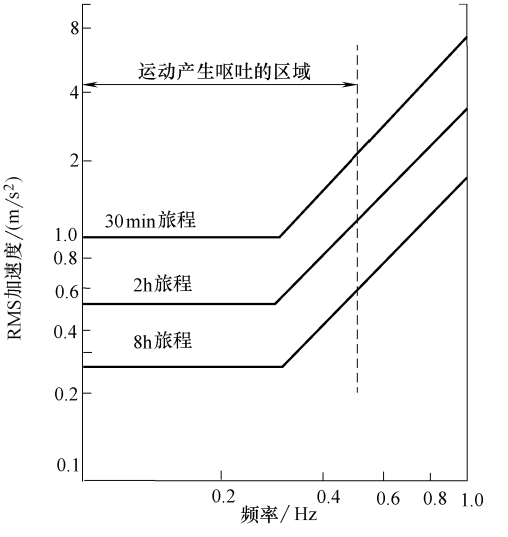


图 7-3　地面交通车辆产生严重不适的振动规范

最后应该指出的是，我们在设计和控制上下文中考虑的规范是振动上限。该系统的正常工作条件应该低于（或位于）规范值，测试规范是下限。试验应处于这些振动水平上或高于这些振动水平，目的是使系统能够满足测试规范。振动工程中的一些考虑如表 7-1 所总结的。

表 7-1　振动工程

振动抑制的方法	· 隔振(隔离激励的缓冲系统) · 设计修改(修改系统) · 控制(感应振动,施加抵消力:被动/主动)

（续）

振动规范	·峰值与 RMS 值 ·诺模图上的频域规范 ＊振动水平 ＊频率内容 ＊曝露时间 注意： ｜速度｜= 角速度 ω ＊｜位移｜ ｜加速度｜= 角速度 ω ＊｜速度｜
极限规范	操作（设计）规范：制定上限 测试规范：制定下限

7.3 隔振

隔振的目的就是要将系统和振动激励“隔离”开来，方式就是在两者之间引入隔振器。例如机器的悬置和车辆悬架系统。隔振一般可分为两类：

① 力的隔离（与力传递有关）。

② 运动隔离（与运动的传递有关）。

在力的隔离中，振动力通常会直接从振源传递到支撑结构（隔离系统），该力被系统隔振器的弹性（弹簧）和耗散（阻尼）过滤掉，因而只有该力的一部分是通过惯性路径传递。显然，力传递的概念在此处是适用的。在运动隔振中，施加在一个机械系统（隔振系统）运动平台处的振动运动是由隔振器通过其弹性和耗散来吸收，这样传递到感兴趣系统的运动影响就会减弱。运动传递的概念在这种情况下是适用的。在这两种情况下的设计问题就是要选择合适的隔振器参数，从而使得进入系统的振动在感兴趣的频率范围内（工作频率范围）低于规范值。

下面让我们重温力传递率和运动传递率的主要概念。图 7-4a 给出了通过一个隔振器的力传递模型示意图。从源头上振动力为 $f(t)$。从隔振器来看，振源系统（阻抗为 Z_m）和隔振器（有阻抗 Z_s）具有相同的速度——这是一个阻抗并联。因此，力 $f(t)$ 是这样分解的：一部分被 Z_m 的惯性路径（折线）所吸收；仅剩下的（f_s）经由 Z_s 传送至支撑结构，该结构是隔振系统。力的传递率是

$$T_f = \frac{f_s}{f} = \frac{Z_s}{Z_m + Z_s} \tag{7-2}$$

图 7-4b 给出通过隔振器的运动传递率示意模型。振动源的振动运动 $v(t)$ 是通过一个隔振器（其阻抗 Z_s 和导纳 M_s）施加到隔振系统（阻抗 Z_m 和导纳 M_m）上。假定由此产生的力量是直接从隔振器传递到隔振系统上，因此，这两个单元是串联连接。由此，我们得到运动传递率为

$$T_m = \frac{v_m}{v} = \frac{M_m}{M_m + M_s} = \frac{Z_s}{Z_m + Z_s} \tag{7-3}$$

可以看出：根据这两个模型，可以得到

$$T_f = T_m \tag{7-4}$$

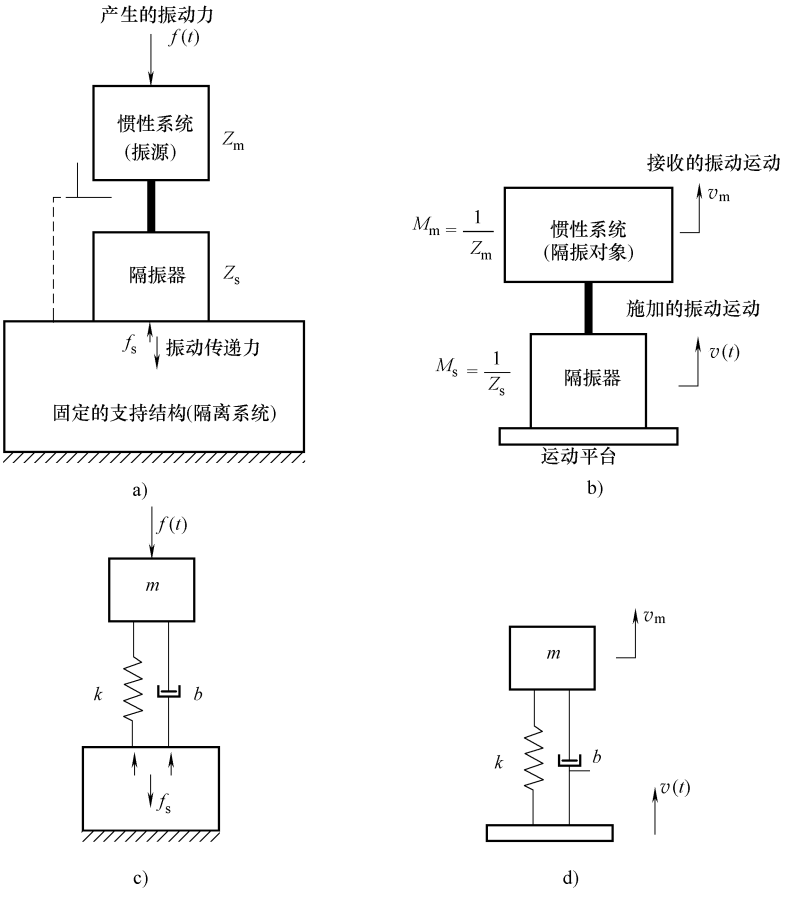


图 7-4　隔振情况

a）力的隔振　b）运动隔振　c）力的隔振实例　d）运动隔振实例

由此可得，力传递率和运动传递率的概念可以用一个共同的传递率函数 T 来表示。

力和运动隔振的简单例子如图 7-4c 和 d 所示。在这两种情况下，传递率函数为

$$T = \frac{k + bj\omega}{(k - m\omega^2 + bj\omega)} \tag{7-5}$$

式中 ω 是激振频率。注意：该模型［式（7-5）］并不局限于正弦振动。任何一般的激振可用傅里叶频谱表示为频率 ω 的函数。那么，激励谱乘以传递率函数 T 即可得到振动响应谱函数。相关的设计问题就是选择隔振器的参数 k 和 b 以满足隔振的规范。

式（7-5）可以表示为

$$T = \frac{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n\omega j}{(\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j)} \tag{7-6}$$

式中，$\omega_n = \sqrt{k/m}$，为系统的无阻尼固有频率；$\xi = \dfrac{b}{2\sqrt{km}}$，为系统的阻尼比。

式（7-6）可写成无量纲形式：

$$T = \frac{1 + 2\xi\gamma \mathrm{j}}{1 - \gamma^2 + 2\xi\gamma \mathrm{j}} \tag{7-7}$$

其中无量纲激励频率定义为

$$\gamma = \omega / \omega_n$$

该传递率函数有相位角和幅值。在实际应用中，在振动激励的衰减率（而不是激振和响应之间相位差）衰减水平是最重要的。因此，传递率幅值为

$$|T| = \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\gamma^2}{(1 - \gamma^2)^2 + 4\xi^2\gamma^2}} \tag{7-8}$$

具有意义。可以看到，当$\gamma > \sqrt{2}$时，$|T| < 1$，对应的即为隔振区域。因此，隔振器应该这样设计：应使得工作频率ω大于$\sqrt{2}\omega_n$。此外，$|T|$的阈值应当赋予指定值，且选定隔振器的参数k和b，使得$|T|$在给定工作频率范围内（应该给定）小于指定的阈值。我们用一个例子来说明此过程。

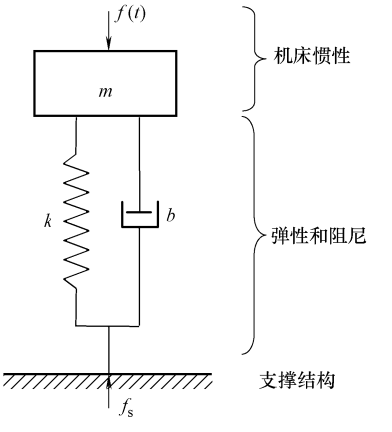


图 7-5　机床和其支撑结构的简化模型

案例 7-1

机床及其支撑结构建模为简单的质量-弹簧-阻尼器系统，如图 7-5 所示。

① 用三要素—质量（m）、弹簧（k）和黏性阻尼器（b）的阻抗形式，画出该系统的机械阻抗回路。

② 以阻尼比ξ形式确定频率比γ在力的传递率达到峰值时的精确值。显而易见ξ较小时，γ的值恒为 1。

③ 对于区间$\gamma = [0,5]$，画出$|T_f|$和γ之间的关系曲线，并在同一平面上画出ξ取 0.0、0.3、0.7、1.0 和 2.0 五个值的曲线，并讨论这些传递率曲线的特性。

④ 依据上面第③条结果，对于ξ的 5 个值和激励频率对应于ω_n的变化范围，确定在何处传递率幅值取值为：

* 小于 1.05；

* 小于 0.5。

⑤ 假设图 7-5 中的设备的无阻尼固有频率为 6Hz，阻尼比为 0.2。当工作频率大于 12Hz 时，该系统的力传递率必须小于 0.5。系统现状是否符合这一要求？如果没有，解释，应该如何修改系统以满足要求。

解：

① m、b 和 f 三元件并联后，有一共同速度 v 通过，如图 7-6 所示。在回路中 $Z_m = mj\omega$，$Z_b = b$，$Z_k = k/j\omega$。

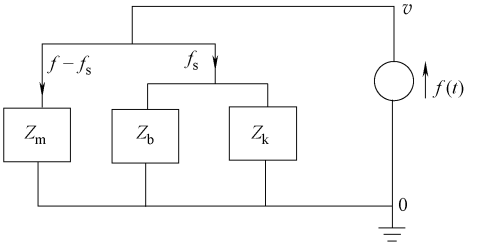


图 7-6　力隔振问题的力学阻抗回路

力传递率

$$T_f = \frac{F_s}{F} = \frac{F_s/V}{F/V} = \frac{Z_s}{Z_s + Z_0} = \frac{Z_b + Z_k}{Z_m + Z_b + Z_k} \qquad (\text{i})$$

代入元件的阻抗，可以得到

$$T_f = \frac{b + \dfrac{k}{j\omega}}{mj\omega + b + \dfrac{k}{j\omega}} = \frac{bj\omega + k}{-\omega^2 m + bj\omega + k} = \frac{j\omega b/m + k/m}{-\omega^2 + j\omega b/m + k/m} \qquad (\text{ii})$$

上式是分母和分子同时除以 m 获得。现在，利用下式

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \qquad \frac{b}{m} = 2\xi\omega_n$$

并将 ω_n^2 代入等式（ii）中，可以得到

$$T_f = \frac{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n j\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n j\omega} = \frac{1 + 2\xi\gamma j}{1 - \gamma^2 + 2\xi\gamma j} \qquad (\text{iii})$$

传递率幅值为

$$|T_f| = \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\gamma^2}{(1 - \gamma^2)^2 + 4\xi^2\gamma^2}} \qquad (7\text{-}9)$$

其中 $\gamma = \omega/\omega_n$ 是归一化频率。

② 要确定 $|T_f|$ 的峰值点，对公式（7-9）[㊀]的平方根表达式进行微分，并设为零

$$\frac{[(1 - \gamma^2)^2 + 2\xi^2\gamma^2]8\xi^2\gamma - [1 + 4\xi^2\gamma^2][2(1 - \gamma^2)(-2\gamma) + 8\xi^2\gamma]}{[(1 - \gamma^2)^2 + 4\xi^2\gamma^2]^2} = 0$$

因此，

$$4\gamma\{[(1 - \gamma^2)^2 + 2\xi^2\gamma^2]2\xi^2 + [1 + 4\xi^2\gamma^2][(1 - \gamma^2) - 2\xi^2]\} = 0$$

它简化为

$$\gamma(2\xi^2\gamma^4 + \gamma^2 - 1) = 0$$

根为

$$\gamma = 0 \text{和} \gamma^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\xi^2}}{4\xi^2}$$

$r = 0$ 的根对应的是零频率的初始驻点，这并不代表一个峰值。只有取 γ^2 正的平方根，然后得到传递率幅值的峰值点

$$\gamma = \frac{[\sqrt{1 + 8\xi^2} - 1]^{1/2}}{2\xi} \qquad (\text{iv})$$

对于较小的 ξ，泰勒级数展开式为

㊀ 原文为公式（iv），有错。译者注。

$$\sqrt{1+8\xi^2}\approx 1+\frac{1}{2}\times 8\xi^2=1+4\xi^2$$

使用近似方法，让公式（ⅳ）等于1。因此，对于小阻尼，传递率幅值在 $\gamma=1$ 取得峰值，由式（7-9）得到其值为

$$|T_f|\approx\frac{\sqrt{1+4\xi^2}}{2\xi}\approx\frac{1+\frac{1}{2}\times 4\xi^2}{2\xi}$$

或

$$|T_f|\approx\frac{1}{2\xi}+\xi\approx\frac{1}{2\xi} \qquad (Ⅴ)$$

③ ξ 取 0、0.3、0.7、1.0 和2.0 五个值时，$|T_f|$与 γ 的曲线如图7-7 所示。注意这些曲线使用了精确的表达式［见式（7-9）］。

根据上述曲线，我们观察得到以下结论：

（ⅰ）传递率幅值达到峰值时总对应于一个非零频率，这就是共振。

（ⅱ）对于小的 ξ，传递率幅值峰值的取值对应于 $\gamma=1$ 附近。随着 ξ 的增大，这一峰值点向左移动，即峰值频率位于较低值。

（ⅲ）峰值幅值随着 ξ 的增加而减小。

（ⅳ）所有的传递率曲线均以相同的频率比 $\gamma=\sqrt{2}$经过幅值 1.0。

（Ⅴ）隔振区域（$|T_f|<1$）由 $\gamma>\sqrt{2}$给定。在这个区域，$|T_f|$随 ξ 的增加而增大。

（ⅵ）传递率幅值随 γ 增大而减小。

④ 从图7-7 的曲线，我们得到：

* 对于 $|T_f|<1.05$：对于所有的 ζ，$\gamma>\sqrt{2}$。

* 对于 $|T_f|<0.5$：对于 $\xi=0.0$、0.3、0.7、1.0 和2.0，γ 分别大于 1.73、1.964、2.871、3.77 和7.075。

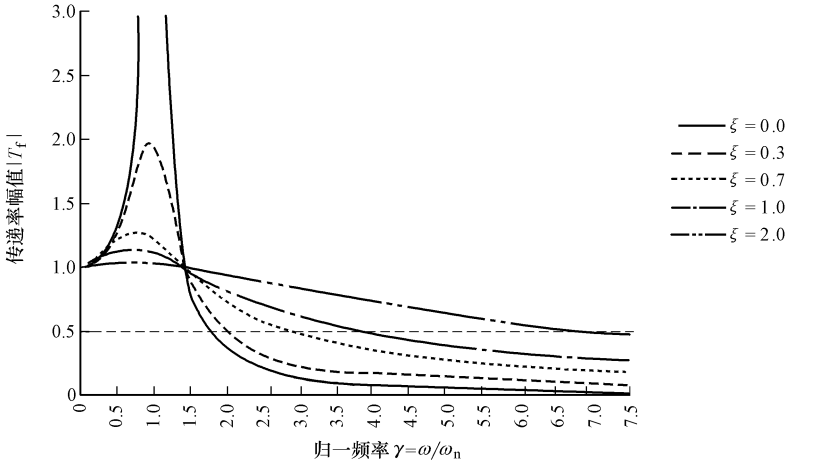


图7-7 简单振子模型的传递率曲线

⑤ 我们需要

$$\sqrt{\frac{1+4\xi^2\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2+4\xi^2\gamma^2}}<\frac{1}{2}$$

或

$$\frac{1+4\xi^2\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2+4\xi^2\gamma^2}<\frac{1}{4}$$

或

$$4+16\xi^2\gamma^2<(1-\gamma^2)^2+4\xi^2\gamma^2$$

或

$$\gamma^4-2\gamma^2-12\xi^2\gamma^2-3>0$$

对于 $\xi=0.2$ 和 $\gamma=12/6=2$，等式左边表达式计算为

$$2^4-2\times2^2-12\times2^2(0.2)^2-3=3.08>0$$

所以满足了既定要求。实际上，由于对于 $\gamma=2$，有

$$LHS=2^4-2\times2^2-12\times2^2\xi^2-3=5-48\xi^2$$

所以按照要求，需要满足

$$5-48\xi^2>0$$

或

$$\xi<\sqrt{\frac{5}{48}}=0.32$$

如果不满足要求（如 $\xi=0.4$），那么应当减小阻尼。

7.3.1 设计注意事项

隔振率定义为 1-T。注意到在隔振区域（$\gamma>\sqrt{2}$），传递率随着阻尼比 ξ 的减小而减小（因此，隔振水平提高了），因此，ξ = 0 时隔振效果最佳。这在实践中并不可行，但我们应该尽可能保持小的 ξ 值。对于隔振区内小的 ξ，式（7-8）可近似为

$$T=\frac{1}{(\gamma^2-1)} \tag{7-10}$$

注意，T 是实数，在这种情况下，$\xi\approx0$，且 T 为正，因为 $\gamma>\sqrt{2}$。然而，在一般情况下，T 可以表示传递率函数的幅值，即

$$\gamma^2=\omega^2/\omega_n^2=\omega^2m/k$$

由此得到

$$k=\frac{\omega^2mT}{(1+T)} \tag{7-11}$$

对于已知质量（包括隔振器质量）系统来说，这个方程可以用来确定隔振器在 $\omega>\omega_0$ 的工作频率范围内的设计刚度，该刚度对应于规定的（1 − T）隔振级别。通常情况下，弹簧的静挠度 δ_s 用于设计程序中，且表达式为

$$\delta_s=\frac{mg}{k} \tag{7-12}$$

将式（7-12）代入式（7-11），可以得到

$$\delta_s = (1+T)\frac{g}{\omega^2 T} \tag{7-13}$$

由于隔振区域为 $\omega > \sqrt{2}\omega_n$，我们希望 ω_n 尽可能小，以获得最宽的工作频率范围。这可以通过使隔振器尽可能软（刚度尽可能低）来达到。但是，由于结构强度、稳定性和弹簧可用性方面存在的限制，可以通过添加当做系统基础的一个惯性块来增加质量 m，然后这个基础装在隔振器弹簧（带阻尼层）上或装在充气气动悬架上。惯性块也将降低系统的质心，从而提供额外的理想稳定效果，并减少摇摆运动和噪声的传播。为了改善负载分配，不是只设计一个弹簧刚度 k，而是应该使用 n 个弹簧均匀分布在该惯性模块下，且每个分配刚度为 k/n。

另一个良好的振动隔振要求是低阻尼。通常情况下，金属弹簧具有非常低的阻尼（一般 ξ 小于 0.01）。此外，为了减少共振，需要较高的阻尼，且这个共振在启停工况下，当激励频率变化并通过共振区域时会遇到。此外，即使在稳定运行条件下，振动能量必须被有效地耗散掉。隔振垫由阻尼材料制成，软木、天然橡胶材料和氯丁橡胶可用于制造隔振垫。它们可以提供 0.01 这一级别的阻尼比。

在力隔振中，一个振动隔振器的基本设计步骤如下：

① 所需的隔振级别（1 到 T）和规定的工作的最低频率 ω_0。该振动源的质量（m）是已知的。

② 使用式（7-11）来计算 $\omega = \omega_0$ 时要求的隔振器刚度 k。

③ 如果刚度 k 不符合要求，那么需要引入惯性块来增加 m，并重新计算的 k。

④ 将刚度 k 分配给若干个弹簧。

⑤ 引入已知刚度和阻尼的悬置垫块。修改相应的 k 和 b，并使用式（7-8）计算 T。如果得出的 T 超标，则应适当修改隔振器的参数，并重复设计步骤。

表 7-2 提供了隔振设计中一些有参考性的关系。

表 7-2 隔振

传递率（力/力或运动/运动）	当 $\gamma > 1$ 且 ξ 较小时，$\lvert T \rvert = \sqrt{\dfrac{1+4\xi^2\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2+4\xi^2\gamma^2}} \approx \dfrac{1}{(\gamma^2-1)}$
特性	1. 当 ξ 较小时，$T_{peak} \cong \dfrac{\sqrt{1+4\xi^2}}{2\xi} \approx \dfrac{1}{2\xi}$ 2. 当 ξ 较小时，T_{peak} 出现在 $\gamma_{peak} = \dfrac{[\sqrt{1+8\xi^2}-1]^{1/2}}{2\xi} \approx 1$ 3. 对于所有的 ξ，所有的 $\lvert T \rvert$ 曲线都相交于 $\gamma = \sqrt{2}$ 点。 4. 隔振区域为：$\gamma = \sqrt{2}$ 。 5. 在隔振区域： $\lvert T \rvert$ 随 γ 的增大而减小（即在更高的频率处有更好的隔振效果）；$\lvert T \rvert$ 随 ξ 的增加而增加（即较低的阻尼有更好的隔振效果）。

（续）

设计公式	隔振级 $=1-T$ 隔振器刚度为 $$k=\frac{\omega^2 mT}{(1+T)}$$ 式中，m 为系统质量；ω 为工作频率； 静扰度为 $$\delta_s=\frac{mg}{k}=(1+T)\frac{g}{\omega^2 T}$$

案例 7-2

考虑一建筑物通风系统，它的电动机和风扇单元重 50kg，工作转速为 600～3600r/min。由于办公室直接位于电动机室下面，所以要求达到 90% 的隔振效果。已知每个悬置弹簧的刚度为 100N/cm。设计一个隔振系统，把电动机-风扇单元悬置在房间地板上。

解：

对于 90% 的隔振要求，需要的力传递率 $T=0.1$。最低的工作频率为

$$\omega=(600/60)2\pi \quad \text{rad/s}$$

首先，我们尝试 4 个安装点。总的弹簧刚度为 $k=4\times100\times100\text{N/cm}$，代入式（7-11）中，有

$$4\times100\times10^2=\frac{(10\times2\pi)^2\times m\times0.1}{1.1}$$

得出 $m=111.5\text{kg}$。由于单元质量为 50kg，因此应该用一个大于或等于 61.5kg 的惯性块。

7.3.2 柔性系统的隔振

如图 7-4c 和图 7-4d 所示的简单模型在振动隔振器设计中并不满足足够柔性系统的要求。满足这种条件的、更为合适的模型如图 7-8 所示。注意，隔振器包括一质量为 m 的惯性块，还有一个刚度 k 和阻尼常数 b 的阻尼弹性悬置。弹性振动系统本身的质量为 M，刚度为 K，阻尼常数为 B。

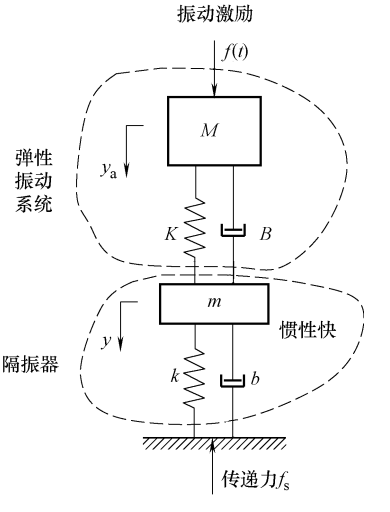


图 7-8　弹性系统的隔振模型

在图 7-4c 中，设有 K、B 和惯性物块 m，则振动系统成为一个简单的、有惯性块 M 的系统。然后，y_a 和 y 具有相同的运动方程

$$M\ddot{y}+b\dot{y}+ky=f(t) \qquad (7\text{-}14)$$

力传递到支撑结构，即传递力为

$$f_s=b\dot{y}+ky \qquad (7\text{-}15)$$

在这种情况下力传递率是

$$T_{\text{inertial}}=\frac{f_{\text{s}}}{f}=\frac{bs+k}{Ms^2+bs+k} \tag{7-16}$$

其中 $s=\text{j}\omega$。

对于图 7-8 所示的弹性系统和隔振器，运动方程为

$$M\ddot{y}_{\text{a}}+B(\dot{y}_{\text{a}}-\dot{y})+K(y_{\text{a}}-y)=f(t) \tag{7-17}$$

$$m\ddot{y}+B(\dot{y}_{\text{a}}-\dot{y})+K(y_{\text{a}}-y)+b\dot{y}+ky=0 \tag{7-18}$$

因此，在频域中，我们有

$$(Ms^2+Bs+K)y_{\text{a}}-(Bs+K)y=f \tag{7-19}$$

$$[ms^2+(B+b)s+K+k]y=(Bs+K)y_{\text{a}} \tag{7-20}$$

其中 $s=\text{j}\omega$。

将式（7-20）代入式（7-19），消除 y_{a}，可以得到

$$\left\{(Ms^2+Bs+K)\frac{[ms^2+(B+b)s+K+k]}{(Bs+K)}-(Bs+K)\right\}y=f$$

可简化为

$$\left\{\frac{Ms^2[ms^2+(B+b)s+K+k]+(Bs+K)(ms^2+bs+k)}{(Bs+K)}\right\}y=f \tag{7-21}$$

传递到支撑结构的力仍由式（7-15）给出。因此，弹性系统的传递率为

$$T_{\text{flexible}}=\frac{(Bs+K)(bs+k)}{\{Ms^2[ms^2+(B+b)s+K+k]+(Bs+K)(ms^2+bs+k)\}} \tag{7-22}$$

由式（7-16）和式（7-22）得到传递率幅值比为

$$\frac{T_{\text{flexible}}}{T_{\text{inertial}}}=\left|\frac{(Bs+K)(Ms^2+bs+k)}{Ms^2[ms^2+(B+b)s+K+k]+(Bs+K)(ms^2+bs+k)}\right| \tag{7-23}$$

其中 $s=\text{j}\omega$。

或

$$\frac{T_{\text{flexible}}}{T_{\text{inertial}}}=\left|\frac{(Ms^2+bs+k)}{Ms^2(ms^2+bs+k)/(Bs+K)+Ms^2+ms^2+bs+k}\right| \tag{7-24}$$

其中 $s=\text{j}\omega$

写成无量纲形式为

$$\frac{T_{\text{flexible}}}{T_{\text{inertial}}}=\left|\frac{1-\gamma^2+2\text{j}\xi_{\text{b}}\gamma}{-\gamma^2(1-\gamma_{\text{m}}\gamma^2+2\text{j}\xi_{\text{b}}\gamma)/(r_{\omega}^2+2\text{j}\xi_{\text{b}}\gamma)+1-(1+r_{\text{m}})\gamma^2+2\text{j}\xi_{\text{b}}\gamma}\right| \tag{7-25}$$

式中，

$$\gamma=\frac{\omega}{\sqrt{k/M}}$$

$$r_{\text{m}}=\frac{m}{M}$$

$$r_{\omega}=\frac{\sqrt{K/M}}{\sqrt{k/M}}=\sqrt{\frac{K}{k}}$$

$$\xi_{\text{a}}=\frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$\xi_b = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$$

同样，隔振设计问题还是选择参数 r_m、r_ω、ξ_a 和 ξ_b，以实现工作频率 γ 范围内的所需的隔振水平。

依据式（7-25）的无阻尼案例如图 7-9 所示，分为 $r_m = 1.0$ 和 $r_\omega = 10.0$。一般来说，在 $\gamma = 1$（惯性系统的共振）时传递率为零，且存在两个 γ 的值（柔性系统的共振），它使得幅值比在无阻尼情况下变得无穷大。在稳定运行条件下，应当避免后两个相邻值。

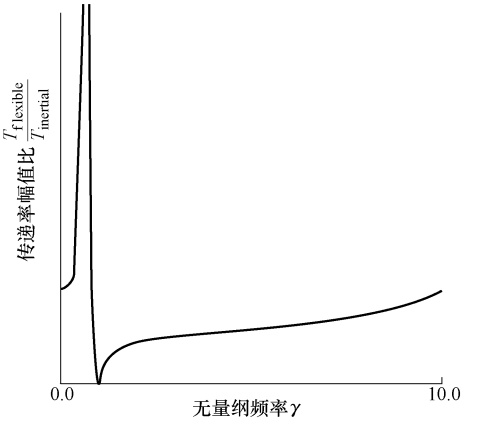


图 7-9　无阻尼条件下，系统弹性对传递率幅值的影响
（质量比为 1.0，固有频率比为 10.0）

7.4　旋转机械的平衡

许多实际的可运行设备包含有旋转组件，如汽车的车轮、轴、机械齿轮传动、带传动、电动机、增压机、压缩机、风扇和滚筒。当质心不与旋转轴重合时，会导致旋转组件的不平衡。造成这种偏心的原因有以下几种：

① 不准确的生产过程（加工、铸造、锻造、装配等）。

② 摩擦和磨损。

③ 加载条件（力学的）。

④ 环境条件（热负荷和变形）。

⑤ 非均匀和各向异性材料的使用（没有均匀的密度分布）。

⑥ 零件故障。

⑦ 旋转装置上新添了零部件。

对于一个质量为 m、偏心距为 e、以角速度 ω 旋转的部件，产生的离心力为 $me\omega^2$。注意离心力随 ω 的平方变化。该旋转力可分解为两个正交分量，分别随频率 ω 呈正弦变化。由此可见，由于不平衡产生了强迫简谐激励，并带来不需要的振动和相关的

问题。

由不平衡引起的问题包括：摩擦与磨损、部件的故障和失效、产品质量差和不希望的噪声。随着当前开发高速机械的趋势，这个问题变得越来越重要。据估计，机械工作的速度在过去 50 年中翻了一番。这意味着不平衡力量级可能在同一时期增加了 3 倍，造成了更严重的振动问题。

不平衡的平衡旋转组件可能通过添加材料或移除材料来进行平衡。我们需要知道添加或移除的平衡质量块的幅值和位置。本节将讨论振动抑制的部件平衡问题。

注意，我们的目标是消除振动源（即质量偏心），通常是通过加入一个或多个平衡质量块。这里有两种方法可供选择：

① 静态（单平面）平衡；

② 动态（双平面）平衡。

第一种方法涉及平面物体（如扁平电动机和圆盘）的平衡，其纵向尺寸相对旋转轴并不显著；第二种方法涉及的平衡对象有较大纵向尺度。我们将讨论这两种方法。

7.4.1　静平衡

如图 7-10a 所示，一个绕定轴以角速度 ω 转动的圆盘。假设圆盘的质心距离旋转轴有一偏心距 e，在旋转中心放置一个固定的坐标系 $x-y$。在这个坐标系中，质心位置 $\boldsymbol{e}$ 可以表示为：

① 一个以角速度 ω 转动的位置矢量。

② 一个复数，实部对应 x 轴，虚部对应 y 轴。

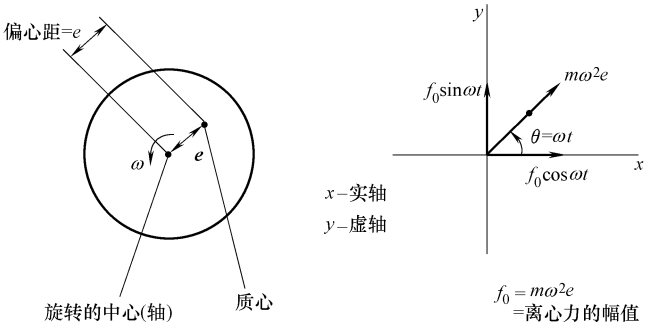


图 7-10　圆盘的不平衡

a）由于质量偏心导致转盘的不平衡　b）由不平衡引起的离心力旋转矢量

如图 7-10b 所示，质量偏心产生的离心力也是 $\boldsymbol{e}$ 方向上的一个矢量，但是幅值为 $f_0 = m\omega e^2$。可以看出，简谐激励导致在 X 和 Y 方向上分别有力 $f_0\cos\omega t$ 和 $f_0\sin\omega t$，其中 $\theta = \omega t$ = 旋转矢量与 X 轴之间的夹角。为了平衡该盘，我们应该增加一个质量为 m 的质量块在 $-\boldsymbol{e}$ 的方向。但是，我们不知道 m 的值和 $\boldsymbol{e}$ 的位置。

平衡方法如下所述：

① 测量相对于某参考点的不平衡离心力的振幅 V_u 和相位角 ϕ_1（如由安装在圆盘轴承上的加速度计信号得出）。

② 放置已知质量（试验质量）M_t 到已知位置的圆盘上。假设用旋转矢量 $\boldsymbol{V}_w$ 给出其自身离心力，由于原不平衡和最终质量的合成产生的离心力在 $\boldsymbol{V}_r$ 方向上。

③ 如同步骤①，测量相对于同一相位参考点的合成离心力的幅值 V_r 和相位角 ϕ_2。

由原来的不平衡产生的离心力 $\boldsymbol{V}_u$ 和由试验质量不平衡产生的离心力 $\boldsymbol{V}_w$，它们合成构成的矢量图如图 7-11 所示。由此产生的不平衡就是 $\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_u + \boldsymbol{V}_w$。注意：$-\boldsymbol{V}_u$ 代表平衡质量产生的离心力。因此，如果我们确定了图 7-11 中的 ϕ_b 角，就可以给出平衡质量的方向。假设平衡质量为 M_b，且安装位置的离心力相当于试验质量 M_t 的离心力，那么有

$$\frac{M_b}{M_t} = \frac{V_u}{V_w}$$

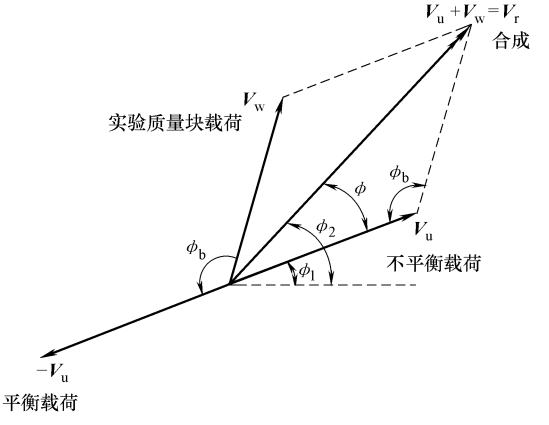


图 7-11　单平面（静态）平衡问题的矢量图

我们需要求出比：V_u/V_w 和角度 ϕ_b，这些值可通过以下公式求出：

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 \tag{7-26}$$

余弦定理给出

$$V_w^2 = V_u^2 + V_r^2 - 2V_uV_r\cos\phi \tag{7-27}$$

式（7-27）中，V_u、V_r、ϕ 已知，则可求出 V_w，再次应用余弦定理，有

$$V_r^2 = V_u^2 + V_w^2 - 2V_uV_w\cos\phi_b$$

因此

$$\phi_b = \arccos\left[\frac{V_u^2 + V_w^2 - V_r^2}{2V_uV_w}\right] \tag{7-28}$$

注：有人可能会觉得，既然我们测量出了 ϕ_1，就可以确切地知道哪里是 $\boldsymbol{V}_u$。但是事实并非如此，因为我们不知道从哪个参考线开始测量 ϕ_1，我们只知道这条参考线在测量过程中保持固定（通过本身旋转的闪光灯同步），因此需要知道 ϕ_2，它通过相对于圆盘上的已知位置 $\boldsymbol{V}_w$ 来确定 $-\boldsymbol{V}_u$ 的位置。

7.4.2　复数/矢量方法

同样，假设不平衡相当于质量 M_b，它和实验质量 M_t 同样放置于偏心（半径）r 处。定义复数（在随圆盘转动的坐标系中的质量位置矢量）为

$$\boldsymbol{M}_b = M_b \angle \theta_b \tag{7-29}$$

$$\boldsymbol{M}_t = M_t \angle \theta_t \tag{7-30}$$

如图 7-12 所示。

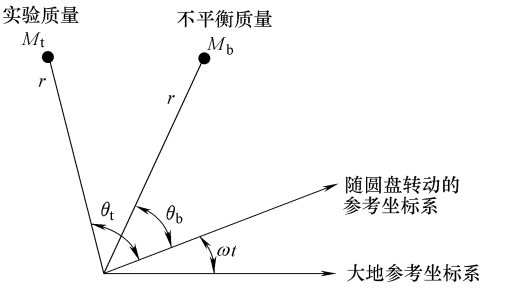


图 7-12　质量块位置的旋转矢量

相关的力矢量为

$$\boldsymbol{V}_u = \omega^2 r e^{i\omega t} M_b \angle \theta_b \tag{7-31}$$

$$\boldsymbol{V}_w = \omega^2 r e^{i\omega t} M_t \angle \theta_t \tag{7-32}$$

或

$$\boldsymbol{V}_u = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_b \tag{7-33}$$

$$\boldsymbol{V}_w = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_t \tag{7-34}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \omega^2 r e^{i\omega t}$ 是从质量到（旋转）动态力的换算因子。由于 r 相同，所以上述两者是相同的，我们需要确定 $\boldsymbol{M}_b$。

根据式（7-33），有

$$\boldsymbol{M}_b = \frac{\boldsymbol{V}_u}{\boldsymbol{A}} \tag{7-35}$$

代入式（7-34），有

$$\boldsymbol{M}_b = \frac{\boldsymbol{V}_u}{\boldsymbol{V}_w}\boldsymbol{M}_t \tag{7-36}$$

然而，由于

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_u + \boldsymbol{V}_w \tag{7-37}$$

所以我们有

$$\boldsymbol{M}_b = \frac{\boldsymbol{V}_u}{(\boldsymbol{V}_r - \boldsymbol{V}_u)}\boldsymbol{M}_t \tag{7-38}$$

因为已知 $\boldsymbol{M}_t$，且用同一比例因子测量 $\boldsymbol{V}_u$ 和 $\boldsymbol{V}_r$，所以可以计算 $\boldsymbol{M}_b$。将平衡质量置于 $-\boldsymbol{M}_b$ 处（相对于运动坐标系）。

案例 7-3

考虑以下的实验步骤：

测量：加速度计振幅为 6.0（示波器读数），相位角为 +50°（相对于频闪信号参考，这与旋转体同步）。

新增：相对于旋转体参考半径、角度为 180°处试验质量 $M_t = 20\text{g}$。

测量：加速度计振幅（示波器读数）为 8.0，相位角为 +60°（相对于频闪信号），确定确定平衡质量的大小和位置。

解：

[方法 1]

我们有数据

$$\phi = 60° - 50° = 10°$$

$$V_u = 6.0;\ V_r = 8.0$$

因此，由式（7-27）可得

$$V_w = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8\cos 10°} = 2.37$$

平衡质量为

$$M_b = \frac{6.0}{2.37} \times 20 = 50.63\text{g}$$

由式（7-28）给出

$$\phi_b = \arccos\left[\frac{6^2 + 2.37^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 2.37}\right] = \arccos(-0.787) = 142°\text{或}218°$$

取 $0° \leqslant \phi_b \leqslant 180°$，如图 7-11 所示的矢量图清晰可见。

因此，有

$$\phi_b = 142°$$

然而，

$$\boldsymbol{M}_t = 20 \angle 180°\text{g}$$

由此可见，

$$-\boldsymbol{M}_b = 50.63 \angle (180° + 142°)\text{g} = 50.63 \angle 322°$$

[方法 2]

因为有

$$\boldsymbol{M}_t = 20 \angle 180°\text{g}$$

$$\boldsymbol{V}_u = 6.0 \angle 50°$$

$$\boldsymbol{V}_r = 8.0 \angle 60°$$

然后，根据方程式（7-38），可得到

$$\boldsymbol{M}_b = \frac{6.0 \angle 50°}{8.0 \angle 60° - 6.0 \angle 50°} 20 \angle 180°\text{g}$$

首先，我们计算

$$8.0 \angle 60° - 6.0 \angle 50° = (8.0\cos 60° + \text{j}8.0\sin 60°) - (6.0\cos 50° + \text{j}6.0\sin 50°)$$

$$= 0.1433 + \text{j}2.332 = 2.336 \angle 86.48°$$

因此，有

$$\boldsymbol{M}_b = \frac{6.0 \angle 50°}{2.336 \angle 86.48°} 20 \angle 180°\text{g} = \frac{6.0 \times 20}{2.336} \angle (50° + 180° - 86.48°)\text{g}$$

$$= 51 \angle 143.5°\text{g}$$

平衡质量应设在

$$-\boldsymbol{M}_b = 51 \angle 323.5°\text{g}$$

注：这个角度是与试验质量取为同一个参考坐标系。

7.4.3 动（双平面）平衡

在这里我们考虑一个由两个轴承支撑的拉长的旋转物体（而不是不平衡圆盘），如图 7-13 所示。一般在这种情况下，可能不存在一个等效于一个单一的平面垂直于轴的单不平衡力。为了说明这一点，引入一组力，该组力包括指定位置的单个力和一力偶（两个大小相等，方向相反的平行力）。如果此单力（合力）为零，那么我们只剩一力偶。这个力偶不能由一个力来平衡。

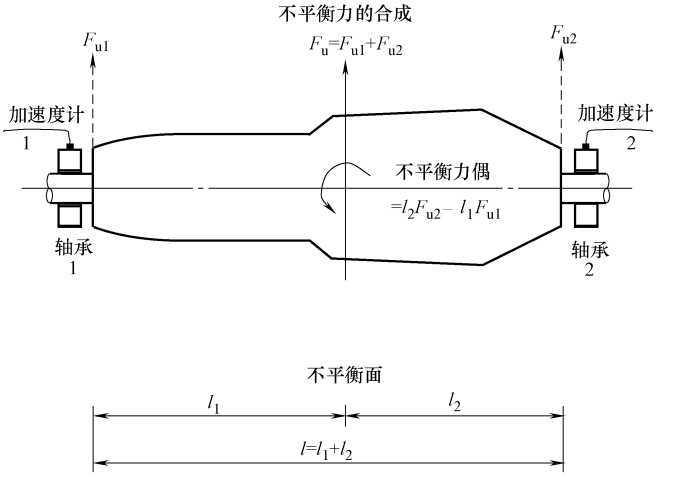


图 7-13 动（双平面）平衡

在沿着轴线的所有平面上的所有不平衡力可等效为在某一个平面上的一个不平衡力和一对力偶。如果这个等效的力是零，那么为了平衡这一力偶，我们需要在两个不同平面上大小相等、方向相反的一对力。

另一方面，如果这一力偶是零，那么，在同一平面上方向相反的不平衡力单力合力则达到完全的平衡。然而，这种不平衡平面可能是未知的，即使已知也需要再加入平衡质量。

在目前的（双平面）平衡问题中，平衡质量是加在两个轴承平面上的，这样一般都可以使不平衡合力和一力偶都得到平衡。从图 7-13 显而易见，单一不平衡面上的单一不平衡质量 $\boldsymbol{M}_b$ 可分解为作用于轴承平面 1 和 2 上的两个质量块 $\boldsymbol{M}_{b1}$ 和 $\boldsymbol{M}_{b2}$。同样，对于不平衡的一力偶，我们可以简单地在平面 1 和 2 上添加两个大小相等方向相反的力，使得该力偶对于不平衡力偶。因此，一般的不平衡都可以表示为轴承平面 1 和 2 上的两个不平衡质量块 $\boldsymbol{M}_{b1}$ 和 $\boldsymbol{M}_{b2}$，如图 7-13 所示。至于单平面平衡问题，在两个轴承（可用加速度计 1 和 2 测量得出）上的不平衡力

$$\boldsymbol{V}_{u1}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{M}_{b1}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{M}_{b2} \tag{7-39}$$

$$\boldsymbol{V}_{u2}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{M}_{b1}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{M}_{b2} \tag{7-40}$$

假设在平面 1 上添加试验质量 $\boldsymbol{M}_{t1}$（在运动参考坐标轴线上的某个已知位置）。在两个轴承上产生的不平衡合力为

$$\boldsymbol{V}_{r11}=\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{M}_{b1}+\boldsymbol{M}_{t1})+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{M}_{b2} \tag{7-41}$$

$$\boldsymbol{V}_{r21}=\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{M}_{b1}+\boldsymbol{M}_{t1})+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{M}_{b2} \tag{7-42}$$

接下来，假设在平面 2 上添加试验质量 $\boldsymbol{M}_{t2}$（在运动参考坐标轴线上的某个已知位置）。在两个轴承上产生的不平衡合力为

$$\boldsymbol{V}_{r12}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{M}_{b1}+\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{M}_{b2}+\boldsymbol{M}_{t2}) \tag{7-43}$$

$$\boldsymbol{V}_{r22}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{M}_{b1}+\boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{M}_{b2}+\boldsymbol{M}_{t2}) \tag{7-44}$$

现在利用方程之间的减法。

方程（7-41）减去方程（7-39），有

$$\boldsymbol{V}_{r11}-\boldsymbol{V}_{u1}=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{M}_{t1}\text{或}\boldsymbol{A}_{11}=\frac{\boldsymbol{V}_{r11}-\boldsymbol{V}_{u1}}{\boldsymbol{M}_{t1}} \tag{7-45}$$

方程（7-42）减去方程（7-40），有

$$\boldsymbol{V}_{r21}-\boldsymbol{V}_{u2}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{M}_{t1}\text{或}\boldsymbol{A}_{21}=\frac{\boldsymbol{V}_{r21}-\boldsymbol{V}_{u2}}{\boldsymbol{M}_{t1}} \tag{7-46}$$

方程（7-43）减去方程（7-39），有

$$\boldsymbol{V}_{r12}-\boldsymbol{V}_{u1}=\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{M}_{t2}\text{或}\boldsymbol{A}_{12}=\frac{\boldsymbol{V}_{r12}-\boldsymbol{V}_{u1}}{\boldsymbol{M}_{t2}} \tag{7-47}$$

方程（7-44）减去方程（7-40），有

$$\boldsymbol{V}_{r22}-\boldsymbol{V}_{u2}=\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{M}_{t2}\text{或}\boldsymbol{A}_{22}=\frac{\boldsymbol{V}_{r22}-\boldsymbol{V}_{u2}}{\boldsymbol{M}_{t2}} \tag{7-48}$$

因此，一般有

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\frac{\boldsymbol{V}_{rij}-\boldsymbol{V}_{ui}}{\boldsymbol{M}_{tj}} \tag{7-49}$$

这些参数 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 被称为影响系数。

其次，在式（7-39）和式（7-40）中分别消除 $\boldsymbol{M}_{b2}$ 和 $\boldsymbol{M}_{b1}$，有

$$\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{V}_{u1}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{V}_{u2}=(\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{M}_{b1}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{V}_{u1}-\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{V}_{u2}=(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{M}_{b2}$$

或

$$\boldsymbol{M}_{b1}=\frac{\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{V}_{u1}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{V}_{u2}}{(\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21})} \tag{7-50}$$

$$\boldsymbol{M}_{b2}=\frac{\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{V}_{u1}-\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{V}_{u2}}{(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{A}_{22})} \tag{7-51}$$

将式（7-45）代入式（7-48），再代入式（7-50）和式（7-51），可求出 $\boldsymbol{M}_{b1}$ 和 $\boldsymbol{M}_{b2}$，然后应分别在平面 1 和 2 上增加平衡质量 $-\boldsymbol{M}_{b1}$ 和 $-\boldsymbol{M}_{b2}$。

单平面和双平面平衡的方法的总结见表 7-3。

表 7-3 旋转部件动平衡

静态或单平面平衡(平衡一个等效动态力)	实验方法	①相对于运动物体参考坐标轴线的轴承处加速度信号,测量幅值(V)和相位(ϕ): (a)无试验质量时:(V_u,ϕ_1) 或 $\boldsymbol{V}_u = V_u \angle \phi_1$ (b)有试验质量时:(V_r,ϕ_2)或 $\boldsymbol{V}_r = V_r \angle \phi_2$ ②计算平衡质量 M_b和相对于 M_t的位置。 ③移除 M_t,并把 M_b添加到确定位置上。
	计算方法 1	$V_w = [\,V_u^2 + V_r^2 - 2V_u V_r \cos(\phi_2 - \phi_1)\,]^{1/2}$ $\phi_b = \arccos\left[\dfrac{V_u^2 + V_w^2 - V_r^2}{2V_u V_w}\right]$和 $M_b = \dfrac{V_u}{V_w} M_t$ 由 M_t锁定 ϕ_b处的 M_b
	计算方法 2	不平衡质量矢量 $$\boldsymbol{M}_b = \frac{\boldsymbol{V}_u}{\boldsymbol{V}_r - \boldsymbol{V}_u}\boldsymbol{M}_t$$ 其中 $\boldsymbol{M}_t = M_t \angle \theta_t$(试行质量矢量)。 确定 $-\boldsymbol{M}_b$ 处的平衡质量。
动态或双平面平衡(平衡一个等效的动态力和一力偶)	实验方法	①在轴承 $i=1$、2 处测量具有试验质量的 $\boldsymbol{V}_{ui}$ ②在轴承 $i=1$、2 处测量 $\boldsymbol{V}_{rij}$,此时只有一个试验质量 $\boldsymbol{M}_{tj}$,其中 $j=1$,2。 ③计算平面 $i=1$、2 上的不平衡质量矢量 $\boldsymbol{M}_{bi}$。 ④在平面 $i=1$、2 上卸下试验质量,再放上平衡质量 $-\boldsymbol{M}_{bi}$。
	计算	影响系数:$\boldsymbol{A}_{ij} = (\boldsymbol{V}_{rij} - \boldsymbol{V}_{ui})/\boldsymbol{M}_{tj}$ 不平衡质量矢量为 $$\boldsymbol{M}_{b1} = \frac{\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{V}_{u1} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{V}_{u2}}{(\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21})}$$和 $$\boldsymbol{M}_{b2} = \frac{\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{V}_{u1} - \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{V}_{u2}}{(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{12} - \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{A}_{22})}$$

案例 7-4

假设已获得以下测量值:

无试验质量:

轴承 1 处的加速度计:幅值 = 10.0;相位角超前 55°。

轴承 2 处的加速度计:幅值 = 7.0;相位角超前 120°。

在平面 1 上 270°的位置上增加试验质量 20g:

轴承 1 处的加速度计:幅值 = 7.0,相位角超前 120°。

轴承 2 处的加速度计:幅值 = 5.0,相位角超前 225°。

在平面 2 上 180°的位置增加试验质量 25g:

轴承 1 处的加速度计:幅值 = 6.0,相位角超前 120°。

轴承 2 处的加速度计:幅值 = 12.0,相位角超前 170°。

为了使系统完全平衡(动平衡),确定在平面 1 和 2 处必须增加的平衡质量的大小和方向。

解：

在矢量表示法中，我们用以下给定的数据来表示：

$$\boldsymbol{V}_{u1}=10.0\angle 55^\circ;\ \boldsymbol{V}_{u2}=7.0\angle 120^\circ$$

$$\boldsymbol{V}_{r11}=7.0\angle 120^\circ;\ \boldsymbol{V}_{r21}=5.0\angle 225^\circ$$

$$\boldsymbol{V}_{r12}=6.0\angle 120^\circ;\ \boldsymbol{V}_{r22}=12.0\angle 170^\circ$$

$$\boldsymbol{M}_{t1}=20.0\angle 270^\circ \mathrm{g};\ \boldsymbol{M}_{t2}=25.0\angle 180^\circ \mathrm{g}$$

从式（7-45）到式（7-48），有

$$\boldsymbol{A}_{11}=\frac{7.0\angle 120^\circ-10.0\angle 55^\circ}{20.0\angle 270^\circ},\ \boldsymbol{A}_{21}=\frac{5.0\angle 225^\circ-7.0\angle 120^\circ}{20.0\angle 270^\circ}$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=\frac{6.0\angle 120^\circ-10.0\angle 55^\circ}{25.0\angle 180^\circ};\ \boldsymbol{A}_{22}=\frac{12.0\angle 170^\circ-7.0\angle 120^\circ}{25.0\angle 180^\circ}$$

这些矢量计算如下：

$$\boldsymbol{A}_{11}=\frac{(7.0\cos 120^\circ-10.0\cos 55^\circ)+\mathrm{j}(7.0\sin 120^\circ-10.0\sin 55^\circ)}{20.0\angle 270^\circ}$$

$$=\frac{-9.235-\mathrm{j}2.129}{20.0\angle 270^\circ}=\frac{9.477\angle 193^\circ}{20\angle 270^\circ}$$

$$=0.474\angle -77^\circ$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\frac{(5.0\cos 225^\circ-7.0\cos 120^\circ)+\mathrm{j}(5.0\sin 225^\circ-7.0\sin 120^\circ)}{20.0\angle 270^\circ}$$

$$=\frac{-7.\ -36-\mathrm{j}9.6}{20.0\angle 270^\circ}=\frac{11.9\angle 234^\circ}{20.0\angle 270^\circ}$$

$$=0.595\angle -36^\circ$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=\frac{(6.0\cos 120^\circ-10.0\cos 55^\circ)+\mathrm{j}(6.0\sin 120^\circ-10.0\sin 55^\circ)}{25.0\angle 180^\circ}$$

$$=\frac{-8.736-\mathrm{j}3.0}{25.0\angle 180^\circ}=\frac{9.237\angle 199^\circ}{25.0\angle 180^\circ}$$

$$=0.369\angle 19^\circ$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=\frac{(12.0\cos 170^\circ-7.0\cos 120^\circ)+\mathrm{j}(12.0\sin 170^\circ-7.0\sin 120^\circ)}{25.0\angle 180^\circ}$$

$$=\frac{-8.318-\mathrm{j}4.0}{25.0\angle 180^\circ}=\frac{9.23\angle 205.7^\circ}{25.0\angle 180^\circ}$$

$$=0.369\angle 25.7^\circ$$

接下来，平衡质量矢量的分母［式（7-50）和式（7-51）］计算如下：

$$\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21}=(0.369\angle 25.7^\circ\times 0.474\angle -77^\circ)-(0.369\angle 19^\circ\times 0.595\angle -36^\circ)$$

$$=0.1749\angle -51.3^\circ-0.2196\angle -17^\circ$$

$$=(0.1749\cos 51.3^\circ-0.2196\cos 17^\circ)-\mathrm{j}(0.1749\sin 51.3^\circ-0.2196\sin 17^\circ)$$

$$=-0.1-\mathrm{j}0.0723=0.1234\angle 216^\circ$$

因此

$$-(\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{21})=0.1234\angle 216^\circ$$

最后，使用式（7-50）和式（7-51）计算平衡质量矢量为

$$\boldsymbol{M}_{b1}=\frac{0.369\angle 25.7^\circ\times 10.0\angle 55^\circ-0.369\angle 19^\circ\times 7.0\angle 120^\circ}{0.1234\angle 216^\circ}=\frac{3.69\angle 80.7^\circ\times 2.583\angle 139^\circ}{0.1234\angle 216^\circ}$$

$$=\frac{(3.69\cos 80.7^\circ-2.583\cos 139^\circ)+\mathrm{j}(3.69\sin 80.7^\circ-2.583\sin 139^\circ)}{0.1234\angle 216^\circ}=\frac{2.546+\mathrm{j}1.947}{0.1234\angle 216^\circ}$$

$$=\frac{3.205\angle 37.4^\circ}{0.1234\angle 216^\circ}=26\angle -178.6^\circ$$

$$\boldsymbol{M}_{b2}=\frac{0.595\angle -36^\circ\times 10.0\angle 55^\circ-0.474\angle -77^\circ\times 7.0\angle 120^\circ}{0.1234\angle 36^\circ}=\frac{5.95\angle 19^\circ\times 3.318\angle 43^\circ}{0.1234\angle 36^\circ}$$

$$=\frac{1.043\angle 5.8^\circ}{0.1234\angle 36^\circ}=8.45\angle -30.0^\circ$$

最后，我们得到

$$-\boldsymbol{M}_{b1}=26\angle 1.4^\circ\mathrm{g};$$

$$-\boldsymbol{M}_{b2}=8.45\angle 150^\circ\mathrm{g}。$$

7.4.4 平衡的实验步骤

根据分析结果和以上介绍的动平衡案例，我们应搞清楚为确定一个旋转系统的平衡质量和位置的实验步骤。基本步骤如下：

1. 确定在轴承平面上，加载/卸去试验质量带来的轴承上加速度计信号的幅值和相位角的大小。

2. 利用这些数据，计算出在轴承平面上必要的平衡质量（大小和位置）。

3. 放置平衡质量。

4. 检查系统是否平衡了。如果没有，重复以上平衡步骤。

一个双平面平衡的实验装置示意图如图 7-14 所示。系统的外观图如图 7-15 所示。牢固地安装在轴上的两个圆盘是由直流电动机驱动的。电机的驱动速度由手动速度控制器进行调节。两轴承的安装位置非常接近圆盘，如图 7-14 所示。两个加速计安装在轴承箱的顶部，这样可以测量产生的垂直加速度。加速度信号使用双通道电荷放大器调理，并通过双通道数字示波器显示。频闪仪（转速）的输出作为相对于加速度计测量信号的相位角的参考信号。

设备的整体布置情况如图 7-15 所示。从左到右观察，第一个设备是双通道数字示波器；其次是负责控制直流电机的带有控制旋钮的手动速度控制器；之后是一对加速度计电荷放大器。在这对电荷放大器的顶部放置有频闪灯光单元（频闪测速）。最右侧是带有驱动电动机的两个圆盘旋转系统。此外，注意两个加速度计（垂直投影很小）是安装在支撑轴的两个轴承箱体上正上方。

由于在读出示波器数据之前总是需要先固定参考位置，所以频闪测速仪要与圆盘旋转同步。实现步骤如下（注意，所有的数据都具有相同的旋转速度，这是由手动速度

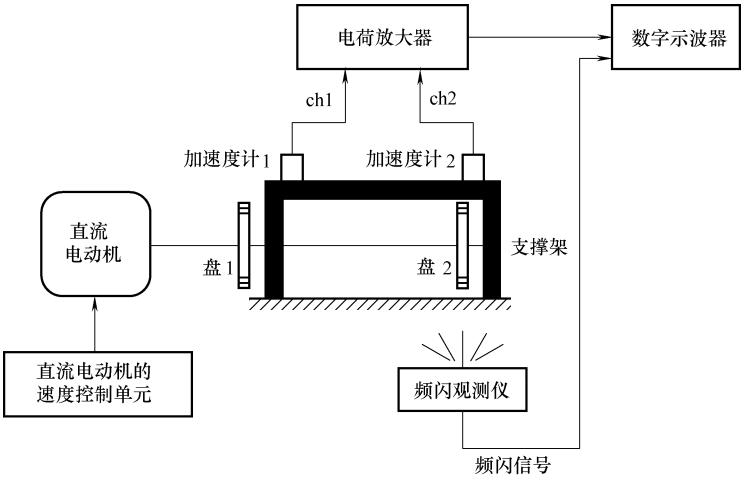


图 7-14　回转轴平衡试验的布置示意图

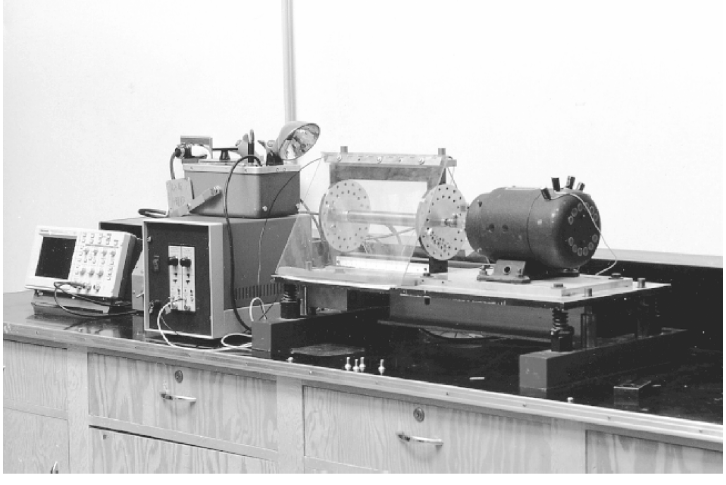


图 7-15　英国哥伦比亚大学的双平面平衡试验照片

控制器进行调节)：首先，在其中一个圆盘上做出物理标记（如在一个白色背景上标出黑点)。闪光灯对准这个圆盘。由于电动机转速调节到所需要的固定值时，频闪仪是同步的，这样圆盘上的标记“显示”固定在相同的位置（如在圆的最上面位置）上。这不仅确保了频闪频率等于圆盘的旋转速度，而且相同的相位角参考值可用于加速度计信号的所有读数。

这两个圆盘有固定位置插槽，插槽半径已知，其相对于运动圆盘参考线（辐射线代表0°参考线）的角度位置，已清晰标明。已知质量块（通常采用已知质量的螺栓和螺母）可以安全地固定在这些插槽中。通过示波器，我们得到读数：

① 每个加速度信号的幅值。

② 相对于同步和参考固定的频闪信号的加速度信号相位提前角（注：相位滞后应

用负数表示）。

根据案例 7-4 所示，实验过程中所采取的测量和所作的计算应该是清楚的。

7.5　往复式机械的平衡

往复式运动机器具有滑块在导轨上沿直线来回移动。活塞缸设备是一个很好的例子。通常情况下，往复机械包含旋转部件和往复机构。其用途不是将往复运动转换为旋转运动（如汽车发动机），就是将旋转运动转换为往复运动（如复印机的光电滑块机构）。不论使用何种往复式机械，重要的是，消除产生的振动激励，以实现平稳运行、高精度、低噪声、可靠性、机械完整性，并使寿命延长的标准设计目标。当然，考虑到它们的旋转不对称性，带旋转部件的往复机械要比单纯旋转部件更加容易不平衡。通过合理的机械平衡来卸下“振动源”，在这种情况下尤其适用。

7.5.1　单缸发动机

汽车发动机的内燃机（IC）是一个有完整的旋转运动的往复式机械的实例。单缸发动机的示意图如图 7-16 所示。观察各个零件的命名。活塞的往复运动经由连杆和曲柄转换成曲轴的旋转运动。如图 7-16 所示的曲柄具有平衡质量，目的是平衡旋转（离心力）。在分析中，我们将忽略这一点，因为我们的目标是确定不平衡力和找出如何平衡它们的方法。

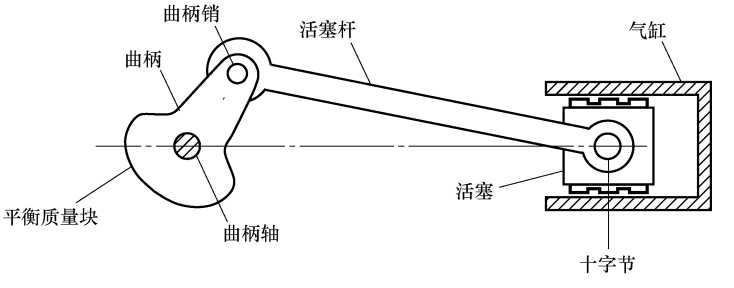


图 7-16　单缸往复式发动机

显然，连杆和曲柄都有分布质量和转动惯量。为了简化分析，我们作出如下近似假设：

① 用作用在曲柄销上的集中质量等效表示曲柄的质量（等价关系取决于离心力或动能）。

② 用两个集中质量代表连杆的质量，一个在曲柄销上，另一个在万向十字节（活塞销）上。

活塞本身具有显著的质量，该质量也集中于十字节上。因此，等效系统有曲柄和连杆，这两个被认为是无质量的，曲柄销上有一个集中质量 m_C，活塞销（十字节）上有另外一个集中质量 m_P。

此外，在正常工作中，曲柄轴以恒定角速度（ω）旋转。注意，这里实现稳定的速度不是依赖于系统固有的动力学，而是通过适当的速度控制来实现的（这个话题超出了本节讨论的范围）。

平衡曲柄销上的集中质量 m_C 相对简单。只要在同一半径径向对面的位置（或质量成反比形式的径向距离曲轴，但仍然与半径方向方向相反）上放置一个质量为 m_C 的配衡质量。这解释了为何在图 7-16 所示的曲柄上放置了配平质量块。一旦完成了转动惯性（m_C）的平衡，我们还需要彻底消除振动源对曲轴的影响。为了达到这个目标，我们必须根据以下方面对曲轴上产生的力和力矩进行补偿：

① 集中质量 m_P 的往复运动。

② 气缸内的时变燃烧（气）压。

这两种类型的力都作用于活塞上，且它们的方向位于往复式（直线）运动方向上。因此，除了燃烧压力更难确定外，可以采用同样的方式分析它们对曲轴的影响。

由上面的讨论证明了图 7-17 所示的一个简化模型，该模型用于分析往复机械的平衡。这种模型的特点如下：

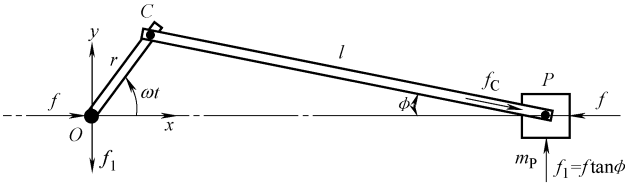


图 7-17　分析往复式发动机平衡的模型

① 一个半径为 r 的轻质曲柄 OC 围绕固定点 O 以恒定的角速度 ω 旋转，点 O 为 $x-y$ 坐标系的原点。

② 一个长度为 l 的轻质连杆 CP 在点 C 与连杆、在点 P 与活塞销无摩擦连接。由于杆轻且连接点无摩擦，所以力 f_C 沿连杆方向（假设力 f_C 在连杆中为压缩力，这是符号常规需要）。连杆与 OP（沿负 x 轴）之间夹角为 ϕ。

③ 活塞上有一集中质量 m_P。作用于点 P 的力 f 沿负 x 方向。这可以解释为作用于气缸的气体压力产生的，或解释为惯性力 $m_P a$ 引起的，其中 a 是 m_P 在正 x 方向上的加速度。以上这两种情况需分开讨论。

④ 一个作用在活塞筒壁上的侧向力 f_1，它在 y 正方向上。

再一次的请注意，在点 C 的集中质量 m_C 并不在图 7-17 所示的模型上，因为它被假定为完全由曲柄的配平质量平衡了的。此外，集中质量 m_P 包括活塞和连杆的部分惯性质量。

点 C 处无外力。此外，点 P 受到的外力只有 f 和 f_1，其中 f 的产生是因为 m_P 的惯性力或活塞上的气体压力。因此，如图 7-17 所示，点 O 处有大小相等方向相反的力，以维持点 P 所受到的外力。现在让我们确定力 f_1。

在点 P 力的平衡给出如下公式

$$f = f_C \cos\phi$$

$$f_1 = f_C \sin\phi$$

因此，

$$f_1 = f\tan\phi \tag{7-52}$$

作用于点 O 和 P 的侧向力 f_1，尽管方向相反，但是可以形成一力偶 $\tau = xf_1$，或代入式（7-52），可以得到

$$\tau = xf\tan\phi \tag{7-53}$$

这个力偶就像扭矩一样作用于曲轴上。因此，一旦在曲柄上的转动惯性 m_C 完全由配平质量平衡，那么在曲轴上的负载就只与活塞载荷 f 有关，它包括：

① 活塞运动（x）方向上的力 f；

② 曲轴（z）旋转方向上的扭矩 $\tau = xf\tan\phi$。

下面我们将讨论到，消除在曲轴上的 f 将同时在一定程度上去除 τ。因此，我们只讨论平衡 f 的方法。

7.5.2 活塞惯性负载的平衡

首先，考虑 m_P 产生的惯性力 f。这里，

$$f = m_P a \tag{7-54}$$

式中，a 是加速度 $\ddot{x}$，沿着坐标轴 x 表示活塞位置 P（换句话说 $OP = x$）。我们注意到如图 7-17 所示：

$$x = r\cos\omega t + l\cos\phi \tag{7-55}$$

然而，

$$r\sin\omega t = l\sin\phi \tag{7-56}$$

因此

$$\cos\phi = \left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t\right]^{1/2} \tag{7-57}$$

可展开到泰勒级数的第一级：

$$\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t \tag{7-58}$$

这种近似是有效的，因为 l 通常比 r 大几倍，因此，$\left(\frac{r}{l}\right)^2$ 相对于整数 1 来说很小。其次，鉴于

$$\sin^2\omega t = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\omega t] \tag{7-59}$$

可以得到

$$\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2 [1 - \cos 2\omega t] \tag{7-60}$$

将式（7-60）代入式（7-55），我们得到近似公式为

$$x = r\cos\omega t + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos 2\omega t + l - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \tag{7-61}$$

将式（7-61）微分两次，得到加速度为

$$a = \ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t - l\left(\frac{r}{l}\right)^2\omega^2\cos 2\omega t \tag{7-62}$$

因此，由式（7-54），得到作用在活塞（和作用在曲轴）上的惯性力为

$$f = -m_{\mathrm{p}}r\omega^2\cos\omega t - m_{\mathrm{p}}l\left(\frac{r}{l}\right)^2\omega^2\cos 2\omega t \tag{7-63}$$

由此可见，往复式活塞的惯性负荷会产生激振力施加在曲轴上，曲轴上也就有了一个基本频率 ω 和一个较小的二阶频率 2ω，其中 ω 为曲柄的角速度。曲柄销上的集中质量旋转产生的角速度和该基本频率相同。但是不同于旋转质量，该激振力只作用在 x 方向（在 y 方向没有 $\sin\omega t$ 分量），因此，不能由一个旋转的配衡质量平衡。同样，二次分量也无法用一个以两倍旋转角速度配平质量来完成平衡。为了消除 f，我们使用多个气缸，这些气缸的连杆和曲柄都以合适的旋转滞后相位连接到曲轴上，从而抵消了 f 的影响。

7.5.3 多缸发动机

单缸发动机会在曲轴上产生一个基本振动和一个二次谐波振动载荷，二者均沿着活塞运动方向（x）。因为没有相配的正交分量（y），所以它们在本质上是不平衡的，也不能使用旋转质量来平衡。它可以被平衡，但是需要使用多个活塞缸单元，且曲柄沿曲轴合理分配相位角。现在我们来讨论多缸往复式发动机的平衡方法。

考虑单缸的活塞惯性会在 x 方向对曲轴产生激振力 f：

$$f = f_{\mathrm{p}}\cos\omega t + f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t \tag{7-64}$$

注意：基频和二次振动的振幅分别为 f_{p} 和 f_{s}，二者均由式（7-63）给出。假设沿曲轴平行排列着多个气缸，第 i 个气缸的曲柄在旋转方向上与第一个气缸的曲柄呈角度 α_i，如图 7-18a 所示。因此，第 i 个气缸在曲轴上的力 f_i（x 方向上，如图 7-18 所示的垂直方向）为

$$f_i = f_{\mathrm{p}}\cos(\omega t + \alpha_i) + f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t + 2\alpha_i),(i = 1, 2, \cdots\text{其中 } \alpha_1 = 0) \tag{7-65}$$

不仅曲柄需要合理布置，气缸也应沿曲轴间隔布置以达到必需的平衡。下面举两个例子。

7.5.3.1 双缸发动机

考虑两缸情况，如图 7-18b 所示，两曲柄在径向（如 180°的相位差）处于相反的方向上。在这种情况下，$\alpha_2 = \pi$，因此有

$$f_1 = f_{\mathrm{p}}\cos\omega t + f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t \tag{7-66}$$

$$f_2 = f_{\mathrm{p}}\cos(\omega t + \pi) + f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t + 2\pi) = -f_{\mathrm{p}}\cos\omega t + f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t \tag{7-67}$$

由此可见，基频部分被抵消。然而，它们形成一力偶 $z_0 f_{\mathrm{p}}\cos\omega t$，其中 z_0 是缸的间距。这将导致产生曲轴的弯矩，且不会消失，除非两缸沿曲轴排列于相同点位置。此

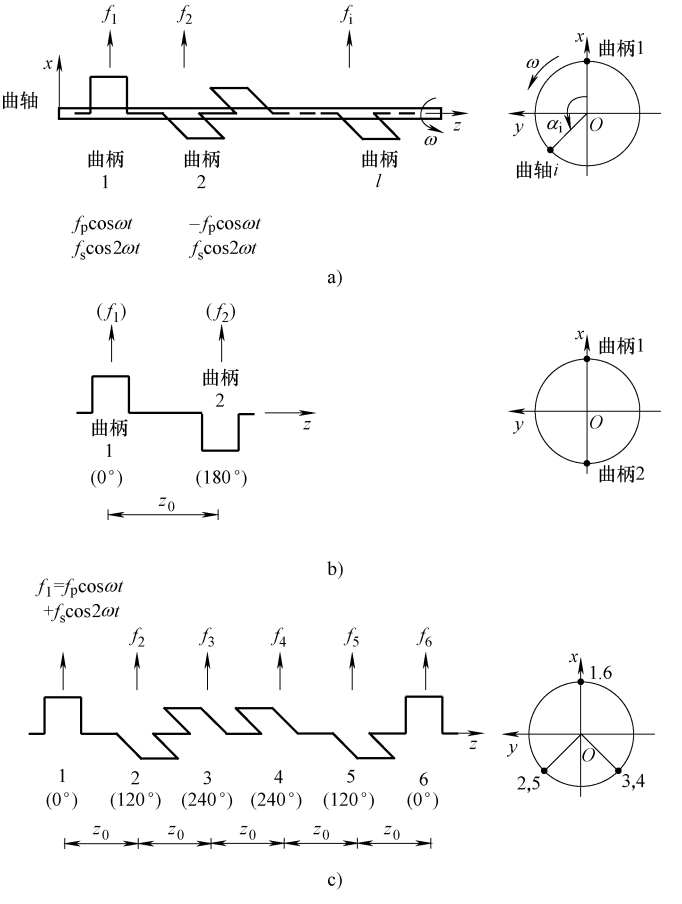


图 7-18 多缸发动机

a）多缸发动机的曲柄布置 b）两缸发动机 c）六缸发动机

外，二次分量是相等的，累加得 $2f_s\cos 2\omega t$。该合力作用于两个气缸之间的曲轴部分的中点处，二次分量没有引起力偶存在。

7.5.3.2 六缸发动机

考虑如图 7-18c 所示的六缸发动机布置示意图。在这里，曲柄布置如下：$\alpha_2=\alpha_5=2\pi/3$，$\alpha_3=\alpha_4=4\pi/3$，$\alpha_1=\alpha_6=0$。此外，各个气缸之间的间距相等，均为 z_0。在这种情况下，我们得到

$$f_1=f_6=f_p\cos\omega t+f_s\cos 2\omega t \tag{ⅰ}$$

$$f_2=f_5=f_p\cos(\omega t+2\pi/3)+f_s\cos(2\omega t+4\pi/3) \tag{ⅱ}$$

$$f_3=f_4=f_p\cos(\omega t+4\pi/3)+f_s\cos(2\omega t+8\pi/3) \tag{ⅲ}$$

现在，我们采用

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=0 \tag{ⅳ}$$

式（ⅳ）既可以由简单的三角函数展开或几何推导（即一个等边三角形的三条边，在任何方向上，它们的总和等于零）来证明。式（ⅳ）适用于任何 θ，包括 $\theta=\omega t$ 和 $\theta=2\omega t$。此外有

$$\cos\left(2\omega t+\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\left(2\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$$

因此，根据式（ⅰ）~式（ⅲ），我们可以得出这样的结论

$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=0 \tag{7-68}$$

这意味着，六个气缸对曲轴产生的侧向力将完全达到平衡。此外，我们对曲轴的曲柄 1 位置取力矩，得到

$$(z_0+4z_0)\left[f_{\mathrm{p}}\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)+f_{\mathrm{s}}\cos\left(2\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)\right]+(2z_0+3z_0)\left[f_{\mathrm{p}}\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)+f_{\mathrm{s}}\cos\left(2\omega t+\frac{8\pi}{3}\right)\right]$$
$$+5z_0\left[f_{\mathrm{p}}\cos\omega t+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t\right] \tag{Ⅴ}$$

由式（ⅳ）来看，式（Ⅴ）也等于零。因此，整个等式中的六个力处于完全平衡，因而这些力既不是一个反应力也不会对曲轴的轴承产生一个弯矩。

此外，显而易见曲轴上由于惯性力 f_i 产生的弯矩 $x_i f_i\tan\phi_i$ 总和为零，其中 x_i 是第 i 个气缸从曲轴到活塞的距离，ϕ_i 是第 i 个气缸连杆的角度 ϕ。因此，这个六缸配置相对于惯性负载来说达到完全平衡。

案例 7-5

八缸直列发动机（各缸沿一条直线平行放置）的曲柄按照相位角 0°、180°、90°、270°、270°、90°、180°排列，且角度 0°在曲轴处。曲柄（气缸）等间隔布置，间距为 z_0。证明：就反应力的基频和二阶分量，以及惯性负载对曲轴轴承的弯矩而言，这台发动机是平衡的。

解：

作用在曲轴上的反应力总和为

$$2\left[f_{\mathrm{p}}\cos\omega t+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t+f_{\mathrm{p}}\cos(\omega t+\pi)+f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t+2\pi)+f_{\mathrm{p}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t+\pi)\right.$$
$$\left.+f_{\mathrm{p}}\cos\left(\omega t+\frac{3\pi}{2}\right)+f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t+3\pi)\right]=2\left[f_{\mathrm{p}}\cos\omega t-f_{\mathrm{p}}\cos\omega t-f_{\mathrm{p}}\sin\omega t+f_{\mathrm{p}}\sin\omega t\right.$$
$$\left.+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t-f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t-f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t\right]=0$$

因此，力的一阶和二阶分量均得到平衡。对曲轴的曲柄 1 位置的反应力矩为

$$(z_0+6z_0)\left[f_{\mathrm{p}}\cos(\omega t+\pi)+f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t+2\pi)\right]+(2z_0+5z_0)\left[f_{\mathrm{p}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t+\pi)\right]$$
$$+(3z_0+4z_0)\left[f_{\mathrm{p}}\cos\left(\omega t+\frac{3\pi}{2}\right)+f_{\mathrm{s}}\cos(2\omega t+3\pi)\right]+7z_0\left[f_{\mathrm{p}}\cos\omega t+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t\right]$$
$$=7z_0\left[-f_{\mathrm{p}}\cos\omega t+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t-f_{\mathrm{p}}\sin\omega t-f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t+f_{\mathrm{p}}\sin\omega t-f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t+f_{\mathrm{p}}\cos\omega t+f_{\mathrm{s}}\cos 2\omega t\right]=0$$

因此，一阶和二阶的弯矩均得到平衡，由此可知发动机是完全平衡的。

适用平衡往复机械的公式总结在表 7-4 中。

表 7-4 往复式机械平衡

单缸发动机	活塞的惯性力(作用于曲轴) $$f = -m_p r\omega^2\cos\omega t - m_p l\left(\frac{r}{l}\right)^2\omega^2\cos 2\omega t = f_p\cos\omega t + f_s\cos 2\omega t$$ 其中,ω 为曲轴转速;m_p 为活塞处等效集总质量;r 为曲柄半径;l 为连杆长度;f_p 为一阶不平衡力的幅值(频率为 ω);f_s 为二阶不平衡力的幅值(频率为 2ω)。
多缸发动机	曲轴上的净不平衡反应力 $= \sum_{i=1}^{n} f_i$ 曲轴上的净不平衡力矩 $= \sum_{i=1}^{n} z_i f_i$ 其中,$f_i = f_p\cos(\omega t + \alpha_i) + f_s\cos(2\omega t + 2\alpha_i)$;$\alpha_i$ 为第 i 个气缸的曲柄的角度位置,相对于(旋转)坐标参考系(如曲柄相位角);z_i 为沿曲轴上第 i 个曲柄的位置,从轴上参考点开始测量;n 为气缸数(与假设各个缸相同)。 注:对于一个完全平衡的发动机,无论是净不平衡力还是净不平衡力矩都为零。

最后，应该指出的是，在以上考虑的配置中，气缸是沿曲轴平行放置的。这些被称为直列发动机。合成的力 f_i 沿轴平行。在诸如 V6 和 V8 等其他方式配置中，气缸围绕曲轴对称放置。在这种情况下，气缸（以及作用于曲轴的惯性力）并不平行。在这里，不必调整曲柄的角度，就可能实现整体的力量平衡。此外，将气缸放置在沿曲轴几乎同一位置可减少弯矩。这样的布置也可能完全平衡燃烧压力。

7.5.4 燃烧/压力负荷

在上述平衡方法中，f 表示等效往复质量对活塞产生的惯性力。对曲轴的影响是在横向方向（x）上相等的反应力 f 和关于轴线（z）的扭矩 $\tau = xf\tan\phi$。平衡的方法是使用一系列气缸，它们作用于曲轴的力 f_i 没有净反应力或弯矩传递到曲轴的轴承上。使用相同的方法也可以平衡力矩 τ_i，例如在六缸发动机中就是这种情况。

另一个沿着活塞往复运动方向作用的力是气体在气缸内的压力（例如，通过内燃机的混合物燃烧燃料产生）。如上所述，该力可记作 f 作为分析时使用。另外，我们要注意以下几个要点：

① 燃烧力 f 不是频率为 ω 的正弦函数，该函数一般具有周期性，但形状复杂且取决于点火/燃油喷射周期和相关的燃烧过程。

② 在气缸 i 中产生作用于曲轴的力 f_i，应当得到平衡以避免把反应力和弯矩传递到轴承（和这里的汽车车架上）上。然而，在这种情况下的力矩 τ_i 其实是驱动力矩。显然，不同于惯性力矩，驱动力矩正是发动机所需的输出，不需要被平衡。

因此，尽管不能直接在这里使用惯性力平衡分析，但是我们可以采用类似的做法减少多缸发动机中气体压力的影响。这是燃烧过程本身的复杂性带来的一个相当困难的问题。在实践中，对点火周期更多的剩余的影响的抑制，主要依赖于设计合适的发动机悬置。实验研究表明，在有适当平衡的发动机装置上，通过发动机悬置传递的大部分振

动，大多是由发动机（内燃机）的点火周期，而不是往复惯性（频率 ω 和 2ω 的正弦分量）引起的。因此，主动悬置的刚度可以根据激振频率改变，以减少发动机在整个运行转速（如 500～2500r/min）范围内的振动。

7.6 轴的涡动

在前两节中，我们研究了某些形式的质量偏心引起的旋转轴和轴承的振动，并介绍了平衡这些系统来消除不良影响的方法。给出的分析有一个限制，就是假设旋转轴是刚性的，因此不平衡激发并不会引起偏离轴线的旋转。然而在实践中，旋转轴比它们携带的组件（转子、圆盘、齿轮等）要轻，因此不平衡负载会引起挠曲。因此，轴将弓起来，并进一步加强了旋转元素（圆盘、转子等）的质量偏心和相关的不平衡激励和陀螺力。旋转机械的阻尼性质（这是相当复杂的，是轴承旋转、结构变形和横向速度的共同影响），将进一步影响到这些条件下轴的动态行为。在本节，将讨论与旋转轴的涡动有关的话题。

假设有一根轴以恒定角速度 ω（通过使用一个电动机或其他一些驱动器）被驱动。轴的中心轴线（通过其轴承）会发生弓弯。偏转的轴本身要旋转，这种旋转被称为回旋或者回转。涡动的速度必定不等于驱动速度 ω（相对于固定框架而言，轴围绕它的轴线旋转）。然而，当涡动速度等于 ω 时，这种情况被称为同步涡动，且此时相关的轴偏转可能相当大，还具有破坏性。

要形成一个涡动分析的基础，假设一轻质轴由两个轴承支撑，轴上有一个质量为 m 的圆盘，如图 7-19a 所示。注意，点 C 是圆盘安装在轴上的点，起初在中性位置，轴不转动时，点 C 与两个轴承连接线上的点 O 重合。如果轴是刚性的，那么点 C 和点 O 将在运动过程中始终重合。如图 7-19 所示，圆盘的质心（形心或为重心）记为 G。在运动过程中，由于轴的偏转，点 C 将远离点 O。涡动的速度（轴线的旋转速度）是就固定的参考系而言的径向线 OC 的旋转速度。OC 与固定的参考线之间夹角记作 θ，涡动速度即为 $\dot{\theta}$。如图 7-19b 所示为偏转状态下的圆盘局部视图。轴的恒定驱动速度 ω 为固定参考系中轴的旋转速度，并且它也是如图 7-19b 所示的 CG 径向线围绕固定水平线的旋转速度。因此，轴旋转的角度是 ωt，正如相对此线进行测量的角度。回转角 θ 也是从这条固定的线方向开始测量的，如图 7-19 所示。

7.6.1 运动方程

在实际条件下，圆盘完全在一个平面内移动。因此，该圆盘的完整的运动方程包括质心（集中质量为 m）的两个平动（平面的）运动方程，和一个围绕固定轴承轴的旋转运动方程。后者方程取决于以恒定速度 ω 驱动轴的电动机力矩，这个不在本文讨论范围内。因此，我们将仅讨论两个平动运动方程。该方程可以建立在直角坐标系（x，y）中或者极坐标系（r，θ）中。在这里，我们将使用极坐标系。

在圆盘上建立固定坐标系（i，j），沿 OC 方向为 i 轴，如图 7-19b 所示。注意角速

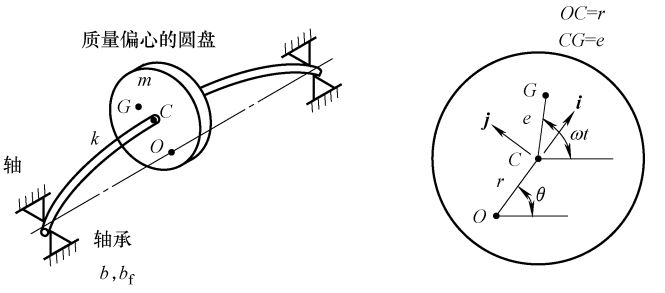


图 7-19 涡动轴分析

a）带有质量偏心圆盘的涡动轴 b）圆盘和回转轴的侧视图

度为 $\dot{\theta}$（围绕 k 轴旋转，与 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 正交）。因此，显而易见，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\boldsymbol{j},\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\boldsymbol{i} \tag{7-69}$$

从点 O 到质点 G 的位移矢量为

$$\boldsymbol{OG}=\boldsymbol{r}_G=\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{CG}=r\boldsymbol{i}+e\cos(\omega t-\theta)\boldsymbol{i}+e\sin(\omega t-\theta)\boldsymbol{j} \tag{7-70}$$

对式（7-70）微分，然后代入式（7-69），即可得到质点 G 处的速度矢量 v_G。但是，由于 ω 是常数，所以矢量可以进行简化。在点 C，有一线速度 $e\omega$ 垂直于 CG，它可以沿轴线 i 和 j 两个方向分解。因此点 G 相对于点 C 的速度是

$$\boldsymbol{v}_{G/C}=-e\omega\sin(\omega t-\theta)i+e\omega\cos(\omega t-\theta)j$$

而点 C 的速度是

$$v_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r\boldsymbol{i}=\dot{r}\boldsymbol{i}+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\boldsymbol{i}+r\dot{\theta}\boldsymbol{j}$$

因此，由$\boldsymbol{v}_G=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{G/C}$可以得到点 G 的速度为

$$\boldsymbol{v}_G=\dot{r}\boldsymbol{i}+r\dot{\theta}\boldsymbol{j}-e\omega\sin(\omega t-\theta)\boldsymbol{i}+e\omega\cos(\omega t-\theta)\boldsymbol{j} \tag{7-71}$$

同样，点 C 的加速度为

$$a_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{r}\boldsymbol{i}+r\dot{\theta}\boldsymbol{j}]=\ddot{r}\boldsymbol{i}+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{j}+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{j}-r\dot{\theta}^2\boldsymbol{i}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{j}$$

此外，由于线 CG 围绕点 C 以恒定角速度 ω 旋转，所以点 G 只有一个沿着 GC 的径向（离心式）加速度 $e\omega^2$。和前面一样，它也可以沿轴线 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 两个方向分解。因此，点 G 相对于点 C 的加速度是

$$a_{G/C}=-e\omega^2\cos(\omega t-\theta)i-e\omega^2\sin(\omega t-\theta)j$$

因此，由 $\boldsymbol{a}_G=\boldsymbol{a}_C+\boldsymbol{a}_{G/C}$可以得到点 G 的加速度为

$$\boldsymbol{a}_G=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{j}-e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\boldsymbol{i}-e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\boldsymbol{j} \tag{7-72}$$

作用在圆盘上的作用力有以下两个：

- 由轴横向偏转引起的抑制弹性力 $-kr\boldsymbol{i}$；
- 黏性阻尼力（正比于点 C 的速度）（$-b\dot{r}\boldsymbol{i}-br\dot{\theta}\boldsymbol{j}$）。

此外，轴承上有正比于反应力的摩擦阻力，另外，轴的挠度为 r，它也取决于自旋速度 ω。下面可用近似模型表示：

$$\text{轴承的摩擦力} = -b_{\mathrm{f}} r\omega \boldsymbol{j}$$

式中，k 为轴在圆盘位置的横向弯曲刚度；b 为轴的横向运动的黏性阻尼系数；b_{f}为轴承摩擦系数。

作用在圆盘上的合力为

$$\boldsymbol{f} = -b\dot{r}\boldsymbol{i} - (br\dot{\theta} + b_{\mathrm{f}} r\omega)\boldsymbol{j} \tag{7-73}$$

直线运动方程为

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}_G \tag{7-74}$$

联立式（7-72）和式（7-73），简化为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 方向上的一对方程：

$$-k - b\dot{r} = m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - e\omega^2\cos(\omega t - \theta)] \tag{7-75}$$

$$-br\dot{\theta} - b_{\mathrm{f}} r\omega = m[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - e\omega^2\sin(\omega t - \theta)] \tag{7-76}$$

这些方程可以表示为

$$\ddot{r} + 2\zeta_{\mathrm{V}}\omega_{\mathrm{n}}\dot{r} + (\omega_{\mathrm{n}}^2 - \dot{\theta}^2)r = e\omega^2\cos(\omega t - \theta) \tag{7-77}$$

$$r\ddot{\theta} + 2(\zeta_{\mathrm{V}}\omega_{\mathrm{n}} r + \dot{r})\dot{\theta} + 2\zeta_{\mathrm{f}}\omega_{\mathrm{n}}\omega r = e\omega^2\sin(\omega t - \theta) \tag{7-78}$$

其中横向振动的无阻尼固有频率为

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7-79}$$

另外，ζ_{V}为横向运动的黏性阻尼比；ζ_{f}为轴承的摩擦阻尼比。

表示轴-盘系统的涡动运动的方程（7-77）和（7-78），是一对非线性耦合方程，且激励（取决于 ω）是和运动变量（θ）耦合的。因此，一般的求解决方法将是相当复杂。但是，在稳定涡动状态下可能有一个相对简单的解决方案。

7.6.2 稳态涡动

在稳定的状态下，涡动速度 $\dot{\theta}$ 为常数 $\dot{\theta} = \omega_{\mathrm{w}}$，因此 $\ddot{\theta} = 0$。此外，轴的横向位移是不变的，故 $\dot{r} = \ddot{r} = 0$。因此，方程（7-77）和（7-78）转化为

$$(\omega_{\mathrm{n}}^2 - \omega_{\mathrm{w}}^2)r = e\omega^2\cos(\omega t - \theta) \tag{7-80}$$

$$2\zeta_{\mathrm{V}}\omega_{\mathrm{n}}\omega_{\mathrm{w}} r + 2\zeta_{\mathrm{f}}\omega_{\mathrm{n}}\omega r = e\omega^2\sin(\omega t - \theta) \tag{7-81}$$

在方程（7-80）和（7-81）中，方程左边是独立于 t 的。因此，右侧也应该独立于 t。对于这一点，我们得到

$$\theta = \omega t - \phi \tag{7-82}$$

式中，ϕ 为相对于轴自旋（ω）的滞后相位角度，如图 7-19b 所示。因此对于稳态涡动，根据方程（7-82）可得到，旋转速度 $\dot{\theta} = \omega_{\mathrm{w}}$就是

$$\omega_{\mathrm{w}} = \omega \tag{7-83}$$

这种情况被称为同步涡动，因为涡动速度（ω_{w}）与轴自旋速度（ω）相等。因此，

在稳定状态下，应该有同步涡动的状态。表示稳态涡动的方程为

$$(\omega_n^2 - \omega_w^2) r = e\omega^2 \cos\phi \tag{7-84}$$

$$2\zeta\omega_n \omega r = e\omega^2 \sin\phi \tag{7-85}$$

联立式（7-82）和式（7-83）。其中，$\zeta = \zeta_V + \zeta_f$是系统的总阻尼比。注意，由式（7-85）和式（7-84）确定相位角 ϕ 和轴挠度 r。特别的，将这两个方程平方后相加，消除了 ϕ，我们得到

$$r = \frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_w^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \tag{7-86}$$

这是在对一个具有加速度激励的简单的振子频率传递函数幅值的形式。用式（7-85）除以式（7-84）可得到相位角：

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega_w^2} \tag{7-87}$$

使用简单的演算（对上式的平方微分，并使等式等于零），我们可以知道最大挠度发生在临界自旋转速 ω_c 处

$$\omega_c = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \tag{7-88}$$

这个临界速度对应于共振。对于小阻尼，我们近似认为 $\omega_c = \omega_n$。因此，对于小阻尼临界速度等于轴-转子单元无阻尼弯曲振动的固有频率。相应的轴挠度为［见式（7-86）］

$$r_c = \frac{e}{2\zeta} \tag{7-89}$$

对于小阻尼，这是临界转速处 r 的一个较好的逼近。由式（7-84）和式（7-85），我们可以看到，在临界转速（带小阻尼）处，$\sin\phi = 1$，$\cos\phi = 0$，其中 $\phi = \pi/2$。此外，由式（7-86）得到，稳态轴挠度在低速时几乎为零，而在高速时接近于 e。但是，式（7-87）表明，对于小 ω，$\tan\phi$ 为较小的正值。我们可以从式（7-85）看出，$\sin\phi$ 也为正。这意味着对于小的 ω，ϕ 本身很小。对于大的 ω，我们可以从式（7-86）看出，r 接近于 e。因此，我们可以从式（7-87）看出，$\tan\phi$ 为较小的负值，而式（7-85）表明，$\sin\phi$ 为正。因此，对于大的 ω，ϕ 接近 π。

从式（7-89）中可以看出，在临界转速，轴的挠度随着质量偏心幅度的增大而增大，而随着阻尼的增大而减小。这意味着减少涡动的破坏性影响的方法有：

① 通过适当的构造方法和平衡来消除或减少质量偏心。

② 增大阻尼。

③ 提高轴的刚度。

④ 避免靠近临界速度下工作。

使用这些方法是有限制的，特别是提高轴的刚度。另外应当注意，我们的分析不包括轴的质量分布。为了得到对旋转轴更准确的涡动分析，需要引入伯努利-欧拉型梁分析，因为轴的质量不能由集中在转子位置处单一参数准确地表示。与轴涡动相关的公式总结如表 7-5 所示。

案例 7-6

一个通风系统的风扇的正常运行转速为 3600r/min。风扇的叶片重为 20kg，并安装在一根重量相对较轻的轴中间，该轴两端支撑在有油润滑的轴承上。安装风扇位置的轴弯曲刚度为 4.0×10^6N/m。轴的可能涡动运动的等效阻尼比为 0.05。由于制造误差，风扇的质心有一个距离轴旋转中性轴线 1.0cm 的偏心：

① 确定风扇系统的临界转速和稳态下风扇位置相应的轴偏转量。

② 正常工作时风扇的稳态轴偏转是多少？

随后使用 5kg 的质量块平衡风扇。通过这种方法，质心偏心减少到 2mm。现在正常运行过程中风扇轴偏转是多少？对已经完成的改进进行评价。

解：

1. 该系统是小阻尼。因此，由无阻尼固有频率给出临界转速：

$$\omega_c\approx\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4\times10^6}{20}}\text{rad/s}=447.2\text{rad/s}$$

相应轴的挠度为

$$r_c=\frac{e}{2\zeta}=\frac{1.0}{2\times0.05}\text{cm}=10.0\text{cm}$$

2. 工作速度 $\omega=(3600/60)\times2\pi\text{rad/s}=377\text{rad/s}$。利用式（7-86），在稳定状态下相应的轴挠度为

$$r=\frac{1.0\times(377)^2}{[(447.2^2-377^2)^2+(2\times0.05\times447.2\times377)^2]^{1/2}}\text{cm}=2.36\text{cm}$$

在平衡之后，新的偏心距 $e=0.2$cm。

新的固有频率（无阻尼）为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4\times10^6}{25}}\text{rad/s}=400\text{rad/s}$$

稳态运行时相应轴的挠度为

$$r=\frac{0.2\times(377)^2}{[(400^2-377^2)^2+(2\times0.05\times400\times377)^2]^{1/2}}\text{cm}=1.216\text{cm}$$

注意，尽管通过平衡把偏心减少到了 1/5，但是轴偏转减少不到 1/2。出现这种情况的主要原因是，工作速度接近临界速度。改进性能的方法包括改变工作速度、使用较小的质量平衡风扇、使用更大的阻尼，并提高轴的刚度。然而，其中一些方法未必可行。工作速度取决于任务的要求，可能没有可行的、足够远的位置放置一个适当大小的平衡质量，增加阻尼会增加热发生，并造成轴承的问题，也将降低工作速度。更换轴或提高轴的刚度可能需要大量的系统修改，还会增加成本。一个较好的替代办法是通过去除一些质量以平衡风扇，这将使临界频率（固有频率）远离工作速度，而不是接近工作速度，同时也会减少质量偏心。例如，假设从风扇上移除 3kg 的质量，这会导致 2.0mm 的偏心，新的固有/临界频率是

$$\sqrt{\frac{4\times10^6}{17}}\text{rad/s}=485.1\text{rad/s}$$

稳定运行期间的相应轴的挠度为

$$r=\frac{0.2\times(377)^2}{[(485.1^2-377^2)^2+(2\times0.05\times485.1\times377)^2]^{1/2}}\text{cm}=0.3\text{cm}$$

在这种情况下，挠度或偏转已经减少到了1/8。

表7-5 轴的涡动

涡动	一轴绕其轴线以速度 ω 旋转，可能发生弯曲形变。弯曲的轴以速度 ω_w 旋转，这就是所谓的回转。
运动方程	$\ddot{r}+2\zeta_V\omega_n\dot{r}+(\omega_n^2-\dot{\theta}^2)r=e\omega^2\cos(\omega t-\theta)$ $r\ddot{\theta}+2(\zeta_V\omega_n r+\dot{r})\dot{\theta}+2\zeta_f\omega_c\omega r=e\omega^2\sin(\omega t-\theta)$ 式中，(r,θ) 为轴的挠度在集中质量的安装处建立的极坐标；e 为集中质量偏离自旋轴线的距离；$\dot{\theta}=\omega_w$，为涡动速度；ω 为轴自旋转速；$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$，为轴弯曲振动的固有频率；$k$ 为轴在集中质量处的弯曲刚度；m 为集中质量；ζ_V 为轴弯曲运动的阻尼比；ζ_f 为支撑轴承的阻尼比。
稳态涡动(同步涡动)	在这里，涡动速度($\dot{\theta}$ 或 ω_w)是常数，且等于轴的自旋转速度 ω(对于稳态涡动 $\omega_w=\omega$)。 集中质量处轴挠度为 $r=\frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_w^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$ 轴挠度(r)和质量偏心(e)之间的相位角为 $\phi=\arctan\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega_w^2}$ 式中，$\zeta=\zeta_V+\zeta_f$。 注意：对于小自旋转速 ω，我们得到小的 r 和 ϕ；对于大的 ω，我们有 $r\approx e$，$\phi\approx\pi$ 临界转速： 自旋速度 $\omega=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$。对于小的 ζ，有 $\phi=\pi/2$

7.6.3 自激振动

代表了轴一般涡动的式（7-77）和式（7-78），是一对非线性耦合方程组。在这些方程中，运动变量（r 和 θ）是作为激励（ω）非线性项出现的，这种系统被称为自激振动系统。注意：一般（在达到稳定状态之前）由于激励函数 $\cos(\omega t-\theta)$ 和 $\sin(\omega t-\theta)$ 的存在，响应变量 r 和 θ 将呈现振动特征。因此，涡动的轴将会产生自激振动。由于激励力直接取决于运动本身，所有可能出现进入系统的连续能量流，这将导致运动幅值的稳定增长，并表现出不稳定特性。

长度为时变的钟摆就是一个自激振动的简单例子。虽然当长度固定时该系统是稳定的，但在长度变化时该系统会变得不稳定。不稳定的自激振动的应用实例包括气动力耦合颤振的机翼、风致桥梁和高层建筑的振动、冰覆盖的输电线路因空气流致振动和因摩擦相关激励力引起的机床颤振。如本章所讨论的，合理的设计和控制方法在抑制自激振动中起着关键作用。

7.7 通过模态测试进行设计

试验模态分析（EMA）包括通过测试（很明显，通过激励-响应数据）提取机械系统的模态参数（固有频率、模态阻尼比、振型），然后在此基础上生成一个动力学模型系统（质量、刚度和阻尼矩阵）。EMA 技术在建模和模型验证（如通过解析建模，验证所获模型的精度）中很有用。除了这些用途外，EMA 也是设计开发的通用工具。在“振动设计”这一章中，EMA 可应用于机械系统的设计和修改设计中，以期实现振动条件下理想的性能。本节将介绍这种方法。

在应用 EMA 进行机械系统的设计中，一般使用下列三种方法：

① 部件修改。

② 模态响应规范。

③ 子结构。

部件修改方法允许我们修改（添加、删除或更改）一种机械系统的物理参数（惯性、刚度、阻尼），并确定带来的对模态响应（固有频率、阻尼比和振型）的影响。从设计的角度看，模态响应规范的方法提供了建立最佳变化的能力，这个变化体现在系统参数（惯性、刚度、阻尼值以及相关方向）中，以实现指定的模态响应变化。在子结构的技术中，使用适当的接口（互联）组件，把两个或多个子系统模型结合起来，且集成的系统整体模型是确定的。在这种方法中，使用的可能是一些子系统的分析或计算原型（如有限元模型）。为了得到更加合适的振动性能，应该明确在一个机械系统设计开发中如何使用这些方法。第一种方法本质上是一个不断摸索的渐进设计技术。在这里，改变一些合适的参数以及由此产生的模态特性是确定的。如果结果性能表现不理想，需要以离散步进的方式改动参数，直到一个可接受的性能（关于共振频率、响应放大系数等）的实现。第二种方法显然是直接设计方法，其中的设计规范，首先是根据模态特性设置的，然后在设计过程中产生物理参数的大小和类型直至符合规范要求。第三个方法，首先设计一组合适的子系统，满足每一个子系统的性能特点。然后，通过适当的力学接口部件将这些子系统相连，且整体系统的性能经验证可接受。在这种方式下，一个复杂的系统可通过其子系统的有条理设计来完成。

7.7.1 部件修改

部件修改的方法涉及改变系统中的质量、刚度或阻尼，并确定相应的动态响应，特别是固有频率、模态阻尼比和振型。这是相对简单的，因为模态分析或模态试验（EMA）会给出必要的信息。由于单步修改可能不是一个适当的设计（如固有频率可能过于接近某个振动激励的显著频率成分），所以有必要进行一系列修改。对于这样的增量过程，模态分析比 EMA 更加方便并且节省成本，因为在后一种情况下，需要物理修改和重新测试，而前者涉及与以前相同的计算步骤，但只使用了一组新的参数值。

例如，考虑一个铝工字梁，有一系列重要的振型，包括弯曲和扭转振型。如图

7-20a 所示，给出了固有频率为 678.4Hz 的第四阶模态振型。图 7-20b 中的点画线显示了传递函数的幅值，在一些垂直方向的位置上激振该梁并在其他位置的垂直方向上测量响应，测量位置均不为节点。该曲线显示了前六阶的固有频率。

其次，在如图所示的位置——顶部法兰上添加集中质量。相应的传递函数的幅值如图 7-20b 中实线所示。注意，由于附加质量带来了所有固有频率减少，但对于高阶模态效果更显著，同样，振型也将发生变化。如果新的振型不符合要求（如一个特定的固有频率并没有足够的转移），则进一步的修改和评价将是必需的。

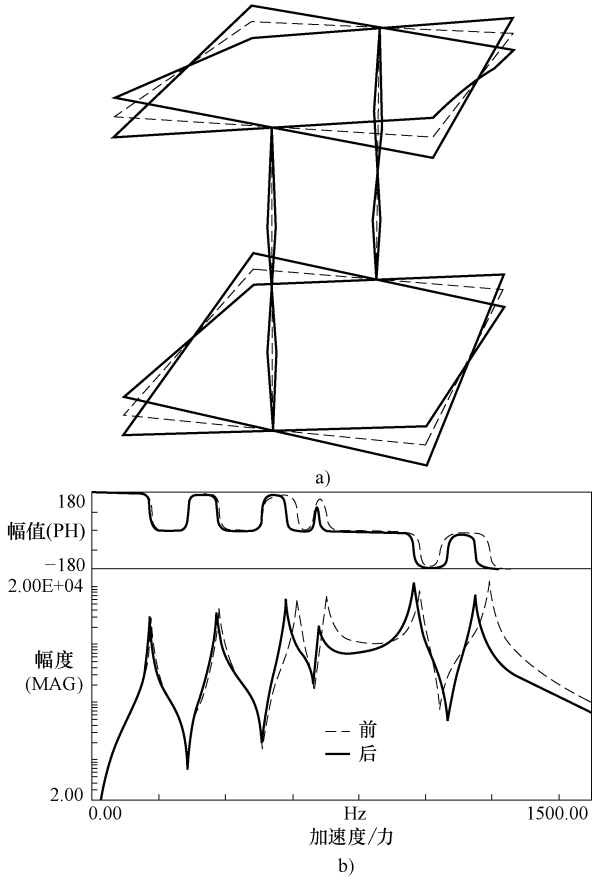


图 7-20 部件修改的案例

a）修改第四阶模态 b）修改前后的传函幅值

考虑一个机械振动系统，它的自由响应 y 描述为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = 0 \tag{7-90}$$

为了简化而忽略阻尼，但下面的讨论，也可以扩展到有阻尼系统（例如经典的比例阻尼的情况下）。如果质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵分别由 $\delta\boldsymbol{M}$ 和 $\delta\boldsymbol{K}$ 进行修改，那么相应的响应（以及固有频率和振型）将不同于原系统的。为了说明这一点，令振型矩阵

（矩阵的列是原系统独立的模态振型矢量）为 $\boldsymbol{\psi}$。然后，使用模态变换

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{q} \tag{7-91}$$

式（7-90）可以表示为典型形式，模态广义坐标为 $\boldsymbol{q}$，则有

$$\overline{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{q}}+\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{q}=0 \tag{7-92}$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}=\overline{\boldsymbol{M}}=\mathrm{diag}[M_1,M_2,\cdots,M_n] \tag{7-93}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi}=\overline{\boldsymbol{K}}=\mathrm{diag}[K_1,K_2,\cdots,K_n] \tag{7-94}$$

如果将同样的变换公式［式（7-91）］用于修改系统

$$(\boldsymbol{M}+\delta\boldsymbol{M})\ddot{\boldsymbol{y}}+(\boldsymbol{K}+\delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{y}=0 \tag{7-95}$$

可以得到

$$(\overline{\boldsymbol{M}}+\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi})\ddot{\boldsymbol{q}}+(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{q}=0 \tag{7-96}$$

由于 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi}$ 一般不是对角矩阵，所以修改后系统的模态矩阵不会继续为 $\boldsymbol{\psi}$。此外，原有的固有频率 $\omega_i=\sqrt{K_i/M_i}$ 将会由于部件改变而变化。对于特殊情况的比例修改（$\delta\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 成正比、$\delta\boldsymbol{K}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 成正比），该模态振型不会改变。然而，在一般情况下，固有频率会发生变化。

逆问题属于模态响应规范。在这里，规定了一组模态参数（ω_{ir} 和 ψ_{ir}）而且必须确定满足规范的必须变化 $\delta\boldsymbol{M}$ 和 $\delta\boldsymbol{K}$。注意解并不唯一，且逆问题比直接问题更困难。在这种情况下，可以首先进行灵敏度分析，对于特定的参数变化，以确定模态变化方向和幅度。然后，在此基础上估计必要的物理参数变化的幅度以实现规定的模态变化。接着，作出相应的修改并分析/测试修改后的系统，以检查它是否符合规范。如果不是，反复进行循环修正。

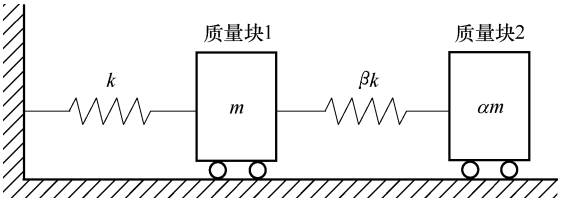


图 7-21　两自由度案例

案例 7-7

图 7-21 所示是一个部件修改的例子，考虑一个两自由度系统的常见问题。无量纲固有频率的平方 $r_i^2=(\omega_i/\omega_0)^2$，其中

$$r_1^2,r_2^2=\frac{1}{2\alpha}\times\{\alpha+\beta+\alpha\beta\}\left\{1\pm\sqrt{1-\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta+\alpha\beta)^2}}\right\}$$

式中，$\omega_0=\sqrt{k/m}$。我们还可以看出模态振型：在给定固有频率处，质量 1 的位移与质量 2 位移的比为

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)_i=\frac{1+\beta-r_i^2}{\beta}(\text{对于 } i \text{ 阶模态})$$

考虑一个系统，$\alpha=0.5$ 和 $\beta=0.5$。通过直接计算，我们得到 $r_1=0.71$ 和 $r_2=1.41$。估计 β 的修正值（第二个弹簧的相对刚度），使系统的固有频率移至接近 $r_1=0.8$ 和 $r_2=2.0$，检查相应的振型的变化。

解：

对于 $\alpha=0.5$ 和 $\beta=0.5$，直接用 $(\psi_2/\psi_1)_1=2.0$ 和 $(\psi_2/\psi_1)_2=-1.0$ 替代，得到 $r_1=0.71$ 和 $r_2=1.41$。现在，考虑 β 以 0.1 的增量变化，那么，$\beta=0.6$。对应的固有频率计算为

$$r_i^2=\frac{1}{2\times0.5}\{0.5+0.6+0.5\times0.6\}\left\{1\mp\left[1-\frac{4\times0.5\times0.6}{(0.5+0.6+0.5\times0.6)^2}\right]^{1/2}\right\}=0.528,2.272$$

因此

$$r_1,\ r_2=0.727,\ 1.507$$

此步骤可能被解释针对特殊部件修改、建立系统灵敏度的方法。显然，修改问题并非是线性的。然而，作为一阶近似，假设 r_i^2 随着 β 线性变化，并按照下式进行修改

$$\frac{\delta\beta}{\delta\beta_0}=\frac{\delta r_i^2}{\delta r_{i0}^2} \tag{7-97}$$

其中下标 0 指的是初始尝试变化 $\delta\beta_0=0.1$。式（7-97）直观满足给定的物理问题性质和事实，即对于一个单自由度问题，频率的平方值随着 k_0 变化。那么，我们有

对于第 1 阶模态：

$$\frac{\delta\beta}{0.1}=\frac{0.8^2-0.71^2}{0.727^2-0.71^2}=5.634$$

或者是

$$\delta\beta=0.56$$

对于第 2 阶模态：

$$\frac{\delta\beta}{0.1}=\frac{2^2-1.41^2}{1.507^2-1.41^2}=7.09$$

或者是

$$\delta\beta=0.709$$

因此，我们使用 $\delta\beta=0.71$，该值为二者中较大的。相应的有

$$\beta=0.5+0.71=1.21$$

固有频率计算如下：

$$r_1^2,r_2^2=\frac{1}{2\times0.5}\{0.5+1.21+0.5\times1.21\}\left\{1\mp\left[1-\frac{4\times0.5\times1.21}{(0.5+1.21+0.5\times1.21)^2}\right]^{1/2}\right\}$$

$$=0.60,4.03$$

或者是

$$r_1,\ r_2=0.78,\ 2.01$$

考虑到问题的非线性，频率的移动是令人满意的。相应的振型为

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)_1=\frac{(1+1.21)-0.6}{1.21}=1.33$$

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)_2=\frac{(1+1.21)-4.03}{1.21}=-1.50$$

因此，随着第二个弹簧刚度的增加，第 1 阶模态中两个质量块的运动越发接近。此

外，在第 2 阶模态中，结点更接近于质量 1。注意这个特定组件修改的极限性。当 $\beta\rightarrow\infty$，两个物体成为刚性连接，频率比为 $r_1=\sqrt{k/(m+\alpha m)}/\sqrt{k/m}=1/\sqrt{1+\alpha}=1/\sqrt{1.5}=0.816$，和 $r_2\rightarrow\infty$。因此，只改变 β 的值是不可能让频率比接近这个 r_1 值的。

7.7.2 子结构

对于有许多部件的大型和复杂的机械系统，子结构方法可以使“振动设计”的过程更方便和有系统性。在这种方法中，系统首先分成若干适宜的子系统，更适合进行测试和分析。通过模态分析和测试方法，以及任何其他方便的方法（如有限元法），这些子系统分别进行建模和设计。注意，系统整体性能取决于链接子系统的接口条件，以及各个子系统的特征。因此，它不可能在不考虑接口条件下，就能把整个系统的设计规范转换成对子系统的设计规范。整个系统是通过在结合处采用兼容性要求和如弹簧-质量-阻尼器单元或刚性连接件的动态方程组，把设计的子系统装配起来。如果组装系统不符合设计规范，那么应修改一个或更多的子系统和接口（组装）的连接，并应重复该过程。因此，对于一个复杂的系统的振动设计来说，子结构设计方法的主要步骤如下：

① 将机械系统分成合适的若干个子系统（子结构），并用力/力矩代表子系统的互连点。

② 通过分析、模态测试和其他标准程序，建立子系统模型。

③ 设计子系统，使它们的表现符合整个系统要求的性能规范。

④ 建立子系统之间的互连（组装）的联系，并获得关于力/力矩和运动（位移/旋转）的动态方程。

⑤ 建立装配处连续性（力平衡）和兼容性（运动一致性）的条件。

⑥ 利用矩阵的方法，消除未知变量并完成整个系统的组装。

⑦ 分析（或测试）整体系统，以确定其振动性能。如果符合要求即可停止。如果没有，要对系统或装配条件进行修改，并重复步骤④～步骤⑦。

举一个简单的例子，考虑两个单自由度系统，两个子系统之间用一根弹簧相互关联，如图 7-22 所示。两个子系统可表示为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}}+\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=0$$

相应的固有频率为

$$\omega_{s1}=\sqrt{k_1/m_1};\ \omega_{s2}=\sqrt{k_2/m_2}$$

整体系统可表示为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}}+\begin{bmatrix} k_1+k_c & -k_c \\ -k_c & k_2+k_c \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=0$$

通过求解方程得到固有频率

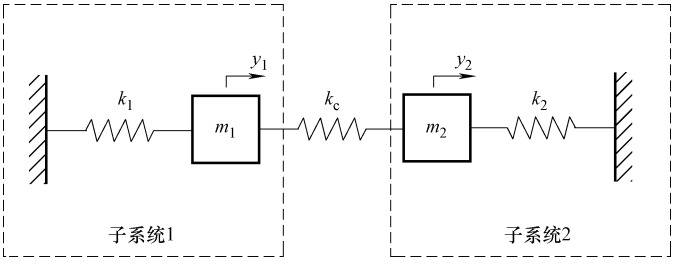


图 7-22 子结构案例

$$\det\begin{bmatrix} k_1+k_c-\omega^2 m_1 & -k_c \\ -k_c & k_2+k_c-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}=0$$

也就是

$$(k_1+k_c-\omega^2 m_1)(k_2+k_c-\omega^2 m_2)-{k_c}^2=0$$

简化得到

$$\omega^4-\left[\frac{k_1+k_c}{m_1}+\frac{k_2+k_c}{m_2}\right]\omega^2+\frac{k_1k_2+k_c(k_1+k_2)}{m_1m_2}=0$$

根的总和为

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\frac{k_1+k_c}{m_1}+\frac{k_2+k_c}{m_2}>\omega_{s1}^2+\omega_{s2}^2$$

根的积为

$$\omega_1^2\omega_2^2=\frac{k_1k_2+k_c(k_1+k_2)}{m_1m_2}>\omega_{s1}^2\omega_{s2}^2$$

这并不意味着经过互联，这两个频率会增加。注意，较低的频率的极限性，当 $k_c\to\infty$ 时，给出了一个单自由度系统，质量为 m_1+m_2，刚度为 k_1+k_2，频率为 $\sqrt{(k_1+k_2)/(m_1+m_2)}$。该值可大于也可小于子系统的固有频率，这取决于参数的相对大小。因此，即使对于这个简单系统，要求所有设计固有频率准确符合要求也会遇到挑战，因为这些频率依赖于各子系统的互连以及子系统本身。

当复杂的设计可以通过平行和独立建立若干子系统和互连来完成时，我们可以使用子结构设计技术。在这一过程中，可以预测子系统之间的动态相互作用，也可以检测到潜在的问题，这将允许在建立原型之前能够重新设计子系统或接口连接。振动问题中使用 EMA 的设计方法归纳如表 7-6 所示。

表 7-6 基于测试的振动设计方法

1. 部件修改	修改部件(质量、弹簧、阻尼器),并确定模态参数(固有频率、阻尼比、振型)。 * 可以判断部件变化的灵敏度。 * 可以检查一个特定的变化是否符合要求。
2. 模态响应规范	指定所需的模态响应(固有频率、阻尼比、振型),并确定了“最好的”部件变化(质量、弹簧、阻尼器),以实现模态规范。 * 可以首先通过进行的敏感性分析来完成(如根据第 1 条款)

（续）

3. 子结构	设计的子系统，以满足规范（分析的、实验的方法，或混合的方法）。 建立子系统之间的互连，并在结合点获得连续性（力平衡）和兼容性（运动的一致性）。 通过消除互联处的未知变量，来组装整体系统。 分析或测试整个系统，如果符合要求则停止；否则修改子系统或互连关系，并重复上述步骤

7.8 振动的被动控制

针对减少机械振动的影响的技术，本章讨论了隔振和振动设计内容。现在要提到的是第三类，振动控制。振动控制的特点是使用一个传感设备检测系统中振动的水平，并采用驱动（强迫）装置对系统施加强迫作用来抵消振动的影响。在一些这样设备中，传感和强迫作用是内含的、并集成在一起。

振动控制可以分为两大类：被动控制和主动控制。

被动振动控制采用无源控制器。根据定义，无源器件无需外部能源来支持它们的工作。在本节讨论的两种被动振动控制器是吸振器（或动力吸振器或 Frahm 减震器，Frahm 是第一个采用该技术控制船舶振动的）和减震器。在这两种类型的设备中，传感设备是隐含的，控制是通过设备根据振动激励产生的响应来生成的力达到。一个动力吸振器是一个带很小或没有阻尼的质量-弹簧式机构，它可以通过能量传递来“吸收”振动激励，从而减少了主系统的振动。由于其自身的阻尼，吸振器吸收的能量会慢慢消散。阻尼器不同于吸振器，它是一种纯粹的能量耗散设备，且是直接消耗能量，而不是储存从系统中吸收到的能量。因此，这是一个更浪费的设备，这也可能会出现与磨损和热效应相关的问题。然而，它比吸振器好的地方在于如有更广泛的工作频率。

7.8.1 无阻尼吸振器

动力吸振器（或动态减振器、吸振器，或 Frahm 吸收器）是一个简单的有极低阻尼的质量-阻尼-弹簧振子。吸振器调谐到机械系统的一个振动频率处，并能接收来自主系统在该频率处显著部分的振动能量。实际上，吸振器振动产生了与主系统振动激励相反的振动力，从而实际上消除了振动的影响。从理论上讲，在吸振器进行振动运动时，主系统的振动可以完全被消除。由于实际中的吸振器的阻尼相当低，所以我们将首先考虑无阻尼吸振器的情况。

如图 7-23 所示，吸振器可以用于两种常见类型的振动控制中。在这里，将需要振动控制的主系统建模为一个无阻尼单自由度质量-弹簧系统（由下标 p 表示）。无阻尼吸振器也是一个单自由度质量-弹簧系统（由下标 a 表示）。如图 7-23a 所示的应用中，吸振器的目标是减少由振动激励 $f(t)$ 引起对主系统的振动响应 y_p。激振力 f_s 由振动响应传递给支撑结构，用下式表示

$$f_s = k_p y_p \tag{7-98}$$

因此，减少 y_p 的目标也就是减少这种振动传递力（隔振目标）。如图 7-23b 所示，在第二类的应用中，主系统收到振动支撑运动的激励，此时吸振器的目的是为了减少主系统产生的振动运动 y_p。注意，在这两种类型应用中，目的都是减少振动的响应。因此，静负荷（如重力）不在分析的考虑范围中。

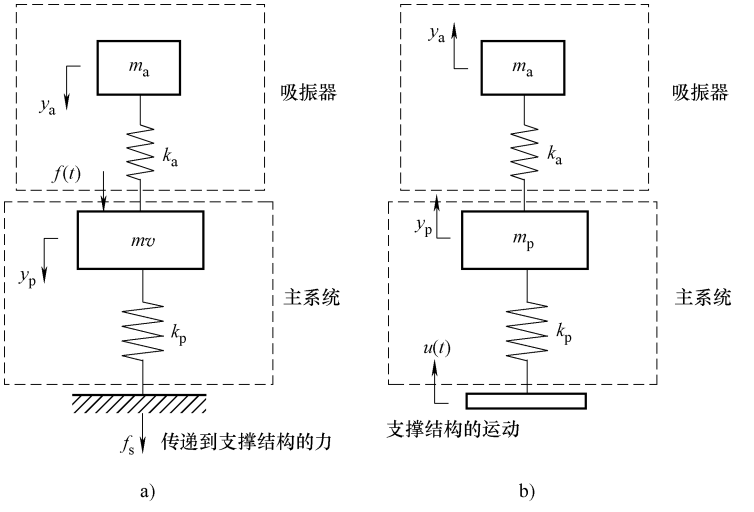


图 7-23　吸振器的两种应用

a）减少激振力引起的响应（即减少传递到支撑结构的力）　b）减少支撑结构运动的响应

表 7-7 是针对图 7-23 所示的两个系统建立的运动方程。因为我们主要关注的是振动响应对振动激励的控制，所以频域模型尤其有用。注意表 7-1 中的系统传递函数 f_s/f 是传递函数 y_p/f 的 k 次方，而且在实际上与系统 b 的传递函数 y_p/u 是相同的。这两个问题本质上是相同的，因此，我们只需要解决其中之一问题。

在研究前两类问题的共同传递函数之前，我们来仔细看一下图 7-23a 所示的系统的频域方程。我们得到

$$(k_p + k_a - \omega^2 m_p) y_p - k_a y_a = f \tag{7-99}$$

$$(k_a - \omega^2 m_a) y_a = k_a y_p \tag{7-100}$$

再加上方程式（7-98）。在这里，m_p 和 k_p 是主系统的质量与刚度；m_a 和 k_a 是吸振器的质量与刚度；f 是激励幅度；ω 是激励频率；y_p 为主质量响应；y_a 为吸振器的响应。现在注意到，在式（7-100）中，如果 $\omega = \sqrt{k_a/m_a}$，那么 $y_p = 0$。这意味着，如果将吸振器调整至固有频率等于激励频率（驱动频率），主系统将不会（理想状态）产生任何振动，并完全可控。这样做的原因可由式（7-99）清晰可见，当代入 $y_p = 0$ 时，得到 $k_a y_a = -f$。换句话说，一个调谐吸振器给了主系统一个弹簧力，该力与激振力大小相等、方向相反，能够完全中和激振力。吸振器质量块的运动与激振力的相位角相差 180°。

表 7-7　用于两种用途的吸振器相关公式

项目 \ 用途	吸振器应用于减小系统 a(即主系统)的响应	
	力的激振	支撑运动激振
时域方程	$m_p\ddot{y}_p = -k_p y_p - k_a(y_p - y_a) + f(t)$ $m_a\ddot{y}_a = k_a(y_p - y_a)$	$m_p\ddot{y}_p = k_p[u(t) - y_p] - k_a(y_p - y_a)$ $m_a\ddot{y}_a = k_a(y_p - y_a)$
频域方程	$(-\omega^2 m_p + k_p + k_a)y_p = k_a y_a + f$ $(-\omega^2 m_a + k_a)y_a = k_a y_p$	$(-\omega^2 m_p + k_p + k_a)y_p = k_a y_a + k_p u$ $(-\omega^2 m_a + k_a)y_a = k_a y_p$
矩阵形式	$\begin{bmatrix} k_p + k_a - \omega^2 m_p & -k_a \\ -k_a & k_a - \omega^2 m_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_p \\ y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_p + k_a - \omega^2 m_p & -k_a \\ -k_a & k_a - \omega^2 m_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_p \\ y_a \end{bmatrix} = k_p\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$
传函矩阵	$\begin{bmatrix} y_p \\ y_a \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} k_a - \omega^2 m_a & k_a \\ k_a & k_p k_a - \omega^2 m_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_p \\ y_a \end{bmatrix} = \frac{k}{\Delta}\begin{bmatrix} k_a - \omega^2 m_a & k_a \\ k_a & k_p k_a - \omega^2 m_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$
振动控制传函	$\frac{f_s}{f} = \frac{k_p y_p}{f} = \frac{k_p}{\Delta}(k_a - \omega^2 m_a)$	$\frac{y_p}{u} = \frac{k_p}{\Delta}(k_a - \omega^2 m_a)$
特征多项式	$\Delta = (k_p + k_a - \omega^2 m_p)(k_a - \omega^2 m_a) - k_a^2$ $= m_p m_a \omega^4 - [k_a(m_p + m_a) + k_p m_a]\omega^2 + k_p k_a$	

这些运动的频率是 ω（与激振力的频率相同），振幅与激振力的幅值成正比，并与吸振器弹簧的刚度成反比。因此，吸振器“吸收”了主系统的振动能量。此外，从式(7-98）可以看出，经过调谐的吸振器，传递到支撑结构的激振力（理想上）为零。所有这些信息均可观测，无需利用运动方程进行计算。

注意，我们处理的是振动激励和响应。因此，静荷载（如重力和弹簧预加载）不在考虑范围内（我们探讨系统在静平衡位置下的响应)。总之，我们现在可以把吸振器(无阻尼）的特点列举如下：

① 仅对单个激励频率有效（如正弦激励)。

② 为了达到最佳效果，应该“调谐”使得固有频率 $\sqrt{k_a/m_a}$ 等于激励频率。

③ 在强迫激振情况下，可调谐吸振器（理想）使主系统的振动响应和传递到支撑结构的振动力为零。

④ 在支撑结构的振动运动情况下，调谐吸振器可以使主系统产生的响应为零。

⑤ 吸振器从主系统获得振动能量并储存它（如质量块动能或弹簧势能)，而不是直接耗散能量。

⑥ 通过施加大小相等、方向相反的激振力给主系统，从而达到中和激振的功能。

⑦ 吸振器的运动振幅与激励幅度成正比，与吸振器的刚度成反比。该吸振器运动的频率与激励频率相同。

现在，考虑无阻尼吸振器的传函（f_s/f 或 y_p/u)，如表 7-7 所示，可有

$$G(\omega) = \frac{k_p(k_a - \omega^2 m_a)}{m_p m_a \omega^4 - [k_a(m_p + m_a) + k_p m_a]\omega^2 + k_p k_a} \tag{7-101}$$

为方便起见，在分析频率传递函数时使用无量纲的形式。为此，我们定义以下无量

纲参数和频率变量：

吸振器的质量比 $\mu = m_a/m_p$；

吸振器的无量纲固有频率 $\alpha = \omega_a/\omega_p$；

无量纲激振（驱动）频率 $\gamma = \omega/\omega_p$。

其中，ω_a 为吸振器的固有频率，$\omega_a = \sqrt{k_a/m_a}$；$\omega_p$ 为主系统的固有频率，$\omega_p = \sqrt{k_p/m_p}$。

直接用分子和分母同除以 $k_p k_a$，然后进行简单代数运算，用无量纲形式表示式（7-101）的传递函数：

$$G(\gamma) = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma^4 - [\alpha^2(1+\mu)+1]\gamma^2 + \alpha^2} \tag{7-102}$$

对于这个无阻尼系统，共振频率（此处的传递函数的幅值为峰值）和固有频率（对应于“固有”或自由时间振动响应的特征方程的根）并无差别。这些都是通过求解方程

$$\gamma^4 - [\alpha^2(1+\mu)+1]\gamma^2 + \alpha^2 = 0 \tag{7-103}$$

求解得出

$$\gamma_1^2, \gamma_2^2 = \frac{1}{2}[\alpha^2(1+\mu)+1] \mp \frac{1}{2}\sqrt{[\alpha^2(1+\mu)+1]^2 - 4\alpha^2} \tag{7-104}$$

由式（7-104），清晰可见这些频率的平方均为正数。实际上，无量纲固有频率就是它们的平方根。该传递函数幅值在这两个固有/共振频率处趋于无限大。此外，由式（7-102），清晰可见传递函数幅值在 $\gamma = \alpha$ 处变为零，其中激振频率（ω）与上面提及的吸振器固有频率（ω_a）相等。在目前无阻尼的情况下，传递函数 $G(\gamma)$ 是实数，但既可以为正也可以为负。取 $G(\gamma)$ 的绝对值为幅值，因而为正。如图 7-24 所示幅值图，显示了无阻尼吸振器系统的共振和控制特性。最初，主系统在 $\gamma = 1$（即 $\omega = \omega_p$）处有共振。当添加的吸振器在 $\gamma = 1$ 处也有共振时，原来的共振就成为一个零响应的反共振。在这里，就产生了两个新的共振，分别在 $\gamma = 0.854$ 和 $\gamma = 1.171$ 处，它们落在吸振器的调谐频率（$\gamma = 1$）的两边。

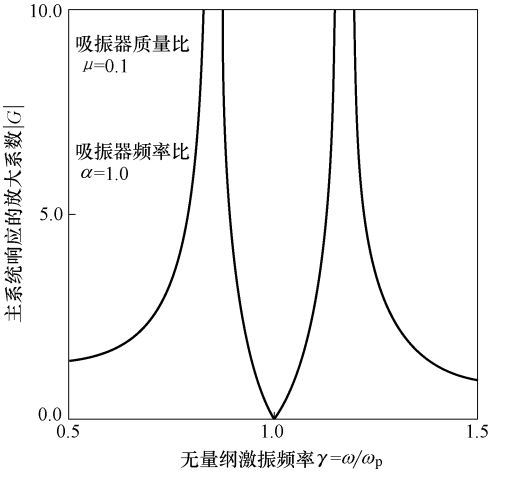


图 7-24 无阻尼吸振器对主系统振动响应的影响

由于这两个共振，吸振器的有效区域仅限于以调谐频率为中心的狭窄频带。具体来说，吸振器只在 $|G| < 1$ 时才有效。使用这个条件可以确定吸振器的有效频带。

案例 7-8

一种高精度又高功率的定位系统采用液压驱动器和阀门。输入液压伺服系统的液压

油由齿轮式回转泵提供。泵和定位系统安装在同一工作台上。该泵的质量为25kg。泵的正常运行速度为3600r/min。在操作过程中，可以观察到这个泵在此速度下呈现出垂直共振，因而它影响了伺服定位系统的精度。如图7-25所示，为了控制其正常运行速度时的振动，在泵上加载一质量为1.25kg的吸振器，并将其调谐到泵的正常运行速度。由于泵的转速通常在操作过程中会出现波动，我们必须确定在什么速度范围内的吸振器是有效的。系统的新共振频率是多少？（忽略阻尼）

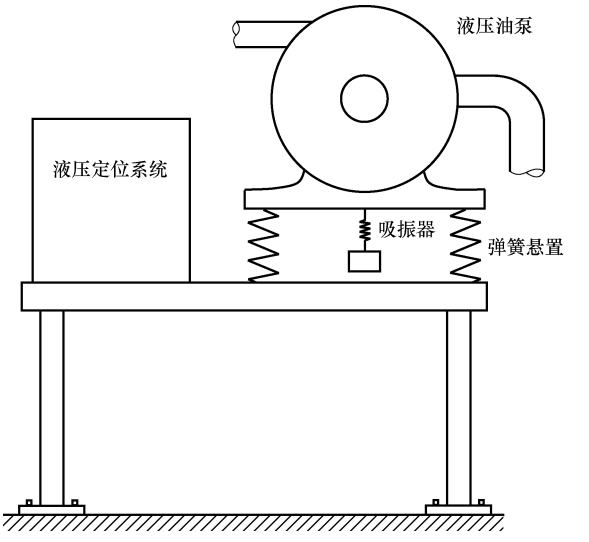


图7-25　带齿轮泵的液压定位系统

解：

对于这个问题，质量比$\mu = 1.25/25.0 = 0.05$。将吸振器调谐到泵的共振频率，$\alpha = 1$。由式（7-103）可见，修改后的系统的特征方程为

$$\gamma^4 - 2.05\gamma^2 + 1 = 0$$

该方程的根为$\gamma_1 = 0.854$和$\gamma_2 = 1.171$。那么新的共振在0.854×3600r/min和1.171×3600r/min，即应该避免3074.4r/min和4215.6r/min的转速。从式（7-102）得到系统传递函数为

$$G(\gamma) = \frac{1 - \gamma^2}{(\gamma^4 - 2.05\gamma^2 + 1)}$$

吸振器的有效频带对应于$|G(\gamma)| < 1.0$。由于$G(\gamma)$在$\gamma = 1$处出现符号逆转，所以我们需要求解以下两个方程

$$\frac{1 - \gamma^2}{(\gamma^4 - 2.05\gamma^2 + 1)} = 1 \text{和} -1$$

第一个方程给出的根为$r = 0$和1.025。第二个方程给出的根为$\gamma = 0.977$和1.45。

因此，有效频带对应于$\Delta\gamma = [0.977, 1.025]$。考虑到泵的运行速度，我们得到有效频带在3517.2r/min和3690r/min之间。因此，±80r/min的速度波动是可以接受的。

最后，回想前面提到的：吸振器的存在导致了在原系统（被吸振器正常调谐的）共振频率两侧产生了两个新的共振。由式（7-104）清晰可见：随着吸振器质量比的增加，这两个共振会离得越远，且分得更开。

7.8.2　有阻尼吸振器

阻尼并不是吸振器完成振动控制的主要手段。如上所述，吸振器从主系统获得振动能量（并反过来，对系统施加大小相等、方向相反的激振力），从而抑制振动。吸振器

吸收的能量要逐步耗散，因此，吸振器中应当存在一些阻尼。此外，在没有阻尼时，添加吸振器产生的两个共振的幅值为无穷大。因此，阻尼具有降低这些共振峰值的好处。

对于包含有阻尼吸振器的系统的分析与以上方法是相似的，但与无阻尼吸振器相较要复杂得多。此外，需要引入新的设计参数——吸振器的阻尼比，其模型如图 7-26 所示。另一个应用阻尼吸振器的模型版本，如图 7-23b 所示。但是，由于这两种类型模型具有相同的传递函数，所以只需考虑图 7-26。另外，振动控制的传递函数取为 y_a/f 或是 f_s/f，后者是前者 k_p 次倍。虽然我们考虑到 f_s/f 无量纲，但结果和 y_a/f 同样有效，但响应需要通过除以 k_p 从力转化成位移。

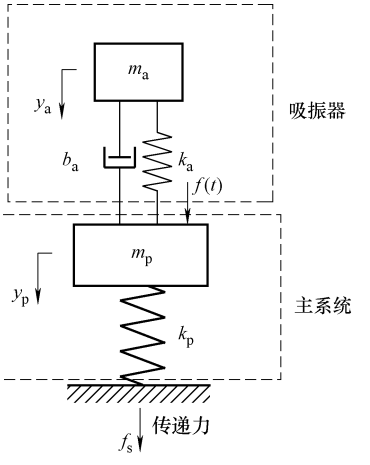


图 7-26 有阻尼吸振器的主系统

没有必要重新推导出有阻尼系统的传递函数。只需将式（7-101）中的 k_a 替换为复数刚度 $k_a + j\omega b_a$，其中包含了黏性阻尼常数 b_a 和激振频率 ω。因此，有阻尼系统的传递函数为

$$G(\omega)=\frac{k_p(k_a+j\omega b_a-\omega^2 m_a)}{m_p m_a\omega^4-[(k_a+j\omega b_a)(m_p+m_a)+k_p m_a]\omega^2+k_p(k_a+j\omega b_a)} \tag{7-105}$$

使用参数的定义均同上文，通过除以 $k_p k_a$，再代入适当的参数，得到无量纲形式的传递函数。特别的，我们采用

$$\frac{b_a}{k_a}=\frac{2b_a}{2\sqrt{k_a m_a}}\sqrt{\frac{m_a}{k_a}}=\frac{2\zeta_a}{\omega_a}=\frac{2\zeta_a\omega_p}{\omega_p\omega_a}=\frac{2\zeta_a}{\alpha\omega_p} \tag{7-106}$$

其中吸振器的阻尼比 ζ_a 同样为

$$\zeta_a=\frac{b_a}{2\sqrt{k_a m_a}} \tag{7-107}$$

使用同样步骤，根据式（7-101）、推导公式（7-101），得到

$$G(\gamma)=\frac{\alpha^2-\gamma^2+2j\zeta_a\alpha\gamma}{\gamma^4-[(\alpha^2+2j\zeta_a\alpha\gamma)(1+\mu)+1]\gamma^2+(\alpha^2+2j\zeta_a\alpha\gamma)} \tag{7-108}$$

注意，此结果相当于将式（7-102）中的 α^2 简单地替换为 $\alpha^2+2j\zeta_a\alpha\gamma$。

重要的是要注意：令 $\zeta_a=0$，就可以通过求解特征方程得到无阻尼固有频率。这和之前求方程式（7-104）的平方根相同。令 $j\gamma=\lambda$ 可以得到有阻尼固有频率（因此，$\gamma^2=-\lambda^2$ 和 $\gamma^4=\lambda^4$），然后再求解特征方程［见式（7-108）的分母］。

$$\lambda^4+2\zeta_a\alpha(1+\mu)\lambda^3+(\alpha^2+\alpha^2\mu+1)\lambda^2+2\zeta_a\alpha\lambda+\alpha^2=0 \tag{7-109}$$

然后取根 λ 的虚部。它们取决于 ζ_a 且不同于方程式（7-104）所得的值。这些共振频率对应于的 γ 是 $G(\gamma)$ 达到峰值的值。一般来说，这些不同于无阻尼或有阻尼固有频率。然而，对于小阻尼（ζ_a 和 1 比起来很小），这三种类型的系统特征频率几乎是相同的。

当 $\mu=1.0$ 和 $\alpha=1.0$ 时，传递函数［式（7-108）］的幅值如图 7-27 所示，它和图

7-24 类似，但考虑了阻尼比取值：$\zeta_a=0.01$，0.1，0.5。注意 $\zeta_a=0.01$ 对应的曲线与图 7-24 中的无阻尼曲线很相近。当 ζ_a 较大时，例如 $\zeta_a=0.5$，两个质量 m_p 和 m_a 趋向于连为一体，表现近似于同一个质量。然后，系统趋于表现为单一自由度系统，而主系统只是修改了它的质量（增加），因此只会产生一个共振频率，它比原来的主系统的小。此外，正如在大阻尼情况下估计的，吸振器不再起作用。

如图 7-27 中三条曲线均通过点 A 和点 B。所有曲线均对应所有的 ζ_a 情况是真实的，尤其是极端情况的 $\zeta_a=0$ 和 $\zeta_a\to\infty$。因此，对于极限情况 $\zeta_a=0$ 和 $\zeta_a\to\infty$，这些点可确定为传递函数的幅值曲线的相交点。

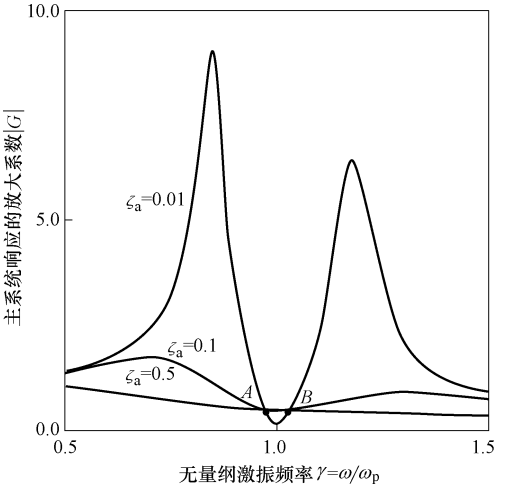


图 7-27　有阻尼吸振器（吸振器质量比 $\mu=1.0$，吸振器共振频率 $\alpha=1.0$）的振动放大曲线（传函幅值）

式（7-102）给出对应 $\zeta_a=0$ 时的 $G(\gamma)$，然后由式（7-108），我们可以看到当 $\zeta_a\to\infty$ 时，不包含 ζ_a 的各项均可忽略。因此，

$$G(\gamma)=\frac{2j\zeta_a\alpha\gamma}{-2j\zeta_a\alpha\gamma(1+\mu)\gamma^2+2j\zeta_a\alpha\gamma}$$

分子分母消去共同的项，可得到（对于 $\gamma\neq0$）

$$G(\gamma)=\frac{1}{1-(1+\mu)\gamma^2}\quad(\zeta_a\to\infty)\tag{7-110}$$

注意这是固有频率为 $1/\sqrt{1+\mu}$ 的单自由度系统的归一化传递函数。结果证明当 $\zeta_a\to\infty$ 时，两个质量 m_p 和 m_a 趋向于一体，表现为由刚度为 k_p 的弹簧支撑的质量 (m_p+m_a)。固有频率为 $\sqrt{k_p/(m_p+m_a)}$，当同除以 $\sqrt{k_p/m_p}$ 时，得到

$$\sqrt{\frac{k_p}{(m_p+m_a)}\frac{m_p}{k_p}}=\sqrt{\frac{m_p}{(m_p+m_a)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$$

在确定两个函数［见式（7-102）和式（7-110）］之间的交点时，我们首先要注意，在第一个交点（A）处，式（7-102）的函数为负，式（7-110）的为正，而在第二个交点（B）恰恰相反。对于任何一个点，这意味着在这两个函数相等之前，它们中的一个符号应该颠倒。因此，

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^4-[\alpha^2(1+\mu)+1]\gamma^2+\alpha^2}=-\frac{1}{1-(1+\mu)\gamma^2}$$

化简为

$$(2+\mu)\gamma^4-2[\alpha^2(1+\mu)+1]\gamma^2+2\alpha^2=0\tag{7-111}$$

该方程的根（如 γ_1 和 γ_2）即给出点 A 和 B。然后，在 γ^2 表示的方程式（7-111）的二次方程中，可以得到根的平方和等于 γ^2 的负系数

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2=\frac{2[\alpha^2(1+\mu)+1]}{(2+\mu)} \tag{7-112}$$

另外，在 γ^2 表示的方程（7-111）的二次方程中，我们还可以得到根的平方的积等于常数项。因此，

$$\gamma_1^2\gamma_2^2=\frac{2\alpha^2}{(2+\mu)} \tag{7-113}$$

吸振器的优化设计

有人指出（主要由 J. P. 邓哈尔托赫提出），吸振器的优化设计不仅要在公共交叉点（例如图 7-27 中的点 *A* 和点 *B* 的相同坐标）上有相同的响应幅值，而且共振应当发生在这些点上以使得在吸振器调谐频率附近区域的响应幅值取得平衡和均匀。我们期望这些（直观）设计条件会使得参数 α、μ 和 ζ_a 之间的关系对应于理想的吸振器。

考虑在传递函数在点 *A* 和点 *B* 的相同幅值的第一个要求。如先前所述，因为这两点不依赖于 ζ_a，所以我们采用式（7-110）来满足这个要求。因此，记住 *A* 和 *B* 之间的传递函数的符号颠倒（即传递函数穿过共振），我们得到

$$\frac{1}{1-(1+\mu)\gamma_1^2}=-\frac{1}{1-(1+\mu)\gamma_2^2}$$

得出

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2=\frac{2}{1+\mu} \tag{7-114}$$

将这个结果（对于相等的坐标）代入交叉点条件［式 7-112］，我们得到

$$\frac{2}{1+\mu}=\frac{2[\alpha^2(1+\mu)+1]}{(2+\mu)}$$

简化后，可以得到

$$\alpha=\frac{1}{1+\mu} \tag{7-115}$$

下面我们来求解传递函数在交叉点（点 *A* 和点 *B*）取得峰值的问题。一般来说，当一个点达到峰值时，另一个点就不会达到。根据 Den Hartog 的简单而又繁琐的报告，我们得到

$$\zeta_a^2=\frac{\mu[3-\sqrt{\mu/(\mu+2)}]}{8(1+\mu)^3} \tag{7-116}$$

式（7-116）对应第一个交叉点的峰值，且

$$\zeta_a^2=\frac{\mu[3+\sqrt{\mu/(\mu+2)}]}{8(1+\mu)^3} \tag{7-117}$$

对应第二个交叉点的峰值。

所以，为了满足设计要求，通过取式（7-116）和式（7-117）结果的平均值来获得平衡

$$\zeta_a^2=\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \tag{7-118}$$

因此，式（7-115）和式（7-118）对应于一个优化的吸振器。此外，在所有的设计步骤中都应当标明实际要求和限制性。特别的是，当μ远小于1时，即吸振器的质量只占到主系统质量的一小部分，吸振器质量块在工作频率处应当有比较大的振幅，以便吸收主系统的能量。吸振器弹簧的设计也应与此对应，并同时满足决定m_a/k_a比例的调谐频率条件。

案例 7-9

一个风洞空气压缩机重48kg，通常在2400r/min运行。压缩机组的第一个共振发生在2640r/min，有严重的、相当危险的振动幅值。设计一个吸振器（有阻尼）安装在压缩机的安装基座上。在修改后的系统中，压缩机组在新的共振频率处的振动放大系数是多少？并与原系统比较在正常运行条件下的振幅情况。

解：

像往常一样，我们将吸振器调谐到正常运行速度（2400r/min），然后可以得到吸振器的无量纲共振频率为

$$\alpha=\frac{\omega_a}{\omega_p}=\frac{2400}{2640}=\frac{12}{13}$$

现在，对于优化的吸振器，由式（7-115）得到

$$\mu=\frac{1}{\alpha}-1=\frac{13}{12}-1=\frac{1}{12}$$

因此，吸振器的质量为

$$m_a=48\times\frac{1}{12}\text{kg}=4.0\text{kg}$$

然后，由式（7-118）得到吸振器的阻尼比为

$$\zeta_a=\left[\frac{3/12}{8(1+1/12)^3}\right]^{1/2}=0.157$$

现在

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_a}{m_a}}=\sqrt{\frac{k_a}{4.0}}=\frac{2400}{60}\times 2\pi\text{rad/s}=88\pi\text{rad/s}$$

因此，

$$k_a=(88\pi)^2\times 4.0\text{N/m}=2.527\times 10^5\text{N/m}$$

同样，

$$\zeta_a=\frac{1}{2}\frac{b_a}{\sqrt{m_a k_a}}$$

然后我们得到

$$b_a=2\times 0.157\sqrt{4.0\times 2.527\times 10^5}\text{Ns/m}=315.7\text{Ns/m}$$

这样我们就得到了有阻尼的吸振器。现在，让我们检查它的性能。我们知道，从理论上讲，在正常工作速度时的振动幅值现在应接近于零。但是，有两个共振围绕工作速度点。由于阻尼较小，我们使用无阻尼特性方程式（7-103）来计算这些共振：

$$\gamma^4-\left[\frac{12^2}{13^2}\left(1+\frac{1}{12}\right)+1\right]\gamma^2+\frac{12^2}{13^2}=0$$

给出

$$\gamma^4-\frac{25}{13}\gamma^2+\frac{12^2}{13^2}=0$$

γ^2的根是0.692和1.231。γ的（正）根为0.832和1.109。

这两个根对应的压缩机速度（2640r/min乘以γ）分别为2196r/min和2929r/min。虽然它们是接近运行速度的-10%和+20%，但在启停过程会通过第一阶共振。要确定相应的振动放大系数（力/力），使用式（7-108），且当无阻尼特征方程代入分母，该公式变成

$$G(\gamma)=\frac{\alpha^2-\gamma^2+2\mathrm{j}\zeta_a\alpha\gamma}{[-2\mathrm{j}\zeta_a\alpha\gamma(1+\mu)\gamma^2+2\mathrm{j}\zeta_a\alpha\gamma]}=\frac{1-\mathrm{j}(\alpha^2-\gamma^2)/(2\zeta_a\alpha\gamma)}{1-(1+\mu)\gamma^2} \tag{7-119}$$

再代入共振频率$\gamma_1=0.832$和$\gamma_2=1.109$，我们得到$|G(\gamma_1)|=4.223$和$|G(\gamma_2)|=4.634$。

如果没有吸振器，我们将系统近似为简单的无阻尼振子，其传递函数为

$$G_p(\gamma)=\frac{1}{1-\gamma^2}$$

在正常工作速度对应的振动放大系数为

$$|G_p(\gamma_0)|=\frac{1}{|1-12^2/13^2|}=6.76$$

据观察，在加入吸振器之后，共振振动比原系统的小，即使在工作转速下，因此，设计是令人满意的。注意，我们使用了力/力传递函数。为了得到位移/力传递函数，我们将上式除以k_p，而我们已知

$$\sqrt{\frac{k_p}{m_p}}=\frac{2640}{60}\times 2\pi\mathrm{rad/s}=88\pi\mathrm{rad/s}$$

且

$$k_p=(88\pi)^2\times 48\mathrm{N/m}=3.67\times 10^6\mathrm{N/m}=3.67\times 10^3\mathrm{N/mm}$$

因此，原系统正常工作时的振动幅值为

$$\frac{6.76}{3.67\times 10^3}\mathrm{mm/N}=1.84\times 10^{-3}\mathrm{mm/N}$$

修正后的系统的共振幅值为

$$\frac{4.223}{3.67\times 10^3}\text{和}\frac{4.634}{3.67\times 10^3}\mathrm{mm/N}$$

即

$$1.15\times 10^{-3}\text{和}1.26\times 10^{-3}\mathrm{mm/N}$$

吸振器是简单的无源装置，常用于窄带振动控制中（仅限于非常小的频率间隔）。吸振器还应用于以下场合的振动抑制：电力传输线（如架空线减振器，它只包括两端有质量块的一根电缆）、消费类电子产品、汽车发动机和工业机械。应当指出，对于一

个直线吸振器提出的概念可以直接拓展到一个旋转吸振器上。图 7-28 提供了一个旋转式吸振器示意图。这种模型对应于激振力（与图 7-23a 比较）。在本质上是相同的传递函数的支撑结构旋转运动激励（图 7-23b），也可以得到解决。振动控制方法在表 7-8 中进行了总结。

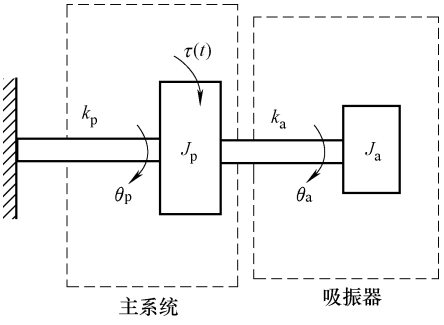


图 7-28　旋转式吸振器示意图

7.8.3　减振器

如上所述，振动吸收器是简单而有效的无源装置，可用于振动控制。它们还有非耗散的优点。吸振器的主要缺点是，它只在共振频率（调谐频率）附近一个很窄的频带有效。当需要在很宽的频率范围内的被动振动控制时，我们更倾向于选择减振器。

表 7-8　振动控制

被动控制（无外部能源）	1. 阻尼器 一种耗散的方法（退化为热问题） ＊可以在很宽的频带内使用 2. 吸振器（动力吸振器，Frahm 吸振器） ＊从振动系统吸收能量，并施加抵消力量 ＊在一个很窄的频带（接近调谐频率）起作用 ＊吸振器执行大动作 无阻尼吸振器的设计： 有吸振器的系统的传递函数 $=\dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^4-[\alpha^2(1+\mu)+1]\gamma^2+\alpha^2}$ 式中，μ 为吸振器质量/主系统质量；α 为吸振器的固有频率/主系统的固有频率；γ 为激励频率/主系统固有频率；最有效的运行频率 $r_{op}=\alpha$，以避免两个共振。 有阻尼减振器的优化设计： 质量比 $\mu=\dfrac{1}{\alpha}-1$ 阻尼比 $\zeta_a=\dfrac{3\mu}{8(1+\mu)^3}$
主动控制（需要外部能源）	1. 使用传感器测量振动响应。 2. 根据合适的控制算法，使用作动器对振动系统施加控制力。

减振器为耗散设备。减振器通过直接消耗主（振动）系统的振动能量来控制振动。但是，结果会产生大量的热，并带来相关的散热问题和部件磨损。因此，在某些特殊情况可能需要冷却（如使用风扇、冷却液循环、热传导阻滞）的方法。

把振动系统建模为一个无阻尼单自由度质量-弹簧系统（简单振子）。激励-响应传递函数的幅值具有一个在理论上无限大的共振。共振附近的运行状况有很大的危害性。

如图 7-29a 所示，添加一个简单的黏滞减振器，可以纠正该情况。运动方程（大约在静平衡位置）为

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f(t) \tag{7-120}$$

传递到支撑基座上的动态力

$$f_s = ky + b\dot{y} \tag{7-121}$$

因此，激振力 f 和振动响应 y 之间的传递函数为

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{k - \omega^2 m + \mathrm{j}\omega b} \tag{7-122}$$

激振力 f 和传递到支撑基座上的力之间的传递函数为

$$\frac{f_s}{f} = \frac{k + \mathrm{j}\omega b}{k - \omega^2 m + \mathrm{j}\omega b} \tag{7-123}$$

使用无量纲频率变量 $\gamma = \omega/\omega_n$，其中 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 是系统的无阻尼固有频率，阻尼比 $\zeta = b/(2\sqrt{km})$，我们可以将式（7-122）和式（7-123）表达为

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{k(1 - \gamma^2 + 2\mathrm{j}\zeta\gamma)} \tag{7-124}$$

$$\frac{f_s}{f} = \frac{1 + 2\mathrm{j}\zeta\gamma}{(1 - \gamma^2 + 2\mathrm{j}\zeta\gamma)} \tag{7-125}$$

当我们需要主系统的振动控制时，可以使用式（7-124）中的传递函数。但是，当需要首先考虑力传递率时，可以使用式（7-125）。而且，使用式（7-124）的无量纲形式传函很方便

$$\frac{ky}{f} = G(\gamma) = \frac{1}{(1 - \gamma^2 + 2\mathrm{j}\zeta\gamma)} \tag{7-126}$$

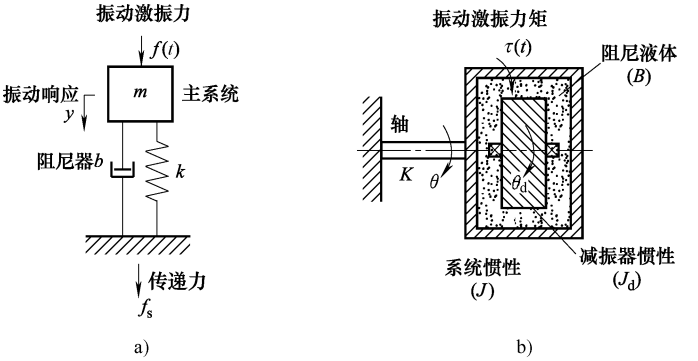


图 7-29 带减振器的系统

a）带线性黏性减振器的系统 b）有 Houdaille 减振器的旋转系统

图 7-30 上列出了多个阻尼比的传函的幅值。注意适当增加阻尼比可以降低共振峰值，并使整体响应平坦。这个例子说明了减振器宽带性质的效果。但是，不同于吸振器，不可能用一个简单的减振器使振动的理论水平为零。然而，减振器能够使响应均匀

接近静态值（对应图 7-30 所示的数值 1）。

减振器的另一种常见应用是通过自由惯性元件完成连接。对于旋转系统，如 Houdaille 减振器建模如图 7-29b 所示。运动方程为

$$J\ddot{\theta}+B(\dot{\theta}-\dot{\theta}_{\mathrm{d}})+K\theta=\tau(t) \tag{7-127}$$

$$J_{\mathrm{d}}\ddot{\theta}_{\mathrm{d}}+B(\dot{\theta}_{\mathrm{d}}-\dot{\theta})=0 \tag{7-128}$$

这种情况下，激振扭矩 τ 与响应角度 θ 之间的传递函数为

$$\frac{\theta}{\tau}=\frac{B+J_{\mathrm{d}}\mathrm{j}\omega}{KB-B(J+J_{\mathrm{d}})\omega^2-J_{\mathrm{d}}J\mathrm{j}\omega^3+KJ_{\mathrm{d}}\mathrm{j}\omega} \tag{7-129}$$

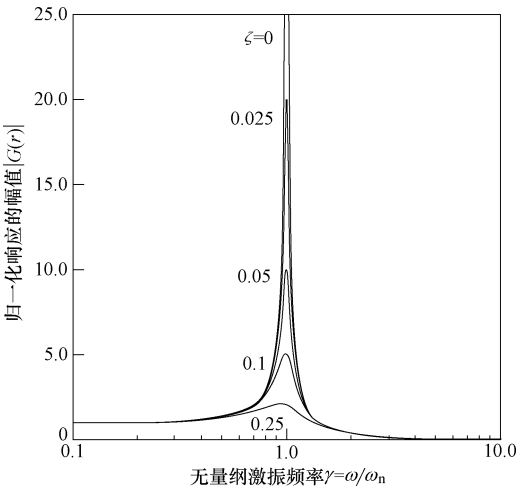


图 7-30　有线性减振器的系统频率响应

使用 $K\theta/\tau$ 的归一化形式，可以得到

$$\frac{K\theta}{\tau}=G(\gamma)=\frac{2\zeta+\mathrm{j}\eta\mu}{2\zeta[1-(1+\mu)\gamma^2]+\mathrm{j}\eta\mu(1-\gamma^2)} \tag{7-130}$$

其中 $\gamma=\omega/\omega_{\mathrm{n}}$；$\zeta=B/\left(2\sqrt{KJ}\right)$；$\mu=J_{\mathrm{d}}/J$；$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{K/J}$。

注意两个极端情况：当 $\zeta=0$ 时，系统成为初始的无阻尼系统；当 $\zeta\to\infty$ 时，系统成为一个简单的无阻尼振子，但具有较低的固有频率 $\gamma=1/\sqrt{1+\mu}$，而非原系统中的 $\gamma=1$。这是可以预料的，因为当 $\zeta\to\infty$ 时，这两个惯性组件连为一体，有一个共同的转动惯量 $J+J_{\mathrm{d}}$。显然，在这两种极端情况下，阻尼的效果没有显现。由图 7-30 所示的响应幅值曲线，可以明显地看到，最优阻尼发生介于 0 和 ∞ 两者之间，即图中的 $\mu=0.2$。

选择适当的阻尼性质和数值是有效利用减振器进行振动控制的关键。在物理系统上来说，减振器是非线性的、依赖于频率的，且是时变的、与环境（如温度）有关。对于不同类型的阻尼可以使用不同的模型，但这些都是近似的表示。在实践中，对使用的阻尼器的类型、系统的特性、特定的用途以及工作速度的考虑，决定了适合使用哪种特殊模型（线性黏性、迟滞、库仑、Stribeck、二次方的空气动力型等）。除了简单黏滞减振器的线性理论外，在实际设计中还应考虑阻尼具体的物理性质。

7.9　振动的主动控制

被动振动控制是相对简单和直接的，虽然稳定、可靠、经济，但是它有其局限性。注意，被动装置产生的控制力完全依赖于固有动力学。一旦设备设计完成（比如，完成了质量、阻尼系数、刚度和位置等参数的选择），就不可能实时调整自然而然产生的控制力。此外，无源装置没有外部能源的供应。因此，甚至控制力的幅值也不能根据自

然值来改变。由于无源装置对系统的响应是一个对于整个系统动力学的整体过程，所以它并不能直接针对特定的响应（如特定模态）起到控制作用。这会导致不完整的控制，特别是在复杂和高阶模态（例如，分布式参数）系统中。被动控制这些缺点是可以使用主动控制克服的。在这里，系统的响应是直接利用传感器装置感应，且特定的、理想值控制动作时可以施加于系统的理想位置/系统理想模态上。

7.9.1 主动控制系统

图 7-31 给出了一个主动控制系统的原理图。需要得到控制的机械动力学系统就是设备或工艺过程。控制器就是根据一些计划（或控制法）产生信号（或命令），并控制设备振动的装置。被控对象和控制器是控制系统的两个必需的部件。通常情况下，必须监测被控对象并使用传感器测量其响应并向控制器提供反馈；然后，控制器将感应信号和期望的外部响应进行比较，并利用误差产生适当的控制信号。在这种方式下，我们有一个反馈控制系统。在没有传感器和反馈的情况下，我们得到一个开环控制系统。在前馈控制（前馈给控制器）中，测量并使用激励（输入信号），而不是响应（输出信号）来生成控制信号。反馈与前馈方案可用于相同的控制系统中。

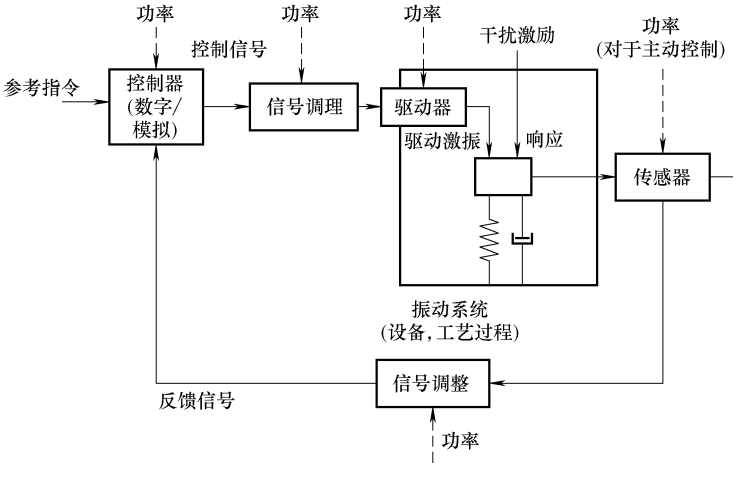


图 7-31 主动控制系统的原理图

接收控制信号并驱动被控对象的作动器可以是设备的一个组成部分（如驱动锯片的马达）。或者，它可能要增加作为控制驱动（如用于控制锯片振动的压电式或电磁式的驱动器）的外部组件。在前一种情况下，将控制信号转换为与现有的驱动器兼容的形式，尤其需要适当的信号调理。在后一种情况下，无论是控制器还是驱动器，必须整合入被控对象。在数字控制中，控制器是一种数字处理器。控制信号是以数字形式表示，通常情况下需要转换成模拟形式之后输入给驱动器。因此，在这里数模转换（DAC）是一种有用的信号调理形式。此外，产生的模拟信号都需要进行过滤和放大到一个适当的量级之后输入给驱动器。因此，过滤器和放大器信号调理装置，在振动控制

中十分有用。在软件控制方面，由计算机产生的控制信号，功能类似于数字控制器。在硬件控制方面，通过数字硬件迅速产生的控制信号不需要使用软件程序。另外，使用模拟电路直接产生控制信号的场合需要模拟控制。在这种情况下，控制器响应得非常快，不需要 DAC。注意，执行器可能需要高量级的功率。此外，控制器和相关的信号调理也需要一些电源供应。对于控制是否需要外部功率源，可以区分主动控制与被动控制。

在反馈控制系统中，传感器用于测量被控对象的响应，使控制器能够确定被控对象是否正常运行。传感器单元“感受”到的响应能自动转换（传导）“测量”成为一个合适形式的信号。压电式加速度计感应加速度并将其转换成电荷，电磁感应式转速计感应速度并将其转换成电压，轴旋转编码器检测到旋转并将其转换成一系列的电压脉冲。因此，传感器和转换器均可表示一个传感器——转换器单元。以这种方式产生的信号，在进入控制器之前需要进行调理。例如，从一个压电式加速度计出来电荷信号必须采用电荷放大器转换为适当水平的电压信号，然后使用模拟-数字转换器（ADC）进行数字化，再把信号用在数字控制器中。此外，需要滤波来去除测量噪声。因此，通常在传感器和控制器之间以及控制器和驱动器之间都需要信号调理。主动控制传感器（如电位计）需要外部电源操作，而被动传感器（如电磁感应式转速计）利用自身产生的能源，而不需要外部电源。调理传感器信号需要外部电源。最后，如图 7-32 所示，振动系统可能有未知扰动激励，从而导致控制问题更加困难。如上所述，通过适当的设计或隔振方式，从源头移除这种激励是理想的。然而，在控制范围内，如果可以测量这些干扰或使用相关信息，那么可使用控制器本身进行补偿。事实上，这就是前馈控制方法。

7.9.2 控制技术

振动控制的目的是激发（激活）振动系统，以控制振动响应在合理范围内。在主动的反馈控制范围中，控制器在完成确定合适动作的任务过程中，使用测量到的响应信号，并与理想值进行比较。根据测量的响应信号（和响应的期望值），产生控制行为的关系叫做控制律。有时，使用补偿器（模拟或数字，硬件或软件）来提高系统性能或提高控制器性能，使控制任务更容易完成。然而，对于我们的目的，我们可以把补偿器考虑作为控制器的组成部分，因此不必区分这两者。

各种控制律，包括线性和非线性，都可以进行实际应用，其中的大部分都适用于振动控制。所有这些控制律的全面介绍已经超出了本书的范围。我们将只给出若干常见的线性控制律。这些技术是基于振动系统（被控对象）的线性表示（线性模型）。即使被控对象的整体工作范围是非线性的，它往往可以根据参考标准（如机器人轨迹）将振动响应（如机器人的链接振动和关节振动）线性化。即使系统的整体动力学是非线性的，也可以使用这些线性控制技术。

7.9.2.1 状态空间模型

在应用多种控制技术中，使用状态空间模型来表示振动系统（被控对象）的方法很方便。这只是简单的、一组普通的一阶微分方程，这些方程可以是耦合或非线性的，并包含时变参数（时变模型）。在这里，我们的讨论仅限于线性、时不变状态空间模

型。这种模型可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{7-131}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{7-132}$$

其中

$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ = 状态矢量（n 阶列矢量）

$\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_r]^T$ = 输入矢量（r 阶列矢量）

$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_m]^T$ = 输出矢量（m 阶列矢量）

$\boldsymbol{A}$ 为系统矩阵（$n \times n$ 阶方阵）

$\boldsymbol{B}$ 为输入增益矩阵（$n \times r$）

$\boldsymbol{C}$ 为测量增益矩阵（$m \times n$）

$\boldsymbol{D}$ 为前馈增益矩阵（$m \times r$）

通常情况下，对于振动系统，可能让 $D=0$，因此我们首先忽略这个矩阵。此外，虽然状态变量 x_i 没有直接的物理意义，但是输出变量 y_i 有一些物理意义，在典型情况下应该可测。输入变量是“控制变量”，可用于控制系统（被控对象）。输出变量是“被控变量”，对应于系统的响应，并可测量以用于反馈控制。

可以验证，该系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值在阻尼振子的情况下以复共轭的形式 $-\zeta_i\omega_i \pm \mathrm{j}\sqrt{1-\zeta_i^2}\omega_i$ 出现，而在无阻尼情况下为 $\pm \mathrm{j}\omega_i$，其中 ω_i 为系统的 i 阶固有频率，ζ_i 为相应的阻尼比（第 i 阶模态）。数学验证需要一些线性代数知识。由于式（7-131）是一个具有典型的质量-弹簧-阻尼器系统的等效模型，我们可以做出一个直观的判断

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(t) \tag{7-133}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{C}$ 为阻尼矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵；$\boldsymbol{f}(t)$ 为强迫输入矢量；$\boldsymbol{y}$ 为位移响应矢量。这两种模式［式（7-131）和式（7-133）］应具有相同的特征方程，根据该方程的根确定固有频率和模态阻尼比。出现这种情形是因为我们在观察同一个系统的两个不同的数学表示。因此，其动力学参数如 ω_i 和 ζ_i 应维持不变。事实上，状态空间模式［式（7-131）］并不是唯一的，因此出现各种版本的状态矢量和对应的模型是可能的。当然，它们都应该具有相同的特征多项式（因此有同样的 ω_i 和 ζ_i）。从式（7-133）推导状态空间模型如下：

状态矢量定义为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \dot{\boldsymbol{y}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t) \tag{7-134}$$

因为 $\boldsymbol{M}$ 非奇异（正如所需的），所以式（7-133）可以写成

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}(t) \tag{7-135}$$

可以得到

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}^{-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{7-136}$$

这是一个相当于常规模型［式（7-133）］的状态空间模型，并且可以用相同的特

征方程表示。振动系统的状态空间模型的建立，可以用一个例子来说明。

案例 7-10

考虑一台机器安装在支撑结构上，其模型如图7-32所示。使用激振力 $f_1(t)$和 $f_2(t)$作为输入，质量块 m_1和 m_2的位移 y_1和 y_2作为输出，建立这个系统的状态空间模型。

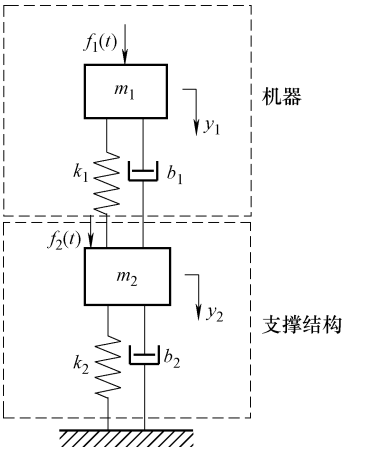


图 7-32　安装在支撑结构上的机器模型

解：

假设由质量块的静态平衡位置测量位移，因此，公式中不用考虑重力。根据牛顿第二定律得到两个质量块的运动方程为

$$m_1\ddot{y}_1 = f_1 - k_1(y_1 - y_2) - b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$m_2\ddot{y}_2 = f_2 - k_2(y_2 - y_1) - b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2y_2 - b_2\dot{y}_2$$

定义状态变量为

$$x_1 = y_1; x_2 = \dot{y}_1; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y}_2$$

并设输入矢量为 $\boldsymbol{u} = [u_1,\ u_2]^{\mathrm{T}}$，输出矢量为 $\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2]^{\mathrm{T}}$，然后，我们可以得到

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m\dot{x}_2 = u_1 - k_1(x_1 - x_3) - b_1(x_2 - x_4)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$m\dot{x}_4 = u_2 - k_1(x_3 - x_1) - b_1(x_4 - x_2) - k_2x_3 - b_2x_4$$

因而，由式（7-132）和式（7-133）给出状态空间模型为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/m_1 & -b_1/m_1 & k_1/m_1 & b_1/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1/m_2 & b_1/m_2 & (k_1+k_2)/m_2 & (b_1+b_2)/m_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

此外，注意系统可以表示为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_1 & (b_1+b_2) \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1+k_2) \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(t)$$

上式的特征方程可以表示为行列式方程

$$\det\begin{bmatrix} m_1s^2 + b_1s + k_1 & -b_1s - k_1 \\ -b_1s - k_1 & m_1s^2 + (b_1+b_2)s + (k_1+k_2) \end{bmatrix} = 0$$

根据 $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$，直接展开行列式，即可等效于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ k_1/m_1 & \lambda + b_1/m_1 & -k_1/m_1 & -b_1/m_1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -k_1/m_2 & -b_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & \lambda - (b_1+b_2)/m_2 \end{bmatrix} = 0$$

注意：在本文中，x 和 y 代表被控对象的振动响应而控制目的在于将其减少为零。为了实现这一目标，我们将给出一些常见的控制方法。

7.9.2.2 位置和速度反馈

使用该方法测量每个自由度的位置和速度，并把反馈给系统的信号符号反向（负反馈），并以一个恒定增益放大信号。因为速度是位移的导数，且增益是固定的值（按比例），所以此方法属于比例 + 微分（PD 或 PPD）的控制类别。在这种方法中，默认自由度是解耦的。然后选择控制增益，使得被控系统的自由度接近解耦，从而验证了原来的假设。为了解释这种控制方法，假设一个自由度的振动系统表示为

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u(t) \tag{7-137}$$

式中，y 是自由度位移（位置）；u 是激励输入。现在假设根据控制律生成 u

$$u = -k_c y - b_c \dot{y} + u_r \tag{7-138}$$

式中，k_c是位置反馈增益；b_c是速度反馈增益。其含义是，测量位移 y 和速度 $\dot{y}$ 并提供给控制器，再根据式（7-138）得到 u。此外，u_r是外部提供给控制器的参考输入。

将式（7-138）代入式（7-137），得到

$$m\ddot{y} + (b + b_c)\dot{y} + (k + k_c)y = u_r \tag{7-139}$$

闭环系统（被控系统）的表现如式（7-138）所示。控制增益 b_c 和 k_c 可任意选择（受限制于物理控制器、信号调理电路和驱动器等），甚至可能是负数。特别的是，通过增加 b_c 可以增加该系统的阻尼。同样，通过增加 k_c 可以增加该系统的刚度（和固有频率）。即使刚度为 k_c 的被动弹簧和阻尼为 b_c 的阻尼器可以完成相同的任务，但一旦选择好了装置，也无法方便地改变它们的参数。此外，使用无源物理装置时，k_c 和 b_c 不可能为负。PPD 控制方法简单明了，但线性、解耦自由度的假设限制了其使用。

7.9.2.3 线性二次型调节器控制

这是一种优化控制技术。考虑一个振动系统，通过线性状态空间代表模型［式(7-131)］：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

假设所有的状态 $\boldsymbol{x}$ 可测，并且所有的系统模式是可控的，然后使用恒定增益反馈控制方法可得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{7-140}$$

反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的参数值选择是无限的，因此可以利用这一点来最小化成本函数：

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\int_t^\infty [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}\tau \tag{7-141}$$

这是对于状态和输入变量在时间上的二次函数积分，且优化目标可以认为是将 x 降

低到零（调节 x 到0），但又不使用太高的控制成本。因此，把它命名为线性二次调节器（LQR）。另外，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是加权矩阵，前者至少是半正定，后者正定。通常情况下，选取 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 为有正对角元素的对角矩阵，其大小由针对 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的相对重视的程度决定。显而易见，最小化成本函数［式（7-141）］的 $\boldsymbol{K}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}} \tag{7-142}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$ 是矩阵 Riccati 代数方程的正定解

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{7-143}$$

众所周知，得到的闭环控制系统是稳定的。此外，最小（最佳）的成本函数值［式（7-141）］为

$$J_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{x} \tag{7-144}$$

其中 x 是状态矢量的现值。该解需要使用大量的 LQR 法计算［式（7-142）］。由于需要测量所有状态变量（可以在一定程度上放宽），所以该技术的限制愈加凸显。虽然控制系统的稳定性得到保证，但是达到稳定的水平（稳定裕度或模态阻尼水平）不能直接指定。此外，由于模型误差存在带来的控制系统的鲁棒性，未知扰动等方面也是成问题的，而且成本函数包含了一个无穷时间区间积分，它通常不反映快速振动控制的实际需要。

7.9.2.4 模态控制

LQR 控制技术不能够直接实现规定水平的模态阻尼，而这是振动控制的一个重要目标，因此该技术存在严重的局限性。完成此目标的模态控制方法是极点配置，其中被控系统的极点（特征值）赋予指定的值。具体来说，考虑被控对象［式（7-131）］和反馈控制律［式（7-140）］。然后，闭环系统可由下式给出

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x} \tag{7-145}$$

众所周知，如果被控对象（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$）是可控的，那么可以选择控制增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，它将任意地放置闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ 的特征值。在给定的假设基础上，模态控制技术在特定值处不仅分配模态阻尼还分配固有频率值。上述的假设是相当严格的，但它们可放宽到一定程度。然而，这种方法的缺点是：它不会对控制效果产生限制，如像 LQR 法一样实现规定程度的模态控制。

7.10 梁的振动控制

梁是一种分布参数系统，从理论上说有无限个振动模态以及相对应的振型和固有频率。从这个意义上讲，这是一个无限自由度的“无穷级”的系统。因此，模态参数的计算和相关控制输入相当复杂。但幸运的是，动态模型中保留了一些模态，但准确性又不会受到太大影响，从而促进控制更加简单。本节将讨论梁的振动控制中的一些概念。这里是作为对相关技术的说明，并不会详尽无遗。这些技术可以拓展到其他类型的连续系统，如不同边界条件的梁和板。由于前面提到的控制技术依赖于模型，因此我们将首

先说明梁状态空间模型的获取过程。

7.10.1 梁的动力学状态空间模型

考虑一根伯努利-欧拉梁，它带有卡尔文-沃伊特（Kelvin-Voigt）类型的内部（材料）阻尼。梁的方程可以表示为

$$E/v(x,t)+E^{*}L\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\rho A(x)\frac{\partial^{2}v(x,t)}{\partial t^{2}}=f(x,t) \tag{7-146}$$

式中，L 为偏微分算子，计算公式为

$$L=\frac{\partial^{2}I(x)}{\partial x^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \tag{7-147}$$

另外，$f(x,t)$为单位长度梁上的分布式激励力；$v(x,t)$为在时间 t 时在梁上位置 x 的位移响应；$I(x)$为梁横截面绕中性轴的二阶矩；E 为梁材料的弹性模量；E^{*} 为凯尔文-沃伊特（Kelvin-Voigt）材料阻尼参数。

注意，假设梁为具有不均匀特征的一般梁，因此，$I(x)$和$\rho A(x)$随 x 而变化，要保留在方程中。

使用模态叠加方法，得到梁的响应为

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}Y_{i}(x)q_{i}(t) \tag{7-148}$$

式中 $Y_{i}(x)$是梁的第 i 阶振型，满足下式

$$LY_{i}(x)=\frac{\rho A(x)}{E}\omega_{i}^{2}Y_{i}(x) \tag{7-149}$$

式中，ω_{i}是第 i 阶无阻尼固有频率。不均匀梁的正交条件为

$$\int_{x=0}^{l}\rho AY_{i}Y_{j}\mathrm{d}x=\begin{cases}0\ (i\neq j)\\ \alpha_{j}\ (i=j)\end{cases} \tag{7-150}$$

假设施加在梁上的激振力是一组共 r 个位于 $x=l_{k}$（$k=1,2,\cdots,r$）的点力 $u_{k}(t)$。我们得到

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{r}u_{k}\delta(x-l_{k}) \tag{7-151}$$

式中，$\delta(x-l_{k})$为 δ 函数。将式（7-148）和式（7-151）代入式（7-146），并将式(7-149)乘以 $Y_{j}(x)$，再将式（7-150）在 $x[0,l]$上积分，得到

$$\ddot{q}_{j}+\gamma_{j}\dot{q}_{j}(t)+\omega_{j}^{2}q_{j}=\frac{1}{\alpha_{j}}\sum_{k=1}^{r}u_{k}Y_{j}(l_{k})\quad(j=1,2,\cdots) \tag{7-152}$$

其中

$$\gamma_{j}=\frac{E^{*}}{E}\omega_{j}^{2} \tag{7-153}$$

依据下式定义状态变量 x_{j}

$$x_{2j-1}=\omega_{j}q_{j},x_{2j}=\dot{q}_{j}\quad(j=1,2,\cdots) \tag{7-154}$$

假设在模态叠加中只保留 m 阶模态，于是我们得到状态方程

$$\dot{x}_{2j-1} = \omega_j q_{2j}, \dot{x}_{2j} = -\omega_j x_{2j-1} - \gamma_j x_{2j} + \frac{1}{\alpha_j}\sum_{k=1}^{r} u_k Y_j(l_k)(j = 1,2,\cdots,m) \quad (7\text{-}155)$$

将该式代入矩阵矢量形式表示的状态空间模态中，有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & & \\ -\omega_1 & -\gamma_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \omega_m \\ & & -\omega_m & -\gamma_m \end{bmatrix} \quad (7\text{-}156)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ Y_1(l_1)/\alpha_1 & \cdots & Y_1(l_r)/\alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ Y_m(l_1)/\alpha_m & \cdots & Y_m(l_r)/\alpha_m \end{bmatrix}_{n\times r} \quad (7\text{-}157)$$

其中 $n = 2m$，m 是模态叠加中保留的模态阶数。注意在控制问题中，随着模型中所用的模态阶数的增加，无论是计算精度还是计算需求都会增加，这是因为系统的阶次按比例增加。在某些点上，与增加的计算量相比，通过进一步增加模型尺寸，精度的潜在改善也将是显著的。因此，在此必须达成一个折中平衡。

7.10.2 控制问题

梁的动力学状态空间模型［式（7-131）］与矩阵［式（7-156）和式(7-157)］是已知可控的，因此，可以确定固定增益反馈控制器 $u = Kx$，它可以使式（7-141）最小化成本函数的二次积分形式最小化。此外，类似的控制器可以通过把系统特征值放置在规定位置来确定，由此，不仅得到了规定的模态阻尼水平值，而且得到了规定的一组固有频率。然而，实现这种主动控制器还存在一些障碍。注意，在式（7-156）和式（7-157）给出的模型中，状态变量与模态变量 q_i 及其导数 $\dot{q}_i$ 成正比，但它们不可以直接测量得到。然而，梁上一系列离散位置上的位移和速度是可以测量得到的，把这些位置（s）设为 p_1，p_2，…，p_s。因此，从模态叠加角度来看［式（7-148）］，测量可表示为

$$v(p_j,t) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(p_j)q_i(t), \dot{v}(p_j,t) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(p_j)\dot{q}_i(t)(j = 1,2,\cdots,s) \quad (7\text{-}158)$$

现在，定义输出（测量）矢量 $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y} = [v(p_1,t), \dot{v}(p_1,t), \cdots, v(p_s,t), \dot{v}(p_s,t)]^{\mathrm{T}} \quad (7\text{-}159)$$

鉴于式（7-158）和式（7-154）中对状态变量的定义，我们可以写出

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \quad (7\text{-}160)$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} Y_1(p_1)/\omega_1 & 0 & \cdots & Y_m(p_1)/\omega_m & 0 \\ 0 & Y_1(p_1) & \cdots & 0 & Y_m(p_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Y_1(p_1)/\omega_1 & 0 & \cdots & Y_m(p_s)/\omega_m & 0 \\ 0 & Y_1(p_s) & \cdots & 0 & Y_m(p_s) \end{bmatrix}_{2s\times n} \tag{7-161}$$

因此主动控制器满足下列形式：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} \tag{7-162}$$

为输出反馈的控制器。因此，依据式（7-160），得到

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{7-163}$$

这并不等同于完全的状态反馈 $u=Kx$，其中 K 可取任意实数值［因此不能直接应用式（7-142）给出的 LQR 解和完全的极点配置解］。在式（7-163）中，只有 $\boldsymbol{H}$ 可任意选择，且根据式（7-161）可以完全确定 $\boldsymbol{C}$。通常 $\boldsymbol{HC}$ 之积并不对应 LQR 解法，也不对应完全的极点配置解。不过，式（7-162）中的输出反馈控制器可以提供一个令人满意的表现。然而，主动控制中需要有足够数量的位移和速度传感器（s）与足够数量的驱动器（r）配合使用，这将增加系统的复杂性和成本。此外，由于添加的组件和它们具有的主动性质，所以无故障运行的可靠性可能会降低一些。一个令人满意的替代方法是使用诸如减振器、动力吸振器这类下文将要说明的被动控制装置。注意，在由式(7-157)和式（7-161）给出的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 中，驱动器位置 l_i 和传感器位置 p_j 是可变的。因此，在选择合适的传感器和驱动器位置以实现满意控制过程中，需要一个额外的设计自由度（或优化参数）。

7.10.3 线性阻尼器的使用

现在，考虑使用一组离散的线性阻尼器控制梁的振动。如图 7-33 所示，假设 r 个阻尼系数为 b_j 的线性阻尼器沿着梁放置于 l_j（$j=1$，2，…，r）。阻尼力为

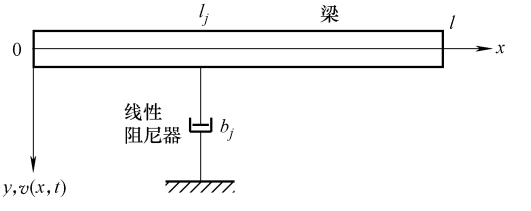


图 7-33 使用线性阻尼器控制梁的振动

$$u_j=-b_j\dot{v}(l_j,t)(j=1,2,\cdots,r) \tag{7-164}$$

带入截断的模态叠加公式中（m 个模态）

$$\dot{v}(l_j,t)=\sum_{i=1}^{m}Y_i(l_j)\dot{q}_i(t) \tag{7-165}$$

由式（7-154），得到被动反馈振动为

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{7-166}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 0 & b_1Y_1(l_1) & \cdots & 0 & b_1Y_m(l_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_rY_1(l_r) & \cdots & 0 & b_rY_m(l_r) \end{bmatrix}_{r\times n} \tag{7-167}$$

将式（7-166）代入式（7-131），可以得到闭环系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x} \tag{7-168}$$

其中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{BK}$，由下式给出

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sum b_iY_{11}(l_i)/\alpha_1 & \cdots & 0 & \sum b_iY_{1m}(l_i)/\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sum b_iY_{m1}(l_i)/\alpha_m & \cdots & 0 & \sum b_iY_{mm}(l_i)/\alpha_m \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{7-169}$$

其中

$$Y_{ij}(x)=Y_i(x)Y_j(x) \tag{7-170}$$

在这种情况下，控制器的设计涉及选择阻尼常数 b_i 和阻尼器的位置 l_j 以实现需要的性能。这是可以实现的，如通过寻求使闭环系统矩阵 A_c 的特征值达到一组预期值。这将取得预期的模态阻尼和固有频率特性。然而，如式（7-169）所示，由于给出的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的结构是固定的，因而这并不等同于完全的状态反馈（或完整的输出反馈）。因此，总体来说不可能把系统极点放在正确的理想位置上。

设计实例

为了实现一个理想的、使用线性阻尼器的梁的模态响应，我们可能需要寻求成本函数的最小化

$$J=\mathrm{Re}(\lambda-\lambda_d)^{\mathrm{T}}Q\mathrm{Re}(\lambda-\lambda_d)+\mathrm{Im}(\lambda-\lambda_d)^{\mathrm{T}}R(\lambda-\lambda_d) \tag{7-171}$$

其中 λ 是闭环系统矩阵（$\boldsymbol{A}_c$）的实际特征值，λ_d 是符合给定模态性能（阻尼比和固有频率）的特征值。“Re”表示实部，而“Im”表示虚部。加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是有正的、主对角线元素为实数的对角阵，对不同特征值应选择不同的相对权重，这使得一些特征值权重超过其他特征值的权重，且实部和虚部应分开权重。

各种计算算法均适用于成本函数［式（7-171）］的最小化，尽管确切的细节超出了本书的范围，我们将提出一个案例的结果。考虑一根 12×5 规格的美国标准均匀简支梁，其参数如下：$E=2\times10^8\,\mathrm{kPa}$（$29\times10^6\,\mathrm{psi}$），$\rho A=47\mathrm{kg/m}$（$2.6\mathrm{lb/in.}$），长度 $l=15.2\mathrm{m}$（$600\mathrm{in.}$），$I=9\times10^{-5}\mathrm{m}^4$（$215.8\mathrm{in.}^4$）。第 j 个振动模态的内部阻尼参数由下式给出

$$E^*(\omega_j)=(g_1/\omega_j)+g_2 \tag{7-172}$$

其中第 j 个振动模态的无阻尼固有频率 ω_j 由下式给出

$$\omega_j=(j\pi/l)^2\sqrt{EI/\rho A} \tag{7-173}$$

阻尼参数计算所用数据如下：$g_1=88\times10^4\,\mathrm{kPa}$（$12.5\times10^4\,\mathrm{psi}$），$g_2=3.4\times10^4\,\mathrm{kPa\cdot s}$（$5\times10^3\,\mathrm{psi\cdot s}$）。在这个问题中，$Y_i(x)=\sqrt{2}\sin(j\pi x/l)$，且对于所有的 j 都有 $\alpha_j=\rho Al$。

首先，使用式（7-173）和式（7-153）与式（7-172）分别计算 ω_j 和 γ_j。下一步，

根据式（7-155）得到开环系统矩阵 $\boldsymbol{A}$，并计算其特征值。如表 7-9 所示，按第一阶无阻尼固有频率（ω_1）缩放。注意：梁内部材料的阻尼都非常低，由特征值的虚部给出的实际的固有频率和无阻尼固有频率几乎相同。

表 7-9　开环（无控制）梁特征值

模态	特征值(rad/s)(乘以 26.7)	模态	特征值(rad/s)(乘以 26.7)
1	−0.000126 ± j1.0	4	−0.007453 ± 16.0
2	−0.000776 ± j4.0	5	−0.016741 ± 25.0
3	−0.002765 ± j9.0	6	−0.03375 ± 36.0

接下来，我们通过以下方法尝试把所有特征值的实部（缩放后的）全部放置于 −0.20处，而又不约束虚部（即阻尼固有频率）：（ⅰ）单个减振器；（ⅱ）两个减振器。在成本函数［式（7-171）］中，前三个模态的权重远远高于其余三个。阻尼器参数的初始值为 $b_1 = b_2 = 0.1\text{lbf}\cdot\text{s/in}(17.6\text{N}\cdot\text{s/m})$，初始位置 $l_1/l = 0.0$，$l_2/l = 0.5$。在数值优化结束时采用改进的梯度算法，得到如下的优化值：

1. 单个减振器控制

$$b_1 = 36.4\text{lbf}\cdot\text{s/in}(6.4\times10^3\text{N}\cdot\text{s/m})$$

$$l_1/l = 0.3$$

相应的（对闭环系统）的归一化特征值见表 7-10。

2. 双减振器控制

$$b_1 = 22.8\text{lbf}\cdot\text{s/in}(4.0\times10^3\text{N}\cdot\text{s/m})$$

$$b_2 = 12.1\text{lbf}\cdot\text{s/in}(2.1\times10^3\text{N}\cdot\text{s/m})$$

$$l_1/l = 0.25, l_2/l = 0.43$$

相应的归一化特征值见表 7-11。

期望所有的极点实部均配置在 −0.2 处是过于乐观的想法。但是，要注意，除了单减振器控制的第 3 阶模态和双减振器的第 4 阶模态，所有模态均获得了良好水平的阻尼。在任何情况下，由于高阶振型对整体响应的贡献相对较小，所以我们可以发现在这两种控制情况下，阻尼控制的响应（如在 $x = l/12$ 处）均表现良好。

表 7-10　使用单个优化减振器的梁特征值

模态	特征值(rad/s)(乘以 26.7)	模态	特征值(rad/s)(乘以 26.7)
1	−0.225 ± j0.985	4	−0.119 ± j15.995
2	−0.307 ± j3.955	5	−0.355 ± j24.980
3	−0.037 ± j8.996	6	−0.158 ± j35.990

表 7-11　使用两个优化减振器的梁特征值

模态	特征值(rad/s)(乘以 26.7)	模态	特征值(rad/s)(乘以 26.7)
1	−0.216 ± j0.982	4	−0.079 ± j15.998
2	−0.233 ± j3.974	5	−0.145 ± j24.999
3	−0.174 ± j8.997	6	−0.354 ± j35.989

参 考 文 献

Beards, C.F. 1996. *Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems*, Halsted Press, New York.

Cao, Y., Modi, V.J., de Silva, C.W., and Misra, A.K., On the control of a novel manipulator with slewing and deployable links, *Acta Astronaut.*, 49, 645–658, 2001.

Caron, M., Modi, V.J., Pradhan, S., de Silva, C.W., and Misra, A.K., Planar dynamics of flexible manipulators with slewing deployable links, *J. Guid. Control Dyn.*, 21, 572–580, 1998.

Chen, Y., Wang, X.G., Sun, C., Devine, F., and de Silva, C.W., Active vibration control with state feedback in woodcutting, *J. Vibr. Control*, 9, 645–664, 2003.

den Hartog, J.P., 1956. *Mechanical Vibrations*, Mc-Graw-Hill, NewYork.

de Silva, C.W., Optimal estimation of the response of internally damped beams to random loads in the presence of measurement noise, *J. Sound Vibr.*, 47, 485–493, 1976.

de Silva, C.W., An algorithm for the optimal design of passive vibration controllers for flexible systems, *J. Sound Vibr.*, 74, 495–502, 1982.

de Silva, C.W. and Wormley, D.N. 1983. *Automated Transit Guideways: Analysis and Design*, D.C. Heath & Co., Lexington, KY.

de Silva, C.W. 1989. *Control Sensors and Actuators*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

de Silva, C.W. 1995. *Intelligent Control: Fuzzy Logic Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL.

de Silva, C.W. 2005. *Mechatronics—an Integrated Approach*, Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL.

de Silva, C.W. 2006. *Vibration—Fundamentals and Practice*, 2nd ed., Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL.

Goulet, J.F., de Silva, C.W., Modi, V.J., and Misra, A.K., Hierarchical control of a space-based deployable manipulator using fuzzy logic, *AIAA J. Guid. Control Dyn.*, 24, 395–405, 2001.

Irwin, J.D. and Graf, E.R. 1979. *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Karray, F. and de Silva, C.W. 2004. *Soft Computing and Intelligent System Design: Theory, Tools, and Applications*, Pearson, England.

MATLAB *Control Systems Toolbox*, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.

Van de Vegte, J. and de Silva, C.W., Design of passive vibration controls for internally damped beams by modal control techniques, *J. Sound Vibr.*, 45, 417–425, 1976.

附录 7A　MATLAB 控制系统工具箱

7A.1　简介

建模、分析、设计、数据采集和控制是振动研究的重要组成部分。计算机软件工具和环境适用于学习层面和专业应用的水平。部分这样的软件环境和工具有商业产品可用。

MATLAB 是互动式的电脑环境，其利用高级语言和工具来进行科学技术计算、建模和仿真、设计和动力系统控制。SIMULINK 作为 MATLAB 的拓展，是一种建模、仿真、动力系统分析的图形环境。MATLAB 的控制系统工具箱适用于分析、设计和控制机械振动系统。

7A.2 MATLAB

MATLAB 交互式计算机环境，对于机电一体化计算有很大用处。可以进行涉及标量、矢量、矩阵的计算，其结果可以以图形显示并打印。MATLAB 工具箱适用于完成特定领域的研究任务，研究领域包括：控制系统、模糊逻辑、神经网络、数据采集、图像处理、信号处理、系统识别、优化、模型预测控制、鲁棒控制和统计学。用户指南、基于 Web 的帮助、来自母公司 Mathworks 有限公司的在线帮助和其他各种来源的帮助。这里给出的是关于使用 MATLAB 解决控制系统和机电一体化的任务的简短介绍。

7A.2.1 计算

在 MATLAB 命令窗口中可以进行数学运算。如下所述，只需在 MATLAB 的提示符“>>”后面键入计算式。

7A.2.2 算术

下面给出一个简单的使用 MATLAB 计算的简单例子：

```
>> x = 2; y = 3;
>> z = x^2 - x * y + 4
Z =
14
```

在第一行中，我们已经给出两个变量 x 和 y 的值为 2 和 3，在下一行中，给出这两个变量的代数函数式。然后，MATLAB 提供了答案 14。注意，如果你把在该行的末尾加了一个“;”，答案将不打印/显示。

表 7A-1 给出了在 MATLAB 中经常使用的算术操作符号。

表 7A-1 MATLAB 算术运算符号

符号	运算	符号	运算
+	相加	/	除于
-	相减	^	幂
*	乘		

下面的例子显示了求二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根：

```
>> a = 2; b = 3; c = 4;
>> x = ( - b + sqrt (b^2 - 4 * a * c))/(2 * a)
x =
- 0.7500 + 1.1990i
```

答案是复数，其中 i 代表 $\sqrt{-1}$。注意使用函数 sqrt（）时，它只取正根。表 7A-2 给出了一些有用的算术运算符号。

表 7A-2　MATLAB 算术运算符号

符号	运算	符号	运算
abs( )	绝对值/幅值	imag( )	复数的虚部
acos( )	反余弦	log( )	自然对数
acosh( )	反余割	log10( )	以 10 为底的对数(常用对数)
asin( )	反正弦	real( )	复数的实部
atan( )	反正切	sign( )	符号函数
cos( )	余弦	sin( )	正弦
cosh( )	余割	sqrt( )	正的平方根
exp( )	指数函数	tan( )	正切函数

注：MATLAB 注重大小写。

7A.2.3　阵列

数组（或称阵列）可以通过给定初始值、增量和结束限值来得到。下面给出一个例子。

```
>> x = (0.9: -0.1: 0.42)
x =
0.9000   0.8000   0.7000   0.6000   0.5000
```

该程序可以对整个阵列进行计算。例如，使所有的元素都乘以 π：

```
>> x = x * pi
x =
2.8274   2.5133   2.1991   1.8850   1.5708
```

第二个和第五个元素通过下面方式得到：

```
>> x ([2 5])
ans =
2.5133 1.5708
```

接下来，我们用 x 形成一个新的数组 y，然后绘制这两个阵列，如图 7A-1 所示。

```
>> y = sin (x);
>> plot (x, y)
```

一个多项式可用其系数阵列来表示。例如，二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$，其中 $a = 2$，$b = 3$，$c = 4$，可用“根”的函数来求解：

```
>> p = [2 3 4];
>> roots (p)
ans =
-0.7500 + 1.1990i
-0.7500 - 1.1990i
```

这个答案与我们之前获得的是一样的。

7A.2.4　关系和逻辑运算

在 MATLAB 中常用关系运算见表 7A-3。基本逻辑运算见表 7A-4。

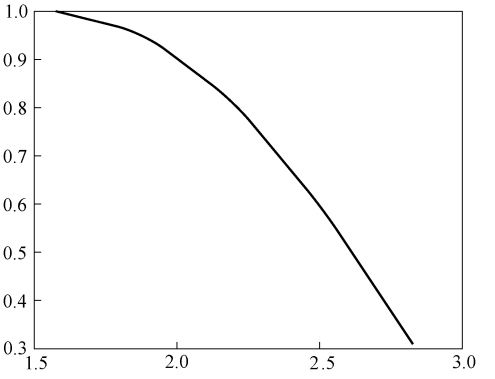


图 7A-1　使用 MATLAB 作图

表 7A-3　MATLAB 中常用关系运算符号

符号	运算	符号	运算
<	小于	= =	等于
< =	小于等于	~ =	不等于
> =	大于等于		

表 7A-4　基本逻辑运算符号

符号	运算	符号	运算
&	与	~	否
|	或		

考虑下面的例子：

```
>> x = （0：0.25：1） * pi
x =
  0   0.7854   1.5708   2.3562   3.1416
>> cos（x） >0
ans =
  1   1   1   0   0
>> （ cos（x） >0） &（ sin（x） >0）
ans =
  0   1   1   0   0
```

在这个例子中，首先计算一个数组，然后计算每个元素的余弦；接着，检查各个元素是否为正（如果为正，则发送 1，否则发送 0）；最后，用“和”运算来检查两个数组的对应元素是否为正。

7A.2.5　线性代数

MATLAB 可以执行矢量和矩阵的各种计算。在这里给出一些基本的说明。

可通过给各个元素赋值，给出一个矢量或矩阵。考虑下面的例子：

```
>> b = [1.5 -2];
>> A = [2 1; -1 1];
>> b = b'
b =
    1.5000
   -2.0000
>> x = inv(A) * b
x =
    1.1667
   -0.8333
```

在这个例子中，首先是定义二阶行矢量和2 × 2矩阵。该行矢量转置后得到一个列矢量。最后，根据 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 求解矩阵-矢量方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。$\boldsymbol{A}$ 的行列式和特征值确定如下：

```
>> det(A)
ans =
   3
>> eig(A)
ans =
   1.5000 + 0.8660i
   1.5000 - 0.8660i
```

$\boldsymbol{A}$ 的特征矢量和特征值计算如下：

```
>> [V, P] = eig(A)
V =
   0.7071                  0.7071
  -0.3536 + 0.6124i       -0.3536 - 0.6124i
P =
   1.5000 + 0.8660i            0
        0                  1.5000 - 0.8660i
```

其中符号 V 是用来表示特征矢量矩阵。符号 P 是用来表示对角线元素为特征值的对角矩阵。

在 MATLAB 中常用的矩阵操作见表 7A-5，几个矩阵函数在表 7A-6 中给出。

表 7A-5　MATLAB 中常用的矩阵运算符号

运算	描述	运算	描述
+	相加	/	除以
-	相减	^	幂
*	乘	'	转置

表 7A-6 MATLAB 中有用的矩阵函数

函数	描述	函数	描述
det( )	行列式	eig( )	特征值
inv( )	求逆	[,] = eig( )	特征矢量和特征值

7A. 2. 6 M 文件

MATLAB 命令必须在命令窗口中一个接一个键入。当需要使用几个命令来执行一项任务时，所需的工作可能是很乏味的。相反，必要的命令可以被放置在一个文本文件中，适合编辑（使用文本编辑器），MATLAB 可以用它来运行、完成任务。这样的文件被称为 M 文件。文件名的扩展名必须为 m，格式为 filename. m。工具箱是这类文件的集合，适合特定应用领域（例如，控制系统、模糊逻辑）使用，然后通过在 MATLAB 的命令提示符处，键入 M 文件名，该文件即可被执行。执行该文件所需的数据必须事先指定。

7A. 3 控制系统工具箱

MATLAB 中有多个工具箱，可以用来分析、计算、模拟和设计控制问题。时域表达和频域表达均可使用。此外，无论是经典的还是现代的控制问题都能够得到处理。这里通过几个控制问题说明其应用。

1. MATLAB 的现代控制举例

现在给出几个现代控制工程的例子，来说明 MATLAB 在控制中的使用。

（1）三阶被控对象的极点配置

机械被控对象由一个输入-输出微分方程 $\dddot{x}+\ddot{x}=u$ 给出。其中 u 是输入，x 是输出。确定的反馈律将产生一个阻尼固有频率为 1、阻尼比为 $1/\sqrt{2}$的简单的振子。

为了求解这个问题，首先我们定义状态变量为 $x_1=x$，$x_2=\dot{x}$，$x_3=\dot{x}_2$。对应的状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}u$$

$$y=\underbrace{[1\quad 0\quad 0\quad]}_{C}X$$

使用如下 MATLAB 命令，得到开环极点和零点：

```
>>A = [0 1 0; 0 0 1; 0 0 -1];
>>B = [0; 0; 1];
>>C = [1 0 0];
>>D = [0];
>>sys_ open = ss (A, B, C, D);
```

```
>> [nat_ freq_ open, damping_ open, poles_ open] = damp (sys_ open)
>> pzmap (sys_ open)
```

开环极点为：$[0 \quad 0 \quad -1]^{T}$。

开环系统的阶跃响应由如下命令获得：

```
>> step (sys_ open)
```

结果如图 7A-2a 所示。显然，该系统是不稳定的。

当所需的阻尼固有频率为 $\omega_d = 1$ 和阻尼比 $\zeta = 1/\sqrt{2}$时，我们得到无阻尼固有频率为 $\omega_n = \sqrt{2}$，因此，$\zeta\omega_n = 1$。这表明我们需要在 $-1 \pm j$ 放置两个极点，还有第三个极点应当远离左半平面（LHP）的这两个点；如放置在 -10 点。对应的控制增益 K 可以用 MATLAB 的“place”指令计算得到：

```
>> p = [ -1  +j -1 -j  -10];
>>  K = place (A, B, p)
place: ndigits = 15
K =
    20.0000 22.0000 11.0000
```

该闭环系统的相应的阶跃响应如图 7A-2b 所示。

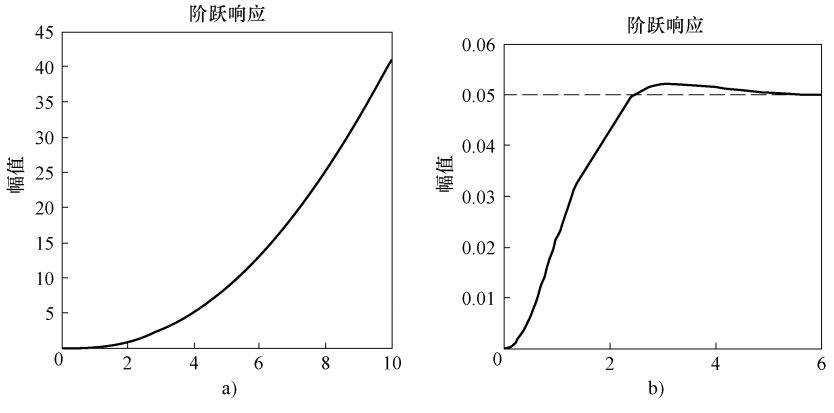


图 7A-2　阶跃响应

a）开环系统的阶跃响应　b）极点配置控制后的三阶系统阶跃响应

（2）三阶被控对象的线性二次调节器

对于前面的例子中的三阶被控对象，利用 MATLAB 控制系统工具箱，我们设计了一个线性二次型调节器（LQR），其中有一个状态反馈控制器。MATLAB 命令 K = lqr (A, B, Q, R) 计算最佳增益矩阵 $\boldsymbol{K}$，依据状态反馈律 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 将二次成本函数最小化

$$J = \int_0^{\infty} (\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\,dt$$

选择适用于各种状态和输入的加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$。

控制器设计的 MATLAB 命令如下：

```
>>A = [0 1 0; 0 0 1; 0 0 -1];
>>B = [0; 0; 1];
>>C = [1 0 0];
>>D = [0];
>>Q = [2 0 0; 0 2 0; 0 0 2];
>>R = 2;
>>Klqr = lqr (A, B, Q, R)
>> lqr_ closed = ss (A-B * Klqr, B, C, D)
>>step (lqr_ closed)
```

设计的 LQR 控制器系统的阶跃响应如图 7A-3 所示。

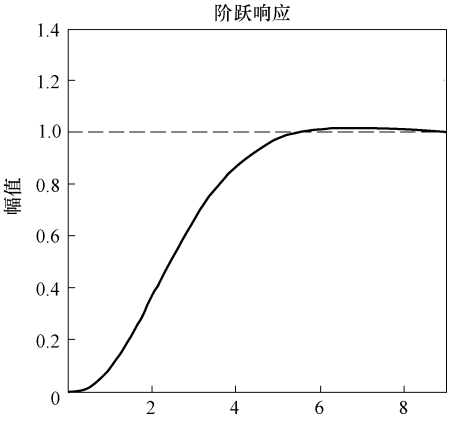


图 7A-3 带 LQR 控制器的三阶系统的阶跃响应

(3) 模态分析实例

两自由度的机械系统如图 7A-4 所示。我们现在用 MATLAB 解决模态分析问题，相关数据如下

$\alpha = 0.5, \beta = 0.5, m = 1\text{kg}, k = 1\text{N/m}$

对于给定的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，模态分析的解决步骤如下：

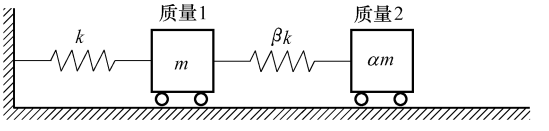


图 7A-4 两自由度系统

① 确定 $\boldsymbol{M}^{1/2}$ 和 $\boldsymbol{M}^{-1/2}$。

② 解出特征值 λ 和 $\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1/2}$ 的特征矢量 $\boldsymbol{\phi}$，这些特征值是原系统的固有频率的平方。

③ 确定原系统的模态矢量 $\boldsymbol{\psi}$，变换公式为 $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{\phi}$。

程序代码如下：

```
% 模态分析实例
clear;
m = 1.0;
k = 1.0;
M = [m 0; 0 m/2];
K = [3/2 * k - k/2; - k/2 k/2];
M_ sqrt = M^0.5;
```

```
M_ s_ inv = inv (M_ sqrt);
lemda = eig (M_ s_ inv * K * M_ s_ inv);
[U, D] = eig (M_ s_ inv * K * M_ s_ inv);
V = M_ s_ inv * U;
disp ('Natural frequencies')
fprintf ('omega1 = %10.3f%14.3f\n', sqrt (lemda (2, 1)));
fprintf ('\n omega2 = %10.3f%14.3f\n', sqrt (lemda (1, 1)));
fprintf ('\n')
fprintf ('\nMode shapes \n')
fprintf ('First mode Second Mode \n')
for i = 1: 2
  fprintf ('%10.3f%14.3f\n', V (i, 2) /V (1, 2), V (i, 1) /V (1, 1));
end
```

结果显示如下

```
>> Natural frequencies㊀
  omega1 = 0.707
   omega2 = 1.414
```

振　型

第 1 阶振型	第 2 阶振型
1.000	1.000
2.000	-1.000

㊀原文有误。译者注

8 结构动力修改与灵敏度分析

摘要

这一章论述结构动力修正和灵敏度分析的矩阵摄动理论。该理论涵盖内容广泛，具体来说，有复杂结构的实模态矩阵摄动和复模态的矩阵摄动。内容包括九个部分。8.2 节介绍了矩阵摄动和灵敏度分析的准备工作。8.3 节介绍了矩阵摄动的方法，包括一阶和二阶摄动。8.4 节介绍了设计灵敏度分析的方法。8.5 节介绍了针对模态灵敏度分析的高精度模态叠加。8.6 节介绍了自由-自由结构特征矢量灵敏度分析。8.7 和 8.8 节为重模态和密集模态的矩阵摄动。8.9 节对复模态矩阵摄动方法进行了讨论。

8.1 概述

现代的工程问题中，结构的动力学设计变得越来越重要。为了实现优化设计，我们必须重复修改结构参数，并求解广义特征值问题。对于一个庞大而复杂的结构的迭代振动分析可能是非常乏味的。因此必须寻求一种灵敏度分析与再分析的快速计算方法。对此来说，矩阵摄动法就是一个非常有用的工具。

如果结构参数发生一个小的调整时，矩阵摄动法就要关注固有频率和模态矢量如何变化。工程问题往往涉及结构参数的许多细小变化，比如材料性能变化、制造误差、结构的参数的迭代设计、设计灵敏度分析、随机特征值分析、控制系统的鲁棒性分析等。

在这一章里，我们假定读者具有大学水平的振动理论和有限元分析能力。

本章内容包括基本的准备工作：有限元模型的振动方程、特征值问题、模态矢量、正交性条件、模态叠加定理和特征解的幂级数展开。本章还包括以下内容：稀疏特征值和相应特征矢量的摄动方法；特征值和特征矢量的灵敏度；特征矢量偏导数的高精度模态叠加方法；自由-自由结构的特征矢量偏导数；对具有重特征值和密集特征值系统的摄动方法；具有非对称实矩阵系统的复模态摄动法。

8.2 有限元模型的结构动力学修改

有限元方法是获取结构振动分析问题的数值和计算解的重要工具。对结构运用有限元方法，可以获得连续体的理想化离散分析模型。全局坐标系统中的结构振动的有限元振动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q} \tag{8-1}$$

其中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为质量、刚度和阻尼矩阵，$\ddot{\boldsymbol{q}}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\boldsymbol{q}$ 分别为加速度、速度和位移矢量，$\boldsymbol{Q}$ 代表外部载荷矢量。

忽略了阻尼力和外部载荷，方程（8-1）变为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=0 \tag{8-2}$$

这是结构的固有振动方程。它的解（固有振动）为简谐振动，公式为

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}\cos(\omega t-\varphi) \tag{8-3}$$

式中，$\boldsymbol{u}$ 为模态矢量；ω 为系统的固有频率。将式（8-3）代入方程（8-2），可以得到结构振动的特征方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{u} \tag{8-4}$$

其中 λ（$\lambda=\omega^2$）为系统特征值。

结构振动分析时，固有频率和相应的模态矢量是可以通过求解特征问题［方程8-4)］来获得。n 个特征值和相应的特征矢量的解满足

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda} \tag{8-5}$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 为一个（$n\times n$）的模态矩阵，每列对应 n 个特征矢量；$\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个（$n\times n$）的对角矩阵，其对角元素为相应的特征值，即

$$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n] \tag{8-6}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_i)\,(i=1,2,\cdots,n) \tag{8-7}$$

特征矢量的一个重要关系，就是和 $\boldsymbol{M}$ 的正交性以及和 $\boldsymbol{K}$ 的正交性，也就是

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij} \tag{8-8}$$

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_j=\lambda_i\delta_{ij} \tag{8-9}$$

式中，δ_{ij}为 Kronecker 积。对于 n 个特征对，方程（8-8）和方程（8-9）可以写成

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I} \tag{8-10}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda} \tag{8-11}$$

由于模态矢量是独立的，那么任何一个位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 可以写成 $\boldsymbol{u}_i$ 的线性组合（$i=1$，2，…n)；即

$$\boldsymbol{u}=\sum_{r=1}^{n}c_r\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{U}\boldsymbol{C} \tag{8-12}$$

式中，c_r 是常数。每一个常数 c_r 由下式确定

$$c_r=\boldsymbol{u}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}\,(r=1,2,\cdots,n) \tag{8-13}$$

式（8-13）称为展开定理。

假设一个给定的结构，其物理参数有一个小的修改。这将导致矩阵 $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 的变化

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1 \tag{8-14}$$

式中，ε 为小参数；$\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 分别为原始质量和刚度矩阵，$\varepsilon\boldsymbol{M}_1$ 和 $\varepsilon\boldsymbol{K}_1$ 为相应的修改。显然，如果 $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 是对称的，那么矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_1$ 也是对称的。

如果 $\varepsilon\boldsymbol{M}_1$ 和 $\varepsilon\boldsymbol{K}_1$ 很小，则结构的特征值和特征矢量的改变也会很小。根据矩阵摄

动理论，方程（8-4）的特征解可以被表述为 ε 的幂级数形式

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_{0i} + \varepsilon \boldsymbol{u}_{1i} + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}_{2i} + \cdots \tag{8-15}$$

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \varepsilon^2 \lambda_{2i} + \cdots \tag{8-16}$$

式中，$\boldsymbol{u}_{0i}$和 λ_{0i}是原始结构的特征解；λ_{1i}和 λ_{2i}为特征值的一阶和二阶摄动；$\boldsymbol{u}_{1i}$和 $\boldsymbol{u}_{2i}$为特征矢量的一阶和二阶摄动。

因为原始结构的特征解 $\boldsymbol{u}_{0i}$和 λ_{0i}为已知，因此只有一阶、二阶特征解的摄动是必需的，而不必求解方程（8-4）。

8.3 振动模态的摄动法

振动模态的摄动法已得到很好发展（Fox 和 Kapoor，1968；Rogers，1977；Chen 和 Wada，1979；Hu，1987；Chen，1993）。这一节，假设所有原始结构的特征值是稀疏的。

8.3.1 稀疏模态的一阶摄动模型

根据展开定理，一阶摄动 $\boldsymbol{u}_{1i}$可展开为原始结构的模态矢量 $\boldsymbol{u}_{0s}$，为

$$\boldsymbol{u}_{1i} = \sum_{s=1}^{n} c_{1s} \boldsymbol{u}_{0s} \tag{8-17}$$

其中

$$c_{1s} = \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0s}} (\boldsymbol{u}_{0s}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{u}_{0i} - \lambda_{0i} \boldsymbol{u}_{0s}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{0i}) \qquad (s \neq i) \tag{8-18}$$

$$c_{1i} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{0i} \tag{8-19}$$

特征值的一阶摄动为

$$\lambda_{1i} = \boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{u}_{0i} - \lambda_{0i} \boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{0i} \tag{8-20}$$

8.3.2 稀疏模态的二阶摄动模型

如果参数发生相对较大的修改，为了能够得到高的计算精度，必须使用二阶摄动。根据展开定理，二阶摄动 $\boldsymbol{u}_{2i}$可以被展开为原始结构的模态矢量 $\boldsymbol{u}_{0s}$，即

$$\boldsymbol{u}_{2i} = \sum_{s=1}^{n} c_{2j} \boldsymbol{u}_{0s} \tag{8-21}$$

其中

$$c_{2s} = \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0s}} (\boldsymbol{u}_{0s}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{u}_{0i} - \lambda_{0i} \boldsymbol{u}_{0s}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{0i} - \lambda_{1i} \boldsymbol{u}_{0s}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{u}_{1i} - \lambda_{1i} \boldsymbol{u}_{0s}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{0i}) \quad (s \neq i) \tag{8-22}$$

$$c_{2s} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{u}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{u}_{1i} + \boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{1i} + \boldsymbol{u}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}_{0i}) \tag{8-23}$$

特征值的二阶摄动为

$$\lambda_{2i} = \boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{u}_{1i} - \lambda_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{u}_{1i} - \lambda_{1i}\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{u}_{1i} - \lambda_{1i}\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{u}_{0i} \tag{8-24}$$

8.3.3 数值计算案例

下面给出矩阵摄动法的一些实例。

案例 8-1

图 8-1 所示为一个五自由度的系统。其物理参数如下

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1.0, m_5 = 0.5, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1.0$$

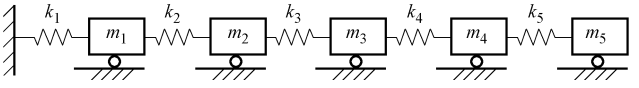


图 8-1　案例 8-1 中的质量-弹簧系统

为了研究一阶和二阶摄动的计算精度，我们假设第 5 个质量块质量减少 5% ~ 30%，第一根弹簧的刚度也减少 5% ~30%。

表 8-1 列出固有频率的计算结果，其中初始解即为原始结构的特征解。

表 8-1　固有频率的比较

模态阶数		结构参数变化(%)					
		5	10	15	20	25	30
1	A	0.3022	0.2922	0.2821	0.2724	0.2629	0.2536
	B	0.3128	0.3128	0.3128	0.3128	0.3128	0.3128
	C	3.52	7.14	10.9	14.38	18.97	23.3
	D	0.3017	0.2903	0.2783	0.2658	0.2527	0.2388
	C	0.14	0.58	1.34	2.43	3.9	5.81
	E	0.3022	0.2922	0.2827	0.2740	0.2660	0.2588
	C	0.0033	0.068	0.24	0.58	0.93	2.08
2	A	0.8788	0.8512	0.8249	0.7998	0.7756	0.7523
	B	0.9079	0.98079	0.9079	0.98079	0.9079	0.98079
	C	3.31	6.66	10.1	13.52	17.06	20.68
	D	0.8775	0.8460	0.8133	0.7792	0.7435	0.7060
	C	0.15	0.61	1.41	2.58	4.14	6.15
	E	0.3789	0.8518	0.8267	0.8089	0.7835	0.7659
	C	0.0076	0.062	0.21	0.52	0.91	1.80
3	A	1.3732	1.3348	1.2989	1.2650	1.2332	1.2031
	B	1.1421	1.1421	1.1421	1.1421	1.1421	1.1421
	C	2.99	5.94	8.88	11.79	14.7	17.5
	D	1.371	1.3266	1.2806	1.2328	1.1832	1.1313
	C	0.15	0.62	1.41	2.54	4.05	5.96
	E	1.3733	1.3356	1.3015	1.2712	1.2449	1.2231
	C	0.0074	0.060	0.20	0.49	0.74	1.66

（续）

模态阶数		结构参数变化(%)					
		5	10	15	20	25	30
4	A	1.7355	1.6923	1.6520	1.6143	1.5790	1.5457
	B	1.7820	1.7820	1.7820	1.7820	1.7820	—
	C	2.68	5.30	7.78	10.38	12.85	15.28
	D	1.7331	1.6828	1.6319	1.5773	1.5209	1.5209
	C	0.14	0.56	1.28	2.29	3.62	5.27
	E	1.7356	1.6933	1.6552	1.6216	1.5830	1.5695
	C	0.0070	0.057	0.19	0.45	0.68	1.53
5	A	1.9273	1.8825	1.8408	1.8017	1.7649	1.7304
	B	1.9753	1.9753	1.9753	1.9753	1.9753	1.9753
	C	2.49	4.93	7.31	9.63	11.92	14.16
	D	1.9248	1.8929	1.896	1.7696	1.7079	1.6492
	C	0.1300	0.51	1.15	2.06	3.23	4.69
	E	1.9274	1.8835	1.8439	1.8090	1.7790	1.7541
	C	0.0064	0.051	0.17	0.41	0.83	1.37

由以上结果可知，如果结构参数改变15%，则固有频率的平均变化为9%。使用一阶摄动，频率的平均误差降低到1.32%。

如果结构参数改变30%，则固有频率平均变化为18%。使用一阶摄动，固有频率的平均误差降低到1.6%。

表8-1和表8-2所用的符号代表的意思如下：

A—修改结构的精确解；

B—原始结构的初始解；

C—百分误差；

D—一阶摄动解；

E—二阶摄动解；

F—初始解的百分误差；

G—一阶摄动的百分误差；

H—二阶摄动的百分误差。

案例8-2

图8-2所示为由20根杆构成的一个桁架结构。第二根杆的横截面积由$1cm^2$变为$2cm^2$。计算结果见表8-2。

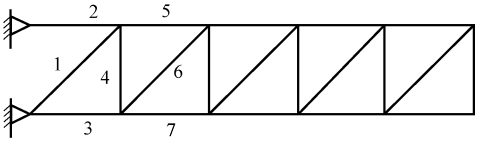


图8-2　案例8-2的桁架结构

表 8-2　固有频率的比较

模态阶数	A/Hz	B/Hz	F(%)	D/Hz	G(%)	E/Hz	H(%)
1	27.78	25.45	8.39	29.27	5.36	28.14	1.29
2	109.1	107.7	1.28	110.39	1.18	109.35	0.28
3	157.4	153.2	2.67	159.53	1.35	158.79	0.88
4	230.5	233.2	1.17	231.24	0.32	231.02	0.022
5	320.7	325.6	1.53	320.58	0.04	320.89	0.04
6	391.1	393.7	0.66	392.06	0.24	319.35	0.06

案例 8-3　图 8-3 所示的一个扭转振动系统，含有 5 个圆盘，其物理参数如下：

- $I_1 = 10.78\text{kg}\cdot\text{cm s}^2$
- $I_2 = 82.82\text{kg}\cdot\text{cm s}^2$
- $I_3 = 14.27\text{kg}\cdot\text{cm s}^2$
- $I_4 = 29.56\text{kg}\cdot\text{cm s}^2$
- $I_5 = 21.66\text{kg}\cdot\text{cm s}^2$
- $K_1 = 10.48\times10^4\text{kg}\cdot\text{cm/rad}$
- $K_2 = 34.30\times10^4\text{kg}\cdot\text{cm/rad}$
- $K_3 = 24.40\times10^4\text{kg}\cdot\text{cm/rad}$
- $K_4 = 40.60\times10^4\text{kg}\cdot\text{cm/rad}$

相应的受约束系统如图 8-3b 所示，其中悬挂弹簧刚度为 $K_x = 4060\text{kg}\cdot\text{cm/rad}$。

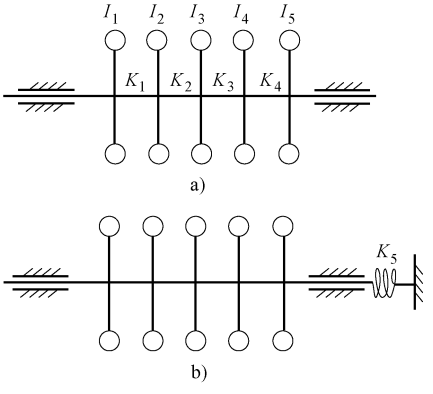


图 8-3　案例 8-3 的扭转振动系统

把约束系统的精确特征解当做初始结果。使用矩阵摄动，可得到自由-自由系统的特征解。结果见表 8-3 和表 8-4。

表 8-3　固有频率比较

参数	模态阶数				
	1	2	3	4	5
ω_0	0.000000	62.554934	105.668169	177.680405	224.361444
ω_x	1.595950	62.604815	105.669360	177.704224	224.386235
δ		0.079700	0.001070	0.013406	0.011000
$\varepsilon\omega_1$	−1.525707	−0.049895	−0.001132	−0.023834	−0.002508
ω'_0	0.080243	62.554920	105.44168	177.680390	224.383727
δ'		2.24×10^{-5}	9.46×10^{-7}	8.22×10^{-8}	9.93×10^{-5}

表 8-4　特征矢量比较

模态阶数	u_0^i	u_x^i	εu_1^i	u'^i_0
1	0.079283	0.097363	−0.000080	0.079823
	0.079283	0.079342	−0.000059	0.079823
	0.079283	0.079287	−0.000004	0.079823
	0.079283	0.079198	0.000085	0.079823
	0.079283	0.079189	0.000153	0.079342

（续）

模态阶数	u_0^i	u_x^i	εu_1^i	u'^i_0
2	-0.095647	-0.095611	0.000036	-0.095647
	-0.057148	-0.057064	-0.000084	-0.057148
	0.008612	0.008719	-0.000107	0.008612
	0.099081	0.099192	-0.000111	0.099081
	0.125223	0.125259	0.000036	0.125223
3	0.277894	0.277884	0.000010	0.277894
	-0.041278	-0.041284	0.000005	-0.41279
	-0.027509	-0.027497	-0.000013	-0.027510
	0.009810	0.009840	-0.000030	0.009810
	0.024263	0.024279	0.000016	0.024263
4	-0.009038	-0.009033	-0.000005	-0.009038
	-0.020312	-0.020309	0.000002	0.020312
	-0.125560	-0.125580	0.000024	-0.125556
	-0.098791	0.098735	-0.000053	-0.098788
	0.144375	0.144413	-0.000038	0.144375
5	0.004823	0.004823	0.000001	0.004824
	-0.020156	-0.020154	-0.0000002	-0.020156
	0.217244	0.217227	0.000018	0.217245
	-0.088717	-0.088725	0.000008	-0.088717
	0.052618	0.052652	-0.000034	0.052618

表 8-3 中所用符号代表的含义如下：

- ω_0 表示自由-自由系统的固有频率精确解（1/s）；
- ω'_0：表示自由-自由系统固有频率的摄动解（1/s）；
- ω_x：受约束系统固有频率（1/s）。

$\varepsilon\omega_1 = \omega'_0 - w_x$ 表示固有频率的摄动，

$$\delta = \frac{|\ w_0 - w_x\ |}{w_0}(\%)$$

$$\delta' = \frac{|\ w_0 - w'_0\ |}{w_0}(\%)$$

表 8-4 中所用符号代表的含义如下：

- $\boldsymbol{u}_0^i$：表示自由系统特征矢量的精确解。
- $\boldsymbol{u}'^i_0$：表示自由-自由系统特征矢量摄动解。
- $\boldsymbol{u}_x^i$：表示受约束系统特征矢量。
- $\varepsilon\boldsymbol{u}_1^i$：表示特征矢量的一阶摄动。

由表 8-3 可见，自由-自由系统的固有频率通过悬挂弹性元件而得到提高。比如，刚性模态的频率增加到了 1.595950（1/s），且第一阶弹性模态增加了 0.8124%。通过用摄动方法修改特征解，刚体模态的固有频率减少到了 0.079700（1/s），它几乎等于 0，且所有弹性模态频率几乎都变成了精确解。表 8-4 中所示自由-自由系统振型 $\boldsymbol{u}'^i_0$ 与精确解 $\boldsymbol{u}_0^i$ 十分接近。

8.4 结构振动模态的设计灵敏度分析

在优化结构分析的过程中，特征值和特征矢量设计灵敏度分析扮演着重要的角色。设计者可以直接在一个交互式的计算机辅助设计过程中使用此信息，并作为有价值的指导。很多科学家在这一领域做了大量有价值的工作（Haug 等，1985；Adelmen 和 Haftka，1986；Chen 和 Pan，1986；Wang，1991）。

8.4.1 灵敏度分析的直接微分法

特征值和特征矢量的设计灵敏度分析将会显示出系统中那些设计参数变化影响了结构的动力响应特征。

让 $\lambda_{i,j}$ 和 $\boldsymbol{u}_{i,j}$ 分别表示相对于设计变量 b_j（$j=1$，2，…，L）的特征值 λ_i 和特征矢量 $\boldsymbol{u}_i$ 的灵敏度，令 $\boldsymbol{K}_{,j}$ 和 $\boldsymbol{M}_{,j}$ 分别表示刚度和质量矩阵相对于设计变量为 b_j 的导数，则特征值的设计灵敏度为

$$\lambda_{i,j}=\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_{,j}-\lambda_i\boldsymbol{M}_{,j})\boldsymbol{u}_i \tag{8-25}$$

特征矢量 $\boldsymbol{u}_{i,j}$ 的灵敏度，可以表示成

$$\boldsymbol{u}_{i,j}=\sum_{s=1}^{n}c_{ijs}\boldsymbol{u}_s \tag{8-26}$$

其中

$$c_{ijs}=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_s}\boldsymbol{u}_s^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_{,j}-\lambda_i\boldsymbol{M}_{,j})\boldsymbol{u}_i(i,s=1,2,\cdots,n,i\neq s) \tag{8-27}$$

$$c_{ijs}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{,j}\boldsymbol{u}_i \tag{8-28}$$

8.4.2 摄动灵敏度分析

设 $\Delta\boldsymbol{K}$ 和 $\Delta\boldsymbol{M}$ 分别表示由设计变量 Δb_j 的增加而导致的刚度和质量矩阵增加，并设 $\Delta\lambda_i$ 和 $\Delta\boldsymbol{u}_i$ 分别表示相应的特征值和特征矢量的摄动。振动模态的设计敏感度分析的直接微分可以直接代入摄动形式，近似为

$$\lambda_{i,j}=\frac{\Delta\lambda_i}{\Delta b_j} \tag{8-29}$$

$$\boldsymbol{u}_{i,j}=\frac{\Delta\boldsymbol{u}_i}{\Delta b_j} \tag{8-30}$$

其中 $\Delta\lambda_i$ 和 $\Delta\boldsymbol{u}_i$ 可由本章所讲述的摄动方程估算得到。在实际分析中，设计变量可以是桁架杆件的横断面积、弯曲惯性矩、梁的等效扭转惯性矩、板的厚度或者其他变量。在一些复杂结构中，可以把质量 m_r 置于节点并沿着第 r 个自由度方向上运动，或者把刚度为 K_r 的弹性支座置于某一节点上，一个刚度为 K_j 的弹性连接体也可能位于两个构件之间，也可以把它们当做设计变量。在有限元分析中，$\Delta\boldsymbol{K}$ 和 $\Delta\boldsymbol{M}$ 理解为单元增量 $\Delta\boldsymbol{K}^e$ 和 $\Delta\boldsymbol{M}^e$ 的和，因此有

$$\Delta \boldsymbol{K} = \sum_e \Delta \boldsymbol{K}^e \tag{8-31}$$

$$\Delta \boldsymbol{M} = \sum_e \Delta \boldsymbol{M}^e \tag{8-32}$$

则上面给出的振型灵敏度公式可以转变为有限元摄动形式（Chen 和 Pan，1986）为

$$\lambda_{i,j} = \frac{1}{\Delta b_j} \sum\nolimits_e \bar{\boldsymbol{u}}_l^{\mathrm{T}} (\Delta \boldsymbol{K}^e - \lambda_i \Delta \boldsymbol{M}^e) \bar{\boldsymbol{u}}_i \tag{8-33}$$

$$\boldsymbol{u}_{i,j} = \frac{1}{\Delta b_j} \sum\nolimits_e \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_s} \bar{\boldsymbol{u}}_s^{\mathrm{T}} (\Delta \boldsymbol{K}^e - \lambda_i \Delta \boldsymbol{M}^e) \bar{\boldsymbol{u}}_i \boldsymbol{u}_s - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{u}}_l^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{M}^e \bar{\boldsymbol{u}}_i \boldsymbol{u}_i \right) \tag{8-34}$$

在这些公式中，上画线表示有关的特征矢量只包含第 e 个有限单元所需的部件。注意到这个是非常重要的，就是在方程（8-33）和方程（8-34）中，计算是以单元为基础进行的，并且计算得到很大的简化。

使用速记符号

$$\lambda_{i,j}{}^e = \frac{1}{\Delta b_j} \bar{\boldsymbol{u}}_l^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{K}^e - \lambda_j \Delta \boldsymbol{M}^e \bar{\boldsymbol{u}}_i \tag{8-35}$$

$$\boldsymbol{u}_{i,j}{}^e = \frac{1}{\Delta b_j} \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_s} \bar{\boldsymbol{u}}_s^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{K}^e - \lambda_i \Delta \boldsymbol{M}^e \bar{\boldsymbol{u}}_i \boldsymbol{u}_s - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{u}}_l^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{M}^e \bar{\boldsymbol{u}}_i \boldsymbol{u}_i \right) \tag{8-36}$$

方程（8-33）和方程（8-34）可以写成

$$\lambda_{i,j} = \sum\nolimits_e \lambda_{i,j}{}^e \tag{8-37}$$

和

$$\boldsymbol{u}_{i,j} = \sum\nolimits_e \boldsymbol{u}_{i,j}{}^e \tag{8-38}$$

其中，$\lambda_{i,j}{}^e$ 和 $\boldsymbol{u}_{i,j}{}^e$ 是分别对于第 e 个元素的特征值 λ_i 和特征矢量 $\boldsymbol{u}_i$ 的设计灵敏度。让我们考虑下面这个重要的情形。

对于集中质量 m_r，将其置于节点并且沿第 r 个自由度方向运动，则方程（8-33）和方程（8-34）变为

$$\lambda_{i,r} = \frac{\Delta \lambda_i}{\Delta m_r} = -\lambda_i u_{ir}{}^2 \tag{8-39}$$

和

$$\boldsymbol{u}_{i,r} = \frac{\Delta \boldsymbol{u}_i}{\Delta m_r} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_i - k_s} u_{sr} u_{ir} \boldsymbol{u}_s - \frac{1}{2} u_{ir}{}^2 \boldsymbol{u}_i \tag{8-40}$$

其中 $\boldsymbol{u}_{ir}$ 是第 $\boldsymbol{u}_i$ 的 i 个特征矢量的第 r 个元素。

对于在两个部件的第 r 个自由度和第 i 个自由度之间的弹性连接件，其刚度为 K_j，方程（8-33）和方程（8-34）变为

$$\lambda_{i,j} = \frac{\Delta \lambda_i}{\Delta k_j} = (u_{ir} - u_{il})^2 \tag{8-41}$$

和

$$\boldsymbol{u}_{i,j} = \frac{\Delta \boldsymbol{u}_i}{\Delta k_j} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} \frac{1}{\lambda_i - k_s} (u_{sr} u_{ir} - u_{sl} u_{ir} - u_{sr} u_{il} + u_{sl} u_{il}) \boldsymbol{u}_s \tag{8-42}$$

对于弹簧刚度为 K_r 的弹性支座，置于第 r 个自由度方向，则方程（8-33）和方程（8-34）变成

$$\lambda_{i,r}=\frac{\Delta\lambda_i}{\Delta k_r}=u_{ir}^{\ 2} \tag{8-43}$$

和

$$\boldsymbol{u}_{ir}=\frac{\Delta\boldsymbol{u}_i}{\Delta k_r}=\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}\frac{1}{\lambda_i-k_s}u_{sr}u_{ir}\boldsymbol{u}_s \tag{8-44}$$

8.4.3 数值计算案例

下面我们以车辆底盘的设计灵敏度分析为例介绍方法的使用。

案例 8-4

车辆底盘的有限元分析模型包含 39 个梁元素，涉及 30 个节点和 180 个自由度，如图 8-4 所示。

在此案例中，特征矢量灵敏度分析设计变量是该结构梁单元的等效扭转惯性矩 J 和弯曲惯性矩 I_y。相对于 J 和 I_y 的特征值灵敏度分析结果见表 8-5，其中 NE 表示单元号。表中只给出了其中最大的 8 个值，并以降序排列。

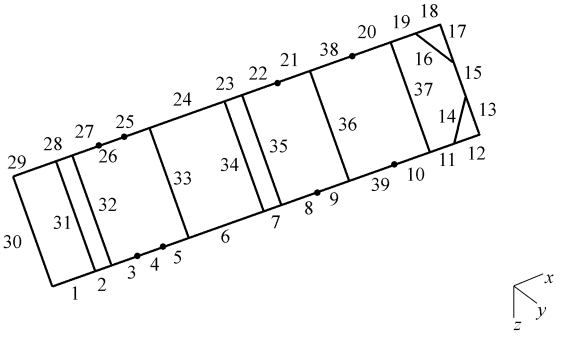


图 8-4　案例 8-4 的汽车底盘有限元模型

表 8-5　底盘前四阶固有频率的敏感度

第1阶	NE	15	11	19	24	6	37	34	36
	λ_{1J}^e	9.97	5.23	5.23	3.64	3.64	3.34	3.32	3.31
	NE	24	6	23	7	22	8	33	21
	λ_{1J}^e	0.015	0.15×10^{-2}	0.33×10^{-3}	0.33×10^{-3}	0.28×10^{-3}	0.19×10^{-3}	0.11×10^{-3}	0.11×10^{-3}
第2阶	NE	16	14	11	19	18	12	13	17
	λ_{1J}^e	6.67×10^{-2}	0.67×10^{-2}	0.45×10^{-2}	0.45×10^{-2}	0.11×10^{-2}	0.11×10^{-2}	0.53×10^{-3}	0.53×10^{-3}
	NE	38	10	21	9	22	8	24	6
	λ_{1J}^e	2.92	2.92	1.78	1.78	1.49	1.49	1.44	1.44
第3阶	NE	15	19	11	37	31	30	32	1
	λ_{1J}^e	95.9	47.2	47.2	26.5	25.4	25.2	23.8	12.5
	NE	10	38	9	21	8	22	6	24
	λ_{1J}^e	2.96	2.96	1.97	1.97	1.74	1.74	1.70	1.70
第4阶	NE	14	16	19	11	12	18	17	13
	λ_{1J}^e	0.19	0.19	0.12	0.12	0.03	0.03	0.015	0.015
	NE	10	38	39	20	5	25	6	24
	λ_{1J}^e	22.4	22.4	15.7	15.7	11.8	11.8	10.9	10.9

从表 8-5 中可以看出，对于特殊底盘，第一固有频率的灵敏度 $\lambda_{1J_i}^e$ 远小于 λ_{1J}^e，这表明梁的弯曲惯性矩的改变对于底盘第一阶振动固有频率的影响很小。因此，我们可以得出结论：第一振型是扭振。同样，这个结果也表明，第三振型也是扭振。在另一方面，识别出第二和第四阶振型为弯曲振型。当设计者需要对设计进行一些调整的时候，这些信息是非常重要的。比如，如果设计者想增加第一阶扭振频率，则对他来说最有效的方式就是增加梁单元 15、11、19、24 和 6 等的扭转惯性矩。

应当指出的是，只有第一阶低频模态可用，并可以在方程（8-26）中用作特征矢量偏导数的基本矢量，但是模态截断会导致误差，而且如果高阶频率模态被截断，则误差会变得很严重。特征矢量偏导数的截断模态叠加表示形式是可以得到改善的，这将在下一节介绍。

8.4.4 结语

从上述的数值计算案例中可以看出，矩阵摄动法对于修改结构的快速分析来说是一种极其有用的方法。它被广泛应用于结构上的修改，比如对各种类型单元的修改、局部结构的修改、振动模态灵敏度分析等。因此，矩阵摄动法在动态分析和结构优化方面起着十分重要的作用。

8.5 模态灵敏度分析的高精度模态叠加

模态叠加方法经常用于计算模态矢量的偏导数。由于得到动态分析的计算机解的成本问题，所以得到所有的模态是很不切实际的。因此，只要计算前 L 阶低频模态，并把它们作为特征矢量偏导数的基本矢量。然而，如前面所述，模态截断会导致误差，因此如果更高频率模态被截断，则误差尤为明显。这里提出了显式法，它可以改善特征矢量偏导数的截断模态叠加表示（Wang，1991），其中残余静态模态被用来近似代表由不能使用高频模态引起的误差（方法一）。

本节给出一个更加精确的模态叠加方法（方法二；Chen，1993a；Liu 和 Chen，1994a）。在这种方法中，对于特征矢量导数的截断模型的贡献被更加直接的表达，并作为一个可以通过简单的迭代来估计的收敛级数。

8.5.1 方法一

模态灵敏度可以表示为

$$\boldsymbol{u}_{i,j} = \sum_{s=1}^{N} c_S \boldsymbol{u}_S = \sum_{j=1}^{L} c_j \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{S}_R \tag{8-45}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_R = \sum_{j=1}^{N} c_j \boldsymbol{u}_j \tag{8-46}$$

由于 $\lambda_i \ll \lambda_{L+1}$，则方程（8-46）可以近似表达为

$$\boldsymbol{S}_R \approx \boldsymbol{S}_{RA} = \overline{\boldsymbol{H}}_0 - \overline{\boldsymbol{W}}_0 \tag{8-47}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{H}}_0 = \boldsymbol{K}^{-1}(-\boldsymbol{K}_{,j} + \lambda_{i,j}\boldsymbol{M} + \lambda_i \boldsymbol{M}_{,j}) \tag{8-48}$$

$$\overline{\boldsymbol{W}}_0 = \sum_{j=1}^{L} \frac{1}{\lambda_j} \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{K}_{,j} + \lambda_{i,j}\boldsymbol{M} + \lambda_i \boldsymbol{M}_{,j})\boldsymbol{u}_j \tag{8-49}$$

8.5.2 方法二

由于高频模态截断带来的 $\boldsymbol{u}_{i,j}$、$\boldsymbol{S}_R$ 的贡献表示为：

$$\boldsymbol{S}_R = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^i(\boldsymbol{H}_j - \boldsymbol{W}_j) \tag{8-50}$$

其中

$$\boldsymbol{W}_j = \boldsymbol{U}_L \boldsymbol{\Lambda}_L^{-j-1} \boldsymbol{U}_L^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{K}_{,j} + \lambda_{i,j}\boldsymbol{M} + \lambda_i \boldsymbol{M}_{,j}) \tag{8-51}$$

$$\boldsymbol{U}_L = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_L] \tag{8-52}$$

$\boldsymbol{H}_j$ 可以通过如下迭代过程得到：

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{K}^{-1}(-\boldsymbol{K}_{,j} + \lambda_{i,j}\boldsymbol{M} + \lambda_i \boldsymbol{M}_{,j}) \\ \boldsymbol{F}'_{j-1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{H}_{j-1}, j \geqslant 1 \\ \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}'_{j-1} \end{cases} \tag{8-53}$$

定义 $\boldsymbol{S}_R(k)$ 为

$$\boldsymbol{S}_R(k) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j^i(\boldsymbol{H}_j - \boldsymbol{W}_j) \tag{8-54}$$

使用这一定义，如果满足下面不等式

$$\| \boldsymbol{S}_R(k) - \boldsymbol{S}_R(k-1) \|_2 \leqslant \varepsilon \tag{8-55}$$

则迭代结束，其中 ε 为指定的精度要求。

应当注意的是，当方程（8-50）中，如果只保留级数的首项而舍去其他项时，那么方法二就缩变成方法一。此外，级数［方程（8-50）］还可以被用于估算由于模态截断所产生的误差。

8.6 自由-自由结构特征矢量的灵敏度

由方程（8-48）和方程（8-53）可见，方法一和方法二对于有刚体模态的自由-自由结构都无能为力，因为他们涉及刚度矩阵的求逆。然而，我们可以将带有奇异刚度矩阵的特征值问题转换成其等效的非奇异刚度矩阵的特征值问题，使得这两个特征值问题有同样的特征值和特征矢量的偏导数（Liu 和 Chen，1994b）。

对于特征值问题，有

$$\overline{\boldsymbol{K}}\,\overline{\boldsymbol{u}}_l = \overline{\lambda}_l \boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{u}}_l \tag{8-56}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{K}} \equiv \boldsymbol{K} - \mu \boldsymbol{M} \tag{8-57}$$

此处，μ 是一个非零的标量参数，且当 $\mu \neq \lambda_i$（$i \neq 1$，2，…，n）时，$\overline{\boldsymbol{K}}$ 非奇。

存在如下关系

$$\overline{\lambda}_l = \lambda_i - \mu \tag{8-58}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}_l = \boldsymbol{u}_i (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{8-59}$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\lambda}_l}{\mathrm{d}b} = \frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}b} \tag{8-60}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}_i}{\mathrm{d}b} = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}b} \tag{8-61}$$

由方程（8-56）特征值问题的偏导数 $\dfrac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\mathrm{d}b}$ 可以得到偏导数 $\dfrac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\mathrm{d}b}$，其中 $\overline{\boldsymbol{K}}$ 非奇。8.5.1 节和 8.5.2 节讨论的方法一和方法二都可以应用于带刚体模态的自由-自由结构问题的求解。

为了取得对所有前 m 阶特征矢量偏导数的更快的平均收敛速度，μ 可由如下公式得到

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j\right)}{m} \\ \mu \neq \lambda_j \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{8-62}$$

8.7 重模态的矩阵摄动理论

8.7.1 基本方程

在本节，考虑一种重特征值的情况，即 $\lambda_{0i} = \lambda_{0i+1} = \cdots = \lambda_{0i+m-1}$，这种系统被称之为退化系统。在工程上，许多复杂庞大的结构如飞机、火箭、高塔、桥梁以及海上平台，经常具有多重或一簇特征值。这里展现的重模态矩阵摄动模型可参见 Haug 等（1980）、Chen 和 Pan（1986）、Hu（1987）、Mulls-Curran（1988）、Ojalvo（1988）、Dailey（1989）、Lim 等人（1989）以及 Shaw 和 jayasuriya（1992）文献。

假设 $\lambda_0 = \lambda_{01} = \lambda_{02} = \cdots = \lambda_{0m}$，即 λ_0 是重特征值，重复数等于 m，并且 $\boldsymbol{u}_{01}$，$\boldsymbol{u}_{02}$，…，$\boldsymbol{u}_{0m}$ 是与 λ_0 相关联的特征矢量。那么，$\boldsymbol{U}_0$ 可以表示为 $\boldsymbol{u}_{0j}$（$j = 1$，2，…，m）的线性组合，这个组合也同样是与 λ_0 相关联的特征矢量。

$$\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_{0m}\alpha \tag{8-63}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_{0m} = [\boldsymbol{u}_{01}, \boldsymbol{u}_{02}, \cdots, \boldsymbol{u}_{0m}] \tag{8-64}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{I} \tag{8-65}$$

并且

$$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_{01},\alpha_{02},\cdots,\alpha_{0m}]^{\mathrm{T}} \tag{8-66}$$

注意 $\boldsymbol{\alpha}$ 为一待定常数矩阵。

根据矩阵摄动法，对于摄动结构来说，具有重特征值结构的特征值和特征矢量记作

$$\boldsymbol{\Lambda}_m=\boldsymbol{\Lambda}_0+\varepsilon\boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{8-67}$$

$$\boldsymbol{U}_m=\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}+\varepsilon(\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{C}_m+\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A)=\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}+\varepsilon(\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}_m+\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A) \tag{8-68}$$

式中，$\boldsymbol{U}_A$ 为 $n\times(n-m)$ 阶模态矩阵，它包括了除 $\boldsymbol{U}_{0m}$ 外的所有特征矢量；$\boldsymbol{\Lambda}_m$ 为摄动结构的 $m\times m$ 阶特征矢量对角矩阵；$\boldsymbol{\Lambda}_1$ 为对角元素等于特征值一阶摄动的对角矩阵；$\boldsymbol{C}_m$ 为 $m\times m$ 阶待定矩阵；$\boldsymbol{C}_A$ 为 $(n-m)\times(n-m)$ 阶待定矩阵。

8.7.2 特征解的一阶摄动

$\boldsymbol{\Lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由如下 $(m\times m)$ 特征值问题求出

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{I} \tag{8-69}$$

其中

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1-\lambda_0\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}_{0m} \tag{8-70}$$

解出方程（8-69）的 $m\times m$ 特征值问题就得到了 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$。

如果矩阵 $\boldsymbol{W}$ 没有重特征值，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以唯一确定；如果 $\boldsymbol{W}$ 有重特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 可由更高阶的摄动方程来确定。这里，我们假设矩阵 $\boldsymbol{W}$ 没有重特征值：即 $\lambda_{1i}\neq\lambda_{1j}$，$(i\neq j)$，其中，$\lambda_{1k}$ $(0<k\leqslant m)$ 为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 中的元素。

矩阵 $\boldsymbol{C}_A$ 为

$$\boldsymbol{C}_A=(\boldsymbol{\Lambda}_A-\lambda_0\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{U}_A{}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-71}$$

其中的元素

$$C_{ij}^m=\frac{R_{ij}}{\lambda_{jm}^{(1)}-\lambda_{im}^{(1)}}\qquad(i\neq j\ i,j=1,2,\cdots,m) \tag{8-72}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的元素 R_{ij} 为

$$\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A-\lambda_0\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A\boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{8-73}$$

并且

$$C_{ii}^m=\frac{1}{2}Q_{ii} \tag{8-74}$$

其中 Q_{ii} 为 $\boldsymbol{Q}$ 的对角元素，$\boldsymbol{Q}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-75}$$

8.7.3 针对重模态的一阶摄动的高精度模态叠加

在 8.5 节中，给出了对于稀疏模态特征值的特征矢量的一阶摄动的高精度模态叠加。在本节，我们将这种方法引申到重模态的情形。

8.7.3.1 计算 $\boldsymbol{U}_1$ 的方法一

假设 $\boldsymbol{U}_{AL}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_{AL}$ 为不包括重模态的前 L 阶模态和特征值，特征矢量的一阶摄动为

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}_m + \boldsymbol{U}_{AL}\boldsymbol{C}_{AL} + \boldsymbol{S}_R \tag{8-76}$$

$$\boldsymbol{S}_R = \boldsymbol{U}_S - [\boldsymbol{U}_{0m}:\boldsymbol{U}_{AL}]\,\mathrm{diag}(\lambda_0^{-1},\boldsymbol{\Lambda}_{AL}^{-1})[\boldsymbol{U}_{0m}:\boldsymbol{U}_{AL}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} \tag{8-77}$$

其中 $\boldsymbol{U}_S$ 是由下式得到的静位移

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_S = \boldsymbol{T} \tag{8-78}$$

其中

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_1 + \lambda_0\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-79}$$

在方程（8-79）中，$\boldsymbol{\Lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由方程（8-69）得出。

矩阵 $\boldsymbol{C}_{AL}$ 为

$$\boldsymbol{C}_{AL} = (\boldsymbol{\Lambda}_{AL} - \lambda_0\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{U}_{AL}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-80}$$

且矩阵 $\boldsymbol{C}_m$ 的元素为

$$C_{ij}^m = \frac{R_{ij}}{\lambda_{jm}^{(1)} - \lambda_{im}^{(1)}} \qquad (i \neq j \quad i,j = 1,2,\cdots,m) \tag{8-81}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\Lambda}_1 - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{K}_1)(\boldsymbol{U}_{AL}\boldsymbol{C}_{AL} + \boldsymbol{S}_R) - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{S}_R\boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{8-82}$$

$\boldsymbol{C}_m$ 的对角元素为

$$C_{ii}^m = \frac{1}{2}Q_{ii} \tag{8-83}$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{S}_R - \boldsymbol{S}_R{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-84}$$

8.7.3.2 计算 $\boldsymbol{U}_1$ 的方法二

特征矢量的一阶摄动记作

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}_m + \boldsymbol{U}_{AL}\boldsymbol{C}_{AL} + \boldsymbol{S}_R \tag{8-85}$$

其中，$\boldsymbol{C}_{AL}$ 也可由方程（8-80）求得，就是

$$\boldsymbol{C}_{AL} = (\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} - \lambda_0\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{U}_{AL}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}$$

$\boldsymbol{S}_R$ 由下式给出

$$\boldsymbol{S}_R = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_0^j(\boldsymbol{H}_j - \boldsymbol{W}_j) \tag{8-86}$$

其中

$$\boldsymbol{W}_j = [\boldsymbol{U}_{0m} \vdots \boldsymbol{U}_{AL}]\boldsymbol{\Lambda}_0^{-j-1}[\boldsymbol{U}_{0m} \vdots \boldsymbol{U}_{AL}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}(j \geqslant 0) \tag{8-87}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_1 + \lambda_0\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-88}$$

计算 $\boldsymbol{H}_j$ 的迭代法如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0 &= \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{F}'_{j-1} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{H}_{j-1}(j \geqslant 1)\\ \boldsymbol{H}_j &= \boldsymbol{K}^{-1}F'_{j-1}\end{aligned} \tag{8-89}$$

迭代过程根据精度要求结束。如果我们定义 $\boldsymbol{S}_R(k)$ 为

$$\boldsymbol{S}_R(k) = \sum_{j=0}^{k}\lambda_0^j(\boldsymbol{H}_j - \boldsymbol{W}_j) \tag{8-90}$$

则迭代的终止条件为

$$\|\boldsymbol{S}_R(k)-\boldsymbol{S}_R(k-1)\|_2 \ll \varepsilon (j=1,2,\cdots,m) \tag{8-91}$$

其中 ε 为指定的精度要求。

在方程（8-85）中，计算 $\boldsymbol{C}_m$ 的方法同方程（8-81）~方程（8-84）的相类似。唯一的不同是，方程（8-82）和方程（8-84）中的 $\boldsymbol{S}_R$ 可以被方程（8-90）中的 $\boldsymbol{S}_R(k)$ 替代。

8.8 密集模态特征值的矩阵摄动法

具有密集频率即具有一簇频率的振动模态总是在特定的结构系统中发生，比如大型空间结构、多跨梁以及一些相近周期结构和对称结构。因此，这里提出密集特征值的振动模态摄动法是非常重要的（Liu，2000）。

密集特征值的摄动分析可以转换成重特征值的问题，这等于密集特征值的平均值（Chen，1993）。

8.8.1 密集模态特征值的摄动分析方法一

先考虑振动特征值问题

$$\boldsymbol{K}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]=\boldsymbol{M}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]\operatorname{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_0,\boldsymbol{\Lambda}_A) \tag{8-92}$$

$$[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]=\boldsymbol{I} \tag{8-93}$$

式中，$\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 为 $n\times n$ 实对称矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}_0$ 和 $\boldsymbol{U}_0$ 分别为密集特征值的 $m\times m$ 对角矩阵和相应的 $n\times m$ 模态矩阵。

采用 $\boldsymbol{K}_0$ 的谱分解，问题可以表述为

$$\boldsymbol{K}_0=\overline{\boldsymbol{K}}_0+\varepsilon\delta\boldsymbol{K}_0 \tag{8-94}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{K}}_0=\boldsymbol{M}_0(\lambda_0\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{\Lambda}_A\boldsymbol{U}_A^{\mathrm{T}})\boldsymbol{M}_0 \tag{8-95}$$

$$\varepsilon\delta\boldsymbol{K}_0=\boldsymbol{M}_0[\boldsymbol{U}_0(\varepsilon\delta\boldsymbol{\Lambda}_A)\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{M}_0 \tag{8-96}$$

$$\varepsilon\delta\boldsymbol{\Lambda}_0=\boldsymbol{\Lambda}_0-\lambda_0\boldsymbol{I}=\boldsymbol{\Lambda}_0-\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_{0i}}{m}\right)\boldsymbol{I} \tag{8-97}$$

由此可见，方程（8-95）给出的 $\overline{\boldsymbol{K}}_0$ 满足

$$\overline{\boldsymbol{K}}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]=\boldsymbol{M}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]\operatorname{diag}(\lambda_0,\boldsymbol{I},\boldsymbol{\Lambda}_A) \tag{8-98}$$

$$[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]=\boldsymbol{I} \tag{8-99}$$

这表明 λ_0 和 $\boldsymbol{U}_0$ 是重复数为 m 的特征值问题［方程（8-92）］的重特征值和相应特征矢量子空间，且 $\boldsymbol{\Lambda}_A$ 和 $\boldsymbol{U}_A$ 也是特征值问题［方程（8-92）］的特征解。

如果 $\boldsymbol{\Lambda}_0\to\lambda_0\boldsymbol{I}$，$\varepsilon\delta\boldsymbol{\Lambda}_0\to\boldsymbol{0}$ 和 $\overline{\boldsymbol{K}}_0\to\boldsymbol{K}_0$，并且如果矩阵 $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 发生小的参数变化 $\varepsilon\boldsymbol{K}_1$ 和 $\varepsilon\boldsymbol{M}_1$，那么密集特征值的特征问题就会变成

$$(\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda} \tag{8-100}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \tag{8-101}$$

将方程（8-94）代入方程（8-100），我们得到

$$(\overline{\boldsymbol{K}}_0+\varepsilon\overline{\boldsymbol{K}}_1)\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda} \tag{8-102}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \tag{8-103}$$

其中

$$\varepsilon\overline{\boldsymbol{K}}_1=\varepsilon\delta\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1 \tag{8-104}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_0\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{\Lambda}_1+\varepsilon^2\boldsymbol{\Lambda}_2+\cdots \tag{8-105}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0\alpha+\varepsilon\boldsymbol{U}_1+\varepsilon^2\boldsymbol{U}_2+\cdots \tag{8-106}$$

因此，方程（8-102）和方程（8-103）的特征值问题可以认为是一个摄动的特征值问题，并且其摄动矩阵分别等于（$\delta\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_1$）和 $\boldsymbol{M}_1$。特征解 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 通过应用 8.7 节所述的重特征值的摄动法，可以从方程（8-102）和方程（8-103）中得到。于是，具有密集特征值的模态摄动问题被转换成了重特征值问题之一。

对 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的完全运算法如下。

① 计算

$$\lambda_0=\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_{0i}}{m}$$

② 计算

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}(\delta\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_1-\lambda_0\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}_0$$

③ 求解特征值问题

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_1$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{I}$$

④ 计算密集特征值的摄动特征值

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Lambda}_1$$

⑤ 计算对应于 λ_0 的新特征矢量 $\boldsymbol{U}_0\alpha$。

⑥ 计算矩阵 $\boldsymbol{C}_A$

$$\boldsymbol{C}_A=(\boldsymbol{\Lambda}_A-\lambda_0\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{U}_A{}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{K}_1-\delta\boldsymbol{K}_0)\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\alpha}$$

⑦ 计算

$$\boldsymbol{R}=[R_{ij}]$$

$$\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_1-\lambda_0\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}(\delta\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A\boldsymbol{\Lambda}_1$$

⑧ 计算

$$\boldsymbol{C}_m=[C_{ij}^m]$$

$$C_{ij}^m=\frac{R_{ij}}{\lambda_{1j}-\lambda_{1i}}\qquad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m)$$

$$C_{ii}^m=\frac{1}{2}Q_{ii}$$

$$\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\alpha}$$

⑨ 计算摄动的特征矢量 $\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}_m+\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A$$

8.8.2 密集模态特征值摄动分析方法二

因为该问题在理论和实际中都具有重要性，因此现在我们讨论密集特征值摄动分析的方法二，其等效于上述的方法一。

采用 $\boldsymbol{M}_0$ 的谱分解，问题可以表述为

$$\boldsymbol{M}_0=\overline{\boldsymbol{M}}_0+\varepsilon\delta\boldsymbol{M}_0 \tag{8-107}$$

$$\boldsymbol{K}_0[\boldsymbol{U}_0\vdots\boldsymbol{U}_A]=\overline{\boldsymbol{M}}_0[\boldsymbol{U}_0\vdots\boldsymbol{U}_A]\mathrm{diag}(\lambda_0,\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Lambda}_A) \tag{8-108}$$

$$[\boldsymbol{U}_0\vdots\boldsymbol{U}_A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0[\boldsymbol{U}_0\vdots\boldsymbol{U}_A]=\boldsymbol{I} \tag{8-109}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{M}}=\lambda_0{}^{-2}\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_0[\boldsymbol{U}_A(\boldsymbol{\Lambda}_A{}^{-1})^2\boldsymbol{U}_A{}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{K}_0 \tag{8-110}$$

$$\varepsilon\delta\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{K}_0[\boldsymbol{U}_0\varepsilon\delta(\boldsymbol{\Lambda}_0{}^{-1})^2\boldsymbol{U}_0{}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{K}_0 \tag{8-111}$$

$$\varepsilon\delta\boldsymbol{\Lambda}_0{}^{-2}=\boldsymbol{\Lambda}_0{}^{-2}-\lambda_0{}^{-2}\boldsymbol{I} \tag{8-112}$$

且

$$\lambda_0=\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_{0i}}{m} \tag{8-113}$$

由此可见，由方程（8-110）和方程（8-111）给出的 $\overline{\boldsymbol{M}}_0$ 和 $\varepsilon\delta\boldsymbol{M}_0$ 满足方程(8-108)和方程（8-109），即 λ_0 和 $\boldsymbol{U}_0$ 为重特征值以及方程（8-108）和方程（8-109）的相应模态矩阵。$\boldsymbol{\Lambda}_A$ 和 $\boldsymbol{U}_A$ 分别为特征值对角矩阵和除了 $\boldsymbol{\Lambda}_0$ 和 $\boldsymbol{U}_0$ 外的相应的模态矩阵。

如果 $\boldsymbol{K}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 修改为 $\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1$，则特征值问题变为

$$(\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda} \tag{8-114}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \tag{8-115}$$

将方程（8-107）代入方程（8-114），得到

$$(\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{U}=(\overline{\boldsymbol{M}}_0+\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}_1)\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda} \tag{8-116}$$

$$\boldsymbol{U}(\overline{\boldsymbol{M}}_0+\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}_1)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \tag{8-117}$$

其中

$$\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}_1=\varepsilon\delta\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1 \tag{8-118}$$

因此，方程 8-116 和方程 8-117 可被认为是带有重特征值的摄动特征值问题，并且重特征值的摄动法可用于获得方程 8-116 和方程 8-117 的摄动特征解：

$$\boldsymbol{\Lambda}=\lambda_0\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{\Lambda}_1+\cdots \tag{8-119}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0\alpha+\varepsilon\boldsymbol{U}_1+\cdots \tag{8-120}$$

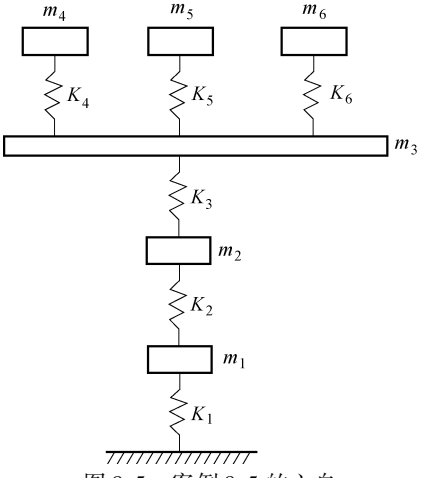


图 8-5 案例 8-5 的六自由度质量-弹簧系统

案例 8-5

对于如图 8-5 所示的六自由度质量-弹簧系统，刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_0$ 和质量矩阵 $\boldsymbol{M}_0$ 为

$$\boldsymbol{K}_0=\begin{bmatrix}1500 & -1000 & & & & \\ -1000 & 1200 & -200 & & & \\ & -200 & 15200 & -5000 & -5000 & -5000 \\ & & -5000 & 5000 & & \\ & & -5000 & & 5000 & \\ & & -5000 & & & 5000\end{bmatrix}(\mathrm{N/m})$$

$$\boldsymbol{M}_0=\mathrm{diag}(200,300,50,20,20,20.004)\,(\mathrm{kg})$$

计算下列三种情况的摄动特征解：

情况 1：

$$\varepsilon\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&5&0&-5&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-5&0&5&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}(\mathrm{N/m})$$

$$\varepsilon\boldsymbol{M}_1=\mathrm{diag}(0,\cdots,0)\,(\mathrm{kg})$$

情况 2

$$\varepsilon\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}5.00&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&5&0&-5&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-5&0&5&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}(\mathrm{N/m})$$

$$\varepsilon\boldsymbol{M}_1=\mathrm{diag}(0,0,0,0,0.5)\,(\mathrm{kg})$$

情况 3

$$\varepsilon\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{0},\varepsilon\boldsymbol{M}_1=\mathrm{diag}(0,0,0,0,2.0,0)\,(\mathrm{kg})$$

非摄动特征解只有单对密集特征值

$$\boldsymbol{\Lambda}_0=\mathrm{diag}(249.966642,250.000000)$$

$$\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.00000&0.00000&-0.00012&-0.091283&-0.091283&0.183560\\0.00000&0.00000&0.00000&-0.158114&-0.158114&0.00000\end{bmatrix}$$

其他非摄动特征解为

$$\boldsymbol{\Lambda}_A=\mathrm{diag}(0.594885,2.478725,10.234656,552.175102)$$

$$\boldsymbol{U}_A=\begin{bmatrix}-0.058595&-0.027542&0.028427&-0.000001\\0.032047&-0.027659&0.039259&0.000127\\-0.006732&0.074593&0.058387&-0.104793\\-0.007020&0.075340&0.058527&0.086699\\-0.007020&0.075340&0.058527&0.086699\\-0.007020&0.075340&0.058527&0.086667\end{bmatrix}$$

对于上述三种情况下与单对密集特征值相关联的摄动特征解见表 8-6。这些结果表明，稀疏特征值的摄动分析不仅不精确，而且当把它应用于密集特征值时是有误导性的，另外，该方法得出的摄动特征解与精确解有较好的吻合。

例如，在情况 3 中，该方法所带来的特征值误差降低到 1.047950 和 0.000000，而由稀疏特征值摄动法所带来的误差为 4.174100 和 3.025595。由稀疏特征值扰动法所获得的特征矢量不仅是不精确的，还有误导性，而由本方法所获得的结果则与精确特征矢量吻合得很好。

表 8-6　密集特征值的特征解比较

特征解 / 比较	精确解		稀疏特征值摄动法		密集特征值摄动法	
	特征值	特征矢量	特征值	特征矢量	特征值	特征矢量
情形一	249.973872	250.159351	250.008324	250.125000	249.973872	250.159451
	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	0.000018	−0.000066	−0.000043	0.000079	0.000011	0.000005
	0.150492	0.103411	−0.433574	0.039471	0.150501	−0.103354
	0.014254	−0.181965	0.251058	0.355699	0.014251	0.182015
	−0.164753	0.078701	0.182585	−0.395285	−0.164745	−0.078658
情形二	243.878599	247.932109	244.759777	246.875000	243.725997	247.908461
	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	−0.000015	0.001506	−0.000772	−0.001976	0.000011	0.000006
	0.000622	0.182090	8.467433	−5.098718	0.001103	0.183060
	−0.155859	−0.091163	−8.648272	−4.784467	−0.157555	−0.092069
	0.156472	−0.090082	0.180521	9.882118	0.158052	−0.090988
情形三	234.474405	249.975015	245.800915	237.500000	233.326455	249.975015
	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	0.000016	0.000000	−0.000008	0.000021	0.000000	−0.000000
	−0.005558	−0.000015	0.003030	−0.007905	0.000006	0.000010
	−0.089507	−0.158189	34.141638	−19.920531	−0.091153	0.158189
	0.175420	0.000158	−34.321586	−19.612210	0.182572	−0.000158
	−0.089778	0.158022	0.181586	39.528471	−0.091415	−0.158025

8.8.3　结语

本节讲述了密集频率的振动模态摄动分析。这可以当做对摄动分析的一种普通处理方法，因为稀疏特征值和重特征值两者的摄动分析都包括到该方法中了。由该方法获得的结果可以供人们分析系统参数的改变对于系统动力特性的影响，这对实际结构的设计非常重要。

8.9 复模态的矩阵摄动理论

在8.2节~8.8节中，介绍了实对称质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的实模态矩阵摄动。然而，在许多工程问题中，比如非比例减振器（见第1章）、非保守力作用下的动力系统，气动弹性振颤以及结构振动控制系统，这些系统矩阵是非对称的，因此不能对角化。在这种情况下，实模态的矩阵摄动就不适用了，我们必须使用复模态的矩阵摄动（Murthy 和 Haftka，1988；Chen，1993；Liu，1999；Adhikari 和 Friswell，2001）。下面我们假设这个系统没有缺陷，即系统有完全跨越特征空间的特征矢量。本节的讨论仅限于无缺陷系统。

8.9.1 基本方程

具有 n 个自由度的线性系统的振动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q}(t) \tag{8-121}$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 被假设为实数、非对称矩阵。系统的自由振动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{8-122}$$

相应的右特征值问题为

$$(\boldsymbol{M}s^2+\boldsymbol{C}s+\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{8-123}$$

其伴随特征值问题为

$$(\boldsymbol{M}s^2+\boldsymbol{C}s+\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}s^2+\boldsymbol{C}s+\boldsymbol{K})=\boldsymbol{0} \tag{8-124}$$

在文献中一般将 $\boldsymbol{y}$ 称为左特征矢量，而 $\boldsymbol{x}$ 为原始系统中的列矢量，称为右特征矢量。

引入状态矢量

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}s\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \tag{8-125}$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 为状态转换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{Bmatrix}s\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I}\end{Bmatrix} \tag{8-126}$$

相似地，我们引入状态矢量

$$\boldsymbol{v}=\begin{Bmatrix}s\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y} \tag{8-127}$$

因此，方程（8-123）和方程（8-124）变为

$$(\boldsymbol{A}s+\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{8-128}$$

$$(\boldsymbol{A}s+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{8-129}$$

或者

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}s+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

显然，伴随特征值问题的特征值［方程（8-129）］和原始特征值问题的特征值［方程（8-128）］是等价的。特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$$

这个特征行列式为 s 的一个 $2n$ 阶多项式，并且 $2n$ 个特征值 s_i 可以在复数域中找到。对应 s_i 的左右模态矢量$\boldsymbol{v}_i$和 $\boldsymbol{u}_i$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=s_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i \tag{8-130}$$

并且

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i=s_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i \tag{8-131}$$

正交条件为

$$\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{0} \tag{8-132}$$

$$\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{0} \tag{8-133}$$

归一化条件为

$$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i=1 \tag{8-134}$$

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i=1$$

因此，正交条件可以写作

$$\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i=\delta_{ij} \tag{8-135}$$

$$\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i=s_i\delta_{ij}$$

8.9.2 稀疏模态的矩阵摄动法

如果结构参数发生微小改变，那么系统的质量、阻尼或者刚度矩阵也会发生相应的改变

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{M}_0+\varepsilon\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{C}&=\boldsymbol{C}_0+\varepsilon\boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{K}&=\boldsymbol{K}_0+\varepsilon\boldsymbol{K}_1\end{aligned} \tag{8-136}$$

此外

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\varepsilon\boldsymbol{A}_1 \tag{8-137}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\varepsilon\boldsymbol{B}_1 \tag{8-138}$$

式中，ε 为一个小参数。

下面，我们首先考虑原始系统稀疏特征值 S_{0i}的情况。根据矩阵摄动理论，特征

值和特征矢量可描述为 ε 的幂级数形式

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_0+\varepsilon S_1+\varepsilon^2\boldsymbol{S}_2+\cdots \tag{8-139}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0+\varepsilon\boldsymbol{U}_1+\varepsilon^2\boldsymbol{U}_2+\cdots \tag{8-140}$$

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0+\varepsilon\boldsymbol{V}_1+\varepsilon^2\boldsymbol{V}_2+\cdots \tag{8-141}$$

式中，$\boldsymbol{S}_0$、$\boldsymbol{U}_0$ 和 $\boldsymbol{V}_0$ 为原始系统的特征解；$\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_1$ 为特征解的一阶摄动；$\boldsymbol{S}_2$、$\boldsymbol{U}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 为二阶摄动。

$\boldsymbol{U}_1$ 可写成原始系统的右特征矢量的线性组合

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{C}^1 \tag{8-142}$$

其中 $\boldsymbol{C}^1$ 为待定矩阵：

$$C_{ij}^1=\frac{1}{S_{0j}-S_{0i}}P_{ij}^1 \qquad (j\neq i,i,j=1,2,\cdots) \tag{8-143}$$

此外

$$\boldsymbol{S}_1=\mathrm{diag}(P_{11}^1,P_{22}^1,\cdots) \tag{8-144}$$

其中 P_{ij}^1为矩阵 $\boldsymbol{P}^1$ 的元素

$$\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{S}_0) \tag{8-145}$$

$\boldsymbol{V}_1$ 可以写成 $\boldsymbol{V}_0$ 的展开

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{D}^1 \tag{8-146}$$

其中 $\boldsymbol{D}^1$ 为待定系数矩阵，为

$$D_{ij}^1=\frac{1}{S_{0j}-S_{0i}}R_{ij}^1 \qquad (j\neq i,i,j=1,2,\cdots) \tag{8-147}$$

且 R_{ij}^1为矩阵 $\boldsymbol{R}^1$ 的非对角元素，为

$$\boldsymbol{R}^1=\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_0) \tag{8-148}$$

如果参数的修改相对较大，那么为了获得更高精度的解，则必须使用二阶摄动。根据展开定理，特征矢量 $\boldsymbol{U}_2$ 的二阶摄动可以写成

$$\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{C}^2 \tag{8-149}$$

以相同的方式，$\boldsymbol{S}_2$ 和元素 C_{ij}^2可由下式得到

$$\boldsymbol{S}_2=\mathrm{diag}(P_{11}^2,P_{22}^2,\cdots) \tag{8-150}$$

$$C_{ij}^2=\frac{1}{S_{0j}-S_{0i}}P_{ij}^2 \qquad (j\neq i,i,j=1,2,\cdots) \tag{8-151}$$

其中 P_{ij}^2为矩阵 $\boldsymbol{P}^2$ 的非对角元素，

$$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}_1 \tag{8-152}$$

$\boldsymbol{V}_2$ 可以写作

$$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{D}^2 \tag{8-153}$$

其中 $\boldsymbol{D}^2$ 为待定系数矩阵，由下式给出

$$D_{ij}^2=\frac{1}{S_{0j}-S_{0i}}R_{ij}^2 \qquad (j\neq i,i,j=1,2,\cdots) \tag{8-154}$$

R_{ij}^2为矩阵 $\boldsymbol{R}^2$ 的非对角元素，

$$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{U}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1) \tag{8-155}$$

如果 $j=i$，则系数 C_{ii}^1、D_{ii}^2、C_{ii}^1和 D_{ii}^2可由下式得到

$$C_{ii}^1 = \frac{-1}{\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i}}\left(\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_{0i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} C_{ij}\boldsymbol{u}_{0j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i}\right) \tag{8-156}$$

$$D_{ii}^1 = Q_{ii}^1 - C_{ii}^1 \tag{8-157}$$

其中 Q_{ii}^1为矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 的对角元素，

$$\boldsymbol{Q}_1 = -\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_0 \tag{8-158}$$

$$C_{ii}^1 = \frac{-\boldsymbol{u}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_{1i} + \boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_{0i} + u_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_{0i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} C_{ij}\boldsymbol{u}_{0j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i}}{\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i}} \tag{8-159}$$

$$D_{ii}^2 = Q_{ii}^2 - C_{ii}^2 \tag{8-160}$$

且 Q_{ii}^2为矩阵 $\boldsymbol{Q}^2$ 的对角元素，

$$\boldsymbol{Q}^2 = -\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_0 \tag{8-161}$$

8.9.3 特征矢量偏导数的高精度模态叠加

对于大型尺寸结构，只有前 L 阶低频模态的一小部分被提取，且为了减少计算成本，较高阶的模态被截断。模态叠加法不仅没有给出精确解，而且当考虑模态截断的时候会产生误导性。在本节，对于非对称矩阵的复模态的偏导数问题，我们给出高精度的模态叠加法。

8.9.3.1 改善的模态叠加法

下面介绍通过模态截断来减少计算误差的改进模态叠加法（IMS）（Lim 等，1989）。模态的偏导数可以写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{b}} = \bar{\alpha}_{ii}\boldsymbol{u}_i + \bar{z}_i \tag{8-162}$$

$$\bar{z}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{L} \frac{\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i}{S_i - S_j}\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}_i + \sum_{j=1}^{L} \frac{\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i}{S_j}\boldsymbol{u}_j \tag{8-163}$$

$$\boldsymbol{F}_i = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{b}} - \frac{\partial S_i}{\partial \boldsymbol{b}}\boldsymbol{B} - S_i\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{u}_i \tag{8-164}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}_i$ 为截断的更高模态对模态偏导数的贡献，其表达式为

$$\bar{\alpha}_{ii} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{b}}\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\bar{z}_i + \bar{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i\right) \tag{8-165}$$

8.9.3.2 高精度模态叠加

假设根据特征值模的大小来对其进行排序，并且满足如下条件：

$$|S_i| < |S_j| \quad (j > L) \tag{8-166}$$

模态的偏导数可以表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{b}} = \bar{\alpha}_{ii}\boldsymbol{u}_i + \bar{z}_i = \bar{\alpha}_{ii}\boldsymbol{u}_i + z_{iL} + z_{iH} \tag{8-167}$$

其中

$$\bar{z}_i = z_{iL} + z_{iH} \tag{8-168}$$

$$z_{iL} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{L} \frac{v_j^{\mathrm{T}} F_i}{S_i - S_j} \boldsymbol{u}_j \tag{8-169}$$

$$z_{iH} = -\sum_{j=1}^{K} [\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{j-1} - \boldsymbol{U}_L(\boldsymbol{S}_L^{-1})^j \boldsymbol{V}_L^{\mathrm{T}}] F_i \tag{8-170}$$

此外，$\bar{\alpha}_{ii}$可由方程（8-165）得到，K为级数的项数［方程（8-170）］。

可见当 $K=1$ 时，方程（8-167）等价于方程（8-162）。

8.9.3.3 数值计算案例

案例 8-6

考虑图 8-6 所示的一个 20 个自由度的系统，参数如下

$$m_1 = m_2 = \cdots m_{19} = 2m, m_{20} = m = 1.0\mathrm{kg}$$

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{21} = 1.0 \times 10^3 \mathrm{N/m}$$

$$c_1 = c_2 = \cdots c_7 = 3c, c_8 = c_9 = \cdots = c_{14} = 2c$$

$$c_{15} = c_{16} = \cdots = c_{21} = c = 0.1 = 0.1\mathrm{N \cdot s/m}$$

为了进行比较，表 8-7 中列出了截断模态叠加（TMS）、IMS 以及高精度叠加（HAMS）这三种方法在计算特征矢量偏导数产生的误差。

为了简化起见，特征矢量偏导数的误差由下式来表示

$$\left| \left(\frac{\partial u_i}{\partial b_j} \right)_{\varepsilon} - \left(\frac{\partial u_i}{\partial b_j} \right)_{\alpha} \right|$$

式中，$\left(\frac{\partial u_i}{\partial b_j} \right)_{\varepsilon}$ 表示精确解；$\left(\frac{\partial u_i}{\partial b_j} \right)_{\alpha}$ 表示由上述三种方法所求得的解。在特征矢量偏导数计算的过程中，参数 m_1 和 m_{10}为设计变量 b_1 的函数，参数 c_8 和 c_{15}为设计变量 b_2 的函数，K 表示级数的项数［方程（8-170）］。

表 8-7 中的结果证实了高精度模态叠加法比 TMS 和 IMS 有更高的解的精度，比如，如果只用前四阶模态，那么使用截断模态叠加和 IMS 方法产生的$\partial u_2/\partial b_1$误差为 101.00% 和 50.94%，而使用高精度模态叠加方法产生的$\partial u_2/\partial b_1$误差降至 27.27%、7.64% 和 1.51%。如果使用前 12 阶模态，那么截断模态叠加方法产生的$\frac{\partial u_2}{\partial b_1}$的误差为 16.76%；采用了前四阶模态的高精度模态叠加方法，级数项 $K=2$，3，4［方程

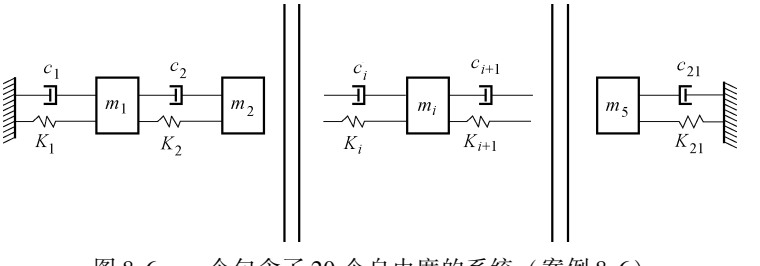


图 8-6 一个包含了 20 个自由度的系统（案例 8-6）

(8-170)] 所产生的误差分别降至 0.01%、0.00% 和 0.00%。

表 8-7 特征矢量导数的误差 (单位：%)

特征矢量导数 \ 类别	采用的模态数目	TMS	IMS	HAMS		
				2	3	4
$\partial u_1/\partial b_1$	4	60.18	13.14	1.41	0.01	0.00
	8	26.66	1.01	0.03	0.00	0.00
	12	16.76	0.66	0.01	0.00	0.00
$\partial u_1/\partial b_1$	4	101.00	50.94	27.72	7.64	1.51
	8	48.65	10.32	1.29	0.38	0.03
	12	23.98	3.37	0.35	0.06	0.01
$\partial u_1/\partial b_1$	4	69.74	14.82	3.07	0.02	0.00
	8	26.60	1.39	0.23	0.00	0.00
	12	25.92	0.85	0.12	0.00	0.00
$\partial u_1/\partial b_1$	4	90.63	43.79	21.33	9.01	2.00
	8	44.86	6.65	1.56	0.35	0.04
	12	23.76	3.23	0.37	0.11	0.02
$\partial u_1/\partial b_1$	4	72.52	15.07	8.46	1.11	0.03
	8	37.95	1.22	0.57	0.03	0.00
	12	28.54	0.52	0.03	0.00	0.00
$\partial u_1/\partial b_1$	4	63.33	9.19	1.92	0.42	0.00
	8	27.56	0.75	0.49	0.21	0.00
	12	25.00	0.47	0.15	0.01	0.00

8.9.4 非亏损系统重特征值的矩阵摄动

8.9.4.1 基本方程

考虑一个 m 个重特征值的系统，$S_0 = S_1 = \cdots = S_{0m}$，相应的左右模态矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{0m} = [\boldsymbol{u}_{01}, \boldsymbol{u}_{02}, \cdots, \boldsymbol{u}_{0m}] \tag{8-171}$$

$$\boldsymbol{V}_{0m} = [\boldsymbol{v}_{01}, \boldsymbol{v}_{02}, \cdots, \boldsymbol{v}_{0m}] \tag{8-172}$$

剩下的特征值是稀疏的。

重特征值满足下列方程：

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{U}_{0m} = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{S}_0 \tag{8-173}$$

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m} = \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m}\boldsymbol{S}_0 \tag{8-174}$$

$$\boldsymbol{V}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_{0m} = \boldsymbol{I} \tag{8-175}$$

$$\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_{0i} = \boldsymbol{1} \tag{8-176}$$

如果参数发生微小改变，我们有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \varepsilon\boldsymbol{A}_1 \tag{8-177}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \varepsilon\boldsymbol{B}_1 \tag{8-178}$$

摄动系统的特征值和特征矢量可以被描述为 ε 的幂级数的展开：

$$\boldsymbol{S}_m = \boldsymbol{S}_0 + \varepsilon\boldsymbol{S}_1 + \varepsilon^2\boldsymbol{S}_2 + \cdots \tag{8-179}$$

$$\boldsymbol{U}_m = \boldsymbol{U}_0 + \varepsilon\boldsymbol{U}_1 + \varepsilon^2\boldsymbol{U}_2 + \cdots \tag{8-180}$$

$$\boldsymbol{V}_m = \boldsymbol{V}_0 + \varepsilon \boldsymbol{V}_1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{V}_2 + \cdots \tag{8-181}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_m \boldsymbol{\alpha} \tag{8-182}$$

$$\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{V}_m \boldsymbol{\beta} \tag{8-183}$$

式中，$\alpha_{m\times m}$和$\beta_{m\times m}$为待定的系数矩阵。

8.9.4.2 特征值的一阶摄动

重特征值的一阶摄动对角矩阵 $\boldsymbol{S}_1$ 和系数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$，可以由下列方程得到：

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{S}_1 \tag{8-184}$$

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}_1 \tag{8-185}$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_{0m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{U}_{0m} \tag{8-186}$$

归一化条件为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{I} \tag{8-187}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{I} \tag{8-188}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{W}$ 没有重特征值，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 可以唯一确定。如果 $\boldsymbol{W}$ 有重特征值，则我们必须考虑更高阶的摄动方程来确定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$。在此，我们假设 S_{1i}为稀疏特征值，即 $S_{1i} \neq S_{1j}$ $(i \neq j)$，其中 S_{1i}为矩阵 $\boldsymbol{S}_1$ 的对角元素。

8.9.4.3 特征矢量的一阶摄动

根据模态展开定理，左右特征矢量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_1$ 的一阶摄动可以表示为

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}_m^1 + \boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A^1 \tag{8-189}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_{0m}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{D}_m^1 + \boldsymbol{V}_A\boldsymbol{D}_A^1 \tag{8-190}$$

式中，$\boldsymbol{C}_m^1$ 和 $\boldsymbol{D}_m^1$ 为待定系数矩阵；$\boldsymbol{V}_A$ 和 $\boldsymbol{U}_A$ 为稀疏特征值相应的左右模态矩阵：

$$\boldsymbol{C}_A^1 = (\boldsymbol{S}_A - \boldsymbol{S}_0)^{-1}\boldsymbol{V}_A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-191}$$

$$\boldsymbol{D}_A^1 = (\boldsymbol{S}_A - \boldsymbol{S}_0)^{-1}\boldsymbol{U}_A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{V}_{0m}\boldsymbol{\beta} \tag{8-192}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}_m^1$ 中的元素可由下式计算：

$$C_{mij}^1 = \frac{R_{ij}^1}{\lambda_{1j} - \lambda_{1i}} \qquad (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, m) \tag{8-193}$$

其中 R_{ij}^1为矩阵 $\boldsymbol{R}^1$ 的非对角元素：

$$\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A^1\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A^1\boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}_A\boldsymbol{C}_A^1 \tag{8-194}$$

$$C_{mii}^1 = \frac{-1}{\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i}}\left(\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} c_{mij}^1\boldsymbol{u}_{0j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i} + \sum_{j=m+1}^{m} c_{Aij}^1\boldsymbol{u}_{0j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}_{0i}\right) \tag{8-195}$$

$$D_{mij}^1 = \frac{R_{ij}^2}{S_{1j} - S_{1i}} \qquad (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, m) \tag{8-196}$$

其中 R_{ij}^2为矩阵 $\boldsymbol{R}^2$ 的非对角元素：

$$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{D}_A^1\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{D}_A^1\boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_A\boldsymbol{D}_A^1 \tag{8-197}$$

$$D_{mii}^1 = Q_{mii}^1 - C_{mii}^1 \tag{8-198}$$

其中 Q_{ij}^2为矩阵 $\boldsymbol{Q}^2$ 的对角元素：

$$\boldsymbol{Q}^2 = -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{0m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_{0m}\boldsymbol{\alpha} \tag{8-199}$$

8.9.5 非对称矩阵密集特征值的矩阵摄动

假设 $\boldsymbol{S}_0$ 为具有 m 个密集特征值的对角矩阵；$\boldsymbol{U}_{0n\times m}$和 $\boldsymbol{V}_{0n\times m}$为相应的右、左特征矢量矩阵；$\boldsymbol{S}_A$ 为剩余的稀疏特征值对角矩阵；$\boldsymbol{U}_{An\times(n-m)}$和 $\boldsymbol{V}_{An\times(n-m)}$为相应的右、左特征矢量矩阵。他们满足下列等式：

$$\boldsymbol{A}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A] = \boldsymbol{B}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_A) \tag{8-200}$$

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{V}_0 \vdots \boldsymbol{V}_A] = \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{V}_0 \vdots \boldsymbol{V}_A]\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_A) \tag{8-201}$$

$$[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A] = \boldsymbol{I} \tag{8-202}$$

$$\boldsymbol{u}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_{0i} = 1 \tag{8-203}$$

构建矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}_0$ 为

$$\boldsymbol{A}_0 = \overline{\boldsymbol{A}}_0 + \varepsilon\overline{\boldsymbol{A}}_0 \tag{8-204}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{A}}_0 = \boldsymbol{B}_0[\boldsymbol{U}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]\,\mathrm{diag}(S_0\boldsymbol{I}, \boldsymbol{S}_A)[\boldsymbol{V}_0 \vdots \boldsymbol{U}_A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0 \tag{8-205}$$

$$\varepsilon\overline{\boldsymbol{A}}_0 = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_0(\varepsilon[\delta\boldsymbol{S}_0])\boldsymbol{V}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0 \tag{8-206}$$

$$\varepsilon[\delta\boldsymbol{S}_0] = \boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{I} \tag{8-207}$$

$$S_0 = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{0i}\right) \tag{8-208}$$

在此，S_{0i}为密集特征值；S_0 为 S_{0i}（$i=1$，2，…，m）的平均值。

由下面的方程可见：

$$\overline{\boldsymbol{A}}_0\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}_0S_0\boldsymbol{I} \tag{8-209}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_0S_0\boldsymbol{I} \tag{8-210}$$

这些方程表明，对于由方程（8-209）和方程（8-210）定义的特征值问题，S_0 为具有 m 个重根的重特征值。$\boldsymbol{U}_0$ 和 $\boldsymbol{V}_0$ 为分别为相应的右左模态矩阵。

如果对矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 施加小的修正 $\varepsilon\boldsymbol{A}_1$ 和 $\varepsilon\boldsymbol{B}_1$，则摄动系统的特征值问题变为

$$(\overline{\boldsymbol{A}}_0 + \varepsilon\overline{\boldsymbol{A}}_1)\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{B}_0 + \varepsilon\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{U}\boldsymbol{S} \tag{8-211}$$

$$(\overline{\boldsymbol{A}}_0 + \varepsilon\overline{\boldsymbol{A}}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{B}_0 + \varepsilon\boldsymbol{B}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{S} \tag{8-212}$$

其中

$$\varepsilon\overline{\boldsymbol{A}}_1 = \varepsilon\overline{\boldsymbol{A}}_0 + \varepsilon\boldsymbol{A}_1 \tag{8-213}$$

方程（8-211）和方程（8-212）的特征解可由下式求得

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\alpha} + \varepsilon\boldsymbol{U}_1 \tag{8-214}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0\alpha + \varepsilon\boldsymbol{V}_1 \tag{8-215}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0 + \varepsilon\boldsymbol{S}_1 \tag{8-216}$$

应当注意的是方程（8-211）和方程（8-212）为重特征值的特征值问题，即密集特征值的摄动分析已经转变为重特征值的矩阵分析。因此，8.9.4 节给出的方法就可以用于求解方程（8-214）~方程（8-216）中的 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_1$ 了。

参 考 文 献

Adelmen, H.M. and Haftka, R.T., Sensitivity analysis of discrete structural systems, *AIAA J.*, 24, 823, 1986.

Adhikari, S. and Friswell, M.I., Eigenderivative analysis of asymmetric non-conservative systems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 39, 1813, 2001.

Chen, S.H. 1993. *Matrix Perturbation Theory in Structural Dynamics*, International Academic Publishers, Beijing.

Chen, S.H. and Liu, Z.S., High accuracy modal superposition for eigenvector derivatives, *Chin. J. Mech.*, 25, 432, 1993a.

Chen, S.H. and Liu, Z.S., Perturbation analysis of vibration modes with close frequencies, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 9, 427, 1993b.

Chen, S.H. and Pan, H.H., Design sensitivity analysis of vibration modes by finite element perturbation, *Proc. of the Fourth IMAC*, 38, 1986.

Chen, J.C. and Wada, B.K., Matrix perturbation for structural dynamics, *AIAA J.*, 15, 1095, 1979.

Dailey, R.L., Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues, *AIAA J.*, 27, 486, 1989.

Fox, R.L. and Kapoor, M.P., Rates of change of eigenvalues and eigenvectors, *AIAA J.*, 12, 2426, 1968.

Haug, E.J., Komkov, V., and Choi, K.K. 1985. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Orlando, FL.

Haug, E.J. and Rousselet, B., Design sensitivity analysis in structural dynamics, eigenvalue variations, *J. Struct. Mech.*, 8, 161, 1980.

Hu, H. 1987. *Natural Vibration Theory for Multi-DoF Structures*, Science Press, Beijing (in Chinese).

Lim, K.B., Juang, J.N., and Ghaemmaghani, P., Eigenvector derivatives of repeated eigenvalues using singular value decomposition, *J. Guidance Control Dyn.*, 12, 282, 1989.

Liu, J.K., Perturbation technique for non-self-adjoint systems with repeated eigenvalues, *AIAA J.*, 37, 222, 1999.

Liu, X.L., Derivation of formulas for perturbation analysis with modes of close eigenvalues, *Struct. Eng. Mech.*, 10, 427, 2000.

Liu, Z.S. and Chen, S.H., Contribution of the truncated modes to eigenvector derivatives, *AIAA J.*, 32, 1551, 1994a.

Liu, Z.S. and Chen, S.H., An accurate method for computing eigenvector derivatives for free–free structures, *Int. J. Comput. Struct.*, 52, 1135, 1994b.

Mills-Curran, W.C., Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues, *AIAA J.*, 26, 867, 1988.

Murthy, D.V. and Haftka, R.T., Derivatives of eigenvalues and eigenvectors of a general complex matrix, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 293, 1988.

Ojalvo, E.U., Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies, *AIAA J.*, 26, 361, 1988.

Rogers, L.C., Derivatives of eigenvalues and eigenvectors, *AIAA J.*, 8, 943, 1977.

Shaw, J. and Jayasuriya, S., Modal sensitivities for repeated eigenvalues and eigenvalues derivatives, *AIAA J.*, 30, 850, 1992.

Wang, B.P., Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics, *AIAA J.*, 29, 1018, 1991.

9 旋转机械振动

摘要

本章主要讲述旋转机械中的振动。尽管完全消除这种振动是不切实际的，但为了让机器安全、可靠地工作，把这种振动控制在可接受的范围内是十分必要的。在旋转机械中有两种主要的振动现象，分别是强迫振动和自激振动。监测、识别和控制旋转振动需要对转子动力学有正确的理解。通过分析手段预测旋转机械的振动行为在工业中已经变得非常平常。随着计算机技术的发展，许多基于计算机的软件已发展到能精确预测旋转机械的行为。由于建模技术在过去一个世纪的大踏步发展，现在我们已经可以精确地再现很多部件，如轴、制动盘、叶轮、轴承、密封件、转子减震器和转子-定子之间的相互作用。这都增强了分析和计算过程的精度和可靠性。本章介绍了在旋转机械中有用的分析、测量、诊断和振动控制的技术。

9.1 概述

振动是所有旋转机械的固有特点。残余质量不平衡以及静止和旋转零件之间的相互作用力都是引起这些振动的原因，这些力在实际中是不能消除的。挑战就在于识别振源、并把它控制在合理的范围内。因为具有经济性的优势，所以工业已朝着高速、高功率、更轻以及更紧凑的机械发展。这导致了机器在其一阶临界转速以上运行，这在过去是闻所未闻的。新的运行参数要求振动技术的相应进步，否则机器安全可靠地运行是不可能的。工业界已经意识到振动是一种必然现象，可以用它来评价旋转机器的性能、耐久性和可靠性。

不同层次的工程师也在以不同的方式研究旋转机械中的振动问题。机械设计师必须辨认出潜在的振源，并把它们控制在可接受的范围内。在过去的几十年中，由于计算机技术和建模技术的进步，人们已经对包括潜在振源识别在内的旋转机械动力学有了更好认识。这使得设计者能够更加准确地预测机械的转子动力学行为，允许机器能够以更高的速度、更高的能量安全可靠地运行。

从不同的角度处理振动问题，维护工程师为了实现定时修理和维护，使用振动标准和规范来监测设备的工作状态。可靠的振动监测和诊断技术已经使得工业进入预测性维护而非预防性维护，这大大减少了因检修关键旋转机械而造成的停工期。机器部件的过早更换现在已经最小化了，由此产生的财务和经济效益为旋转机械振动的研究提供了额外的激励。

振动专家或疑难解答程序必须应用他的转子动力学的知识和诊断能力来解决旋转机械中的振动问题。在大多数情况下，正确理解带周边系统的旋转机械内部动力学对于解决振动问题是非常重要的。

从安全和可靠性立场来看，公众必须关注旋转机械的振动。大家的关注是通过振动标准和规范来表示出来的。众多的国家级和国际级的机构制定了针对旋转机械的工作步骤。有一些标准是工业规范，还有一些标准是设备规范，与此同时，它们中的一些标准尝试覆盖宽泛的旋转机械。大多数标准的目标就是要为使用或操作旋转机械的那些人群，提高旋转机械的质量，以及安全性、耐久性和可靠性。

旋转机械振动研究历史如下所述。

尽管在过去的几个世纪中，各种类型的旋转机械一直在使用，但是对于转子动力行为的研究直到1869年（Rankine，1896）才开始。从那时起，对于旋转机械振动特性的研究和掌握在稳步进步中。那些对这些进步作出贡献的主要历史事件见表9-1。

① 所有的旋转机械都有一定程度的振动。对于公众安全和机械可靠性来说，振动必须控制在可接受的范围内。

② 旋转机械朝着更复杂、更高速度和更紧凑方向发展，这主要归功于通过对转子动力学更好的理解来实现振动技术的快速发展。

③ 振动技术融合到旋转机械的设计、维护、故障排除中。

④ 从安全和可靠的角度上来说，公众安全是由振动标准和规范的贯彻及实施来保障的。

⑤ 对转子动力学研究的第一次公开报道是在1869年。

表9-1 引领旋转机械振动发展的主要贡献按时间顺序列于下表

年份	贡献者	描　　述
1869	Rankin，W. J. M.	他考察了无摩擦、均匀轴的平衡问题，该轴在初始位置受到扰动。记录试验结果的文章被认为是第一篇以转子动力学为主题的文章。他提出在第一临界速度下的运动是稳定的，在临界速度处运动是中性或惰性的，在临界速度以上的运动是不稳定的 他还对两端有轴承自由支撑轴的临界转速的数学公式进行了研究，并研究了一端固定的悬垂轴的临界转速公式
1883	Greenhill，A. G.	研究了轴向推力和扭矩对长轴稳定性的影响，并认为这两点都不重要。他还得到了两端有轴承支撑、每端有一方向固定的空载轴临界转速公式
Circa 1890	Reynolds，O.	他拓展了Rankin和Greenhill提出的关于用带轮加载荷轴的有关理论
1893	Dunkerley，S.	他提出了用轴直径、带轮重量以及轴受支撑方式等等来表达的临界速度公式，并用实验证实了结果。 他推导出任何程度的不平衡都会引起轴在临界速度下的大幅振动，并且可以在一阶临界转速之上工作。识别了临界转速对旋转带轮惯性矩的依赖性
1894	Rayleigh，J. W. S.	他提出了一种采用能量法来计算具有分布质量和弹性的连续梁固有频率的近似方法

（续）

年份	贡献者	描　述
1895	Dalaval，G.	他第一次用实验演示了燃气轮机能够在临界速度之上工作
1916	Timoshenko，T.	他揭示了横向剪切变形对于连续梁固有频率的影响，并将原理应用到旋转轴上
1919	Jeffcott，H. H.	他检验了不平衡对涡动幅值的影响和传递给轴承的力，研究了由轴承在两端自由支撑的轻质、均匀轴。该轴在跨度中间带着质量为 m 的薄带轮。假设带轮的惯性矩可以忽略不计。使用这个后面我们会提到这称之为 Jeffcott 的模型，他还提出了一个综合理论来解释转子通过临界速度时的行为。 他介绍和解释了阻尼对涡动幅值的影响、当轴通过临界速度的时候相位角改变 π、同步转子涡动（进动）概念。他还认识到临界速度的两边分别带有 10% 的余量，因而振幅并不太大。他证明从振动的观点设计轴时，使它的临界速度低于工作速度要比临界速度高于工作速度更好。由此，他解释了 De Laval 燃气轮机的特性和工作速度大于临界速度的经济优势
1921	Southwell，R. V. 和 Gough，B. S.	他发现扭矩和恒定幅值的轴向推力会降低旋转轴的临界速度，驳斥了 Greenhill 的早期（1883）结论
	Holzer，H.	他提出了一种计算多圆盘转子系统扭转临界速度和振型的数值方法
1924	Newkirk，B. L.	他注意到转子在第一临界速度以上运行时可能进入一种高速、剧烈的涡动，并且转子中心会以临界速度向前进动。这与同步涡动过程不同，如果速度加至超过初始转速，则涡动幅度也会继续增加，并最终会导致转子失效。这是人们第一次认识到非同步不稳定运动存在于高速转子中。 基于这个实验，他对非同步涡动做出了如下关键的观察。振幅和涡动进动速度与转子平衡是不相关的。涡动总是发生在速度大于临界转速时，无论转子速度如何，在临界转速处涡动速度保持恒定。即使对于类似结构的机械，涡动阈值速度也可能会变动。涡动只出现在组合式转子上，而不会出现在单片构造转子上。增加基础部分的柔软性、轴承座的错位或不对中，或者增加基础部分阻尼，或者增加轴向推力轴承的载荷，都可以增加涡动的阈值转速
	Kimball，A. T.	他提出了当轴在第一阶临界转速之上运行时，由弯曲引起的内部摩擦或黏性作用可能造成轴的涡动。他推测 Newkirk 观察到的非同步涡动是由于这种现象造成的
	Newkrik，B. L.	基于 Kimball 先生的理论，他推测类似的摩擦力产生在圆盘收缩处和组合式转子轴之间的配合面处，且由他观察到的非同步涡动是由该摩擦力影响造成的。但是，他未能解释他自己的一些实验发现，特别的是，未能解释支撑或基础弹性、阻尼和不对中的影响
1925	Newkrik，B. L.	他经历了另外一种非同步化涡动，这种涡动与前面的相似，但不同点是，这个是由收缩配合圆盘的摩擦效应引起的。它发生在滑动轴承上的轴转速刚刚超过两倍临界转速的时候。他认识到滑动轴承里的润滑油是剧烈振动的一个起因，并把它称之为油膜震荡。涡动的速度与涡动的方向和引起涡动的摩擦力相同，这就是说，第一临界速度在前进方向。他提出的理论可以解释油膜为什么能够产生轴颈的涡动，并解释为什么方向和轴的转速方向相同。然而，这个理论不能解释为什么涡动直到速度到达 2 倍临界速度时才开始。基座弹性对于转子稳定性的影响也困惑着 Nwekrik。对于摩擦引起的涡动这种情况，他通过柔性安装的轴承完全消除了转子不稳定性。当用滑动轴承进行尝试时，涡动振幅却扩大了。轴承的外部阻尼对于涡动振幅有着加强的影响

（续）

年份	贡献者	描　　述
1925	Stodola，A.	基于假设的振型，他提出了振动系统基础频率计算的迭代步骤
1927	Stodola，A.	他对旋转（陀螺）力矩对转子临界速度的影响提供了解释和计算公式，他还介绍了转子在特定情况下同步和非同步反进动的概念
1933	Robertson，D.	为了理解油膜振荡，他研究了理想状态下 360°无限长滑动轴承，并且错误地认为转子在所有速度下而非仅在 2 倍临界速度以上时才会不稳定。
1933	Smith，D. M.	他研究了非对称支撑下的非对称转子的问题，与对称系统的单值相比，他得到了 4 种不同的临界速度值，他还讨论了由于较大圆盘的“陀螺效应”产生的附加临界速度
1944	Myklestad，N.	他提出了用集中参数传递矩阵方法来计算飞机翅膀的固有频率
1945	Prohl，H.	他提出了用集中参数传递矩阵方法来计算弹性转子的临界速度
1953	Proitsky，H.	他使用小位移理论，得到了滑动轴承的径向刚度系数，并分析了在油膜振荡条件下的转子特性。他推断出在两倍临界转速下转子是稳定的，并且揭示增加转子或者轴承的弹性将减小不稳定的阈值速度，他还提出基于轴承和转子刚度的稳定性判据
	Miller，D. F.	他提出了对于在阻尼、弹性端面支撑下梁或者轴，稳定状态下受迫振动问题的解。转子对于不平衡力的响应和阻尼共振频率可以用这种方法计算
1955	Pinkus，O.	他研究了各种滑动轴承中的油膜振荡，并得出了如下主要结论：转子的不平衡对于稳定性有较小的影响。不稳定的阈值出现在大约为两倍的第一临界速度处。在不稳定区域，第一临界速度处涡动频率保持恒定，而不用考虑轴的转速。在转速接近于三倍的第一临界转速时，较重轴的转子抖动将停止，然而轻轴转子不会停止此抖动。重载、高黏度、弹性安装和轴承不对称是有利于稳定的
1958	Lomakin，A.	他介绍了密封的动力特性对临界速度和泵转子稳定性的影响
	Thomas，H.	他提出由于圆周缝隙变化，偏心涡轮转子将产生破坏稳定的力
1966	Gunter，E. J. Jr	他把由转子动力学家和轴承专家研究的涡动不同理论联系起来，简洁地解释了一些相互冲突的实验现象（收集到目前为止）。他强调了考虑转子参数、轴承和基础特性在转子稳定性上的组合作用是非常重要的，并提出对于自激涡动非稳定性的更综合的判据
1969	Black，H. F.	他提出了环形压力密封对泵转子振动的综合分析方法
1970	Ruhl，R.	他提出了弹性转子的有限元模型，这种模型可以用来计算转子临界速度和振型。这种模型没有考虑陀螺效应和轴向载荷
1974	Lund，J.	他提出用传递矩阵方法来计算有阻尼的转子临界转速，同时考虑了交叉耦合项
1976	Nelson，H. and McVaugh，J.	他扩展了转子有限元模型，以便考虑转动惯量、陀螺效应和轴向载荷
1978-1980	Bancket，H. 和 Wachter，J.	他提出了一种计算迷宫气封中流动导致的弹簧常数，并使用旋涡中断来减少由迷宫密封中切向速度引起破坏力
1980	Nelson，H.	他进一步研究了包括剪切变形和轴向力矩影响在内的转子有限元模型
	Brennen，C. 等	他认识到大的出口盖板力的存在影响了泵的转子动力学
1986	Muszynska，A.	他验证了油膜涡动发生在垂直转子的 0.5 倍的运动速度处。随着速度的进一步的增加，当涡动频率接近转子临界转速的时候，油膜振荡将会开始

9.2 振动基础

在旋转机械中出现的振动现象主要可以分为两种：强迫振动和自激非稳定性。需要刺激或者激励源激励并维持转子振动。当激振为强迫现象比如质量不平衡时，那么则在转子中会产生强迫弯曲振动，这类似于简单弹簧-质量系统中的线性强迫振动。另一方面，自激励振动（不稳定）并不需要一个强迫的现象使它开始和保持。下面给出这些现象的描述。

9.2.1 强迫振动

一个旋转力的矢量（不平衡）、一个稳定的有方向的力（重力）或者一个周期力（泵叶轮/扩压器界面作用），将会引起旋转机械的强迫振动。转子的响应依赖于强迫函数的性质以及它和转子特性的相关性。对最普通激励的转子响应考察如下。

9.2.1.1 不平衡响应——同步涡动

作为对旋转机械振动和理解不平衡响应理论的引言，检验 Jeffcott 转子是最合适的，它是一个简单模型，但有很多复杂旋转机械所具有的最基本特性。Jeffcott 转子代表了两端有轴承自由支撑的无质量弹性轴，并且该轴在它跨度的中心带动着一个质量为 m 的转盘，转子的黏性阻尼系数为 c，轴刚度为 k，盘的质心与其几何中心有偏心距 e，如图 9-1 所示。

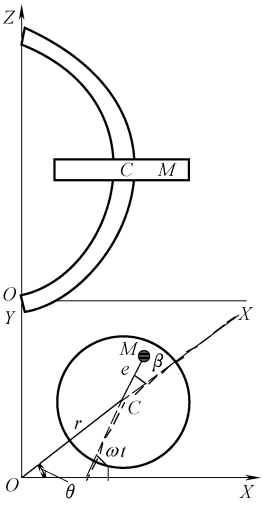


图 9-1 Jeffcott 转子

C—盘的几何中心　β—相位角　M—盘的质心　O—轴承中心　r—转子与坐标原点的偏离　θ—进动角　ω—转子角速度（$\omega=\dot{\theta}+\dot{\beta}$）　e—偏心距

涡动定义为转子几何中心（C）的旋转角速度或者进动角度 θ 对时间的偏导数 $\dot{\theta}$（参见第 7 章）。同步涡动出现在当涡动速率 $\dot{\theta}$ 等于系统总角速度 ω 的时候。

对转子应用牛顿运动定律，得到在极坐标系下的转子运动微分方程为

$$\ddot{r}+\frac{c}{m}\dot{r}+\left(\frac{k}{m}+\dot{\theta}^2\right)r=e\omega^2\cos\beta \tag{9-1}$$

$$r\ddot{\theta}+\left(\frac{c}{m}r+2\dot{r}\right)\dot{\theta}=e\omega^2\sin\beta \tag{9-2}$$

对于稳定状态条件，r、β、ω 和 $\dot{\theta}$ 的值是恒定的。对于同步涡动，方程（9-1）和方程（9-2）可简化为

$$\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)r=e\omega^2\cos\beta \tag{9-3}$$

$$\frac{c}{m}\omega r = e\omega^2 \sin\beta \tag{9-4}$$

根据方程（9-3）和方程（9-4），得到

$$r = \frac{e\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \tag{9-5}$$

$$\beta = \arctan\frac{c\omega}{m\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)} \tag{9-6}$$

$$F = \frac{kr}{2} = \frac{ke\omega^2}{2\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \tag{9-7}$$

使用如下关系：

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$——无阻尼转子固有频率

$c_{cr} = 2\sqrt{km}$——临界阻尼系数

$\zeta = \frac{c}{c_{cr}}$——阻尼比

方程（9-6）和方程（9-7）简化为如下无量纲形式

$$\frac{r}{e} = \frac{2F}{ke} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \tag{9-8}$$

$$\beta = \arctan\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{9-9}$$

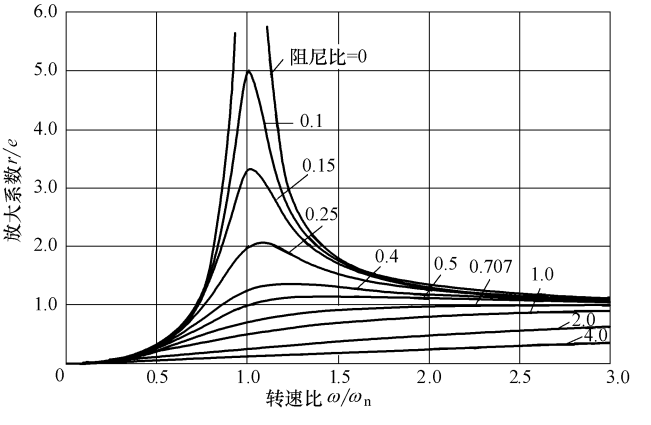


图 9-2　Jeffcott 转子对于质量偏心的响应——放大系数与转速比之间关系曲线

图 9-2 所示为转子关于转速 ω 函数的不平衡响应的曲线。在相位关系的测试上，相位角 β 在低速时接近 0°、在高速时接近 180°，注意这点很重要。在 ω_n 处，$\beta = 90°$。以上现象的图片说明如图 9-3 所示。

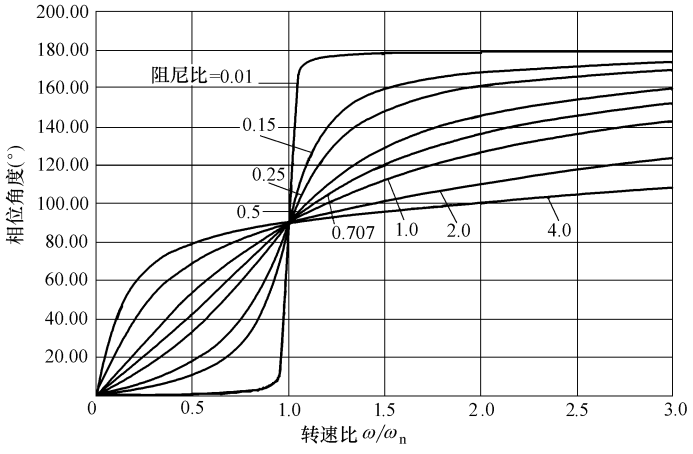


图 9-3　Jeffcott 转子对于不平衡的响应——相位角与转速比之间关系曲线

对于零阻尼情况，当 $\omega=\omega_n$ 时，转子挠度和轴承力是无穷大。对于其他情况来说，转子挠度和轴承力则是有限值，且它们的幅值由阻尼比决定。如果一根轴快速加速通过它的临界转速达到更高的工作转速，那么大的转子挠度就没有足够的时间发生。在高速情况 $\omega\gg\omega_n$，转子挠度的幅值将会减小并接近转子偏心距 e 的值。

通常情况下转子的临界速度 ω_{cr} 为转子挠度幅值或者传到轴承处的力幅值最大时候的速度。

这表明在 $\omega=\omega_{cr}$ 处

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}=0$$

使用方程（9-8），可以得到转子固有频率和它临界速度之间的关系为

$$\omega_{cr}=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \tag{9-10}$$

从方程（9-10）可以明显看出转子的临界速度不是固定值，它与转子阻尼大小有关。当 $\zeta=1/\sqrt{2}$ 时，系统可以称为临界阻尼系统。

转子对于不平衡的响应是可以识别并控制的，关注这点很重要。要减少传至轴承处力的幅值，可以通过以下方法：使机器在临界速度以上运转、减小不平衡、增加黏性阻尼以及避免机器在临界速度附近工作。

9.2.1.2　轴的弯曲

轴弯曲的转子与质量偏心转子的特性相类似（Ehrich，1999）。转子在高速 $\omega\gg\omega_{cr}$ 时，如图 9-4 所示，轴有修正弯曲的趋势。当轴弯曲和质量偏心同时出现时，产生的独特行为方式则取决于弯曲和偏心质量之间的相位角（Childs，1993）。

9.2.1.3　重力临界转速

由于重力作用，同步涡动的一种特殊情况会在一种特殊的水平转子中出现。人们普遍将第二临界速度称为重力临界转速，可能发生在重质、小阻尼转子上。临界转速出现

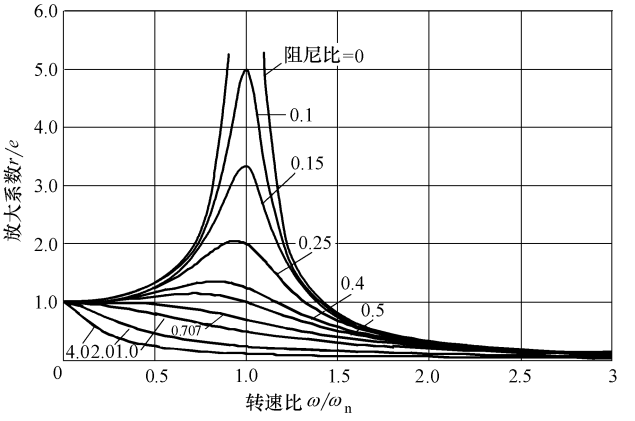


图 9-4 轴弯曲的 Jeffcott 转子响应——放大系数与转速比之间关系曲线

在接近转子固有频率的一半，并且在临界转速处，挠度的幅值是在一定范围内的，数值接近两倍转子静挠度。

9.2.1.4 转子惯性和陀螺作用的影响

在 Jeffcott 模型中，转子惯性的影响是被忽略的。然而实际上，转子惯性和陀螺作用对固有频率、临界速度以及包括反向涡动在内的转子不平衡响应都有影响。在转子固有频率个案中（零速），径向惯性或转动惯量提供了与转动自由度有关的额外固有频率。同时，惯性的影响降低了第一阶固有频率（Childs，1993）。在转动情况下，惯性的影响产生了正反两个涡动临界速度（Childs，1993）。正向涡动临界速度趋向于高于转子固有频率（硬化效应），而反向涡动临界速度低于转子的固有频率。在正向临界速度处，由于不平衡出现，会出现大幅度涡动运动，而反向临界速度对于转子不平衡是不敏感的。

9.2.1.5 转子座套对于环形间隙的影响

如果由于不平衡引起的转子挠度超过了均匀的环形间隙，那么在转子和定子之间就会发生连续接触，并导致转子和定子间的耦合运动（Childs，1993）。对于较低的接触摩擦力，不平衡力驱动的同步正向涡动将会出现。如果接触摩擦力大到足够可以阻止转子和定子间的滑动，那么反向涡动就会发生。对于特定运转速度范围内的同步前向涡动，由于转子和定子之间约束引起的不稳定现象就会发生（Black，1968）。不稳定区域主要由转子和定子耦合的固有频率以及转子相对于环形间隙的变形程度决定。

9.2.1.6 非线性和非对称对强迫振动响应的影响

先前的分析假设刚度和阻尼是线性和对称的，因而产生的力是和转子偏移以及转子速度成比例的。然而实际上，旋转机械部件有内在的非线性和非对称性，这对其转子动力特性有着深刻的影响。在大振幅运动时，刚度和阻尼系数变成非线性的，导致了转子响应振幅和临界速度的改变。支撑刚度的非线性将会对纯线性系统带来较大失真，产生不是简单谐波的振动行为。轴承的刚度与阻尼系数和它们的支撑在大多数情况下是非对

称的，尤其是在水平机械中。所以，在两个主方向上的强迫振动响应是不同的、并有可能是相互独立的。每个主方向都有其自身的临界速度。Ehrich（1999）讨论过非线性和非对称的定子系统是如何影响强迫振动响应的。

转子刚度非对称和惯性非对称对转子稳定性的影响将在 9.2.3 节中讨论。

9.2.2 自激振动

不稳定性（非同步涡动）是自我激励引发的现象，有时被描述为持续的瞬态运动，通常发生在旋转机械中。在不稳定的起初，转子偏移会随着速度的上升而不断增加，但是在临界速度共振时，偏移幅度达到最大值，然后下降。如果转子速度增加到不稳定阈值速度之上，那么大振幅运动将会导致机器的损坏。不像强迫弯曲振动，转子不稳定是自身引起的，且并不要求一个持续的力的作用来开启或保持这种运动，这仅在运行速度远高于转子临界速度时才发生。更进一步说，转子涡动速度与转子速度（非同步涡动）不同，但类同于临界速度、而不考虑转子速度的多少。

通常来说，转子不稳定性与存在的切向力矢量 F_θ 相关联，该力作用在与偏移矢量的垂直方向上、且与阻尼力矢量方向正好相反（图 9-5）。F_θ 的属性是这样的：它的幅值随着转子偏移的增加而成比例增长。在 F_θ 等于外部阻尼力时，由于稳定力的抵消，转子开始产生不稳定性，这就产生了振幅不断增长的涡动运动。转子系统的一些固有现象可以产生切向力矢量，这些现象已经被认识并且将在下面详细讨论。转子动力学家认为还有其他的一些现象有待发现。

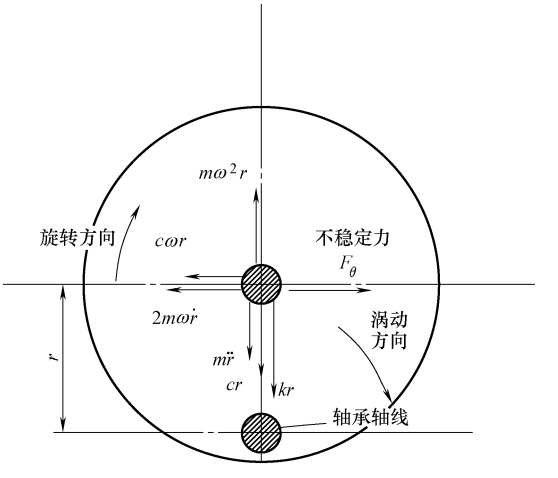


图 9-5 转子不稳定性——一般情况

9.2.2.1 内摩擦阻尼

这种形式的不稳定性的第一次实验是在 20 世纪 20 年代早期通用电气公司用鼓风炉压缩机实现的。这些机器会遇到偶尔的剧烈振动。Newkrik（1924）进行了一系列的实验试图来搞懂这些机器的不正常行为。基于 Kimball 的内摩擦理论（1924），Newkrik（1924）推断在转盘和轴界面之间的界面摩擦阻尼力引起了同步涡动。

为了理解内摩擦阻尼现象，让我们检测一下涡动时 Jeffcott 转子轴的应力（图 9-1）。图 9-6 所示为轴盘界面的横截面。由于偏移作用，右半侧所有纤维承受拉力 T_e，左半侧承受压力 C_e。这些纤维应力趋向于将轴拉直，并产生一种恢复力 F_r，它与离心力 $m\dot{\theta}r$ 方向相反。更进一步说，由于材料受拉和压缩，在轴和盘界面处就产生了一组摩擦力。材料的下半部分受拉，摩擦张力为 T_f，而上半部分受压，摩擦压力 C_f。类似于反作用

力 F_r（通过 T_e 和 C_e 由右向左产生），反作用力 F_θ 从下向上由摩擦应力 T_f 和 C_f 产生。扰动力 F_θ 与涡动运动方向相同，因此会随涡动运动的增加而增加。力 F_θ 和外部阻尼力 $c\dot{\theta}r$ 方向相反，在不稳定的阈值处，两个力相互抵消。已知在不稳定阈值处涡动频率 $\dot{\theta}$ 等于转子的固有频率 ω_n，数学上可以表示为

$$F_\theta = c_i r(\omega - \dot{\theta}) \tag{9-11}$$

式中，c_i 为转子内阻尼系数：

$$c\dot{\theta}r = c_i r(\omega - \dot{\theta}) \tag{9-12}$$

$$\dot{\theta} = \omega_n \tag{9-13}$$

由方程（9-12）和方程（9-13）导出不稳定阈值速度、第一阶临界速度和阻尼因数（包括内部和外部）之间的关系为

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 + \frac{c}{c_i} \tag{9-14}$$

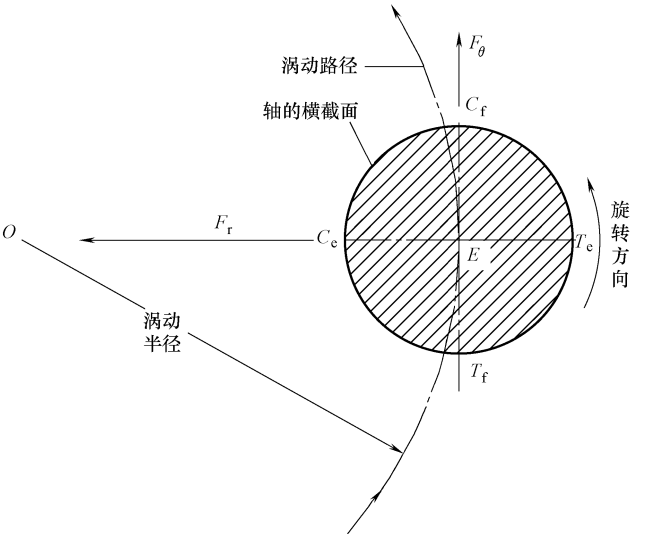


图 9-6 作用在转子上的内摩擦阻尼力

9.2.2.2 间隙激励（Alford 力，蒸汽涡动）

Thomas（1958）研究了燃气轮机的不稳定性，并且提出由偏心转子引起的非对称半径间隙可能导致失稳力，称之为间隙激励力。随后 Alford（1965）在航空燃气轮机中发现了类似的现象，因此失稳力在北美有时又称作 Alford 力。

失稳力是叶轮末梢和定子之间缝隙变化带来的结果。当缝隙减小时，泄漏减少，效率增加，使得转矩高于由均匀缝隙产生的平均转矩。当缝隙增加时，转矩相比于平均值有相应减少。由偏心产生的转矩上的变化导致了切向力的出现，它垂直于径向偏移并沿着如图 9-7 所示的涡动运动方向。此外，它还显示了力幅值的增加和转子偏移的增长成比例，也就是和缝隙的减小成比例。合力就是失稳力，它和外部阻尼力方向相反，且当

失稳力和外部阻尼力平衡的时候，会发生转子不稳定。Urlichs（1977）对间隙力做了详细的分析。

9.2.2.3 叶轮扩压器激振力

离心压缩机的不稳定实验给人们提出了一种强烈的疑虑，就是叶轮-扩压器相互作用现象与失稳力的发展有密切的关系。然而，直到现在，也没有辨识出一种令人满意的、涉及叶轮的失稳机理或失稳源。在过去 20 年里，有一些关于来自有壳覆盖的离心泵叶轮转子动态力的研究，但是在压缩机叶轮上却几乎没有做什么工作。由叶轮-扩压器/蜗壳相互作用产生的失稳力一直认为相对较小（Jery 等，1984；Bolleter 等，1985；Adkins 和 Brennen 等，1989；Ohashi 等，1986）。人们认为失稳力的主要部分是在叶轮壳和叶轮出口盖板之间的窄缝处产生（Child，1986；Bolleter 等，1989；Baskharone 等，1994；Moore 和 Palazzolo，2001）。对于离心压缩机，提出了一种能够决定多级机械稳定性的经验方法（Kirk 和 Donald，1983）。图 9-8 和图 9-9 是他们提出的径流式和对置式离心压缩机的稳定性图。

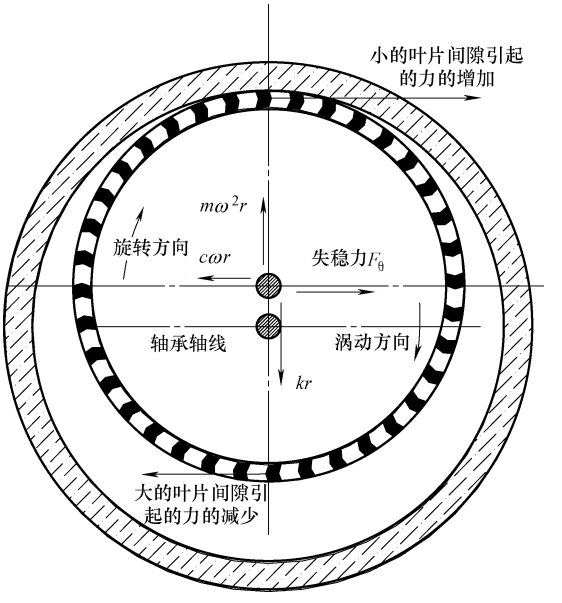


图 9-7　间隙激励力（Alford 力）

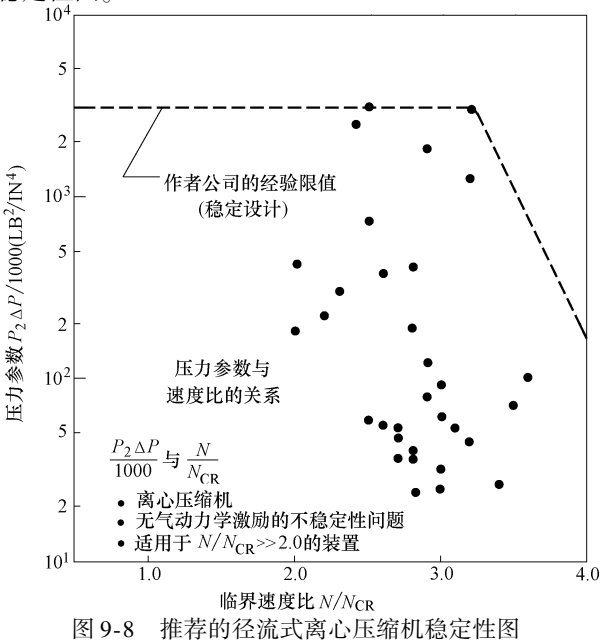


图 9-8　推荐的径流式离心压缩机稳定性图

（来源：转子动力非稳定性，1983。得到授权）

9.2.2.4 螺旋桨涡动

螺旋桨涡动（Taylor 和 Browne，1983；Houbolt 和 Reed，1961）是不稳定性的另一种形式，当螺旋桨角速度矢量和飞机线速度矢量不匹配时，就会出现飞机转子涡动。这个角度的不匹配就会导致一个力矩的产生，该力矩的矢量也是显著幅值的一个分量，它将导致螺旋桨不稳定性（Vance，1988）。它的幅值和角度偏差以及飞机线速度都成比例。随着速度的增长，失稳力矩幅值将会超过转子黏性阻尼力矩，并导致螺旋桨不稳定（参照图 9-5）。由于螺旋桨仅有一端得到支撑，所以涡动运动是圆锥形的，并与螺旋桨运动方向相反。这种不稳定性对速度和空气密度都十分敏感，但不是机器转矩的函数。

9.2.2.5 空心转子中的残留液体

Wolf（1968）证明了在空心转子中的残留液体由于黏性拖拽力可以产生与涡动轨迹相切的力的分量。在同步涡动速度下，这个力分量作用在与涡动运动相同的方向上，且其幅值与转子偏离成比例。参考图 9-5 可以看出，该力具有失稳力的所有特征，可以在转子中产生失稳。当涡动速度等于转子第一阶临界速度时，即为不稳定的阈值速度。有研究显示（Ehrich，1999），在不稳定的阈值处，转子速度低于两倍的第一阶临界速度，这使得涡动速度与转子速度的比值带落在 0.5 ~ 1 的范围内。

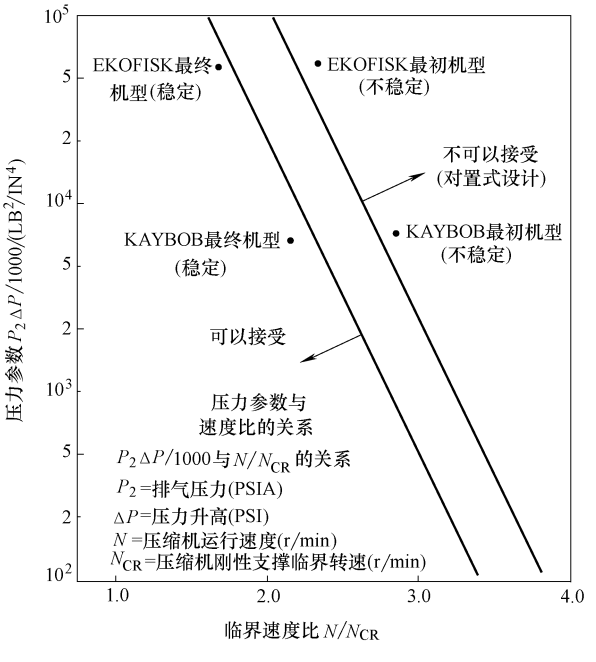


图 9-9 对置式离心压缩机的稳定性图

（来源：转子动力稳定性，1983。得到授权）

9.2.2.6 干摩擦

在 9.2.1.5 节中，干摩擦位置得到识别，该处在接触条件下的转子和定子之间滑动被阻止，由不平衡力引起的转子偏移使得这种接触成为可能。当转子和定子间发生接触

时，Coublomb 摩擦产生与轴旋转方向相反的切向力。由于这个摩擦力阻止了滑动，所以在旋转的反方向上就产生了涡动。涡动速度等于 $r\omega/C$，其中 r 是转子半径，C 为径向间隙，ω 为转子角速度。由于摩擦力和涡动速度方向相同，所以会引起涡动幅值增加，并导致摩擦力的进一步增加。当该摩擦力的幅值超过黏性阻尼力的时候，就会产生转子不稳定。对于干摩擦来说，有另一个可能性就是当涡动速度接近转子和定子的耦合固有频率时，此时称之为干摩擦振荡的不稳定运动就会发生（Ehrich，1999）。

除了上面描述的情况外，干摩擦还在滑动轴承、密封件、磨损环以及任何转子和定子间小缝隙处发生。由于不平衡或者缺少合适的润滑产生的意外闭合也能产生干摩擦接触，并带来不稳定现象。

9.2.2.7 转矩涡动/载荷力矩

当转子盘轴线与轴承轴线不同中时，就像悬臂转子情况，Vance（1988）证明了非同步涡动（转矩涡动）将会发生，这是由于载荷转矩和驱动转矩不同引起的。他的发现是基于对一个简单转子模型的分析，看起来转矩涡动不稳定仅仅发生在大载荷细长轴上，这个理论的实际意义还有待探索。

9.2.2.8 油膜涡动/振荡

Newkrik 和 Taylor（1925），在他们研究由于转子涡动产生的内摩擦的过程中，第一次发现由于滑动轴承内润滑油作用会诱导轴涡动。他们发现在特定情况下，当转子以大于 2 倍临界转速的速度运行时，由滑动轴承支撑的转子会发生振荡；涡动运动是正向的，且它的速度与转子的临界速度相当。由于摩擦拖拽作用，油膜以 0.5 倍轴速度旋转，基于这一事实，他对这种现象提出了一种定性的解释。因此，对于旋转速度接近于 2 倍临界速度的情况，油膜提供了使其速度与临界速度相匹配的刺激作用，从而导致了大的位移和振荡。其他学者基于油楔半速旋转或旋转流体力场处于一半轴速假设，也得出了同样的结论。然而，这却不能解释为什么油膜振荡必须在速度大于 2 倍临界速度的条件下才能实现。Ehrich（1999）基于转子不稳定一般理论也对油膜涡动提出了定性的解释。

尽管油膜涡动物理现象的综合解释仍然没有得到解决，但是关于判断其出现位置的数值分析模型已经给出。Gunter（1966）用分析方法验证了滑动轴承支撑下转子不稳定性可以归结于交叉耦合轴承系数。因此，大部分关于油膜涡动不稳定性的研究都是为了精确化的估计轴承交叉耦合系数。

9.2.2.9 轴承和支撑对转子不稳定性的影响

Jeffcott 模型的结果可以很容易地被采纳，以考虑轴承刚度和轴承支座刚度的影响，前提是只要这些刚度是线性的以及圆周对称的（各向同性）。对于这个特殊情况，转子刚度 k 为等效刚度，是轴、轴承和支座刚度的一系列连接。此时的 ω_n 和 ω_{cr} 的值较简单 Jeffcott 模型的值要小，这就导致了不稳定阈值速度的降低。

如果轴承刚度和轴承支座刚度为不对称（各向异性），那么同对称轴承相比，不稳定的速度阈值将会增长，并且转子偏移的最大幅值将会减少（Child，1993）。

轴承或轴承支座中阻尼影响同刚度的影响一样。它减少了同步转子响应在临界速度

时的幅值，使不稳定的阈值速度提高。然而，可施加阻尼数值是有限制的，过量的阻尼会引起稳定性降低（Child，1993）。

轴承的质量对于转子稳定性也显得十分重要。如果轴承的质量明显的大于转子质量，那么不稳定阈值速度将会降低。

9.2.3 参数的不稳定性

在9.2.2节中描述的不稳定现象可以用线性微分方程表示，其中系统的参数如质量、惯量、刚度、阻尼和固有频率假设为常数。自激振动有一子范畴，称为参数的不稳定性，因为它由系统参数如惯量、质量和刚度周期性变化引起。下面将讨论这个现象的更为普遍的形式。

9.2.3.1 轴承刚度不对称

如果转子轴在两个弯曲主轴方向上具有足够水平的刚度不对称，那么转子的不稳定就会发生。Smith（1933）研究了轴承支座不对称弹性和轴不对称横向弹性下的转子行为，同时也考虑到了阻尼的影响。基于他的研究，得出了如下结论：

在刚度非对称时，内摩擦引起不稳定的初始速度会降低。

当没有外阻尼时，转子在两个垂直方向上的两个无阻尼固有频率之间的所有速度点上都是不稳定的。然而，如果外阻尼是显著的，那么参数的不稳定将会得到消除。

在不稳定范围内，涡动运动是正向的，且与轴的转速是同步的。此外，这与内部摩擦引起的不稳定的情况不同；理论上，快速通过参数不稳定区域是可能的，这使得参数不稳定与不平衡响应十分相似。

当非对称转子施加了均匀分布的力如重力时，转子将会在2倍于轴的转速时发生涡动。这种运动显示了在接近两个固有频率平均值一半速度处的振幅共振性增长。

9.2.3.2 转子惯量不对称

Crandall和Brosens（1961）分析了参数激励的非对称转子的主惯量矩。他们的结论表明转子的特性与9.2.3.1节描述的刚度不对称转子的相当相似，并且参数不稳定性也在同样的速度范围内发生。

9.2.3.3 脉动力矩

作用在转子上的稳定力矩降低了转子临界速度，因为他们可以有效地减小转子的侧向刚度。脉动力矩给转子带来了侧向振动和不稳定性。当脉动力矩和稳定转矩相结合作用到转子上时，将会诱发特定转子速度下的不稳定侧向振动和某些力矩幅值组合。在不稳定侧向运动的区域内，转子的涡动速度与第一临界速度恰好一致，而与转子速度或脉动力矩的频率无关。在转子不稳定转速区域外，转子的涡动速度和脉动力矩的频率相一致。

9.2.3.4 纵向脉动载荷

作用在轴上的脉动的轴向力大小达到屈曲载荷数量级时，该力将会有效地带来横向刚度的周期性变化，这将导致轴的侧向固有频率成比例减少。因此，脉动轴向载荷可以诱发旋转和稳态情况下轴的参数不稳定性。

9.2.3.5 不对称间隙影响

Bentey（1974）意识到大的次同步涡动可能发生在旋转机械中，它是和特定形式非对称间隙情况有关。其中一种情况是，转子涡动运动会引发在转子部分轨道上与静止表面的摩擦，这有效地导致了在轨道接触期间的转子刚度的增长，并使转子刚度在每个循环上产生了周期性变动。另一种在转子刚度上产生循环变化的情况可能出现在转子由抗磨轴承支撑，且其轴承与外壳之间有适当的配合间隙。有效转子刚度的周期性变化产生了次同步涡动运动，其转速恰好等于转速的一半。Childs（1993）偶尔也观察到涡动出现在转子速度的 1/3 或者 1/4。当涡动速度等于转子的临界速度时，不稳定性将会发生。

9.2.4 扭转振动

带有转子的旋转机械有相对较大的惯量力矩，所以易于发生扭转振动问题。扭转振动为一摆动角运动，叠加在稳定的转子旋转运动上。实际上很难探测到它，因为标准振动监测设备并不具备测试扭转振动的功能，必须使用特殊的设备来探测转动机械的扭转振动。由于电动机变频率驱动（VFD）的引入，扭转振动问题的影响范围有所增加。这归因于当前 VFD 设计中固有的扭转激振力。与定速驱动相比，当使用 VFD 时，会产生额外的难题，那就是在更宽的速度范围内消除扭转固有频率的问题。大的同步电动机会以一定频率产生大的脉动转矩，该频率从起始时为 2 倍的线频率，而在同步运行速度时降为零。在这种情况下，任何在 0～2 倍的线频率之间的扭转固有频率都易于激励。大多数工业界都已意识到扭转振动是潜在的风险，因此需要在旋转机械设计阶段进行研究。一些标准设计规范现在要求扭转分析作为设计过程的一部分。

在扭振分析系统建模的标准设计实例中，已经将转子的无阻尼特征值作为空间中的自由体进行了计算。因为轴承的扭转刚度和阻尼并不显著，所以这样操作对于大多数类型的旋转机械都是可以接受的。此外，在大多数情况中，转子本身的扭转阻尼非常低。尽管从分析的观点来看，阻尼的默认是很好的，但是这很难消除遭遇到的扭转振动问题。这种不足在新型线联轴器中已经得到了部分处理，该联轴器具有显著的扭转阻尼。尽管并没有普遍用于旋转机械中，但是一些扭转减振器如 Lanchester 减振器已经被研发，并用于往复式机器上。相似设计的减振器可以研制出来，并用于旋转机械中以解决扭转振动的问题。

单自由度或者两自由度简单转子的扭转临界速度可以用分析法计算。数值方法被用于计算临界速度和更多自由度的复杂系统的振型。在 9.3.1.11 节讲述的 Holzer 数值法（Holzer，1921）是用于这些分析的最普遍的方法之一。

—旋转机械中出现的两类主要的振动现象：强迫振动和自激不稳定性。
—参数不稳定性是自激不稳定性中的一种特殊情况，其中一些通常恒定的参数发生变化，影响到转子的运动。
—扭转振动与侧向振动相似，但是侧向振动发生在与轴线成直角的平面内。

9.3 转子动力学分析

转子动力分析是目前旋转机械设计过程的一部分，这可以用于预测机器运行过程中的振动特性。潜在问题可以通过分析的手段在生产前得到确认和消除。此外，当机器在运行过程中出现一些不正常的振动行为时，分析法可以用来研究、识别并帮助解决问题。为了使分析是有用的，必须确保其准确和经济上是划算的。

在过去的100年里，一些分析方法已经得到发展，可以理解旋转机械的振动行为。它们中的一些技术仅有历史价值，且在实际系统中用途有限。随着计算机技术和先进建模技术的发展，一些基于计算机的方法已经发展到可以精确预测旋转机械振动行为。在最普遍运用的方法中，有两个是基于集中参数模型，其中的分布式弹性和惯性属性由一串刚体通过无质量弹性梁单元连接来表示。这两种方法是：由 Myklestad（1944）和 Prohl（1945）提出的传递矩阵公式，和由 Biezeno 和 Grammel（1954）提出的直接刚度矩阵公式。Ruhl 和 Booker（1972）提出了第三种普遍运用的方法，它基于有限元分析（FEA）模型，其中转子表示为分布式弹性和惯性属性元素的集合。下面讨论一些著名的方法，它们中的一些具有历史意义。

9.3.1 分析方法

9.3.1.1 Rankine 数值方法

Rankine（1869）提出，对于一根给定长度、直径和材料的轴，其速度有一个极限，且对于一根给定直径和材料、按照一定速度转动的轴，长度有一个极限，低于这个速度，离心涡动是不可能的。长度和速度的极限取决于轴的支撑形式。轴的临界速度由如下公式给出：

$$\omega = \frac{k(Hg)^{1/2}}{b^2} \tag{9-15}$$

式中，ω 为临界速度（rad/s）；k 为轴横截面的回转半径；g 为重力加速度；H 为高度单位表示的弹性模量（$H = E/\rho$）；E 为杨氏模量；ρ 为材料密度；l 为轴的长度；对于简支轴，$b = l/\pi$，对于悬臂梁，$b = l/0.95\pi$。

9.3.1.2 Greenhill 方程

Greenhill（1883）引入了在离心涡动作用下略微偏离直线的均匀轴微分运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} - \frac{m\omega^2}{gEak^2}y = 0 \tag{9-16}$$

方程（9-16）的通解为

$$y = B\cosh\mu x + A\cos\mu x \tag{9-17}$$

式中，$\mu^4 = \dfrac{m\omega^2}{gEak^2}$；$m$ 为单位长度轴的质量；ω 为转速；a 为轴的横截面积；A 和 B 为常数，取决于支撑位置的边界条件。

9.3.1.3 Reynold 方程

Reynold 将旋转均匀轴的微分方程（9.16）扩展为包括加载了带轮（盘）的轴以及对于多跨转子（Dunkerly，1894）的微分方程。

在轴承支撑处，剪切力的差必须等于轴承载荷 P：

$$\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x}=P \tag{9-18}$$

式中，M_{R} 和 M_{L} 分别为右侧和左侧载荷的弯矩。

在包含旋转重力载荷 W 时，式（9-18）变为

$$\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}x}=\frac{W}{g}\omega^2 y \tag{9-19}$$

通过考虑离心力偶（陀螺力矩）时，可以得到进一步的方程

$$M_{\mathrm{R}}-M_{\mathrm{L}}=\omega^2 I'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{9-20}$$

式中，I'为带轮的惯性矩。

方程（9-20）的解为

$$y=A\cosh mx+B\sinh mx+C\cos mx+D\sin mx \tag{9-21}$$

式中，A、B、C、D 的值取决于任意两个奇异点之间的边界条件。

9.3.1.4 Dunkerley 法

考虑到带轮和轴在一起的效应，Reynold 方程对于实际情况的使用是有限的。Dunkerly 提出了一种经验方法来分别考虑轴和每个带轮的影响，然后使用如下方程，将它们组合在一起得到转子的临界速度：

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{C}}^2}=\frac{1}{\omega_{\mathrm{S}}^2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i^2} \tag{9-22}$$

式中，ω_{C} 为转子的临界速度；ω_{S} 为轴自身的临界速度；ω_i 为在无重量轴上、第 i 个圆盘的临界速度。

轴在无载荷作用的情况下，临界速度 ω_{S} 由如下公式给出

$$\left(\frac{m\omega_{\mathrm{S}}^2}{gEI}\right)^{1/4}l=a \tag{9-23}$$

式中，I 为轴的截面惯性矩；l 为跨的长度；a 为系数，取决于轴的支撑方式。

在无质量轴上单个转盘质量为 W_i，其临界转速为

$$\omega_i=\theta\left(\frac{gEI}{W_i c^3}\right)^{1/2} \tag{9-24}$$

式中，c 为转盘到其最近支撑处的距离；θ 为系数，取决于轴的支撑方式、跨之间盘的位置和转盘的尺寸。

9.3.1.5 Rayleigh 法

Rayleigh 法是基于以下假设：当系统以其固有频率振动时，储存在弹性元件中的最大势能等于储存在质量中的最大动能（Reyleigh，1945）。

均匀梁的第一阶固有频率由如下公式给出：

$$\omega^2 = \frac{EI\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x}{\mu\int_0^l y^2 \mathrm{d}x} \tag{9-25}$$

对于集中质量系统的 Rayleigh 公式为

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2} \tag{9-26}$$

式中，ω 为第一阶固有频率；y 为梁的变形；x 为沿 x 轴的距离；m_i 为第 i 个集中质量；y_i 为第 i 个质量的静态变形量。

Rayleigh 法的精度取决于选取合适的挠度曲线，该曲线近似于基本模态。如果假设的曲线代表一个真实振型，那么就能得出正确的基本固有频率。对真实振型的所有偏差都将导致频率高于正确值。

9.3.1.6 Ritz 法

Ritz 法是对 Rayleigh 法的改进（Timoshenko 等，1974），其中振型使用带有未知系数的几个正交函数来表示，这些未知系数满足边界条件。正交函数用一系列函数 $\Phi_i(x)$ 表示，其中 i 从 1 变化到 n。振型用如下方程描述：

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i(x) \tag{9-27}$$

为了使得上述方程中系数 a_i 产生最小值，当代入 Rayleigh 提出能量平衡方程时，必须满足如下条件：

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x^2}{\int_0^l y^2 \mathrm{d}x} = 0 \tag{9-28}$$

根据方程（9-25）和方程（9-28）可知

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_0^l \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - \frac{\omega^2 \mu}{EI} y^2\right] \mathrm{d}x = 0 \tag{9-29}$$

将方程（9-27）中的 y 代入方程（9-29），并进行数学运算，可以得到关于 a_i 的线性方程组。方程数为 n。只有在 a_i 的系数行列式为零时，这些方程将产生不为零的解。该条件将会得到频率方程，由此可以得出各阶模态频率。

9.3.1.7 Stodola-Vianello 法

Stodola-Vianello 法是一种数字迭代的过程（Timoshenko 等，1974），可以用来计算固有频率和振动系统的振型。首先假设一种近似的振型，通过连续的迭代，使得该振型不断完善直到达到所需精度级别的收敛。当使用 Rayleigh 方程或者用更为一般的矩阵迭代过程（下面将会讲到），Stodola-Vianello 法可以用来使假设的振型更加完善。

使用牛顿第二定律，矩阵表示的多自由度系统的运动方程为

$$\{\boldsymbol{Y}\} = \omega_i^2 [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{m}]\{\boldsymbol{Y}\} \tag{9-30}$$

$$[\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{K}]^{-1} \tag{9-31}$$

式中，[$\boldsymbol{A}$] 为柔度矩阵；[$\boldsymbol{m}$] 为质量矩阵；[$\boldsymbol{K}$] 为刚度矩阵。

用代表振型的试验矢量 $\{\boldsymbol{Y}\}_1$ 开始迭代过程，把方程（9-30）两边同时代入该矢量，并解出固有频率 ω_i。为此，令 [$\boldsymbol{A}$]、[$\boldsymbol{m}$] 和 $\{\boldsymbol{Y}\}_1$ 的乘积等于 $\{\boldsymbol{Y}\}'_2$。通过用 $\{\boldsymbol{Y}\}'_2$ 除于 $\{\boldsymbol{Y}\}_1$ 中任意一个元素可以得到 ω_i 的第一个近似值（注意，如果 $\{\boldsymbol{Y}\}_1$ 为真实模态，那么所有元素的比值都将相等。）矢量 $\{\boldsymbol{Y}\}'_2$ 通过用所有元素来除以首元素进行归一化，并得到 $\{\boldsymbol{Y}\}_2$。让矢量 $\{\boldsymbol{Y}\}_2$ 左乘 [$\boldsymbol{m}$] 和 [$\boldsymbol{A}$] 得到 $\{\boldsymbol{Y}\}'_3$。把 $\{\boldsymbol{Y}\}'_3$ 和 $\{\boldsymbol{Y}\}_2$ 的相应元素的比值再次进行比较，看看是否相等。

这个过程不断重复直到振型和与之关联的频率达到所需要的精度为止。在上述迭代过程中，振型收敛到相应的最低固有频率的振型。如果使用的是刚度矩阵而非柔度矩阵，那么收敛到的是最高阶固有频率。在第一阶模态确定后，通过扫频矩阵（或清型迭代矩阵）将其从系统矩阵中移除，以得到更高的模态。这个过程也不断重复直到确定了所有需要的模态和固有频率。

9.3.1.8 Myklestad-Prohl 法（传递矩阵法）

Myklestad-Prohl 传递矩阵公式（Myklestad，1944；Prohl，1945）通常用于分析旋转机械的集中参数模型。转子的分布式弹性和惯性属性由一串刚体通过无质量弹性梁单元连接来表示，如图 9-10 所示。这个方法非常适合于计算转子临界速度和振型，而不考虑黏性阻尼的影响，也可以采纳 Myklestad-Prohl 方法来执行同步响应和稳定性分析，包含分析阻尼影响。

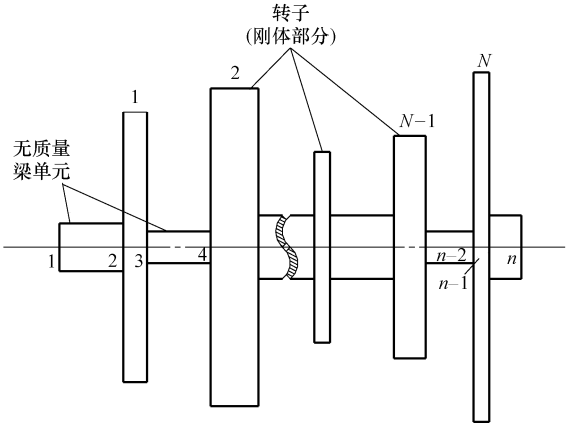


图 9-10　转子的集中参数模型

为了说明传递矩阵方法，我们来分析一根轴对称转子，来确定它的无阻尼临界速度和振型。如图 9-10 所示，转子分为 n 个节点，每一对相邻节点都通过有均匀截面特性的无质量弹性梁连接，比如转盘、叶轮等等部件质量，连同相邻轴部分质量一起都集中在节点上。Myklestad-Prohl 法是基于 Bernoulli-Euler 方程的解，且感兴趣的变量为位移（y）、偏转角（θ）、力矩（M）和剪切力（V）。下面的计算步骤是由 Childs（1993）提出。

在典型节点（n）处，左边（L）变量与右边（R）变量有如下关系：

$$\begin{Bmatrix} y_n^{\mathrm{R}} \\ \theta_n^{\mathrm{R}} \\ M_n^{\mathrm{R}} \\ V_n^{\mathrm{R}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_n\omega^2 & 1 & 0 \\ -m_n\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n^{\mathrm{L}} \\ \theta_n^{\mathrm{L}} \\ M_n^{\mathrm{L}} \\ V_n^{\mathrm{L}} \end{Bmatrix} \tag{9-32}$$

为了简化，设：

$$(\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{T}} = (y_n \theta_n M_n V_n) \tag{9-33}$$

方程（9-32）可以写成如下紧凑形式：

$$(\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{R}} = [\boldsymbol{T}_{mn}](\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{L}} \tag{9-34}$$

式中，$[\boldsymbol{T}_{mn}]$ 为节点 n 处的传递质量矩阵。

在无质量梁的截面上，连接节点 n 到节点 $n+1$ 的传递矩阵为

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1}^{\mathrm{L}} \\ \theta_{n+1}^{\mathrm{L}} \\ M_{n+1}^{\mathrm{L}} \\ V_{n+1}^{\mathrm{L}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_n & \dfrac{l_n^2}{2EI_n} & \dfrac{-l_n^3}{2EI_n} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_n}{2EI_n} & \dfrac{l_n^2}{2EI_n} \\ 0 & 0 & 0 & -l_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n^{\mathrm{R}} \\ \theta_n^{\mathrm{R}} \\ M_n^{\mathrm{R}} \\ V_n^{\mathrm{R}} \end{Bmatrix} \tag{9-35}$$

方程（9-35）可以缩写为

$$(\boldsymbol{Q})_{n+1}^{\mathrm{L}} = [\boldsymbol{T}_{bn}](Q)_n^{\mathrm{R}} \tag{9-36}$$

式中，$[\boldsymbol{T}_{bn}]$ 表示连接节点 n 和节点 $n+1$ 之间的梁元素传递矩阵。

从方程（9-34）~方程（9-36），我们得到对于节点 n 和节点 $n+1$ 的组合传递矩阵为

$$(\boldsymbol{Q})_{n+1}^{\mathrm{L}} = [\boldsymbol{T}_{bn}][\boldsymbol{T}_{mn}](\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{L}} = [\boldsymbol{T}_n](\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{L}} \tag{9-37}$$

从第一个节点开始，连续矩阵相乘直到第 $n+1$ 个节点。最后一个节点 $n+1$ 在梁的长度 l 处为虚拟节点，等于0，并且其质量和惯量也为零。这使得 $n+1$ 节点左手边的参数等于节点 n 右手边的参数。结果如下：

$$(\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{R}} = [\boldsymbol{T}_n][\boldsymbol{T}_{n-1}]\cdots[\boldsymbol{T}_1](\boldsymbol{Q})_1^{\mathrm{L}}, (\boldsymbol{Q})_n^{\mathrm{R}} = [\boldsymbol{T}](\boldsymbol{Q})_1^{\mathrm{L}} \tag{9-38}$$

矩阵 $[\boldsymbol{T}]$ 是转速 ω 的函数。Myklestad-Prohl 法使用反复试验解来决定 ω 的值并使其满足边界条件以及方程（9-38），让所有的矩阵储存起来并相乘是不必要的。使用传递矩阵方法从一个节点的端点开始到另一个节点，无需储存所有的节点矩阵。在所有情况下，轴的两端的两个边界条件都已知，满足这些边界条件的频率为转子的临界转速。一旦临界转速计算得到，那么相应的振型也可以用传递矩阵方法来确定。应该注意，其他类型单元如弹性支撑、柔性耦合等，也可以方便地导入。

9.3.1.9 直接刚度法

直接刚度法使用集中参数方程来估算弹性转子的动力特性。通常描述转子行为（没有阻尼和陀螺力）的运动微分方程如下：

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{m}] & 0 \\ 0 & [\boldsymbol{J}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\ddot{\boldsymbol{Y}}) \\ (\ddot{\boldsymbol{\theta}}) \end{Bmatrix} + [\boldsymbol{K}] \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{Y}) \\ (\boldsymbol{\theta}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{F}) \\ (\boldsymbol{T}) \end{Bmatrix} \tag{9-39}$$

式中，$[\boldsymbol{m}]$ 和 $[\boldsymbol{J}]$ 分别为包含节点质量 m_i 和节点惯量矩 J_i 的对角矩阵；刚度矩阵 $[\boldsymbol{K}]$ 包含了梁单元的内部刚度项和所有支撑处的外部弹簧刚度；矢量（$\boldsymbol{F}$）和（$\boldsymbol{T}$）分别表示作用在系统上的外部力和转矩。

基于 Bernoulli-Euler 方程的典型梁单元的刚度矩阵为（Child，1993）

$$[\boldsymbol{K}^i]=\frac{2EI_i}{l_i^3}\begin{bmatrix}6 & 3l_i & -6 & 3l_i\\ 3l_i & 2l_i^2 & -3l_i & l_i^2\\ -6 & -3l_i & 6 & -3l_i\\ 3l_i & l_i^2 & -3l_i & 2l_i^2\end{bmatrix} \tag{9-40}$$

总刚度矩阵［$\boldsymbol{K}$］以对称方式把各个独立部件矩阵组装起来，其步骤叙述如下。

第 i 个梁单元的刚度矩阵记为

$$[\boldsymbol{K}^i]=[k_{j,k}^i] \tag{9-41}$$

式中，j 和 k 在（$2i-1$）和（$2i+2$）之间变化。

为了形成总刚度矩阵，具有同样下标的相邻梁单元增加了 n 个梁单元，由如下公式给出：

$$[\boldsymbol{K}]=[\boldsymbol{K}_{j,k}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2i-1}^{2i+2}\sum_{k=2i-1}^{2i+2}k_{j,k}^i \tag{9-42}$$

一旦组装得到整个系统的惯性矩阵和刚度矩阵，则特征值和特征矢量可以通过从方程（9-39）推导得到的下面齐次方程求解：

$$[\boldsymbol{M}](\ddot{\boldsymbol{Y}})+[\boldsymbol{K}](\boldsymbol{Y})=0 \tag{9-43}$$

对于可以产生系统的特征值和特征矢量的方程（9-43）的解，存在数值分析方法（Meirovitch，1986）。选择的方法取决于惯性和刚度矩阵的复杂性和固有属性。可能广泛被人们认知方法的是矩阵迭代法，该方法采用幂法、并联合了扫频技术，然而这种方法并不是最有效的，尤其对于高阶系统。Jacobi 法，通过连续旋转的矩阵迭代，实现矩阵对角化，这种方法效率很高，因此被广泛使用。这些方法的细节在 Meirovith 的文章中给出（1986）。

当阻尼矩阵和陀螺矩阵也包含在方程（9-39）中时，直接刚度法采用类似解法，除了可以计算特征值外，还可以计算有阻尼的临界速度、强迫转子响应和转子的不稳定性。

9.3.1.10　有限元分析法

FEA 法的基础是给一个复杂的不对称系统提供方程，使得该系统可以利用计算机的自动化功能（参见第 9 章）。FEA 法把转子动力学系统考虑为离散单元的集合，其中每个单元都有分布和连续的属性，这就是说质量和刚度都一致性表示为分布式参数。如 9.3.1.9 节所述，集中参数法在公式中使用一致性刚度矩阵方程［方程（9-40）］，因此，同样的方法也可以用于有限元法中。对于单元的分布质量表示，可使用 Archer（1963）方法，该方法基于质量分布和弹性分布成比例这一假设，这与 Rayleigh-Ritz 公式是相似的，所得的质量矩阵如下：

$$[m^i]=\frac{m^i l_i}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l_i & 54 & -13l_i\\ 22l_i & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2\\ 54 & 13l_i & 156 & -l_n\\ -13l_i & -3l_i^2 & -22l_i & 4l_i^2\end{bmatrix} \tag{9-44}$$

根据方程（9-41）和方程（9-42），通过系统方式将独立部件矩阵组合起来形成整个系统的总刚度矩阵［$\boldsymbol{K}$］。根据方程（9-45）和方程（9-46），总质量矩阵也可以用同样的方法精确得到。

第 i 个梁单元的质量矩阵记为

$$[\boldsymbol{m}^i] = [\boldsymbol{m}^i_{j,k}] \tag{9-45}$$

其中 j 和 k 在（$2i$-1）和（$2i+1$）之间变化：

$$[\boldsymbol{M}] = [\boldsymbol{M}_{j,k}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2i-1}^{2i+2} \sum_{k=2i-1}^{2i+2} m^i_{j,k} \tag{9-46}$$

一旦得到整个系统的质量矩阵和刚度矩阵，就可以求解方程（9-43），该方程描述了复杂系统的自由振动。可以利用的特征值问题的解法和用于直接刚度法（参见上面 9.3.1.9 节）的解法一样。FEA 法的细节部分在 Ruhl 和 Booker（1972）文章中给出。

9.3.1.11 扭振分析（Holzer 法）

扭振分析法的发展和横向振动分析方法一样走过了一个不断进化的过程。Holzer（1921）首先介绍了集中参数数值法来计算多自由度系统的扭转振动固有频率。直到今天，由于其简单和合理的精度，该方法依然得到了最广泛的应用。Holzer 法是一种传递矩阵法，其使用的集中质量模型和 9.3.1.8 节中讲述的 Myklestad-Phrol 法中使用的模型是一样的。唯一的不同是原来由方程（9-32）和方程（9-35）表示的传递矩阵被如下方程替代：

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}^{\mathrm{R}}_{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J & 1 \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}^{\mathrm{L}}_{n} \tag{9-47}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}^{\mathrm{L}}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{n+1} \begin{Bmatrix} \theta \\ T \end{Bmatrix}^{\mathrm{R}}_{n} \tag{9-48}$$

从第一个节点开始，连续矩阵相乘直到第 $n+1$ 个节点。结果如方程（9-38）所示。矩阵［$\boldsymbol{T}$］是转速 ω 的函数。在所有的情况中，转子每一个端点的一个边界条件是已知的。用试算解来确定 ω 的值，使其同时满足边界条件和方程（9-38）。这些值为转子扭转临界转速，一旦得到临界速度，相应的扭转振型可以用传递矩阵方法确定。

在分支系统和齿轮系统中，应该特别注意部件的相对转速。规则很简单：将所有齿轮轴的刚度和惯性矩阵乘以 N^2，其中 N 为齿轮轴和参考轴的速比。

还有其他方法，比如分布质量矩阵法、直接刚度矩阵法和有限元法可以用来确定转子的扭转临界速度，这些方法都与横向临界速度分析的方法相似。

9.3.2 建模

转子动力学系统的设计和分析要求建立相关模型用来模拟物理系统的行为。在过去，转子临界速度被认为是稳定运行的主要标准。今天，稳定的、对机械激振力有良好阻尼的转子动力响应被认为是高可靠性的必要条件。分析结果的可靠性和准确性在很大程度上取决于系统模型的可信度和其对于分析方法的适应性。即使最准确和最有效的分

析方法也不能从一个糟糕的模型中得到好的结果。建立和轴系相连的轴段、圆盘与其他单元模型的那些广泛应用的方法已经在前面的章节进行了讨论。表 9-2 中给出了一些可以用来计算简单系统临界速度的公式。代表轴承、转子减振器、密封和转子-定子相互作用的模型将在下面章节中介绍。

9.3.2.1 滑动轴承

滑动轴承在其动力特性被完全理解之前很久就已经用于旋转机械中了。人们在最近几十年来花费了很大的努力，来了解和发展滑动轴承技术，使得在转子动力分析中滑动轴承有更精确的表示。各式各样、具有改进性能的滑动轴承在近几年已经得到发展。图 9-11 所示为旋转机械中最常用类型的滑动轴承。Hagg 和 Sankey（1958）是最早提出许多类型滑动轴承的动态刚度和阻尼系数的学者之一。然而，由于当时没有考虑到交叉耦合项，因此这些数据是不完整的；很快，出现了和滑动轴承分析有关的一系列事件；Sternlicht（1959）、Warner（1963）、Lund（1964）、Lund（1965）、Glienicke（1966）、Orcutt（1967）、Lund（1968）、Someya 等（1988），以及其他一些学者提供了完整的轴承系数，包括了各种轴承的交叉耦合项。这些信息对于转子动力学分析来说是非常有价值的。根据以上各个学者对滑动轴承研究成果，滑动轴承转子动力学的一般模型如下：

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \tag{9-49}$$

自从电子计算机时代开始，一些计算机程序已经发展到用于滑动轴承所有方面的分析，包括刚度和阻尼系数。设备公司或研发中心已经开发了很多程序，并用于自己的产品开发中。一些在北美相对流行的商用软件如表 9-3 所示。尽管早期研究给出的轴承系数图表依然在使用，但是基于计算机技术的程序已经越来越受到人们的青睐。

9.3.2.2 滚动轴承

滚动轴承用于各种形式的旋转机械中，这些机械通常要求紧凑，承受大载荷，并且是低抗热性和简单润滑系统。不同于滑动轴承，滚动轴承承载能力不取决于速度而是零速时满负荷的承载能力。这些突出优点使得滚动轴承对许多工业非常有吸引力。

从转子动力学的角度看，滚动轴承可以建模为仅带有直接弹簧系数的线性弹簧元素。阻尼项是不显著，因此并不会衰减在临界速度时的转子偏移。一个典型的滚动轴承常用如下方程表示：

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{9-50}$$

交叉耦合刚度和阻尼项的缺失表示轴承不会受到转子不稳定性的影响。尽管从分析的方便性来讲，我们认为弹簧刚度是线性的，但是其真实行为可能是相反的，这就导致了一些计算的不准确性。最显著的非线性是轴承没有预载荷，以及存在轴承内部间隙。有很小或没有内部间隙的预载荷轴承展现的是完全线性特性。Jones（1960）、Harris（1991）和 Kramer（1993）分析了最常用滚动轴承的刚度系数，这些数据被用于转动机械转子动力学的研究。

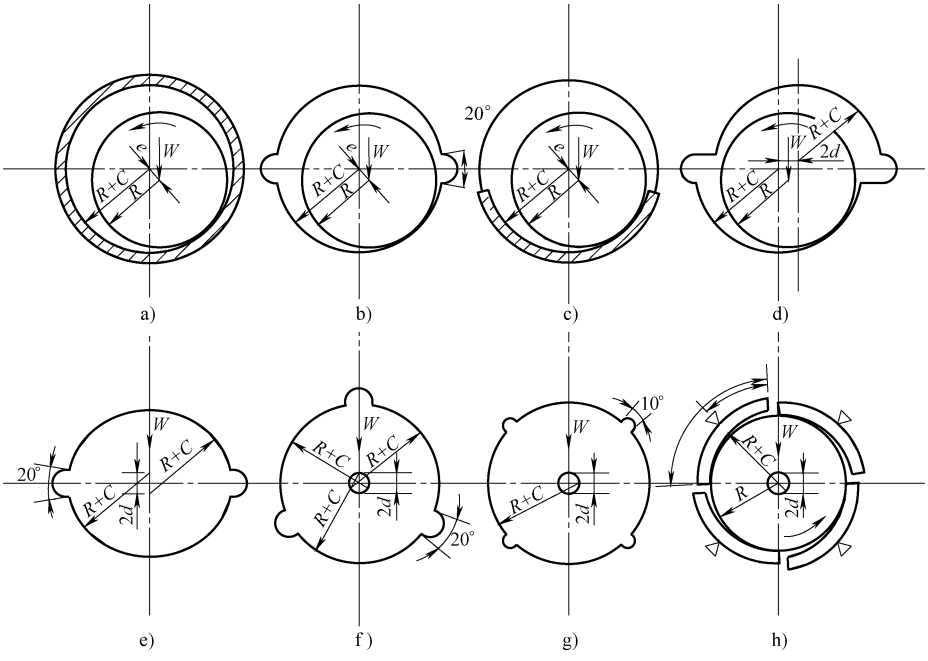
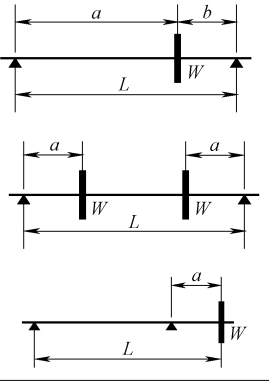


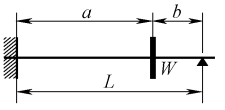
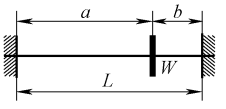
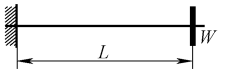
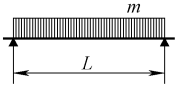
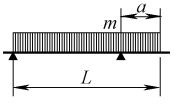
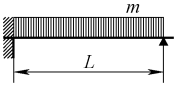
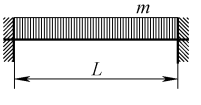
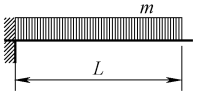
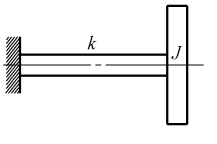
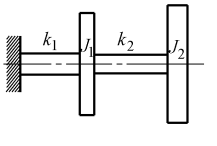
图 9-11 常见的各类滑动轴承

a）普通圆柱 b）双槽圆柱 c）部分圆弧圆柱 d）偏心圆柱 e）双槽椭圆 f）三叶 g）四叶 h）可倾瓦

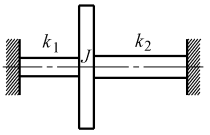
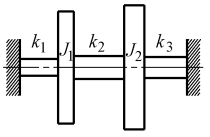
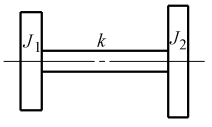
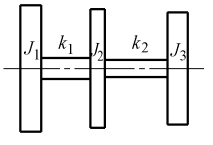
表 9-2 在振动分析和设计中一些有用的公式

Rankine 公式	$\omega=\dfrac{k(Hg)^{1/2}}{b^2}$	注意:这个公式仅有历史价值,它的实际价值有限
Greenhill 方程	$\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}-\dfrac{m\omega^2y}{gEak^2}=0$	
Dunkerly 方程	$\dfrac{1}{\omega_c^2}=\dfrac{1}{\omega_s^2}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\omega_i^2}$ 上述方程简化为 $\omega_c^2=\dfrac{g}{\sum y_{stat}}$	
计算固有频率的公式(Blevins,2001;Gorman,1975)		$\omega_c=\dfrac{1}{ab}\sqrt{\dfrac{3EIL}{W}}$ $\omega_c=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{6EI}{W(3L-4a)}}$ $\omega_c=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{3EI}{WL}}$

（续）

计算固有频率的公式（Blevins，2001；Gorman，1975）		$\omega_c=\left(\dfrac{12EIL^3}{Wa^3b^3(3L+b)}\right)^{1/2}$
		$\omega_c=\left(\dfrac{3L^3EI}{Wa^3b^3}\right)^{1/2}$
		$\omega_c=\left(\dfrac{3EI}{WL^3}\right)^{1/2}$
		$\omega_c=\left(\dfrac{98EI}{mL^4}\right)^{1/2}$
		$\omega_c=\left[\left(\dfrac{64a}{9L}\right)^2-\left(\dfrac{6a}{L}\right)+\dfrac{16}{3}\right]^2\left(\dfrac{EI}{mL^4}\right)^{1/2}$，$\dfrac{a}{L}\geqslant 0.25$
	 $\omega_c=\left(\dfrac{237EI}{mL^4}\right)^{1/2}$	$\omega_c=\left[-74.7\left(\dfrac{a}{L}\right)^2+22.1\left(\dfrac{a}{L}\right)+3.14\right]^2\left(\dfrac{EI}{mL^4}\right)^{1/2}$，$\dfrac{a}{L}<0.25$
		$\omega_c=\left(\dfrac{502EI}{mL^4}\right)^{1/2}$
		$\omega_c=\left(\dfrac{12.4EI}{mL^4}\right)^{1/2}$
计算扭转固有频率的公式		$\omega_c=\left(\dfrac{k}{J}\right)^{1/2}$
		$\omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{k_1+k_2}{J_1}+\dfrac{k_2}{J_2}\mp\left\{\left(\dfrac{k_1+k_2}{J_1}+\dfrac{k_2}{J_2}\right)^2-\dfrac{4k_1k_2}{J_1J_2}\right\}^{1/2}\right]^{1/2}$

（续）

计算扭转固有频率的公式		$\omega_c = \left(\dfrac{k_1 + k_2}{J}\right)^{1/2}$
		$\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{k_1 + k_2}{J_1} + \dfrac{k_2 + k_3}{J_2} \mp \left\{\left(\dfrac{k_1 + k_2}{J_1} + \dfrac{k_2 + k_3}{J_2}\right)^2 - \dfrac{4(k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3)}{J_1J_2}\right\}^{1/2}\right]^{1/2}$
		$\omega_c = \left(\dfrac{k}{J_1} + \dfrac{k}{J_2}\right)^{1/2}$
		$\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\dfrac{k_1}{J_1} + \dfrac{k_1 + k_2}{J_2} + \dfrac{k_2}{J_3} \mp \left\{\left(\dfrac{k_1}{J_1} + \dfrac{k_1 + k_2}{J_2} + \dfrac{k_2}{J_3}\right)^2 - \dfrac{4k_1k_2(J_1 + J_2 + J_3)}{J_1J_2}\right\}^{1/2}\right]^{1/2}$
Rayleigh 方程		$\omega^2 = \dfrac{EI\int_0^l \left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x}{\mu\int_0^l y^2 \mathrm{d}x}$ $\omega^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}$
Ritz 法		$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i(x)$ $\dfrac{\partial}{\partial a_i}\dfrac{\int_0^l \left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x^2}{\int_0^l y^2 \mathrm{d}x} = 0$ $\dfrac{\partial}{\partial a_i}\int_0^l \left[\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - \dfrac{\omega^2\mu}{EI}y^2\right]\mathrm{d}x = 0$
Stodola-Vianello 法		$\{Y\} = \omega_i^2[A][m]\{Y\}, [A] = [K]^{-1}$
传递矩阵 Myklestad-Phrol 法		$\begin{Bmatrix} y_{n+1}^{\mathrm{L}} \\ \theta_{n+1}^{\mathrm{L}} \\ M_{n+1}^{\mathrm{L}} \\ V_{n+1}^{\mathrm{L}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_n & \dfrac{l_n^2}{2EI_n} & \dfrac{-l_n^3}{6EI_n} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_n}{EI_n} & \dfrac{l_n^2}{2EI_n} \\ 0 & 0 & 1 & -l_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n^{\mathrm{R}} \\ \theta_n^{\mathrm{R}} \\ M_n^{\mathrm{R}} \\ V_n^{\mathrm{R}} \end{Bmatrix}$

（续）

梁单元的刚度矩阵	$[K^i]=\dfrac{2EI_i}{l_i^3}\begin{bmatrix}6 & 3l_i & -6 & 3l_i\\ 3l_i & 2l_i^2 & -3l_i & l_i^2\\ -6 & -3l_i & 6 & -3l_i\\ 3l_i & l_i^2 & -3l_i & 2l_i^2\end{bmatrix}$	
梁单元的质量矩阵	$[m^i]=\dfrac{m^i l_i}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l_i & 54 & -13l_i\\ 22l_i & 4l_i^2 & 13l_i & -3l_i^2\\ 54 & 13l_i & 156 & -l_n\\ -13l_i & -3l_i^2 & -22l_i & 4l_i^2\end{bmatrix}$	
挤压油膜阻尼系数	$k=\dfrac{24R^3L\mu\omega\varepsilon}{C_r^3(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}$ $c=\dfrac{12\pi R^3L\mu}{C_r^3(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}$ $k=\dfrac{2R^3L\mu\omega\varepsilon}{C_r^3(1-\varepsilon^2)^2}$ $c=\dfrac{\pi R^3L\mu}{2C_r^3(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$	
不平衡灵敏度	$SF=\dfrac{a}{U}M$	
滚动轴承失效频率	$f_{bor}=\dfrac{ND}{60d}\left[1-\left(\dfrac{d}{D}\cos\theta\right)^2\right]$	N 为旋转速度(r/min) D 为滚动体节圆直径
对于封闭间隙轴瓦径向刚度的 Lomakin 公式	$f_{ir}=\dfrac{Nn}{120}\left[1+\dfrac{d}{D}\cos\theta\right]$	ir 为内圈缺陷 d 为滚动体直径 N 为滚动体数量
	$f_{or}=\dfrac{Nn}{120}\left[1-\dfrac{d}{D}\cos\theta\right]$	or 为外圈缺陷 θ 为相对于轴线的接触角 bor 为球或者滚子缺陷 c 为保持架缺陷 b_m 为径向间隙 D 为直径
	$f_c=\dfrac{N}{120}\left[1-\dfrac{d}{D}\cos\theta\right]$	
	$k=\dfrac{\pi}{8}(1+\zeta)\lambda\mu^4\left(\dfrac{l}{b_m}\right)^2\Delta pD$ $\mu^2=\dfrac{1}{1+\zeta+(\lambda l/2b_m)}$	l 为轴瓦长度 Δp 为通过轴瓦的压差 ζ 为进口损失系数 λ 为摩擦系数

9.3.2.3 挤压油膜减振器

利用挤压油膜减振器来介绍滚动轴承阻尼容量，或者在滑动轴承的情况下，提供额外阻尼和刚度来消除转子不稳定性问题。挤压油膜减振器由于现代航空燃气涡轮工业而变得引人注目，其中选择的轴承就是滚动轴承。在 20 世纪 70 年代中期，通过引入一些设计来增加滚动轴承的阻尼容量和可预测刚度。在它的基本形式中，挤压油膜减振器和

非旋转圆柱滑动轴承类似，其中滚动轴承的外圈形成轴颈，如图 9-12 所示。端部密封（防止泄漏）和定心弹簧的增加可以提高滚动轴承的性能。通过挤压油膜减振器在轴承上产生的内部作用力可以用如下公式表示：

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} \tag{9-51}$$

挤压油膜减振器的刚度和阻尼系数已经推导得到（Ehrich，1999），它是根据非旋转滑动轴承情况的 Reynold 方程的解得到的。对于末端密封的减振器，通过使用长滑动轴承理论可以得到下面的刚度和阻尼系数：

$$k = \frac{24R^3 L\mu\omega\varepsilon}{C_r^3(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \tag{9-52}$$

$$c = \frac{12\pi R^3 L\mu}{C_r^3(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{9-53}$$

式中，R 为减振器半径；ω 为涡动速度；L 为减振器长度；μ 为油液黏度；C_r 为径向间隙；ε 为偏心比（轨道半径/C_r）。

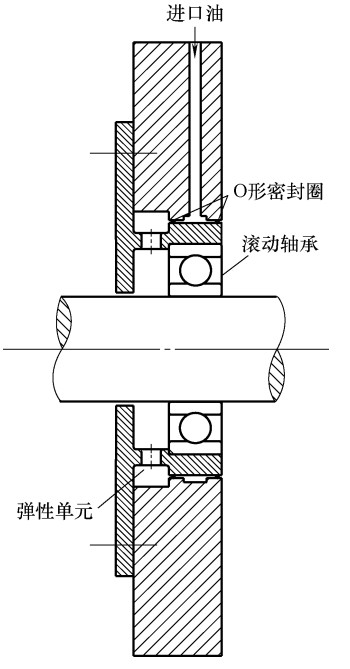


图 9-12　Squeeze-Film 减振器

同样，对于没有末端密封的减振器，可以通过短滑动轴承理论得出如下刚度和阻尼系数：

$$k = \frac{2RL^3\mu\omega\varepsilon}{C_r^3(1-\varepsilon^2)^2} \tag{9-54}$$

$$c = \frac{\pi RL^3\mu}{2C_r^3(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{9-55}$$

尽管基于 Reynold 方程得出的上述公式已经可以预测减振器的特性，但是实验现象并不能证明这些公式。因此，这些公式在实际情况中要小心使用。

9.3.2.4　环形密封

环形密封主要用于泵、压缩机、燃气轮机和蒸汽机中，以最小化泄漏，并进而改善机器的容积效率。除了这些基本功能外，环形密封在机器转子动力学上还有着非常重要的作用，尤其是在多级机器中，可以提供刚度和阻尼以增强机器高速运动时的能力。实际上，在最近几十年中，有关密封的大部分研究工作都是致力于理解和改善其动态振动特性而不是提升其密封效率。

Lomakin（1958）第一个发表有关泵内光滑环形间隙恢复力。然而，直到十多年后，Black（1968）才提出了关于理解和研究密封的主要的初始推动力。Child（1993）提出了关于密封领域非常精彩的研究工作纲要。他在书中也提供了密封动力学最综合的

覆盖。

在当前情况下，密封按照滑动轴承的刚度和阻尼作同样的方法处理，并有一些修改。尤其是在考虑流体惯性的影响时，通常假设轴轨道的中心和密封环静止状态时的中心一致。假设旋转对称，则相互作用的力-密封运动模型可以写成：

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & k_c \\ -k_c & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c & c_c \\ -c_c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} \tag{9-56}$$

一个附加的复杂性问题就是在环形密封中湍流占主导地位。这就不能使用 Reynold 方程来推导密封系数。通过 Navier-Stokes 和连续方程的解可以得到最高精度的解。然而，就目前来说，这种方法成本较高并且有些不切合实际。因此，我们使用两种半经验法来得出密封系数。在第一种方法中，把半经验湍流模型直接代入 Navier-Stokes 方程，并用数值技术得到方程的解。在第二种方法中，最常用的技术是使用一种整体流动模型，再加上控制体积方程，即连续方程和动量方程，来得到所需的结果。针对这些方法的详细讨论、求解技术、各种物理参数对系数的影响、计算结果和实验结果的完美汇编，Child（1993）介绍了相应的出版物。

9.3.2.5 叶轮-扩压器/蜗壳界面

大家都知道在特定形式的旋转机械内的流场可能严重影响其振动行为。Thomas（1958）发现并解释了轴流式汽轮机中破坏稳定的间隙激振力的存在。Black（1974）首先提出离心泵叶轮也能产生破坏稳定的力。这些力的性质和它们对于转子不稳定性的影响在 9.2.2.2 节和 9.2.2.3 节做了解释。叶轮-扩压器/蜗壳力假设是旋转对称的，可以通过如下方程建模：

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & k_c \\ -k_c & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c & c_c \\ -c_c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m & m_c \\ -m_c & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} \tag{9-57}$$

对于叶轮相互作用系数的推导的分析过程、实验数据的比较，Child（1993）推荐了这方面所做的工作。为了正确理解叶轮-扩压器/蜗壳相互作用力的复杂属性，尤其是在非设计条件下的属性，还是有很多工作要做的。

9.3.3 设计

由于真正的机器是不能用于测试的，所以在初步设计阶段，常用的做法就是研究机器精确的数学模型来预测它在工作中的动态行为。理解和估计机器和它操作环境的相互作用以及环境如何影响机器的操作也是很有先见之明的。采用在 9.3.2 节中描述的技术，可以建立一个合适的转子模型，且采用上面 9.3.1 节描述的方法之一，可以分析机械的转子动力学特性。基于这些方法，开发出了基于计算机的转子动力学数值分析程序。在北美最广泛使用的程序列于表 9-3 中。分析的目的是预测临界速度、激振频率、偏移幅值和在整个运行范围内转子力的幅值。在特定情况下，能量含量的估算也是要求的。

一旦建立了数学模型，那么转子的特征值和其振型就可以确定了，其结果可由 Campbell 图表示，其中特征值和激振频率表示为转子速度的函数。临界速度在激振频率线和特征值线的交叉点上发生。由于像刚度、阻尼、缝隙（未磨损状态和磨损状态）等关键参数的影响都表示在一幅图上，所以 Campbell 图（图 9-13）非常有用。尽管出现了临界速度，但如果有了足够的阻尼，则很少有什么后果。如图 9-4 所示，当阻尼比 $\zeta \geqslant 0.707$ 时，系统处于临界阻尼状态。当阻尼大于这个级别时，不存在转子偏移放大。当处于临界速度或是在其附近时，放大因数约为 $1/2\zeta$。使用该估计值（取决于机械的内部间隙），是可以估计转子是否可以通过临界速度而不引起任何部件损坏。对于离心泵来说，放大因数为 2.5 或低于 2.5 是一个典型的可接收限值，即使连续处于该值或在该值附近工作也是可以的。然而，如果放大因数超过了可接受限值或者临界速度太接近连续工作速度，那么必须进行设计修改来改变临界速度值。在设计阶段，确保临界速度不在连续工作速度的 ±10% 以内是良好做法，这些限值有时称作分离度。从识别最大偏

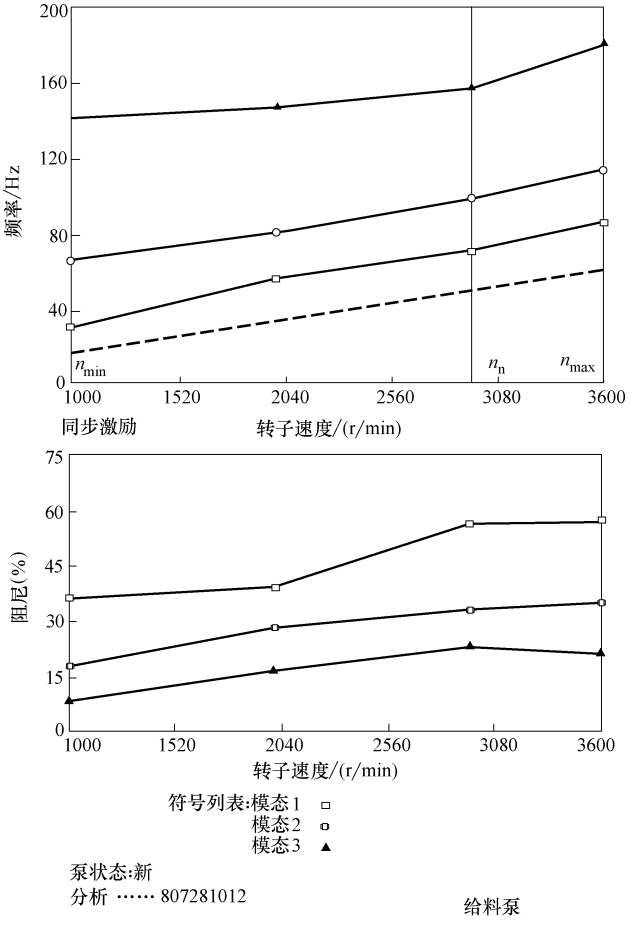


图 9-13　多级泵的 Campbell 图

离发生位置的角度来说，转子振型非常重要。它还对评估设计修改来提高阻尼和减少对不平衡力的敏感度有着很好的引导作用。

特征值分析仅仅提供转子的相对变形。为了估算真实变形值，需要进行强迫振动响应分析。估计幅值的激励力函数应用于在选定位置上来决定转子特定点上的最终变形量。这种类型的分析仅仅用于同步激振力分析。激振力函数的属性由机器形式决定，对于所有的机器来说，机械不平衡都是普遍存在的，而液力不平衡与离心泵有关，电气不平衡与电动机有关。当然，挑战来自于确定所施加力的大小、方向和位置以及最终转子的响应应该如何评判。当然，这些标准对于机器的类型有依赖性，并没有必要应用到所有的旋转机械中去。下面给出关于离心泵上的强迫振动响应分析如何评价的例子（Bolleter 等，1992）：

① 最大放大系数和所需的分离度都在规范中给出；案例见 API 610，第 8 版，1995。

② 激振力的确定，相对可容许的轴振动极限以及间隙的响应判断。

③ 在振动探头处施加不平衡力，其幅值就是该处所能达到的最大允许振动限值，然后评估变形量是否超过了机器中的最小间隙。

④ 施加任意大小的不平衡力，并确定在相同或其他位置产生的响应结果，然后使用如下公式计算灵敏度（*SF*）因子：

$$SF = \frac{a}{U}M \tag{9-58}$$

式中，a 为转子偏移或变形；U 为不平衡力；M 为转子质量。

然后，灵敏度因子应该同相同机器的实验数据相比较，看是否可以接受。为了评估设计，对于施加作用力的转子响应可以进一步分析，找到我们感兴趣的其他参数，比如相位角和轴承力的幅值。

为了在临界速度的布置以及偏移、力的控制的方面对旋转机器的设计进行优化，我们可以进行参数灵敏度系数分析（Lund，1979；Rajan 等，1986；Rajan 等，1987）。对于分析速度和便利化来说，优化步骤可以自动进行。

① 转子动力学分析是目前设计旋转机器时预测其振动行为的一部分。

② 最现代的转子动力学分析步骤是基于计算机，并从集中参数模型或者传递矩阵法中推导得到。

③ 在集中参数模型法中，转子分布式的弹性和惯性属性表示为一系列无质量的弹性梁与刚体相连。

④ 在传递矩阵法（通常称之为 FEA 法）中，转子表示为一个具有分布式弹性和惯性属性元素的集合。

⑤ 精确的建模和转子部件的再现对于分析结果的精度和可靠性来说是非常关键的。因此，在轴节、盘、叶轮、轴承，密封、转子减振器和转子-定子相互作用的建模上都已经取得了重大进步。

表 9-3 转子动力学分析软件

软件名称	分析类型	供应商
CAD20	弹性转子横向临界转速	CADENSE 软件，美国，纽约州奥尔巴尼
CAD21	弹性转子不平衡响应	
CAD21a	弹性转子对非同步正弦激励的响应	
CAD22	扭振临界转速和齿轮系统响应	
CAD24	齿轮系统瞬态扭转临界速度	
CAD25	弹性转子动态稳定性	
CAD25a	弹性转子瞬态响应	
CAD26	多转子横向临界速度	
CAD27	多转子不平衡响应	
CAD30	液体润滑滑动轴承的动态系数	
CAD30a	球轴承动态系数	
CAD31	液体润滑可倾瓦滑动轴承的动态系数	
CAD32	液体润滑轴向沟槽、单瓦滑动轴承的动态系数	
CAD34a	可倾瓦推力轴承性能	
CAD34b	斜面推力轴承性能	
CAD36	液体润滑压力油楔滑动轴承的动态系数	
CAD38	液体润滑深沟静液压滑动轴承的动态系数	
CAD40	气体润滑滑动轴承的动态系数	
CAD41	气体润滑可倾瓦滑动轴承的动态系数	
CAD42	气体润滑螺旋沟槽滑动轴承的动态系数	
CAD42i	液体润滑螺旋沟槽滑动轴承的动态系数	
FEATURE	转子轴承系统分析	
COJOUR	滑动轴承分析	
DYNROT	设计的软件能够对转子动力学特性进行完整的研究。能够进行转子线性、非线性和扭振分析	意大利，都灵市，都灵理工大学机械系
DyRoBeS	综合的转子动力学分析软件，能够进行转子轴承系统的横向、扭转分析，以及轴承分析	AGILESOFTWARE CONCEPTS 公司，美国，佛蒙特州，白河汇
RotorLab	对转子系统、轴承和密封实现灵活建模的软件包。它把设计、建模、分析、后处理和数据管理任务整合到一套用户界面中	
DAMBRG2	具有单瓦压力油楔的双叶等黏度轴承动态系数和刚性转子稳定性分析	ROMAC-美国，弗吉尼亚州，夏洛茨维尔，弗吉尼亚大学，旋转机械和控制实验室
HYDROB	预测混合轴承稳定状态和动态工作特性	
PDAM2D	这个程序可以分析刚度和阻尼系数，并能分析多块瓦压力油楔轴承刚性转子稳定性阈值	
SQFDAMP	确定有和没有油膜空化、短和长挤压油膜轴承刚度和阻尼系数	
THBRG	带不可压流体的多叶滑动轴承的动态系数	
THPAD	带不可压流体的可倾瓦滑动轴承的动态系数	

（续）

软件名称	分析类型	供应商
THRUST	预测可倾瓦和几何形状固定的流体油膜推力轴承稳定状态工作特性	
CRTSP2	无阻尼双级转子系统横向临界转速	
MODFR2	无阻尼单级或双级转子系统横向临界转速	
TWIST2	无阻尼转子系统扭转临界转速和振型	
FRESP2	预测带弹性子结构的双转子系统模态频率、强迫响应	
RESP2V3	双级多质量块弹性转子非平面同步不平衡响应	
HCOMB	带可压缩气体直通式蜂窝密封动态系数	
LABY3	带不可压缩流体的直通和均匀联锁型迷宫密封动态系数	
SEAL2	带不可压缩湍流轴向流动的光滑和沟槽密封的刚度和阻尼系数	
SEAL3	光滑和环形沟槽两种密封的刚度、阻尼和质量系数	
TURSEAL	湍流环形密封或水润滑轴承的刚度和阻尼系数	
FSTB3	多阀芯转子系统稳定性、阻尼临界速度和涡动振型	
ROTSTB	单阀芯转子系统稳定性、阻尼临界速度和涡动振型	
COTRAN	带子结构的多级转子非线性时域瞬态分析	
TORTRAN3	瞬态扭振转子响应	美国，中德州，卡城，德州农工大学，转子动力学实验室
hydrosealt	任意圆弧长度和预载荷的圆柱-轴瓦滑动轴承和轴瓦-静液轴承的刚度、阻尼系数和不稳定阈值速度	
hydroflext	各种类型轴承和密封的刚度、阻尼系数和不稳定阈值速度	
hydrotran	预测支撑在液体油膜轴承上的刚体转子瞬态力响应	
hydrojet	各种混合轴承和各种处理过程流体密封的力系数	
hydroTRC	各种轴承和密封及各种流体的刚度和阻尼系数	
hseal2p	工作在两相流条件下密封的刚度和阻尼系数	
fembear	层流和等热流动条件下圆柱和固定圆弧轴瓦静液与动液轴承的刚度和阻尼系数	
Sfdfem	有限长度挤压油膜减振器执行圆周定心运动的阻尼力系数	
Sfdflexs	在多轴瓦整体式挤压油膜减振器中任意轴承运动和圆周定心轨迹的瞬时流体油膜力	
Hsealm	圆柱环形压力密封的刚度和阻尼系数	
Lubsealn	单面和多面高压油封环及圆柱滑动轴承的刚度和阻尼系数	
ROTECH	针对临界转速的横向转子动力学分析；转子不平衡响应、线性稳定性和非线性瞬态响应，还包括扭转转子动力学分析软件	美国，宾夕法尼亚州，威斯特兰，ROTECH Engineering
ROTOR-E	旋转设备横向转子动力学分析的综合性软件包	美国，德克萨斯州，圣安东尼奥，Engineering Dynamics Inc.
ROTORINSA	致力于预测转子稳态横向动态特性的软件包	法国，里昂，Laboratoire de Mecanique des Structures，LMST INSA Lyon

（续）

软件名称	分析类型	供应商
TURBINE-PAK	适用于非线性多轴承转子-轴承-基础系统的转子动力学分析软件包	澳大利亚，Scientific EngineeringResearch，Mt Best，Vic.
TURBINE-PAK NONLINEAR	该软件设计成研究转子-轴承-基础系统的瞬态响应，包括系统稳定性的损失	
XLrotor	针对旋转机械动力学的一整套分析工具处理转子横向和扭转分析，还包括计算流体油膜和抗磨轴承系数	美国，中德州，奥斯汀，旋转机械分析有限公司
XLTRC	执行完整的旋转机械横向转子动力学分析的一套软件	美国，中德州，卡城，德州农工大学，摩擦机械实验室
XLAnSeal	在层流、湍流和过渡流动状态中环形湍流密封的力和力矩系数	
XLCGrv	定心沟槽定子、湍流、环形泵密封的系数	
XLLaby	转子齿或定子齿气体迷宫密封的刚度和阻尼系数	
XLIsotSL	光滑转子/蜂窝定子环形密封系数	
XLLubGT	压缩机高压油套管密封或泵光滑密封在层流状态的系数	
XLJrnl	固定圆弧和可倾瓦轴承的刚度和阻尼系数	
HLHydPad	层流状态静液和混合轴颈-轴瓦轴承刚度和阻尼系数	
XLTFPBrg	固定圆弧、可倾瓦和弯曲支点静液轴承的刚度和阻尼系数	
XLPresDm	带预载荷的多叶、固定轴瓦圆弧轴承和带安全轨道的压力油楔轴承的刚度和阻尼系数	
XLBalBrg	球轴承刚度系数	
XLLSFD	局部密封挤压油膜减振器的阻尼和质量系数	
XLOSFD	开放式挤压油膜减振器的阻尼和质量系数	
XLSFDFEM	带不同类型端面密封的挤压油膜减振器的阻尼系数	
XLPIMPLR	离心泵叶轮刚度、阻尼和质量矩阵	
XLWachel	离心压缩机叶轮失稳交叉耦合力系数	
XLClrEx	无壳涡轮失稳交叉耦合刚度系数	

9.4 振动测量和技术

9.4.1 测量单位

振动测量中最常用的单位如下：

① 位移（峰峰值）：公制单位为毫米（mm）或微米（10^{-6}m），英制单位为 thou 或密耳（0.001 英寸）。

② 速度（峰值，RMS 或“有效值”）：公制单位为 mm/s 或 m/s，英制单位为 in/s；

③ 加速度（RMS）：公制单位为 g 或 m/s^2，或者英制单位为 g 或 in/s^2；

④ 频率：在两种单位中，均是赫兹（Hz）或转/分（r/min）；

⑤ 相位角：在两种单位中，均是（°）。

9.4.2 测量参数及方法

在稳态条件下，旋转机械的振动是复杂波形的周期信号。在不稳定运行或紊乱条件下，信号可能变成随机的。在几种特定的机械中，由于内部的冲击和阻尼，也可能出现非周期性的瞬态信号。根据简单的弹簧-质量系统和数学傅里叶分析的方法，所有周期性的复杂波形可以归结为一个正弦函数级数之和。处理随机信号时，用平均法将其简化为周期信号以方便分析。

振动的定量评价，可以使用运动振幅、速度、加速度或力的大小来表示。其他关键参数，例如频率、相位角和信号随时间变化的性质在充分描述运动时很重要。由于真正的信号并不是纯正弦波，确定信号的大小是很重要的，例如峰值、峰峰值或者均方根值（RMS）。测量所选参数的变化贯穿整个工业，并依据机械的性质、复杂程度、机械的类型，以及测量目的而变化。根据工业和旋转机械类型，对测量参数和技术的大体分类见表 9-4。

① 振动信号的位移幅值、速度、加速度、频率以及相位角是可以用来评估旋转机械运行状态的一些参数。

② 由典型的旋转机械产生的振动信号的性质是复杂的，因此需要不同的数学分析方法以及信号平均法，以将它们简化为简单的、可解释的形式。

表 9-4 测量参数及技术

测量/技术	描　　述	使用时间/地点
加速度	具有价值的高频振动信号或振动力	齿轮箱、滚动轴承、燃气/蒸汽涡轮机，主要用于国防和航空工业
Bode/奈奎斯特频率图	绘制振幅、相位角与速度的关系图	观察使用滑动轴承机器的临界速度和不稳定状态
倒频谱分析	对数功率谱的傅里叶逆变换	检测齿轮箱、滚动轴承和电动机中的谐波和边频带
状态监测	根据连续或周期性监测基础，分析机械产生的振动信号、确定其工作状态	应用在使用预测性维护程序的关键设备上，可以减少设备的过余度
位移峰峰值 (a)绝对值	转子振动的绝对位移振幅	当转子质量远远大于定子质量时使用。大的电动机、发电机和风扇
(b)相对值	转子振动的相对位移振幅	通常用于使用滑动轴承或紧密间隙密封的机床
(c)外部	定子部件振动的绝对位移振幅	低速机械(低于 1000r/min)
模态分析	测量结构对于给定力的振动响应。给定力可以是周期力或冲击力	用于为了确定结构的模态质量、刚度和阻尼特性，也可用于测量结构固有频率
轨迹分析	旋转时轴心运动路径	诊断使用滑动轴承的机械。提供轴承轴颈运动的轨迹图

（续）

测量/技术	描　　述	使用时间/地点
极坐标图	机械运行不同速度下的振幅和相位的极坐标图	与波特图相似，可以检测临界转速及不稳定性。模态特性也可从极坐标图中提取
相位角	振动信号相位角	用于动平衡、诊断临界转速和不对中问题
滚动轴承分析 (a)加速度	测量所有通过频率的振幅和离散频率加速度	当损伤已经开始、噪声增大时。用于5Hz～5kHz。
(b)冲击脉冲法	高频共振频率调谐到检测仪的固有频率处	失效早期检测，测量超声波噪声，是一种专门技术
(c)包络技术	轴承缺陷产生周期性冲击，引起轴承部件谐振。解调和包络技术用来检测冲击(故障)频率	用来检测早期故障(超声波噪声)，并用于损伤后期(噪声)检测
(d)尖峰能量法	测量在5～45kHz范围内的宽频加速度	用来早期故障检测(超声波噪声)，并用于损伤后期(噪声)检测
(e)峭度方法	在5～80kHz范围内归一化的加速度概率密度四阶矩	用来早期故障检测(超声波噪声)，并用于损伤后期(噪声)检测
启停分析(瀑布/梯形图)	频率或时间谱-时间或速度三维图	用于各种振动问题的诊断。用于分析瞬态信号
谱分析	振动幅度-频率图	用于诊断，以确定频率、谐波、边频带、拍、传递函数等，并在离散频率上控制振动级
趋势分析	在较长的时域内，周期性采集振动数据	用于评估机械状态的预测性维护中
时间平均	通过在同一点触发重复信号波形，平均时间记录	用于变速器的故障分析。可以减少信号中的非同步成分，并提高信噪比
时域分析	振幅随时间变化图	用于观察振幅调制、拍、冲击、瞬态响应和相位角。诊断时十分有效
速度峰值或RMS	振动信号的速度幅值	此参数在工业中应用甚广，用于监测振动。峰值读数与峰值应力有关，RMS和振动能量有关

9.5 振动控制和诊断

9.5.1 标准和规范

由于在旋转机械中经常出现某种程度的振动，为了将振动控制在合理范围内，一些判断“多少是过多”的方法被提出。当这样的判断方法不是建立在一个科学的方法上时，将会有推测的空间，并且这个推测将取决于作出决策的人，如制造商、最终用户、主管机关等。由于振动是旋转机械性能的关键提示参数，所以不同的兴趣小组为了各种目的对振动进行监测。振动可被用来评估质量和工艺，或作为使用者和制造商之间可接受的共同基础。从安全的角度来说，操作者可以根据振动限值，建立正常、报警和停机

等级。振动等级同样被用在确定旋转机械是否需要维护上。

Rathbone（1939）是第一个发表机械振动限值规范的人，依据的是他作为保险代理人的经历。从这以后，很多个人、组织以及主管机构都制定了很多旋转机械的振动等级规范和标准。表 9-5 所列为较常用的标准和规范。需要指出的是这些都是依据经验制定，因此将会与科技水平同时发展。

表 9-5　振动标准和规范

年份	作者/组织	参考文献编号	题目/描述
2002	AGMA	ANSI/AGMA 6000-B96	齿轮箱线性振动测量规范
2003	API	ANSI/API std 541-2－3	500hp 及以上鼠笼式模绕感应电动机
1997	API	API STD 546，第二版	500kVA 及以上的无刷同步电机
2004	API	API STD 610/ISO 13709	用于石油、石化和天然气工业的离心泵
1997	API	API STD 611，第四版	石油、化工和天然气工业中的通用蒸汽涡轮机
2005	API	API STD 612/ISO 10437，sixth edition	石油、石化和天然气工业-蒸汽涡轮机-特殊用途应用
2003	API	API STD 613，第五版	石油、石化和天然气工业特殊用途的齿轮箱
1998	API	API STD 616，第四版	石油、石化和天然气工业中的蒸汽涡轮机
2002	API	API STD 617，第七版	石油、石化和天然气工业中轴流式和离心式压缩机和膨胀压缩机
2000	API	API STD 670，第四版	机械保护系统
2004	API	API STD 672，第四版	用于石油、化工以及天然气行业服务的整体式齿轮箱、离心式空气压缩机
2001	API	API STD 673，第二版	特殊用途风机
1997	API	API STD 677，第二版	石油、石化和天然气工业的通用变速箱
1996	API	API STD 681，第 1 版	用于石油、石化和天然气工业的液环式真空泵
2000	API	API STD 685，第 1 版	用于石油、重型化工以及天然气工业的无密封离心泵
1965	BDS	BDS 5626-65	电动旋转机械的振动测量
1964	Blake，M. P.	烃加工，1964 年 1 月	维修新振动标准
1963	CAGI		离心式压缩机的在服务标准
1975	CAGI		离心式空气压缩机标准
1971	CSN	CSN 011410	非平衡固体机械元素允许限值
1968	Dresser Industrial		Clark 离心压缩机的振动通用规范
1966	Gosstandart	GOST 12379-66	电动旋转机械的振动测量
2002	HI	ANSI/HI 9. 6. 4	立式离心泵——振动测量和允许值

（续）

年份	作者/组织	参考文献编号	题目/描述
1996	IEC	IEC 60034-14	旋转电动机械，第14部分：中心轴高度大于等于56mm的特定电机的振动——测量、评价以及振动限值
1964	IRD	IRD #305D	通用机械振动烈度图
1995—2001	ISO		机械振动——在非旋转部件上测量以评价其机械振动
		ISO 10816-1：1995	部分1：通用规范
		ISO 10816-2：2001	部分2：陆地上的汽轮机以及功率超过50MW的发电机，正常运行转速为1500r/min、1800r/min、3000r/min和3600r/min。
		ISO 10816-3：1998	部分3：实地测量时额定功率大于15kW，额定转速在120～15000r/min之间的工业机器
		ISO 10816-4：1998	部分4：不包括飞机使用的涡轮驱动装置
		ISO 10816-5：2000	部分5：水力发电机组厂和泵站的机械设备
2002	ISO		机械振动——配置了主动磁轴承的旋转机械振动
		ISO 14839-1：2002	部分1：词汇表
		ISO/CD 14839-2：2004	部分2：振动评价
1996—2001	ISO		非往复式机械的机械振动——旋转轴的测量及评价标准
		ISO 7919-1：1996	部分1(1996)：一般规范
		ISO 7919-2：2001	部分2(2001)：陆地上的汽轮机以及功率超过50MW的发电机，正常运行转速为1500r/min、1800r/min、3000r/min和3600r/min。
		ISO 7919-3：1996	部分3(1996)：耦合的工业机器
		ISO 7919-4：1996	部分4(1996)：燃气轮机设备
		ISO 7919-5：1997	部分5(1997)：水力发电机组厂和泵站的机械设备
1993	ISO	ISO 8579-2	齿轮验收规范，部分2：齿轮箱在验收试验时的机械振动测定
2004	ISO		滚动轴承——振动的测量方法
		ISO 15242-1：2004	部分1：基础
		ISO 15242-2：2004	部分2：带有圆柱孔和圆柱外表面的向心球轴承

（续）

年份	作者/组织	参考文献编号	题目/描述
2004	ISO	ISO/CD 15242-3	部分 3：具有圆柱孔和圆柱外表面的调心滚子轴承和圆锥滚子轴承
1959	Kruglov，N. V.	Teplonerg，8(85)，1959	涡轮机械振动标准
1967	Maten，S	烃加工，1967 年 1 月	新振动速度标准
1983	McHugh，J. D.	J. Lub. Tech. ，Trans. ASME，1983，105	流体油膜径向滑动轴承轴的振动烈度估计
1974	MIL	MIL-STD-167-1	船舶设备的机械振动，类型Ⅰ：环境，类型Ⅱ：内部激励
2003	NEMA	NAME MG 1—2003	电动机和发电机，部分 7——机械振动——测量、评价和限值
1991	NEMA	NAME SM 23—1991	用于机械驱动的蒸汽涡轮机
1991	NEMA	NAME SM 24—1991	陆地上蒸汽轮发电机设备，0-33000kW
1965	PKN	PN-65/E-04255	电动旋转机械的振动测量
1939	Rathbone，T. C.	电厂工程，1939 年 11 月	振动限值
1964	VDI	VDI 2056	机械振动的评价标准
1982	VDI	VDI 2059 P1	汽轮机轴振动　测量和评价原理
1990	VDI	VDI 2059 P2	发电站蒸汽轮机轴振动测量和评价
1985	VDI	VDI 2059 P3	工业汽轮机轴振动的测量和评价
1981	VDI	VDI 2059 P4	燃气轮机轴振动的测量和评价
1982	VDI	VDI 2059 P5	液压机械轴振动的测量和评价
1949	Yates，H. G.	Trans. N. E. Coast Inst. Engrs Ship Builders，Vol. 65，1949	船用齿轮式涡轮机的振动诊断

ISO 10816 部分 1 ~ 部分 5 是一套综合标准，其通过对旋转机械上不旋转的、结构部件（如轴承座）的振动响应进行测量而制定的，目的在于评估旋转机械振动。图 9-14 所示为这些标准制定的振动测量点。类似，ISO 7919 部分 1 ~ 部分 5 通过对旋转轴的振动测量的，目的也是评估振动。这些标准涵盖了大部分广泛使用的机械，并与操作检测和设备验收试验相关。表 9-6 和表 9-7 由这些标准派生，并作为旋转机械振动限值的一般规范。对于一些具体的细则，包括标准的限值，建议读者参阅 ISO 10816 和 ISO 7919 标准的相关章节。

9.5.2　振源识别

振动是旋转机械的固有属性。振动可由多种原因造成：设计不当、实际生产限制、安装不当、系统环境影响、部件劣化、在设计限度以外工作，或以上原因的组合。有些时候，由于和几种振源有相似症状，所以找出振动的确切原因是很困难的。表 9-8 列出了旋转机械中较常见的振动产生原因及其症状。

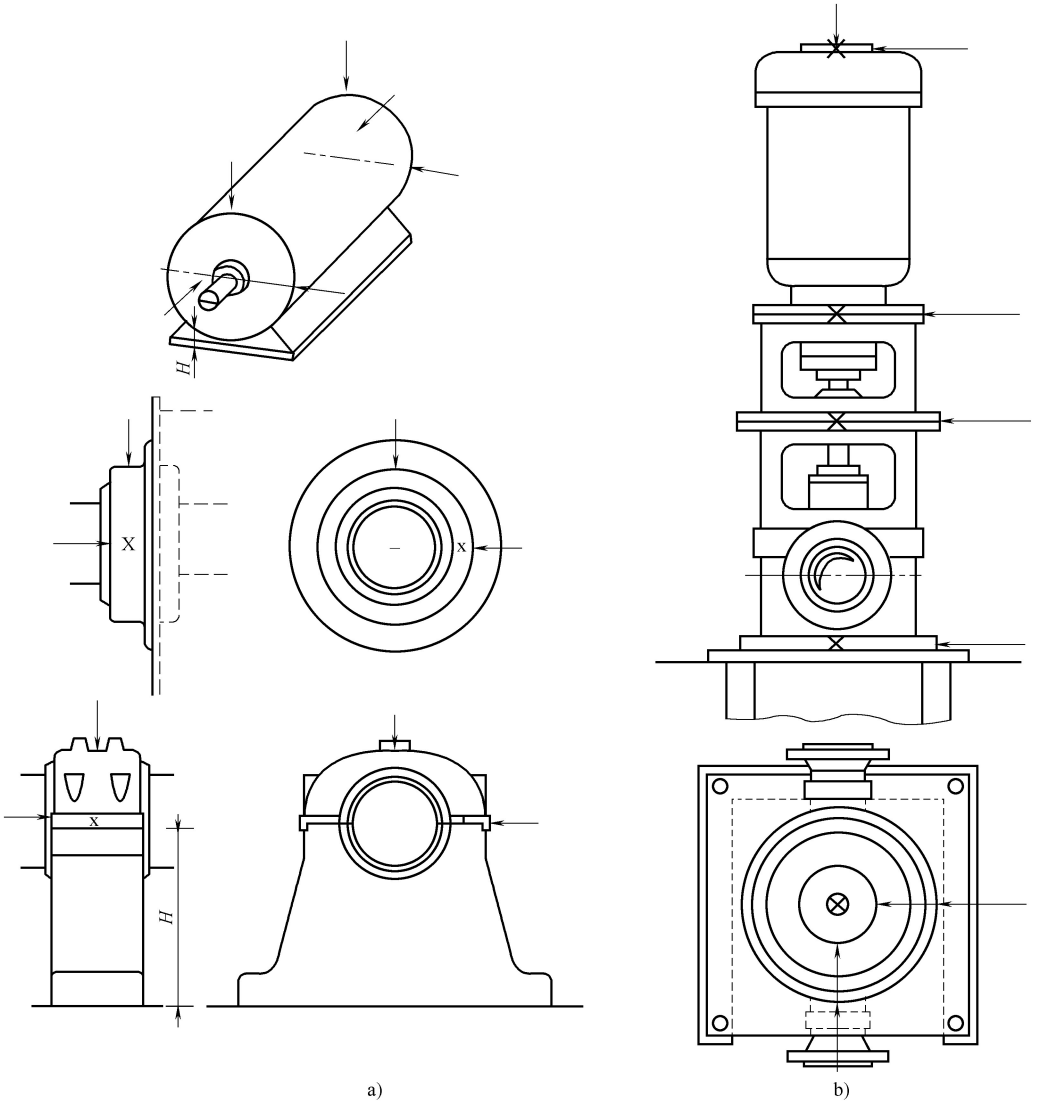


图 9-14 振动测量点

a）测量点 b）立式机械设备的测量点

（来源：ISO 10816-3，1998-05-15.）

表 9-6A 在旋转机械非旋转部件上测量的可接受振动级

机械类型	功率范围	速度范围/(r/min)	适用的振动级	
			刚性支撑	弹性支承
蒸汽涡轮机	$15 \leqslant P \leqslant 300$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V1 和 D3	V3 和 D7
	300kW$\leqslant P \leqslant 50$MW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V3 和 D5	V6 和 D8
	$P > 50$MW	$N < 1500$ 或 $N > 3600$	V3 和 D5	V6 和 D8
	$P > 50$MW	$N = 1500$ 或 1800	V5	V5
	$P > 50$MW	$N = 3000$ 或 3600	V7	V7

机械类型	功率范围	速度范围/(r/min)	适用的振动级	
			刚性支撑	弹性支承
燃气涡轮机	$15 \leqslant P \leqslant 300$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V1 和 D3	V3 和 D7
	300kW$\leqslant P \leqslant 3$MW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V3 和 D5	V6 和 D8
	$P > 3$MW	$3000 \leqslant N \leqslant 20000$	V8	V8
水轮机和涡轮泵—水平布置机械	$P > 1$MW	$60 \leqslant N \leqslant 300$	N/A	V4
	$P > 1$MW	$300 < N \leqslant 1800$	V2 和 D6	N/A
垂直布置机械	$P > 1$MW	$60 < N \leqslant 1800$	V2 和 D6	N/A
	$P > 1$MW	$60 < N \leqslant 1000$	V2 和 D6	V4 和 D9
离心泵				
分离式驱动	$P > 15$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V3 和 D5	V6 和 D4
整体式驱动	$P > 15$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V1 和 D1	V3 和 D2
电动机				
轴高 $H \geqslant 315$mm	$P > 15$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V3 和 D5	V6 和 D8
轴高 $160 \leqslant H < 315$mm	$P > 15$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V1 和 D3	V3 和 D7
发电机(不包括水力发电站的)	$15 \leqslant P \leqslant 300$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V1 和 D3	V3 和 D7
	300kW$\leqslant P \leqslant 50$MW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V3 和 D5	V6 和 D8
	$P > 50$MW	$N < 1500$ 或 $N > 3600$	V3 和 D5	V6 和 D8
	$P > 50$MW	$N = 1500$ 或 1800	V5	V5
	$P > 50$MW	$N = 3000$ 或 3600	V7	V7
发电机及电动机(用于水力发电站)—水平布置机械	$P > 1$MW	$60 \leqslant N \leqslant 300$	N/A	V4
	$P > 1$MW	$300 < N \leqslant 1800$	V2 和 D6	N/A
垂直布置机械	$P > 1$MW	$60 < N \leqslant 1800$	V2 和 D6	N/A
	$P > 1$MW	$60 < N \leqslant 1000$	V2 和 D6	V4 和 D9
压缩机、旋转式机械、鼓风机和风扇	$15 \leqslant P \leqslant 300$kW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V1 和 D3	V3 和 D7
	300kW$\leqslant P \leqslant 50$MW	$120 \leqslant N \leqslant 15000$	V3 和 D5	V6 和 D8

表 9-6B　不同等级下振动速度限值　(单位 mm/s, RMS)

振动级	A 区域	B 区域	C 区域	警戒值	跳闸值
V1	1.4	2.8	4.5	3.5	5.6
V2	1.6	2.5	4.0	3.1	5.0
V3	2.3	4.5	7.1	5.6	8.9
V4	2.5	4.0	6.4	5.0	8.0
V5	2.8	5.3	8.5	6.6	10.6
V6	3.5	7.1	11.0	8.9	13.8
V7	3.8	7.5	11.8	9.4	14.8
V8	4.5	9.3	14.7	11.6	18.4

表 9-6C 对于不同振动级的最大位移限值 （单位：μm，RMS）

振动级	A 区域	B 区域	C 区域	警戒值	跳闸值
D1	11	22	36	28	45
D2	18	36	56	45	70
D3	22	45	71	56	89
D4	28	56	90	70	113
D5	29	57	90	71	113
D6	30	50	80	63	100
D7	37	71	113	89	141
D8	45	90	140	113	175
D9	65	100	160	125	200

注：区域 A：新近投入使用的机器应该落在这个区域内。区域 B：对于长期工作的机械，振动落在这个区域中认为是可以接受的。区域 C：振动落在这个区域内，通常认为机器是不满足长期工作的。这样的机器可以在这个条件下进行短期操作。警戒值：该值的选择通常与根据经验决定的基准值有关。然而，我们建议警戒值的选择应该不能超过本书的给定值。跳闸值：该值通常与机器的机械完整性有关，并且对于相同设计的机器，该值一般是相同的。我们建议跳闸值的选择应该不能超过本书的给定值。注意：①测量的振动信号是宽带的，且频率范围取决于机器的类型。除了 >10000r/min 的高速机器，通常频率范围都是 2 ~ 1000Hz，其中上限值应该至少为 6 倍的转动频率。②通常的做法是根据宽带的振动速度 RMS 来评价旋转机器，因为宽带的振动速度 RMS 和振动能量等级有关。然而，其他参数比如振动位移或者加速度也是可以选择的。尤其是低速机器当 1 倍谐波成分为主导时，会有不可接受的大位移。因此，速度和位移的标准都需要满足。③由于在旋转机器上所测量的一般振动波形本质上是复杂的，所以在宽带速度、位移和加速度之间没有简单的关系。④振动测量应该在轴承支撑座或者其他结构部件上进行，它们对机器的动态力产生足够的响应。建议的轴承座测点位置如图 9-14 所示。⑤对于特定类型的机器，轴向振动的限值会与径向的不同。此外，在同一个机组，特别是水力发电机组，支撑与支撑的适用等级也能不同，这取决于其分类作为刚性还是柔性的支撑。⑥高于振动限值，适用于稳定-状态/正常操作条件的机械。如果振动级对于操作状态很敏感，那么对于超出稳定状态的工作条件的评估就要基于不同的标准来进行。⑦此处规定的振动限值不应用来评估滚动轴承的工作条件，尽管它包含了有各种轴承的机器。⑧必须意识到，对于非旋转部件振动测量本身并不能作为评价机器状态的唯一基准。对于特定形式的机器，通常也会基于旋转轴上的测量来评价振动。⑨只有当支撑在特定方向上的固有频率超过主激振频率至少 25% 时，可以认为支撑在该方向上是刚性的，否则认为是弹性的。在某些情况下，支撑可能在某一方向上是刚性的，而在另一方向上是弹性的。⑩对于水力机械设备，主要的不同是径向轴承支撑的布置上。对于支撑形式的评估，推荐读者参考 ISO 10816-5。

表 9-7A 在旋转轴上测量的旋转机械的可接受振动级

机械类型	功率范围	速度范围/(r/min)	适用的振动级	
			相对位移	绝对位移
蒸汽涡轮机	$P \leqslant 50$kW	$1000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—
	$P > 50$MW	$N = 1500$	D5	D7
	$P > 50$MW	$N = 1800$	D4	D6
	$P > 50$MW	$N = 3000$	D2	D5
	$P > 50$MW	$N = 3600$	D1	D3
燃气涡轮机	$P > 3$MW	$3000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—
	$P \leqslant 3$MW	$1000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—
用于水力发电站和抽水厂的水力涡轮和泵	$P > 1$MW	$60 \leqslant N \leqslant 1800$	D9	D9

（续）

机械类型	功率范围	速度范围/(r/min)	适用的振动级	
			相对位移	绝对位移
离心泵	所有功率	$1000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—
电动机	所有功率	$1000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—
发电机(不包括水力发电站的)	$P \leqslant 50$kW	$1000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—
	$P > 50$MW	$N = 1500$	D5	D7
	$P > 50$MW	$N = 1800$	D4	D6
	$P > 50$MW	$N = 3000$	D2	D5
	$P > 50$MW	$N = 3600$	D1	D3
发电机及电动机(用于水力发电站)	$P > 1$MW	$60 \leqslant N \leqslant 1000$	D9	D9
	$P > 1$MW	$1000 < N \leqslant 1800$	D8	—
压缩机、旋转式机械、鼓风机和风扇	所有功率	$1000 \leqslant N \leqslant 30000$	D8	—

表 9-7B　对于不同振动级的最大位移限值-峰峰值 $S_{p\text{-}p}$　（单位：μm）

振动级	A 区域	B 区域	C 区域
D1	75	150	240
D2	80	165	260
D3	90	180	290
D4	90	185	290
D5	100	200	320
D6	110	220	350
D7	120	240	385
D8	$4800/\sqrt{n}$	$9000/\sqrt{n}$	$13200/\sqrt{n}$
D9	$10^{(2.3381-0.0704\log n)}$	$10^{(2.5599-0.0704\log n)}$	$10^{(2.8609-0.0704\log n)}$

区域 A：新近投入使用的机器应该落在这个区域内。区域 B：对于长期工作的机械，振动落在这个区域中认为是可以接受的。区域 C：振动落在这个区域内，通常认为机器是不满足长期工作的。这样的机器可以在这个条件下进行短期操作。注意：①测量的振动信号是宽带的，且是轴振动位移的峰峰值。②相对位移是轴和合适结构部件比如轴承座之间的相对振动位移。绝对位移是参考轴相对于惯性坐标系的振动位移。③相对测量使用的是非接触式传感器。绝对读数是通过如下方法获得：将振动传感器安装在轴探头上，使得它可以直接测得轴的绝对位移，或者将非接触传感器测得的轴的相对位移与振动传感器测得的支撑振动相结合。把这些信号的调理输出进行矢量相加，就得到了绝对轴运动的测量结果。④振动评估标准依赖于各种因素并且对于不同机器也会采用不同的标准。轴承类型、间隙和直径都是考虑的有关因素，所采用的标准也要同轴承直径间隙 C 进行比较，并调整到合适值。典型值为：区域 A $\leqslant 0.4C$；区域 B $\leqslant 0.6C$；区域 C $\leqslant 0.7C$。⑤以上振动限值用于稳定状态或者正常工作条件下的机器。如果振动级别对于操作条件非常敏感，那么对于超出稳态工作条件的评估就要基于不同的标准了。⑥每个位置的振动读数应该由一对传感器得出，这两个传感器布置在垂直于轴线的位置上，并互成 90°角。振动限值适用于每个测量方向。⑦在每个测量位置上机械和电的传感器伸出量都需要评估，并且 < 允许界限的 25% 或者为 6μm，以较大值为准。⑧应该意识到对转轴的振动测量不是评估机器状态的唯一基准。在特定类型的机器中，基于对非旋转部分测量的振动评估也是常见的做法。⑨对于测量位置、方向和机器种类来说，警戒值的设置应该相对于经验决定的基础值，必须给出警告值，该值要显著高于基础值。最大的警戒值应为 $\leqslant 0.75C$。⑩跳闸值应该基于保护机器的机械完整性的原则。对于轴承损坏的考虑是基本的做法，最大的跳闸值应设置为 $\leqslant 0.9C$。

表 9-8 振源识别

原因	主频率	频谱、时间域,轨迹形状	特性、修正、评论
质量不平衡	1 ×	1 倍谐波频率幅值较高,其他谐波处幅值低;圆或椭圆	通过实验室或现场动平衡解决
轴弯曲	1 ×	降速图表明在临界速度处振动降低	用可接受的方法使轴变直
不同轴/不对中	1 × 和 2 ×	1 倍和 2 倍谐波频率处振幅都很高;轨迹为 8 字形	在操作条件下重新对中;减少载荷引起的不同轴,如喷嘴载荷
滑动轴承磨损 临界重力	1 ×、1/2 ×;2 ×	1 倍和 0.5 倍谐波频率处振幅都很高 降速图表明在 1/2 临界速度处有激励	很难平衡 可以用平衡来修正
轴不对称	2 ×	降速图表明在 1/2 临界速度处有激励	所以键槽都在同一平面时的多级机器中经常发生;可以通过岔开键槽的位置来修正
轴开裂	1 × 和 2 ×	1 倍谐波频率幅值较高;降速图表明在 1/2 临界速度下有激励	确认和探测裂痕位置需要 NDE 技术
部件松动	1 倍和更高阶谐波成分,还有次谐波成分	1 倍谐波频率幅值较高,其他倍数谐波和次谐波处幅值低	增加垫片和锤头敲打可以暂时解决这个问题
联轴器锁死	1 × 和 2 ×	1 倍和 2 倍谐波频率处振幅都很高;轨迹为 8 字形	停止启动可能改变振动的形式
热力学不稳定	1 ×	随温度变化的 1 倍谐波频率幅值较高。相位角可能改变	适当的预热或者综合平衡可以解决这个问题
油膜涡动	< 1/2 ×,通常为 0.35 × 到 0.47 ×	增速图表明 1/2 倍谐波成分增加,并锁定固定谐波值 < 1/2 倍谐波成分	因为过大的间隙、润滑油黏度和轴承卸载而引起的暂时问题;如果是设计问题的话,可以将原轴承换成可倾瓦轴承
内部摩擦	1/4 ×,1/3 ×,1/2 ×,2 ×,3 ×,4 × 等	降速图表明振幅会减少甚至消失;轨迹是环线	情况可能会日益严重;在接触表面之间的擦伤或热聚集都会引起失灵和轴失效
转子中困有液体	0.8 × 到 0.9 ×	时间域信号会显示出拍	平衡转子会减少振动
有缺陷的滚动轴承	轴承缺陷频率处	峰值出现在缺陷频率处	冲击脉冲测量可以用来检测问题
齿轮受损	齿轮啮合频率	峰值在带有边带的齿轮啮合频率处。时间域信号中会出现脉冲	精确确定受损性质需要进一步的分析

（续）

原因	主频率	频谱、时间域，轨迹形状	特性、修正、评论
电动机问题	1×（线路频率） 2×（线路频率）	峰值在带有边带的1倍和2倍线路频率处；当电动机电源关闭时消失	对于两极电动机的情况，可能与机械的原因混淆，因为旋转频率和线路频率一样
套管变形	1×	1倍谐波频率幅值较高，可能随时间改变	由高的喷嘴载荷、外壁不能自由扩张、软支撑或基础变形引起
管道力	1×，2×	1倍和2倍谐波频率处振幅都很高	轴承或者连接装置之间不同轴引起的
转子和轴承临界转速	1×	1倍谐波频率幅值较高，在降速图上1倍谐波成分快速降低，还可能表示出大的相位角度的改变	多见于原设计为固定高速运转的机器，后来改成可变速机器
结构共振	1×，2×	1倍谐波频率幅值较高，在2倍频谐波处幅值不大；在降速图中可以很容易识别	增加或减小结构的刚度或者增加或减少质量来改变固有频率
转子滞后现象	0.65×到0.85×	在0.65～0.85倍谐波频率之间，频谱值较大	发生有过渡配合的组合型转子中
液压原因	1×（叶片通过频率） 2×（叶片通过频率）	在1倍和2倍叶片通过频率处幅值较高	常见于离心泵，由于回流或者在叶轮和外壳间缝隙不够引起

9.5.3 振动分析-案例研究

过去，离心泵在一个固定的转速下工作、并通过节流手段达到所需流量变化的做法是常见的。这一做法促使泵在低效率条件下工作，并导致能量浪费，产生剧烈振动并使部件过早失效，使泵中流量变化的现行方法是通过速度变化取得的。这一方法消除了节流，并允许泵在靠近最佳效率点工作，在该工作点能量没有浪费，且振动最小。然而，如下所述，泵电动机不同的运行速度是一个很宽的范围，这将导致一些很麻烦的问题。

描述：下面的案例研究取自石油管路泵的应用，其中带有VFD（变频器）的泵电动机安装在从加拿大阿尔伯达到美国明尼苏达的新的石油管道中。VFD经常用在管道工业中的大功率泵上，以消除节流带来的功率损失，减少电动机启动时的浪涌电流，并提供更好的操作灵活性。然而，变速操控会引发泵、电动机和联轴节的振动问题，这个问题是固定速度泵不常遇见的。在特定的工作速度下，这些泵和电动机会产生突如其来的、大的扭转振动和横向振动。转子的扭转共振、电动机外壳的共振、泵内部的共鸣和排放管道都是泵电动机剧烈振动的振源。关于对这些问题的诊断以及采取纠正措施来解决这些问题的细节介绍如下：

泵的形式：泵分为离心式，两级式，双蜗壳水平泵，带有6个叶片的叶轮机，通常都设计为固定速度工作。在叶片通过频率为6×转速和12×转速时，通常会产生压力脉动。

电动机：电动机为3000hp[㊀]，两级水平异步电动机，设计运行转速3600r/min。

㊀ 1hp=735.5W。

驱动源：驱动源是电流源型逆变器的 VFD。这些驱动器在 6 × 和 12 × 操作频率下产生振荡转矩。

联轴器：通常使用带有分隔器的弹性盘联轴器。这些联轴器的扭转阻尼容量很小。

速度范围：速度范围是从 1440r/min（24Hz）~3900r/min（65Hz）。

参考：参考图 9-15 ~ 图 9-18。

对于二阶和三阶扭转临界转速共振（图 9-15）来说，当 6 倍的旋转转速分别对应 92Hz 和 268Hz 的临界转速时，二阶和三阶扭转模态被激发。6 倍的扭转激励是由泵内的压力脉动引起的。瀑布图（图 9-15a）在关闭电动机电源后转速下降时得到的。

同样的图（图 9-15b）在转速上升时得到，显示了激振频率相同，但振幅不同。由于泵和马达产生 6 倍旋转转速激振，就说明两个激振转矩之间存在相位差。

关注这点很重要：常规的振动监视装置无法探测到扭转共振问题。这种问题的唯一的表现是从联轴器中发出的不寻常的“咔嗒咔嗒”噪声。

至于电动机外壳的共振（图 9-16），电动机的 2 倍旋转转速振动占主导地位，出现在 118Hz 处的峰值对应的是电动机结构的固有频率。在瀑布图上，固有频率对应的激励频率是与坐标轴平行的。在激励中出现的包括 6 倍转速频率在内的谐波成分，不占主导地位。

至于泵在叶片通过频率处的振动（图 9-17），6 倍叶片通过频率在所有的工作速度下都很显著。在 238Hz 的峰值，可能由于排放管路的声学共振引起。由于在所有转速下不存在 238Hz 的激励，所以看起来 238Hz 不可能对应结构的固有频率。

至于泵中交叉管路的共鸣（图 9-18），从第一级排放到第二级吸入，在交叉管路上的动态压力脉动测量显示了在 540Hz 时的共鸣。在所有速度上，540Hz 的激励都连续出现，确认了交叉管路的声学固有频率。当 6 倍转速压力脉动频率恰好与声学固有频率相一致时，就达到了共鸣条件，压力脉动幅值增加了几乎 30 倍。

至于修正做法，对于工作速度范围很宽的泵来说，消除所有的激振力频率与所有的固有频率重合是一件不切实际的事情。因此，系统需要设计为将激振力的幅值控制到可接受的级别，以使得操作更加安全、可靠。这可以通过增加阻尼或直接减小激振力来实现。基于这些原则，我们提出下列修改方法来解决这些问题：

1. 扭转共振

——使用具有高度扭转阻尼的电磁式联轴器，可以减少扭转激振力的值，使得转子的扭转应力控制在可接受的范围内。

——由于泵和变频器都在 6 倍旋转速度处产生了激振，因而它们的影响可能会相互叠加。选择 5 叶片或者 7 叶片的叶轮可以消除这种可能性。

——可以在变频器中使用额外的滤波器来减少 6 倍或 12 倍谐波成分的周期性扭转激励。

——在其频率的 ±10% 内，泵的运行都有可能产生扭转共振，建议避免在此范围内操作。

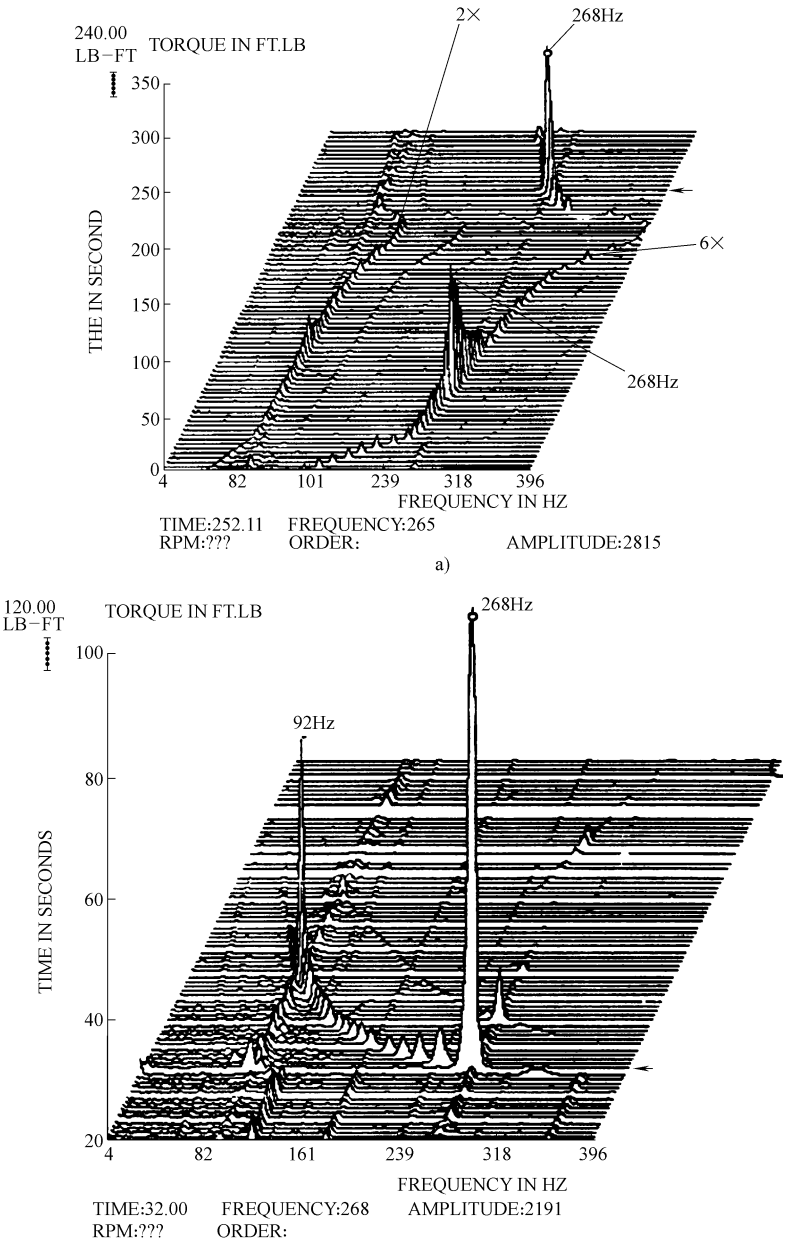


图 9-15　降速图

a）扭转共振增速和降速图　b）扭转振动降速图

（来源：Private communique，Insight Engineering Services Ltd. Alta Canada.）

2. 2 倍谐波成分处电动机壳体共振

——尽管 2 倍谐波成分的振动是主要的，但是它的幅值是在可接受的范围内的。实

际上，2 倍谐波成分振动也会在泵中出现，这就表明 2 倍谐波成分振动可能是由泵和电动机不对中或不同轴造成的，这可以用合适的对中来纠正，以减小 2 倍谐波成分激振力。在某些情况下，由于电动机的转子和定子之间空气间隙的不等，所以电动机会产生 2 倍谐波成分振动。在这种条件下，电动机轴承精确定心通常可以解决这一问题。

3. 在叶片通过频率处的泵振动

——通常，在叶片通过频率处的剧烈振动是由在叶轮排除液体时压力脉动产生引起的。可以对泵做一些液压改装，以减少叶片通过频率处的脉动幅值，最常用的方法就是增加叶轮排放叶片和扩压器/蜗壳之间的间隙。此外，改变叶轮叶片和扩压器/蜗壳叶片数量之比，可以帮助减少叶片通过频率的压力脉动和所引起的振动。

4. 泵内交叉管路声音共鸣

——泵一旦加工完成，改变交叉管路的声学固有频率是不可能的。然而，激振力和在叶轮排除液体时产生的压力脉动，可以利用上述提出的方法以于减少。

① 旋转机器中振动问题的根本原因可以通过对于振动信号的仔细研究和分析来确定。

② 已经制定了工业和国际振动标准和规范，确保旋转机器安全可靠的工作。

③ 装备制造商、使用者、保险公司和公共利益组织都使用振动标准来将振动控制在可接受的范围内。

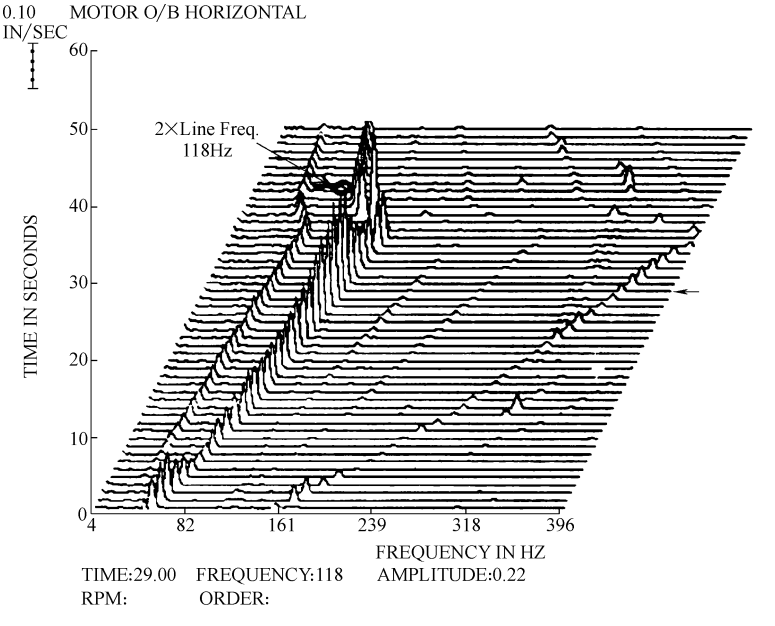


图 9-16 电动机外壳共振

（来源：Private communique，Insight Engineering Services Ltd. Alta Canada.）

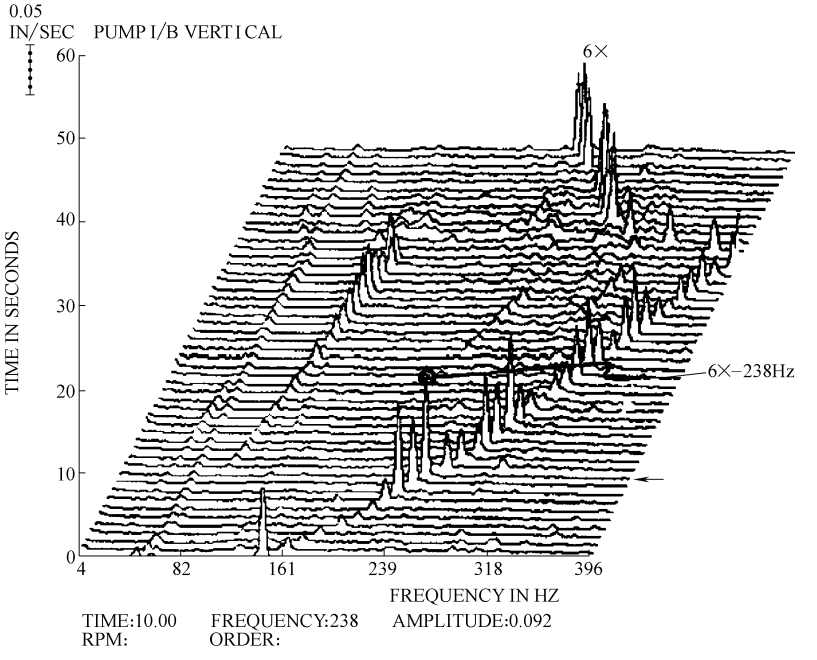


图 9-17 泵轴承座共振

（来源：Private communique，Insight Engineering Services Ltd. Alta Canada.）

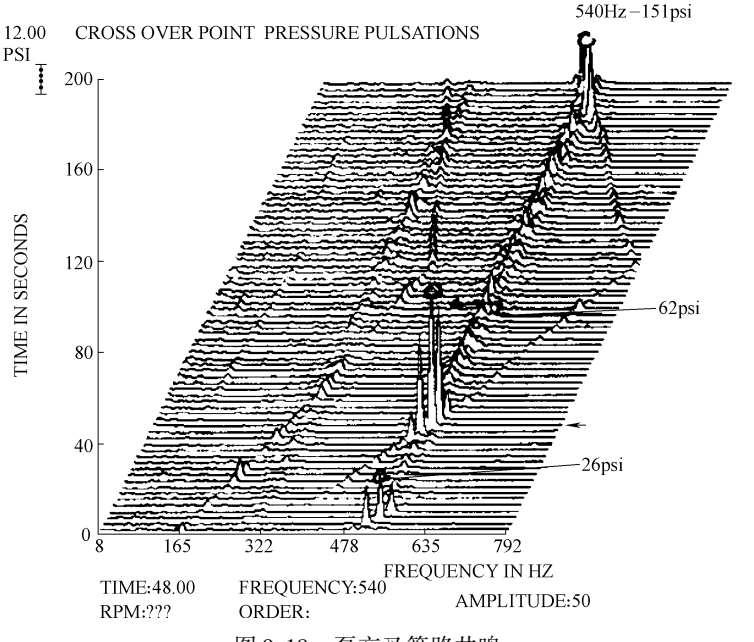


图 9-18 泵交叉管路共鸣

（来源：Private communique，Insight Engineering Services Ltd. Alta Canada.）

参考文献

Adkins, D. and Brennen, C. 1986. Origins of hydrodynamic forces on centrifugal pump impellers, NASA CP No 2443, p. 467, In *Proceedings of a Workshop held at Texas A&M University*, Dallas, TX.

Alford, J., Protecting turbomachinery from self-excited rotor whirl, *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 87, 333, 1965.

API Standard 610, 8th ed., Centrifugal Pumps for General Refinery Service, 1995.

Archer, J.S., Consistent mass matrix for distributed mass systems, *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, 89, ST4, 161, 1963.

Baskharone, E.A., Daniel, A.S., and Hensel, S.J., Rotordynamic effects of the shroud-to-housing leakage flow in centrifugal pumps, *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 116, 558, 1994.

Benckert, H., Wachter, J. 1980. Flow induced spring coefficients of labyrinth seals for application in turbomachinery, NASA CP No. 2133, p. 189, In *Proceedings of a Workshop held at Texas A&M University*, Dallas, TX.

Bentley, D. 1974. *Forced Subrotative Speed Dynamic Action of Rotating Machinery*, ASME, Dallas, TX, 74-PET-16.

Biezeno, C.B. and Grammel, R. 1954. Engineering Dynamics, Steam Turbines, Vol. III. D. Van Nostrand Co. Inc., New York (originally published in German in 1939 as Technische Dynamik by Julius Springer, Berlin, Germany).

Black, H.F., Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus, *J. Mech. Eng. Sci.*, 10, 1, 1968.

Black, H.F. 1974. Lateral stability and vibrations of high speed centrifugal pump rotors, p. 56, In *Proceedings IUTAM Symposium on Dynamics of Rotors*, Lyngby, Denmark.

Blevins, Robert, D. 2001. Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes, Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL.

Bolleter, U., Frei, A., Florjancic, S., Leibundgut, E., and Stürchler, R., *Rotordynamic Modeling and Testing of Boiler Feedpumps*, EPRI TR-100980, 1992.

Bolleter, U., Leibundgut, E., Stürchler, R., and McCloskey, T. 1989. Hydraulic interaction and excitation forces of high head pump impellers, p. 187, In *Proceedings of the Third ASCE/ASME Mechanical Conference*, La Jolla, CA.

Bolleter, U., Wyss, A., Welte, I., and Stürchler, R., Measurement of hydrodynamic interaction matrices of boiler feed pump impellers, *Trans. ASME, J. Vib. Stress Reliab. Des.*, 1985, SME, 85-DET-147, New York.

Brennen, C., Acosta, A., and Caughey, T. 1980. A test program to measure cross-coupling forces in centrifugal pumps and compressors, NASA CP No. 2133, p. 229, In *Proceedings of a Workshop held at Texas A&M University*, Dallas, TX.

Childs, D.W. 1986. Force and moment rotordynamic coefficients for pump-impeller shroud surfaces, NASA CP No. 2443, p. 467, In *Proceedings of a workshop held at Texas A&M University Dallas*, TX.

Childs, D. 1993. Turbomachinery Rotordynamics, Wiley, New York.

Chree, C., The whirling and transverse vibration of rotating shafts, *Phil. Mag.*, 7, 504, 1904.

COJOUR, User's Guide: Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings, EPRI CS-4093.

Crandall, S.H. and Brosens, P.J., Whirling of unsymmetrical rotors, *J. Appl. Mech.*, 28, 567, 1961.

Dunkerly, S., On the whirling and vibration of shafts, *Phil. Trans. R. Soc., London A*, 185, 279, 1894.

Ehrich, F.F. 1999. Handbook of Rotordynamics, Revised ed., Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL.

Foppl, A., Das Problem der Laval'schen Turbinewelle, *Civilingenieur*, 41, 333, 1885.

Glienicke, J. 1966. Experimental investigation of the stiffness and damping coefficients of turbine bearings and their application to instability prediction, p. 122, In *Proceedings of the Journal Bearings for Reciprocating and Turbo Machinery Symposium*, Nottingham, UK.

Gorman and Daniel, J. 1975. *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, Wiley, New York.

Greenhill, A.G., On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust, *Proc. I. Mech. Eng (London)*, 182, 1883.

Gunter, E.J. Jr., Dynamic stability of rotor-bearing systems, *NASA SP-113*, 1966.
Hagg, A.C. and Sankey, G.O., Elastic and damping properties of oil-film journal bearings for application to unbalance vibration calculations, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 25, 141, 1958.
Harris, T. 1991. Rolling Bearing Analysis, 3rd ed., Wiley, New York.
Holzer, H. 1921. Die Berechnung der Drehschwingungen, Springer, Berlin.
Houbolt, J.C. and Reed, W.H., Propeller nacelle whirl flutter, *Inst. Aerospace Sci.*, 1, 61, 1961.
ISO 10816-1. *Mechanical vibration—evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts.* Part 1. General Guidelines, ISO, Geneva, Switzerland, 1995.
ISO 10816-2. *Mechanical vibration—evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts.* Part 2. Land-based Steam Turbines and Generators in excess of 50 MW with normal operating speeds of 1500 r/min, 1800 r/min, 3000 r/min and 3600 r/min, ISO, Geneva, Switzerland, 2001.
ISO 10816-3. *Mechanical vibration—evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts.* Part 3. Industrial machines with nominal power above 15 kW and nominal speeds between 120 r/min and 15 000 r/min when measured in situ, ISO, Geneva, Switzerland, 1998.
ISO 10816-4. *Mechanical vibration—evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts.* Part 4. Gas Turbine Driven Sets Excluding Aircraft Derivations, ISO, Geneva, Switzerland, 1998.
ISO 10816-5. *Mechanical vibration—evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts.* Part 5. Machine Sets in Hydraulic Power Generating and Pumping Plants, ISO, Geneva, Switzerland, 2000.
ISO 7919-1. *Mechanical vibrations of non-reciprocating machines—measurement on Rotating Shafts and Evaluation Criteria.* Part 1. General Guidelines, ISO, Geneva, Switzerland, 1996.
ISO 7919-2. *Mechanical vibrations of non-reciprocating machines—Measurement on Rotating Shafts and Evaluation Criteria.* Part 2. Land-Based Steam Turbines and Generators in Excess of 50 MW with Normal Operating Speeds of 1500 r/min, 1800 r/min, 3000 r/min and 3600 r/min, ISO, Geneva, Switzerland, 2001.
ISO 7919-3. *Mechanical vibrations of non-reciprocating machines—Measurement on Rotating Shafts and Evaluation Criteria.* Part 3. Coupled Industrial Machines, ISO, Geneva, Switzerland, 1996.
ISO 7919-4. *Mechanical vibrations of non-reciprocating machines—Measurement on Rotating Shafts and Evaluation Criteria.* Part 4. Gas Turbine Sets, ISO, Geneva, Switzerland, 1996.
ISO 7919-5. *Mechanical vibrations of non-reciprocating machines—Measurement on Rotating Shafts and Evaluation Criteria.* Part 5 Machine Sets in Hydraulic Power Generating and Pumping Plants, ISO, Geneva, Switzerland, 1997.
Jeffcott, H.H., The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed—the effect of want of balance, *Phil. Mag.*, 37, 304, 1919.
Jery, B., Acosta, A., Brennen, C., and Caughey, T. 1984. Hydrodynamic impeller stiffness, damping, and inertia in the rotordynamics of centrifugal flow pumps, NASA CP No. 2338, p. 137, In *Proceedings of a workshop held at Texas A&M University*, Dallas, TX.
Jones, A., A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions, *Trans. ASME J. Basic Eng.*, 82, 309, 1960.
Kimball, A.L. Jr., Internal friction theory of shaft whirling, *Gen. Electr. Rev.*, 27, 244, 1924.
Kirk, R.G., Donald, G.N. 1983. Design Criteria of Improved Stability of Centrifugal Compressors, AMD-Vol. 55, Rotor Dynamical Instability. ASME, New York, p. 59.
Kramer, E. 1993. Dynamics of Rotors and Foundations, Springer, Berlin.
Lomakin, A.A., Calculating the critical speed and the conditions to ensure dynamic stability of the rotors in high pressure hydraulic machines, taking account of the forces in the seals, *Energomashinostroenie*, 4, 1, 1958.
Lund, J.W., Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing, *Trans. ASLE*, 7, 342, 1964.

Lund, J.W. 1965. Rotor-bearing Dynamics Design Technology. Part III. Design Handbook for Fluid-film Bearings, AFAPL-TR-64-45. Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, OH.

Lund, J.W. 1968. Rotor-bearing Dynamics Design Technology. Part VII. The Three Lobe Bearing and Floating Ring Bearing, AFAPL-TR-65-45. Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, OH.

Lund, J.W., Sensitivity of the critical speeds of a rotor to changes in the design, *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 102, 115, 1979.

Lund, J.W. and Orcutt, F.K., Calculation and experiments on the unbalance response of a flexible rotor, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 89, 785, 1967.

Meirovitch, L. 1986. Elements of Vibration Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

Miller, D.F., Forced lateral vibration of beams on damped flexible end supports, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 20, 167, 1953.

Moore, J.J. and Palazzolo, A.B., Rotordynamic force prediction of Whirling Centrifugal Impeller Shroud passages using Computational Fluid Dynamic techniques, *Trans. ASME, J. Eng. Gas Turbine Power*, 123, 910, 2001.

Muszynska, A., Whirl and whip—rotor/bearing stability problems, *J. Sound Vib.*, 110, 443, 1986.

Myklestad, N.O., A new method for calculating natural modes of uncoupled bending vibrations of airplane wings and other types of beams, *J. Aeronaut. Sci.*, 11, 153, 1944.

Nelson, H., A Finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory, *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 102, 793, 1980.

Nelson, H. and McVaugh, J., The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 98, 593, 1976.

Newkirk, B.L., *Shaft Whipping Gen. Electr. Rev.*, 27, 169, 1924.

Newkirk, B.L. and Taylor, H.D., Shaft whipping due to oil action in journal bearings, *Gen. Electr. Rev.*, 28, 559, 1925.

Ohashi, H., Hatanaka, R., and Sakurai, A. 1986. Fluid force testing machine for whirling centrifugal impeller, In *Proceedings of the International Federation for Theory of Machines and Mechanisms, International Conference on Rotordynamics*, JSME, Tokyo, Japan.

Orcutt, F.K., The steady-state and dynamic characteristics of the tilting-pad journal bearing in laminar and turbulent flow regimes, *Trans. ASME, J. Lubricat. Technol.*, 89, 392, 1967.

Perera, L. 2002. Private communiqué, Insight Engineering Services Ltd, Alta., Canada.

Pinkus, O. and Sternlicht, B. 1961. Theory of Hydrodynamic Lubrication, McGraw-Hill, New York.

Poritsky, H., Contribution to the theory of oil whip, *Trans. ASME*, 75, 1153, 1953.

Prohl, M.A., A general method for calculating Critical Speeds of flexible rotors, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 12, A-142, 1945.

Rajan, M., Nelson, H.D., and Chen, W.J., Parameter sensitivity in the dynamics of rotor-bearing systems, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 108, 197, 1986.

Rajan, M., Rajan, S.D., and Nelson, H.D., and Chen, W.J., Optimal placement of critical speeds in rotor-bearing systems, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 109, 152, 1987.

Rankine, W.J.M., On the centrifugal force of rotating shafts, *Engineer*, 249, 9, 1869.

Rathbone, T.C., Vibration tolerances, *Power Plant Eng.*, November, 1939.

Rayleigh, J.W.S. 1945. Theory of Sound, Dover Publications, New York.

Robertson, D., Whirling of a journal in a sleeve bearing, *Phil. Mag.*, 15, 96, 113, 1933.

Robertson, D., Transient whirling of a rotor, *Phil. Mag.*, 20, 793, 1935.

Ruhl, R.L. and Booker, J.F., A finite element model for distributed parameter turborotor systems, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 94, 126, 1972.

Smith, D.M., The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings, *Proc. R. Soc. London A*, 142, 92, 1933.

Someya, T. 1989. *Journal Bearing Databook*, Springer, New York.

Southwell, R.V. and Gough B.S., 1921, *Complex Stress Distributions in Engineering Materials*, British Association For Advancement of Science Reports, 345.

Sternlicht, B., Elastic and damping properties of cylindrical journal bearings, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 81, 101, 1959.

Stodola, A. 1927. *Steam and Gas Turbines*, Vol. I, McGraw-Hill, New York.

Taylor, E.S. and Browne, K.A., Vibration isolation of aircraft power plants, *J. Aeronaut. Sci.*, 6, 43, 1938.

Thomas, H.J., Unstable natural vibration of turbine rotors excited by the axial flow in stuffing boxes and blading, *Bull. AIM*, 71, 1039, 1958.

Timoshenko, S., Young, D.H., and Weaver, W. Jr. 1974. Vibration Problems in Engineering, 4th ed., Wiley, New York.

Urlichs, K., Leakage flow in thermal turbo-machines as the origin of vibration exciting lateral forces, NASA, TT-17409, 1977.

Vance, J.M. 1988. Rotordynamics of Turbomachinery, Wiley, New York.

Warner, P.C., Static and dynamic properties of partial journal bearings, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 85, 247, 1963.

Wolf, J.A. 1968. Whirl Dynamics of a Rotor Partially Filled with Liquids, ASME, New York, 68-WA/APM-25.

10 机床再生颤振

摘要

再生颤振是加工和结构变形之间不稳定相互作用的结果，它极大地制约了生产加工。本章主要描述的是机械加工，特别是车削和铣削加工的建模、分析、模拟、检测以及对再生颤振的控制。有一种分析方法可以用来计算极限稳定切削深度和对应的主轴速度，以得到稳定的叶图。时域模拟用来描述并用于切削和铣削加工。这里给出了颤振检测方法，并给出了铣削加工试验结果。颤振抑制技术，即主轴转速选择、进给量选择、切削深度选择和主轴转速的变化，将在这一章中给出，并且把车削中的两个仿真例子用来说明如何选择主轴转速以及主轴转速变化技术。最后是一个铣削加工的个案研究。所用术语在本章末列出。

10.1 概述

再生颤振是切削加工的主要限制因素。它是加工和结构变形之间不稳定相互作用的结果。切削作用力是在切削工具对工件进行接触加工产生显著结构变形时产生的。这些结构变形调制了切屑厚度，并发过来改变加工作用力。对一确定的切削条件而言，这一闭环自激励系统会变得不稳定，并产生再生颤振。再生颤振会造成工件加工时加工力过大、刀具磨损、刀具破损，以及生产出因表面精度不可接受而造成的废品，因此会极大地降低加工生产力和加工质量。

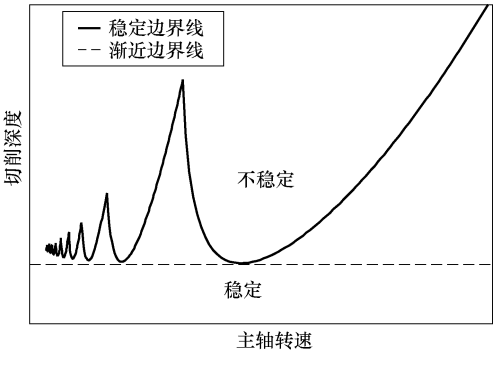


图 10-1 稳定性图

图 10-1 所示为典型的稳定性图，即所谓的稳定叶图。如果工艺参数在稳定性分界线之上，那么将会产生颤振，如果工艺参数在稳定性分界线之下，则不会产生颤振。渐近稳定线表示的是与主轴转速无关的、在切削深度之下可以保证的稳定加工区域。稳定性界线的波瓣性允许形成稳定的穴，因此，在特定的主轴转速范围内，切削深度可能极大地增加以至于超过渐进稳定度界线。主轴转速降低时这些穴位变得更小。由于加工阻尼（即刀具后面和工件在接触面处有摩擦）的原因，

在主轴转速处于低速时稳定性边界线就会上升。如果能建立部件结构和加工过程的精确模型，则可依据稳定叶图设计没有颤振的机械加工。

Tobias（1965）、Koenigsberger 和 Tlusty（1971）建立了作为切削力和结构振动之间相互作用的再生颤振的分析研究。Merritt（1965）利用系统理论决定系统稳定性，并构建稳定叶图，这种构建的过程必须通过从系统特征方程的谐波解中生成专门的图来实现。颤振分析揭示了系统的自然延迟，这使得很多研究者使用尼奎斯特技术来生成稳定叶图（Minis 等，1990a，1990b；Lee and Liu，1991a，1991b；Minis 和 Yanushevsky，1993），选择一组工艺参数并构建特征方程。尼奎斯特判据应用于判断依据工艺参数所建立的系统是否稳定，调整切削深度，并重复这个步骤，直到确定了切削深度的临界值。最近，有人（Altintas 和 Budak，1995；Budak 和 Altintas，1998a，1998b）提出了另一种对于线性系统的生成稳定叶图的颤振分析解析方法。本章使用的正是这种方法。

再生颤振理论研究建立了颤振自然形成技术、自动检测和自动抑制的基础。在颤振发展过程中，由于在接近结构频率时存在显著的颤振频率，所以大多数监测技术分析过程变化频率，且在系统结构频率附近出现较大振动能量时，检测到了颤振。大多数自动颤振抑制方式要么把主轴转速调整到稳定叶图的一个穴位中，要么改变主轴转速，把当前和先前的切削带离该相位阶段。尽管再生颤振的自动监督和控制技术具有很大的应用前景，但它仍然仅限于实验室应用，因此，在现阶段还没有能投入到商业使用的技术。

虽然在本章中我们讨论的是车削加工和铣削加工中的再生颤振，但这一现象并不局限于这些特定的制造加工过程，包括立铣（Budak 和 Altintas，1998a，1998b）、磨削（Inasaki 等，2001）、钻孔（Tarng 和 Li，1994）等在内的其他加工颤振分析也完成了。此外，再生颤振的现象也发生在其他加工过程中，并以旋转加工最为明显（Yun 等，1998；Tlust，2000）。

10.2 和 10.3 节分别介绍了检查车削加工和端铣加工中再生颤振的检查的分析方法。10.4 节讨论了称为时域模拟的数值计算方法，这一方法可用来分析非线性系统的再生颤振问题。10.5 节讨论的是颤振检测问题，10.6 节配图讲解了抑制振动的方法。10.7 节介绍了一个端铣操作的个案研究。

10.2 车削加工中的颤振及案例分析

图 10-2 为车削加工的示意图。假设工件为理想刚体，而切削刀具结构只允许轴向振动（即 z 轴方向），则轴向加工力为

$$F(t) = Pdf(t) \tag{10-1}$$

虽然进给量和加工作用力都是因结构振动而随时间改变的，但此处假设切削深度不变，加工力不随切削速度变化。

假定切削深度是常数；然而，由于结构振动，进给量和因此产生的切削力是时变的。这里假定切削力不明显地依赖于切削速度。

进给量就是纵向上的切屑厚度。名义进给量就是主轴每旋转一转，刀具相对零件的

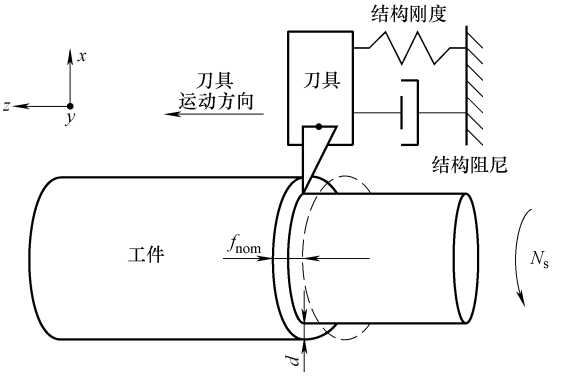


图 10-2 车削加工示意图：当前加工轨迹（实线）和前一步加工轨迹（虚线）

前进距离，且一旦刀具开始加工工件，名义进给量是不变的。然而，切削刀具的振动会给工件带来波浪形表面，此时应调整进给量。这时的进给量是

$$f(t) = f_{nom} + \Delta z(t) = f_{nom} + z(t) - z(t-T) \tag{10-2}$$

式中，f_{nom}是名义进给量，也称静态进给量；$\Delta z(t)$ 是切削刀具振动引起的进给量，它称为动态进给量；T 是主轴转动周期；称为内部调节量的结构振动 $z(t)$ 是当前切削刀具振动；延时结构振动量 $z(t-T)$ 被称为外部调节参数，它是主轴先前旋转过后工件所处角度时刀具的振动。图 10-3 所示为因结构振动而带来的进给量调整。

将式（10-2）代入式（10-1），得到

$$F(t) = Pdf_{nom} + Pd\Delta z(t) = F_{nom} + \Delta F(t) \tag{10-3}$$

由于切削深度和名义进给量不变，所以与名义切屑厚度有关的力 $F_{nom} = Pdf_{nom}$ 也保持不变。结构振动引起的名义进给量变化时，会产生力 $\Delta F(t) = Pd\Delta z(t)$。

结构振动与加工力的关系式为

$$z(s) = -g(s)F(s) \tag{10-4}$$

式中，$g(s)$ 是关联结构振动和加工力的传递函数。由于 $F(t) - F(t-T) = \Delta F(t) - \Delta F(t-T)$，所以结构振动与加工力的关系为

$$\Delta z(s) = -(1 - e^{-sT})g(s)\Delta F(s) \tag{10-5}$$

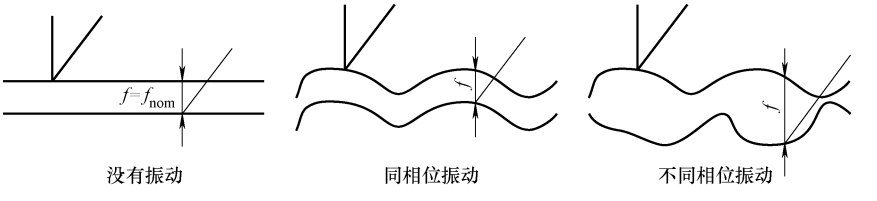


图 10-3 在切削加工中由于结构振动而产生的进给量调整：现行轨迹（实线）和上一步轨迹（虚线）

将式（10-5）中的 Δz 替换，并重新编排：

$$\Delta F(s)\{1 + Pd[1 - e^{-sT}]g(s)\} = 0 \tag{10-6}$$

根据 Budak 和 Altintas（1998a，1998b）提出的方法，可解方程（10-6），并以此画出稳定叶图。假设静态解在单个颤振频率 ω_c 处是简弦函数，则式（10-6）变为

$$\Delta F(\mathrm{j}\omega_c)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}\{1+Pd[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c T}]g(\mathrm{j}\omega_c)\}=0 \tag{10-7}$$

这里 $\mathrm{j}^2=-1$。对于方程（10-7）的非平凡解，推导得到如下特征值问题方程：

$$\det\{1+Pd[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c T}]g(\mathrm{j}\omega_c)\}=0 \tag{10-8}$$

由于结构动力学是一维的，因此方程（10-8）可简化为

$$1+Pd[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c T}]g(\mathrm{j}\omega_c)=0 \tag{10-9}$$

参数 Λ 定义为

$$\Lambda=Pd[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c T}]=\Lambda_R+\mathrm{j}\Lambda_I \tag{10-10}$$

用欧拉公式定义 $[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c T}]=1-\cos(\omega_c T)+\mathrm{j}\sin(\omega_c T)$，稳定切削深度的极限为

$$d_{\lim}=\left(\frac{1}{P}\right)\frac{\Lambda_R+\mathrm{j}\Lambda_I}{1-\cos(\omega_c T)+\mathrm{j}\sin(\omega_c T)} \tag{10-11}$$

式（10-11）可写作

$$d_{\lim}=\left(\frac{1}{2P}\right)\left\{\frac{\Lambda_R[1-\cos(\omega_c T)]+\Lambda_I\sin(\omega_c T)}{1-\cos(\omega_c T)}+\mathrm{j}\,\frac{\Lambda_R\sin(\omega_c T)+\Lambda_I[1-\cos(\omega_c T)]}{1-\cos(\omega_c T)}\right\} \tag{10-12}$$

由于切削深度极限必须是一个实数，所以有

$$\Lambda_R\sin(\omega_c T)+\Lambda_I[1-\cos(\omega_c T)]=0 \tag{10-13}$$

参数 κ 定义为

$$\kappa=\frac{\Lambda_I}{\Lambda_R}=\frac{\sin(\omega_c T)}{1-\cos(\omega_c T)} \tag{10-14}$$

稳定切削深度极限的确切解是

$$d_{\lim}=\frac{\Lambda_R}{2P}(1+\kappa^2) \tag{10-15}$$

注意到 $d_{\lim}$ 是正数，因此 Λ_R 必须是正数。由方程（10-9）可知，参数 Λ 是

$$\Lambda=-\frac{1}{g(\mathrm{j}\omega_c)} \tag{10-16}$$

由式（10-16）可确定 Λ_R 和 Λ_I，这两个值可用来求解 $d_{\lim}$。接下来，确定切削深度极限出现时的主轴转速。方程（10-14）的平凡解是

$$\omega_c T=0+2l\pi \quad (l=0,1,2,\cdots) \tag{10-17}$$

式中，$\omega_c T$ 可用来表示主轴旋转一周内的振动次数。其通解表明连续振动是同相的（没有再生颤振）。方程（10-14）的非平凡解为

$$\cos(\omega_c T)=\frac{\kappa^2-1}{\kappa^2+1} \tag{10-18}$$

并可以重写为

$$\omega_c T=\varepsilon+2l\pi \quad (l=0,1,2,\cdots) \tag{10-19}$$

其中

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}\right) \tag{10-20}$$

参数 ε 是主轴旋转中振动周期的分数。在复平面中 Λ 的角度是

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\Lambda_I}{\Lambda_R}\right) = \arctan\kappa \tag{10-21}$$

将 $\kappa = \tan(\varphi)$ 代入方程（10-18）中，得

$$\cos(\omega_c T) = -\cos(2\varphi) \tag{10-22}$$

方程（10-22）的一个解为

$$\omega_c T = \pi - 2\varphi + 2l\pi \quad (l = 0, 1, 2, \cdots) \tag{10-23}$$

对比式（10-19）和式（10-23），可看出振动周期的分数是 $\varepsilon = \pi - 2\varphi$。由于 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\pi$，在计算 φ 时，必须保证 $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$。例如，如果方程（10-21）通过使用四象限反正切函数求解，此函数解的范围是 $-\pi \sim \pi$，那么由于 Λ_R 是正数，所以可得 $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$。对于铣削加工的应用，可见 Λ_R 必须是负数；因此，为了保证 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\pi$，必须满足以下条件

$$\begin{aligned} &\text{如果 } \Lambda_I < 0 \text{那么 } \varphi \rightarrow \varphi + \pi \\ &\text{如果 } \Lambda_I > 0 \text{那么 } \varphi \rightarrow \varphi - \pi \end{aligned} \tag{10-24}$$

主轴转速是

$$N_s = \frac{60}{T} = \frac{60\omega_c}{\varepsilon + 2l\pi} \quad (l = 0, 1, 2, \cdots) \tag{10-25}$$

绘制稳定叶图的步骤如下：

① 选择与结构主频相近的颤振频率（ω_c）。

② 利用方程（10-16）计算 Λ_R 和 Λ_I。

③ 利用式（10-15）计算 d_{lim}。

④ 选择稳定叶数（l），并利用式（10-25）计算 N_s。稳定叶图上的点（N_s，d_{lim}）对应振动频率 ω_c 和稳定叶数 l。

⑤ 重复步骤④，以得到预期稳定叶数。结果是主轴转速矢量，$\boldsymbol{N}_s = \{N_{s_1} N_{s_2} \cdots N_{s_3}\}$。每一个点 $\{(N_{s_1}, d_{lim})(N_{s_2}, d_{lim}) \cdots (N_{s_3}, d_{lim})\}$ 对应于不同的稳定叶数，并且所有这些点均对应于颤振频率 ω_c。

⑥ 选择另一颤振频率，并重复步骤②～⑤。用这一方法可构建出稳定叶图。两个连续颤振频率之间差别越小，则稳定叶图的分辨率就越高。总体上看，叶图会部分重叠。在这种情况下，最小切削深度极限就是最小切削深度。如果叶图没有重叠，那么颤振频率的范围必须扩大。

案例 10-1

式（10-1）给出了车削加工的进给力，式（10-26）给出了结构动力学方程。研究了对一给定颤振频率和稳定叶数的有限切削深度和与之对应的主轴转速的解析表达式。稳定叶图针对 $P = 0.6\text{kN/mm}^2$，$\omega_n = 600\text{Hz}$，$\zeta = 0.2$，$k = 12\text{kN/mm}$ 绘制。将这个稳定叶

图与$\zeta=0.2$、0.3 和0.4 的稳定叶图作对比，再与$\omega_n=500$、700 和800Hz 的稳定叶图作对比。前 10 个叶图包含在所有稳定叶图中。

$$\ddot{z}(t)+2\zeta\omega_n\dot{z}(t)+\omega_n^2 z(t)=-\frac{\omega_n^2}{k}F(t) \tag{10-26}$$

参数Λ是

$$\Lambda=\frac{-1}{g(\mathrm{j}\omega_c)}=\Lambda_R+\mathrm{j}\Lambda_I=\frac{k}{\omega_n^2}(\omega_c^2-\omega_n^2)-\mathrm{j}\frac{k}{\omega_n^2}(2\zeta\omega_c\omega_n) \tag{10-27}$$

有限切削深度为

$$d_{\lim}=\frac{k(\omega_c^2-\omega_n^2)}{2K\omega_n^2}\left[1+\frac{4\zeta^2\omega_c^2\omega_n^2}{(\omega_c^2-\omega_n^2)^2}\right] \tag{10-28}$$

主轴转速为

$$N_s=\frac{60\omega_c}{\pi-2\arctan\left(\dfrac{-2\zeta\omega_c\omega_n}{\omega_c^2-\omega_n^2}\right)\varepsilon+2l\pi}\quad(l=0,1,2,\cdots) \tag{10-29}$$

式中，l是稳定叶数。注意，由于有限切削深度是正数，因此颤振频率必须比结构的固有频率高。图 10-4 和图 10-5 绘制的是稳定叶图的前 10 个叶数。图 10-4 显示了这 10 条稳定叶图中每一叶数的全部解。最大的稳定叶形曲线是右侧的零号叶形曲线。在稳定叶图上，曲线号从右到左依次变大，并且两相邻叶曲线也日趋紧密。图 10-5 显示的是处理后的稳定叶图，这里在每一主轴转速处确定最小切削深度，因此显示的是真实的稳定性边界线。

图 10-6 表示了结构阻尼比的影响：当结构的阻尼比增大时，叶形图向左略微移动，同时渐进稳定边界范围明显上移。图 10-7 表示的是结构固有频率的影响：当结构的固有频率增大时，叶形图右移，但幅值大体上保持不变。

这一节介绍了生成车削加工稳定性叶图的分析方法。车削加工的有限切削深度由下式求得

$$d_{\lim}=\frac{\Lambda_R}{2P}(1+\kappa^2)$$

式中，Λ_R是$-1/g(\mathrm{j}\omega_c)$的实部，$g(\mathrm{j}\omega_c)$是颤振频率ω_c处的结构传递函数；$\kappa=\Lambda_I/\Lambda_R$，$\Lambda_I$是$-1/g(\mathrm{j}\omega_c)$的虚部。对应的主轴转速是

$$N_s=\frac{600\omega_c}{\varepsilon+2l\pi}$$

其中$l=0$，1，2，…是稳定叶数，且

$$\varepsilon=\arccos\left(\frac{\kappa^2-1}{\kappa^2+1}\right)$$

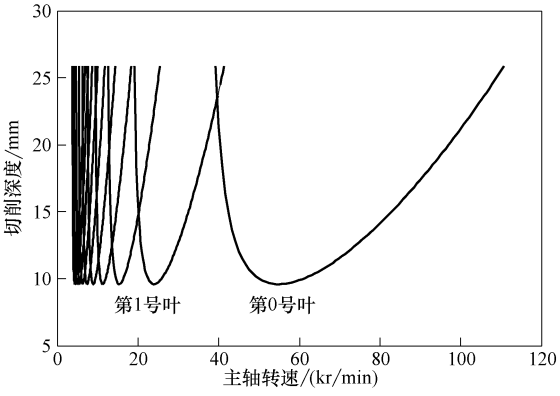


图 10-4　案例 10-1 的未处理的稳定叶图

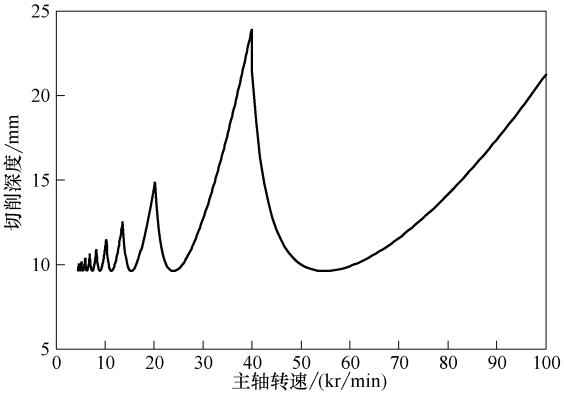


图 10-5　案例 10-1 处理后的稳定叶图

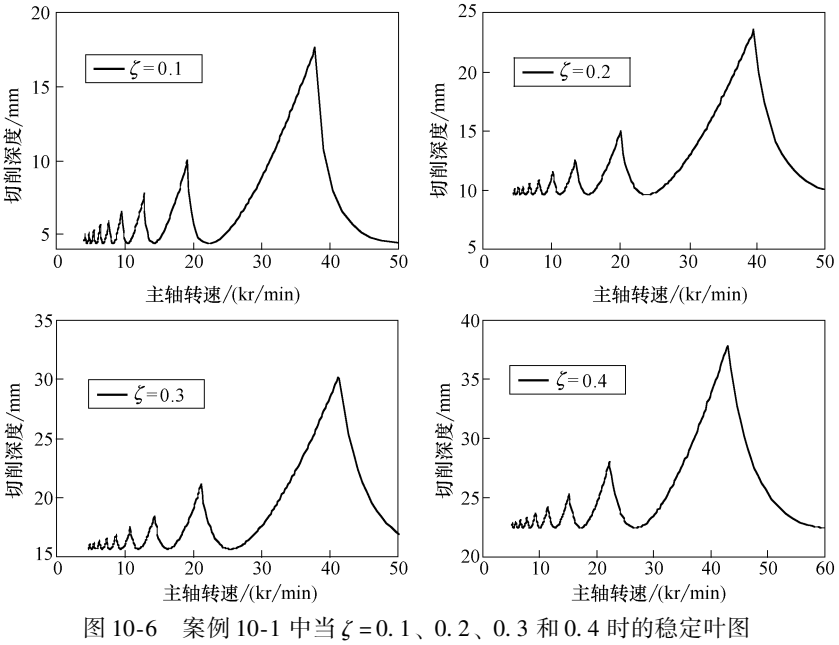


图 10-6　案例 10-1 中当 $\zeta=0.1$、0.2、0.3 和 0.4 时的稳定叶图

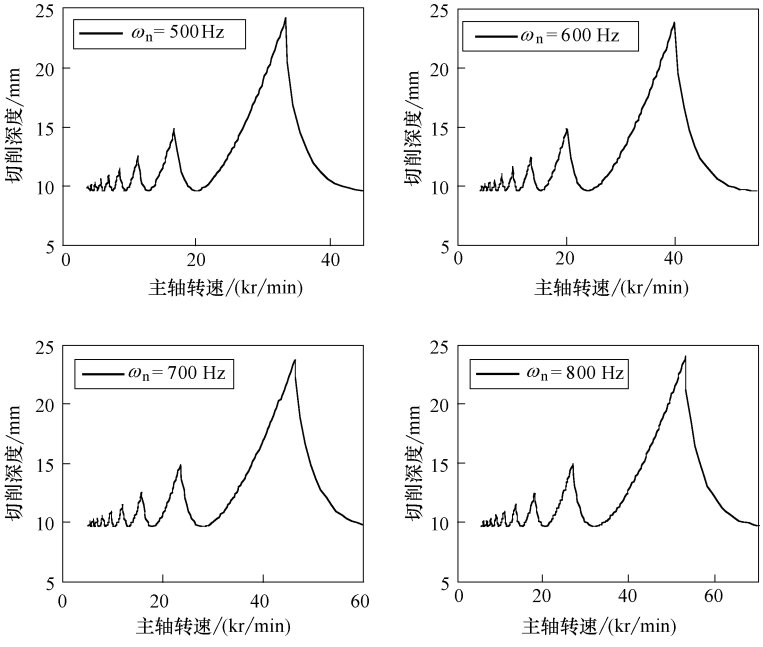


图 10-7　案例 10-1 中当 ω_n = 500、600、700 和 800Hz 时的稳定叶图

10.3　端铣加工中的颤振及案例分析

图 10-8 是端铣操作的示意图。在铣削加工中，刀具的几个齿可能同时和工件接触，甚至当结构振动不存在时，进给量仍自然按照铣齿角度的函数来变化，并且随着主轴旋转，每个齿都要和工件进入和离开接触。由于机床和工件结构的刚度在 z 方向比 x、y 方向要大得多，所以切削深度就是 z 方向的切屑厚度，并假设切削深度不变。

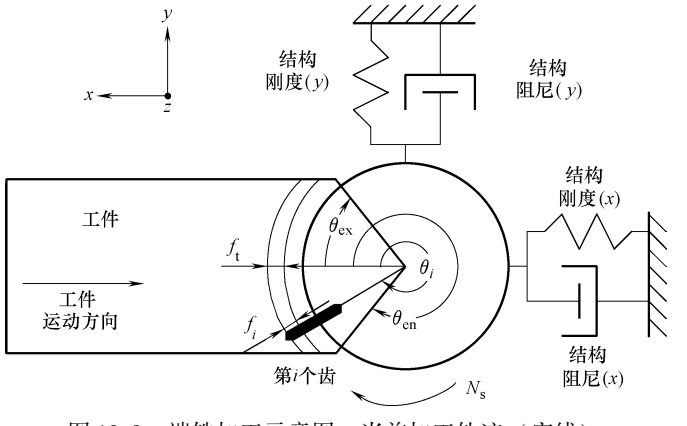


图 10-8　端铣加工示意图：当前加工轨迹（实线）、前一步加工轨迹（虚线）、z 方向的切削深度

图 10-9 中第 i 个齿的瞬时进给量为

$$f_i(t) = f_t\cos[\theta_i(t)] + \Delta x(t)\cos[\theta_i(t)] + \Delta y(t)\sin[\theta_i(t)] \tag{10-30}$$

其中

$$\Delta x(t) = \{x_t(t) - x_t(t-T_t)\} - \{x_p(t) - x_p(t-T_t)\} \tag{10-31}$$

$$\Delta y(t) = \{y_t(t) - y_t(t-T_t)\} - \{y_p(t) - y_p(t-T_t)\} \tag{10-32}$$

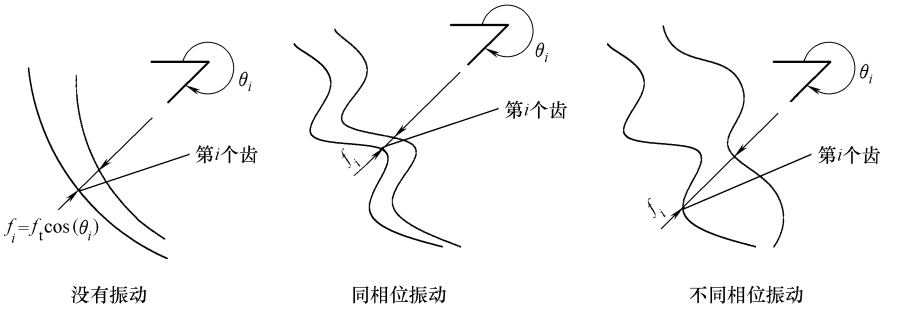


图 10-9　在端铣加工中由于结构振动而产生的进给量调整：
现行轨迹（实线）和上一步轨迹（虚线）

式（10-30）中的 $f_t\cos[\theta_i(t)]$ 表示的是工件相对于刀具每一个齿旋转时的进给量，这一进给量当做静进给量。式（10-30）中 $\Delta x(t)\cos[\theta_i(t)]$ 和 $\Delta y(t)\sin[\theta_i(t)]$ 分别表示在刀齿角度为 $\theta_i(t)$ 时，由刀具和工件在 x 和 y 方向振动造成的进给量，它们称作动态进给量。

在 x 和 y 方向的切削力分别是

$$\begin{aligned}F_x(t) = {} & df_t\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\cos^2[\theta_i(t)] + P_C\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] + \\ & d\Delta x(t)\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\cos^2[\theta_i(t)] + P_C\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] + \\ & d\Delta y(t)\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\sin[\theta_i(t)]\cos[\theta_i(t)] + \\ & P_C\sin^2[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)]\end{aligned} \tag{10-33}$$

$$\begin{aligned}F_y(t) = {} & df_t\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)] - P_C\cos^2[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] + \\ & d\Delta x(t)\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)] - P_C\cos^2[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] + \\ & d\Delta y(t)\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\sin^2[\theta_i(t)] - \\ & P_C\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)]\end{aligned} \tag{10-34}$$

其中

$$\sigma[\theta_i(t)] = \begin{cases}1 & [\theta_{en} \leqslant \theta_i(t) \leqslant \theta_{ex}] \\ 0 & [\theta_{en} > \theta_i(t) > \theta_{ex}]\end{cases} \tag{10-35}$$

函数 $\sigma[\theta_i(t)]$ 确定在角度为 $\theta_i(t)$ 时刀具的第 i 个轮齿是否与工件接触。由于静态进给量的原因，式（10-33）和式（10-34）中的第一项分别是作用在刀具 x 和 y 方向上的切削力。由于结构在 x 方向上的振动而导致的动态进给量的原因，式（10-33）和式（10-34）中的第二项分别是作用在刀具上 x 和 y 方向上的切削力。由于结构在 y 方向上的振动而导致的动态进给量的原因，式（10-33）和式（10-34）中的第三项分别是作用在刀具上 x 和 y 方向上的切削力。

端铣加工作用力模型中的动态部分可简写如下

$$\begin{bmatrix}\Delta F_x(t)\\ \Delta F_y(t)\end{bmatrix}=d\boldsymbol{A}(t)\begin{bmatrix}\Delta x(t)\\ \Delta y(t)\end{bmatrix}=d\begin{bmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x(t)\\ \Delta y(t)\end{bmatrix} \tag{10-36}$$

其中

$$A_{11}(t)=\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\cos^2[\theta_i(t)]+P_C\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] \tag{10-37}$$

$$A_{12}(t)=\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\sin[\theta_i(t)]\cos[\theta_i(t)]+P_C\sin^2[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] \tag{10-38}$$

$$A_{21}(t)=\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)]-P_C\cos^2[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] \tag{10-39}$$

$$A_{22}(t)=\sum_{i=1}^{N_t}\{-P_T\cos(\Psi_r)\sin^2[\theta_i(t)]-P_C\cos[\theta_i(t)]\sin[\theta_i(t)]\}\sigma[\theta_i(t)] \tag{10-40}$$

这些参数随刀齿角度位移的变化而调整刀具的瞬时进给量。从 $i=1, 2, \cdots, N_t$ 的总和表示了对每一个齿的影响。注意矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 是时间变量，周期为 T_t，与刀具齿尖通过时间有关。在振动分析中，利用零项对 $\boldsymbol{A}(t)$ 进行傅里叶级数展开（Minis 和 Yanushevsky，1993；Budak 和 Altintas，1998a）。加工力矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的傅里叶展开的零项是

$$\boldsymbol{A}^0=\frac{N_t}{2\pi}\begin{bmatrix}A_{11}^0 & A_{12}^0\\ A_{21}^0 & A_{22}^0\end{bmatrix} \tag{10-41}$$

这里

$$A_{11}^0=\frac{1}{2}\left[-P_T\cos(\Psi_r)\left\{\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right\}+P_C\sin^2(\theta)\right]_{\theta=\theta_{en}}^{\theta=\theta_{ex}} \tag{10-42}$$

$$A_{12}^0=\frac{1}{2}\left[-P_T\cos(\Psi_r)\sin^2(\theta)+P_C\left\{\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right\}\right]_{\theta=\theta_{en}}^{\theta=\theta_{ex}} \tag{10-43}$$

$$A_{21}^0=\frac{1}{2}\left[-P_T\cos(\Psi_r)\sin^2(\theta)-P_C\left\{\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right\}\right]_{\theta=\theta_{en}}^{\theta=\theta_{ex}} \tag{10-44}$$

$$A_{22}^0=\frac{1}{2}\left[-P_T\cos(\Psi_r)\left\{\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right\}-P_C\sin^2(\theta)\right]_{\theta=\theta_{en}}^{\theta=\theta_{ex}} \tag{10-45}$$

现在将此动态力模型近似表示为线性、时不变的关系：

$$\begin{bmatrix}\Delta F_x(t)\\ \Delta F_y(t)\end{bmatrix}=d\boldsymbol{A}^0\begin{bmatrix}\Delta x(t)\\ \Delta y(t)\end{bmatrix} \tag{10-46}$$

刀具和工件的振动与切削力分别有如下关系：

$$\begin{bmatrix}x_t(s)\\ y_t(s)\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}_t(s)\begin{bmatrix}F_x(s)\\ F_y(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{t_{11}}(s) & G_{t_{12}}(s)\\ G_{t_{21}}(s) & G_{t_{22}}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_x(s)\\ F_y(s)\end{bmatrix} \tag{10-47}$$

$$\begin{bmatrix}x_p(s)\\ y_p(s)\end{bmatrix}=-\boldsymbol{G}_p(s)\begin{bmatrix}F_x(s)\\ F_y(s)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}G_{p_{11}}(s) & G_{p_{12}}(s)\\ G_{p_{21}}(s) & G_{p_{22}}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_x(s)\\ F_y(s)\end{bmatrix} \tag{10-48}$$

这里 $\boldsymbol{G}_t(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_p(s)$ 分别是刀具结构振动和工件结构振动与切削力之间的传递函数。在式（10-48）中出现负号，是由于作用在工件上的加工作用力与式（10-33）和式（10-34）中切削力大小相等、方向相反。由于

$$\begin{bmatrix}F_x(t)\\ F_y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}F_x(t-T_t)\\ F_y(t-T_t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta F_x(t)\\ \Delta F_y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\Delta F_x(t-T_t)\\ \Delta F_y(t-T_t)\end{bmatrix}$$

结构振动与加工作用力有如下关系

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}=(1-\mathrm{e}^{-sT_t})[\,\boldsymbol{G}_t(s)+\boldsymbol{G}_p(s)\,]\begin{bmatrix}\Delta F_x(s)\\ \Delta F_y(s)\end{bmatrix} \tag{10-49}$$

当切削深度取边缘稳定值时，假设车床和工件的振动出现在颤振频率 ω_c 处。假设颤振频率为 ω_c 时的稳态解是简弦函数，并代入结构振动，则式（10-49）变为

$$\begin{bmatrix}\Delta F_x\\ \Delta F_y\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t}=\frac{dN_t}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c T_t})\,\boldsymbol{G}^0(\mathrm{j}\omega_c)\begin{bmatrix}\Delta F_x\\ \Delta F_y\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c t} \tag{10-50}$$

其中，最大值 G^0 是

$$G^0(\mathrm{j}\omega_c)=\frac{2\pi}{N_t}A^0[\,G_t(\mathrm{j}\omega_c)+G_p(\mathrm{j}\omega_c)\,] \tag{10-51}$$

现在，根据 Budak 和 Altintas 提出的方法可以解方程（10-50），并画出稳定叶图。式（10-50）的特征方程是

$$\det\left[I_2-\frac{dN_t}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c T_t})\,G^0(\mathrm{j}\omega_c)\right]=0 \tag{10-52}$$

其中 $\boldsymbol{I}_2$ 是 2×2 单位阵。由方程（10-52）解出有限的稳定切削深度。G^0 特征值的逆定义为

$$\Lambda(\mathrm{j}\omega_c)=\Lambda_R(\mathrm{j}\omega_c)+\mathrm{j}\Lambda_I(\mathrm{j}\omega_c)=-\frac{dN_t}{2\pi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c T_t}) \tag{10-53}$$

扩展式（10-53）中的指数项，并注意到切削深度必须是实数，有限的稳定切削深度可写成

$$d_{\lim}=-\frac{\pi\Lambda_R}{N_t}(1+\kappa^2) \tag{10-54}$$

其中参数 κ 由超越方程定义为

$$\kappa=\frac{\Lambda_{\mathrm{I}}}{\Lambda_{\mathrm{R}}}=\frac{\sin(\omega_{\mathrm{c}}T_{\mathrm{t}})}{1-\cos(\omega_{\mathrm{c}}T_{\mathrm{t}})} \tag{10-55}$$

对于第 l 个稳定叶图中刀齿的通过周期，式（10-55）可求解，且刀齿通过的周期与主轴转速有关，得到

$$N_{\mathrm{s}}=\frac{60\omega_{\mathrm{c}}}{N_{\mathrm{t}}[\pi-2\varphi+2l\pi]}\quad(l=0,1,2,\cdots) \tag{10-56}$$

其中，$\varphi=\arctan\kappa$。选择颤振频率，由式（10-54）可解出有限的切削深度，它对应于式（10-56）中给出的第 l 个稳定叶的主轴转速。

案例 10-2

端铣操作中的切削力和推压力分别为 $P_{\mathrm{C}}=2.0\mathrm{kN/mm^2}$ 和 $P_{\mathrm{T}}=0.8\mathrm{kN/mm^2}$，导角是 45°。假设工件完全是刚体，刀具沿 x、y 方向的结构动力学方程分别由式（10-57）和式（10-58）给出。名义参数是 $\theta_{\mathrm{en}}=-45°$，$\theta_{\mathrm{ex}}=45°$，$N_{\mathrm{t}}=4$，$k_x=14\mathrm{kN/mm}$，$k_y=17\mathrm{kN/mm}$，$\zeta_x=0.15$，$\zeta_y=0.1$，$\omega_x=3000\mathrm{rad/s}$，$\omega_y=4000\mathrm{rad/s}$。稳定叶图根据以上名义参数和 $N_{\mathrm{t}}=1$、2 和 8 个齿画出。然后，再由 $\theta_{\mathrm{ex}}=30°$、60°和 75°和以上名义参数画出稳定叶图。在所有稳定叶图中，都包括了前 15 个叶。

$$\ddot{x}_{\mathrm{t}}(t)+2\zeta_x\omega_x\dot{x}_{\mathrm{t}}(t)+\omega_x^2x_{\mathrm{t}}(t)=\frac{\omega_x^2}{k_x}F_x(t) \tag{10-57}$$

$$\ddot{y}_{\mathrm{t}}(t)+2\zeta_y\omega_y\dot{y}_{\mathrm{t}}(t)+\omega_y^2y_{\mathrm{t}}(t)=\frac{\omega_y^2}{k_y}F_y(t) \tag{10-58}$$

齿数的影响如图 10-10 所示：随着齿数的增加，叶向左移，渐进稳定边界线下降。图 10-11 显示了出口角的影响：当出口角增加时，渐进稳定边界线下降。

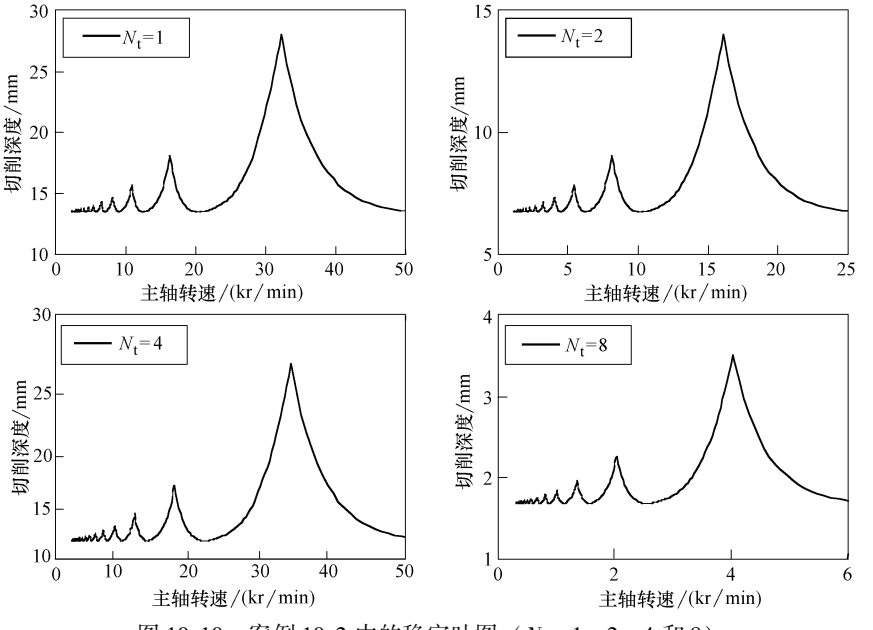


图 10-10　案例 10-2 中的稳定叶图（$N_{\mathrm{t}}=1$，2，4 和 8）

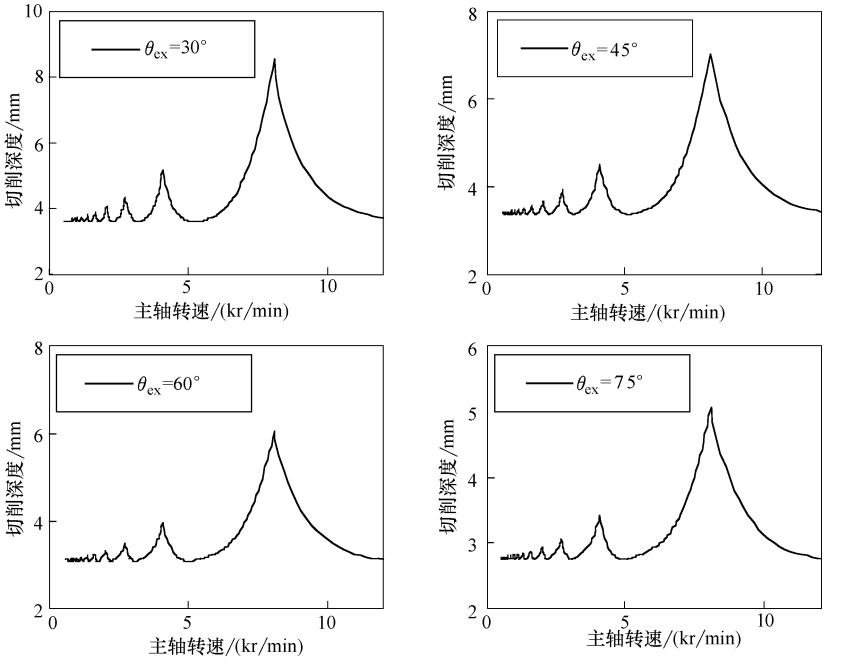


图 10-11 案例 10-2 的稳定叶图，$\theta_{ex}=30°$，45°，60°和 75°

这一节介绍了一种产生端铣加工稳定叶图的分析法。端铣加工中的有限切削深度由下式给出

$$d_{\lim}=-\frac{\pi\Lambda_R}{N_t}(1+\kappa^2)$$

其中 N_t 是刀具齿数，Λ_R 是 $(2\pi/N_t)\ A^0[G_t(j\omega_c)+G_p(j\omega_c)]$ 的特征值的逆，A^0 是加工力过程矩阵傅里叶级数展开的零级项，$G_t(j\omega_c)$ 和 $G_p(j\omega_c)$ 分别是关于刀具和工件结构振动在振动频率为 ω_c 时与切削力之间的传递函数，$\kappa=\Lambda_I/\Lambda_R$，$\Lambda_I$ 是 $(2\pi/N_t)A^0[G_t(j\omega_c)+G_p(j\omega_c)]$ 的虚部。对应的主轴转速是

$$N_s=\frac{60\omega_c}{N_t[\pi-2\arctan-1(\kappa)+2l\pi]}$$

式中，$l=0$，1，2，…是稳定叶数。

10.4 时域模拟及案例分析

时域模拟（Tlusty 和 Ismail，1981，1983；Tlusty，1986；Tsai 等，1990；LCe 和 Liu，1991a，1991b；Smith 和 Tlusty，1993；Elbestawi 等，1994；Tarng 和 Li，1994；weck 等，1994）是用于确定再生颤振的另一种方法。在时域模拟中，加工力和结构振动针对特

定的加工参数在时域进行模拟，检查其产生的信号（如力和位移），该信号可用来确定颤振是否产生。上述车削和端铣操作的分析假设了刀具总是与工件保持接触，并且切削力和推压力与加工参数无关。此外，端铣分析把时变的力过程矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 近似用傅里叶级数展开的零级项表示。有了时域模拟，非线性影响可以直接融入到模拟中，因此将可能更精确地稳定预测。时域模拟的不足之处是其所需的极大的计算费用。对于特定的主轴转速而言，必须进行几种不同切削深度下的模拟，这样，主轴转速的稳定界线得以迭代确定。在一个转速范围内这种步骤的重复进行是为了构建完整的稳定叶图。

对于车削加工，加工力使用式（10-1）计算，进给量用式（10-2）计算，刀具位移用式（10-4）计算。对于端铣加工，进给量用式（10-30）计算，x 和 y 方向的加工力用式（10-33）~ 式（10-35）计算，刀具和工件的位移分别用式（10-47）和式（10-48）计算。为了计算端铣操作中的加工力，需要用到每个刀齿的角位移，第 i 个齿的角位移是

$$\theta_i(t)=\frac{2\pi}{60}N_s t+\frac{2\pi}{N_t}(i-1) \tag{10-59}$$

进给量和加工力方程是静态的，而结构位移方程式是动态的，必须通过数字积分求解，但为了考虑与大的结构频率有关的小系统时间常数，必须在数字积分中应用足够小的时间步长。

案例 10-3

车削加工中的进给力由 $F(t)=0.6df^{0.7}(t)$ 给出。结构动力学方程由式（10-26）给出，相关参数为：$\omega_n=600\text{Hz}$，$\zeta=0.2$，$k=12\text{kN/mm}$。

系统的时域模拟包括构建刀具与工件分离的影响，并针对参数 $N_s=10000\text{rmp}$，$d=8$，$f_{nom}=0.1\text{mm}$ 进行模拟，并再针对 $f_{nom}=0.2\text{mm}$，进行模拟。绘制出这两种模拟的进给力和刀具位移的时间历程。

为了说明刀具与工件脱离接触的现象，方程（10-2）中的进给量必须按照下式进行修正：

$$f(t)=\begin{cases}f_{nom}+z(t)-f_p(t-T) & [f_{nom}+z(t)-f_p(t-T)\geqslant 0]\\ 0 & [f_{nom}+z(t)-f_p(t-T)<0]\end{cases} \tag{10-60}$$

其中

$$f_p(t)=\begin{cases}z(t) & [f_{nom}+z(t)-f_p(t-T)\geqslant 0]\\ -f_{nom}+f_p(t-T) & [f_{nom}+z(t)-f_p(t-T)<0]\end{cases} \tag{10-61}$$

如果当前的进给量计算得到为负值，那么切削工具从工件脱离，且进给量为零。$f_p(t)$用于考虑之前轴旋转时结构振动引起的动态进给量，即使当切削工具从工件上脱离时也是如此。$f_{nom}=0.1\text{mm}$ 和 $f_{nom}=0.2\text{mm}$ 对应的结果分别如图 10-12 和图 10-13 所示。当名义进给量增大时，颤振得到抑制。

案例 10-4

端铣加工中的切削力和推压力分别由 $F_C(t)=1.4df^{0.6}(t)$ 和 $F_T(t)=0.4df^{0.8}(t)$ 给出。导角是 45°，进入角是 -60°，出口角是 60°，刀具齿数是 4，每个齿的进给量是$f_t=$

0.15mm。假设工件是绝对刚体，刀具在 x 和 y 方向的结构动力学方程分别由式（10-58）和式（10-59）给出。研究的时域模拟用来确定主轴转速为 1000r/min 和 32000r/min 时的有限切削深度。对于这两种主轴转速，系统模拟的切削深度分别高于有限稳定切削深度 10%，和低于有限稳定切削深度 10%。图上绘出切削力、推压力、x 和 y 方向的刀具位移。

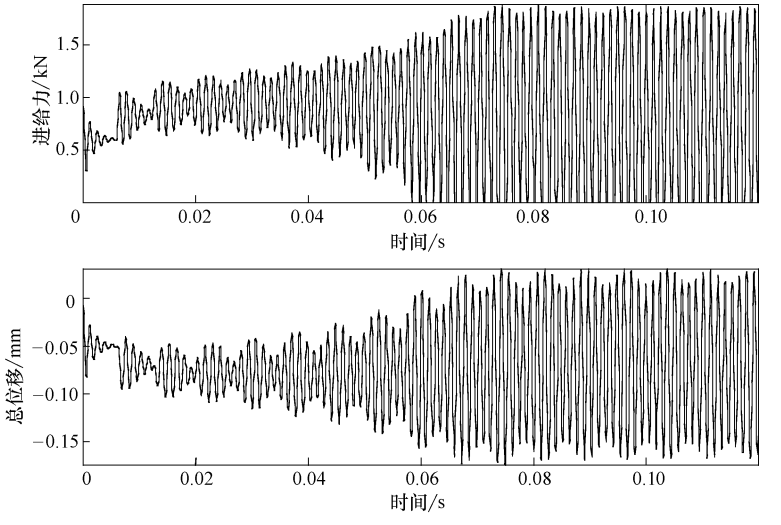


图 10-12　案例 10-3 中的时域模拟，$f_{nom}=0.1$mm

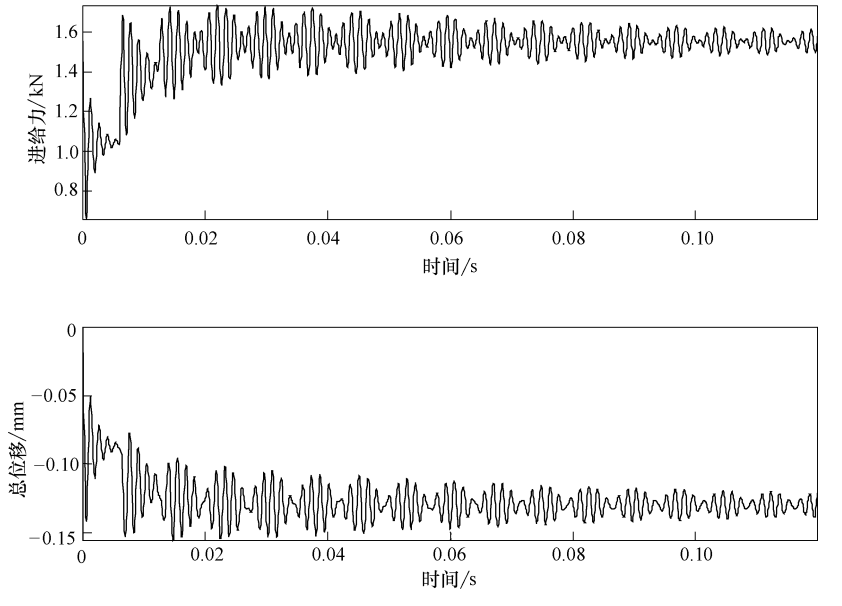


图 10-13　案例 10-3 中的时域模拟，$f_{nom}=0.2$mm

刀齿分离时的非线性影响如下：

$$\ddot{x}_t(t)+2(0.15)(3000)\dot{x}_t(t)+3000^2x_t(t)=\frac{3000^2}{15}F_x(t) \tag{10-62}$$

$$\ddot{y}_t(t)+2(0.1)(4000)\dot{y}_t(t)+4000^2y_t(t)=\frac{4000^2}{17}F_y(t) \tag{10-63}$$

为了考虑刀具脱开工件的现象，式（10-30）中的进给量必须按照下式进行修正：

$$f_i(t)=\begin{cases}f_{Ci}(t)-f_{pi}(t-T_t) & f_{Ci}(t)\geqslant 0\\ 0 & f_{Ci}(t)<0\end{cases} \tag{10-64}$$

其中

$$f_{Ci}(t)=f_t\cos[\theta_i(t)]+\{x_t(t)-x_p(t)\}\cos[\theta_i(t)]+\{y_t(t)-y_p(t)\}\sin[\theta_i(t)] \tag{10-65}$$

$$f_{pi}(t)=\begin{cases}\{x_t(t-T_t)-x_p(t-T_t)\cos[\theta_i(t)]+\{y_t(t-T_t)-y_p(t-T_t)\sin[\theta_i(t)] & f_{Ci}(t)\geqslant 0\}\\ -f_t\cos[\theta_i(t)]+f_{pi}(t-T_t) & f_{Ci}(t)<0\}\end{cases} \tag{10-66}$$

注意到如果 $i=1$，则 $\theta_i(t)=\theta_{i+1}(t-T_t)$，且 $i-1\rightarrow N_t$。变量 $f_{pi}(t)$ 表示前一个齿与第 i 个齿处于相同位置时对瞬时进给量的贡献。如果刀具和工件发生接触，那么这一贡献来自刀具和工件的振动。如果刀具和工件没有发生接触，那么这一贡献等于前一贡献加上静态部分，且瞬时进给量设为零。通过时域模拟，得到 $N_s=1000\text{r/min}$ 时的有限稳定切削深度为 2.25mm、$N_s=32000\text{r/min}$ 时的切削深度为 3.45mm。整个实验结果如图 10-14～图 10-17 所示。图 10-14 和图 10-15 中的系统是稳定的，而由于 y 方向的力在 0kN 达到饱和，图 10-15 和图 10-17 的不稳定性非常明显。

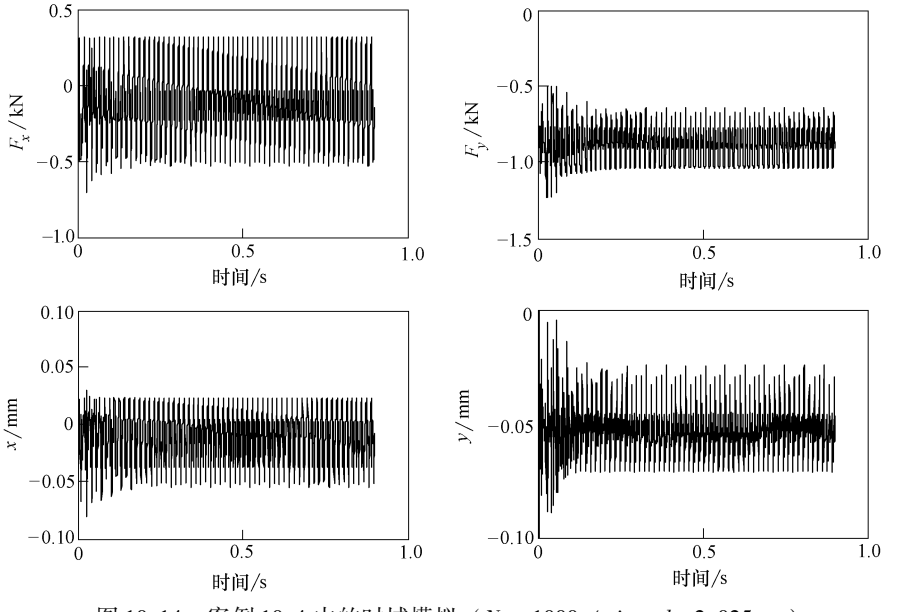


图 10-14　案例 10-4 中的时域模拟（$N_s=1000\text{r/min}$，$d=2.025\text{mm}$）

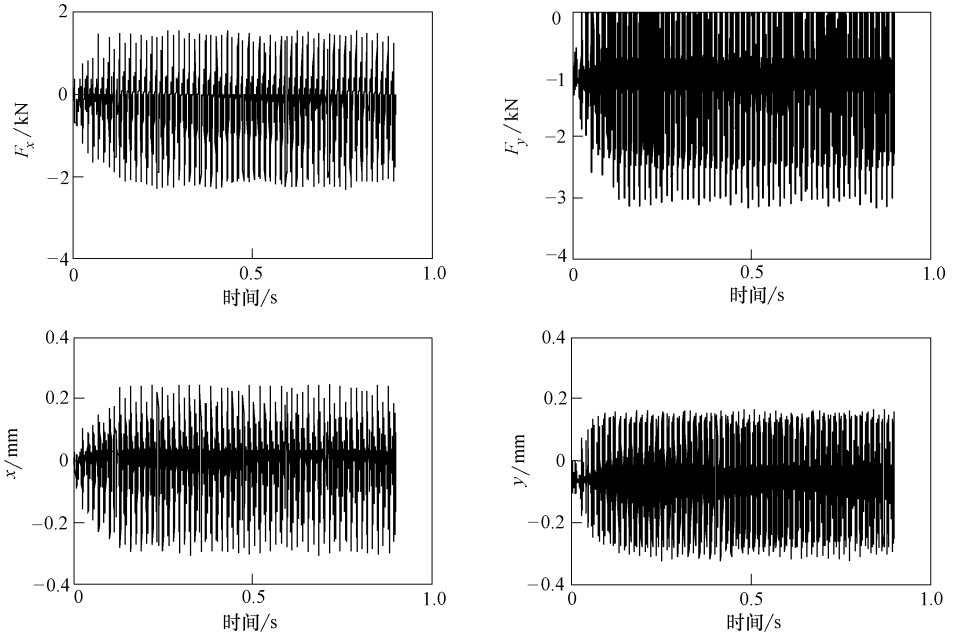


图 10-15 案例 10-4 的时域模拟（$N_s = 1000\text{r/min}$，$d = 2.475\text{mm}$）

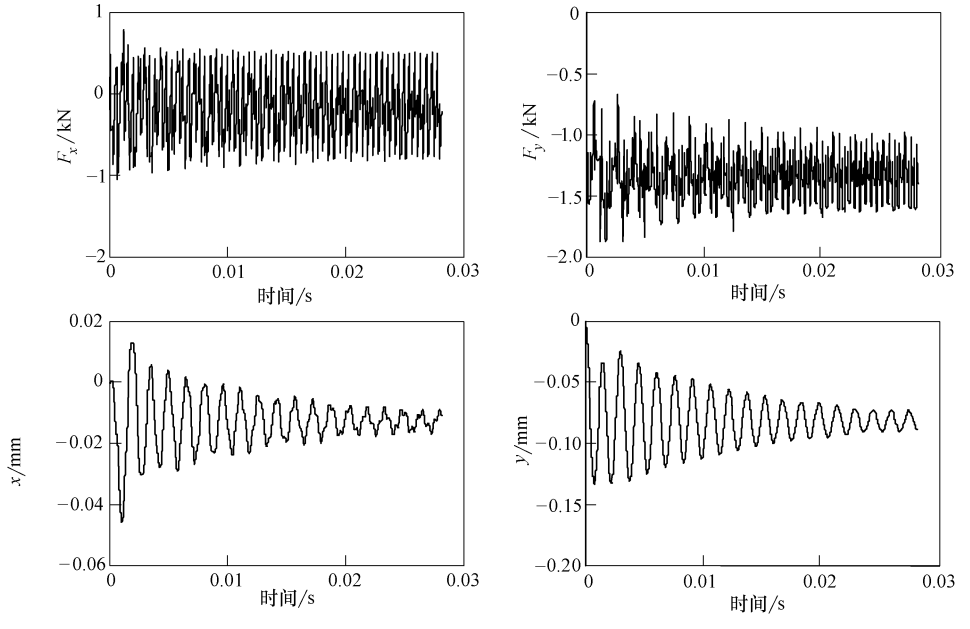


图 10-16 案例 10-4 中的时域模拟（$N_s = 32000\text{r/min}$，$d = 3.105\text{mm}$）

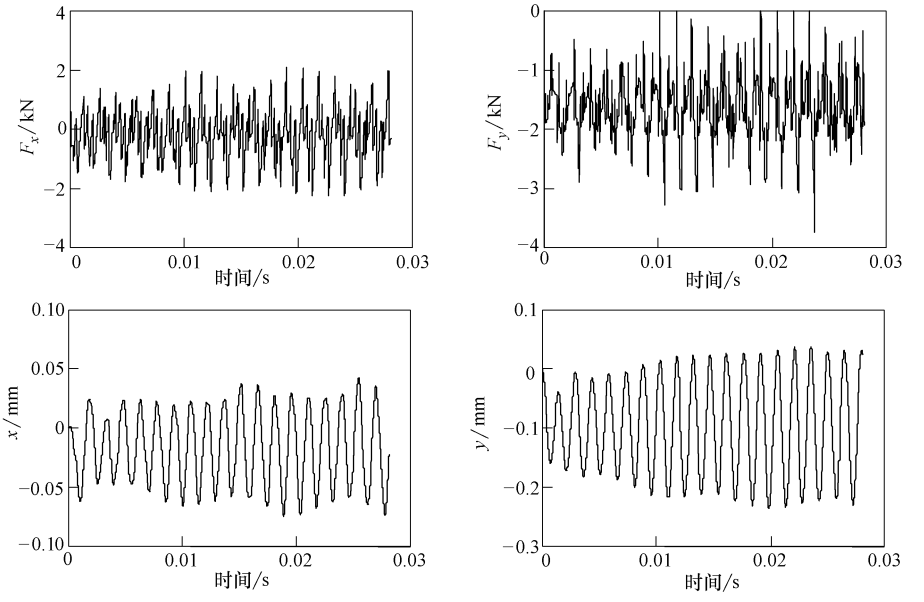


图 10-17　案例 10-4 中的时域模拟（N_s = 32000r/min，d = 3.795mm）

这一节介绍了分析再生颤振另一种方法——时域模拟技术。时域模拟是对加工力和结构振动的直接数值模拟。不同模拟的工艺参数反复变化以确定颤振发生时的临界值。在数值积分过程中，必须使用足够小的时间步长，以考虑与大的结构频率相关的小的系统时间常数。

10.5　颤振检测及案例分析

因为颤振产生高而尖的噪声以及留在工件表面上的“振动标记”，所以再生颤振很容易检测，然而，智能制造需要自动检测（ Cho 和 Ehmann，1988；Delio 等，1992 ）。在颤振开始时，过程信号（如力信号、振动信号）在颤振频率处蕴含巨大的能量。众所周知，颤振频率将会接近结构主频。检测颤振是否存在的最常见的方法就是对过程信号设置门限频率信号。为了分析信号的频谱，需要进行傅里叶变换或者快速傅里叶变换。如果所产生的信号频率接近颤振主频率，且大于门限频率，则可以确定颤振存在。需要注意的是，加工过程信号在刀齿通过频率处同样包含了巨大的能量。如果主结构频率与刀齿通过频率相差很大，则在确定颤振是否存在时可忽略刀齿通过频率。如果两者接近，则在刀齿通过频率处必须使用陷波滤波器过滤信号。同样，如由刀具和工件之间的撞击引起的强迫振动也应过滤，使其不会误触发振动检测进行运算。这些阈值运算法则均受到缺少选择阈值分析方法的制约。这个阈值根据经验选取，不会在大范围的切削条件和切削加工内有效。

案例 10-5

在 Lander 的文献（1997）中，给出了端铣操作实验的完整描述，试验时主轴转速为 1500r/min，刀具有 4 个齿。主要结构固有频率为 334Hz、414Hz、653Hz 和 716Hz。加工力 F_z 的采样频率为 2000Hz，时域信号通过使用 80 个点（主轴旋转一周）的傅里叶变换转换为频域信号。切削深度为 1.0mm 和 1.5mm 的力信号的功率谱密度分别如图 10-18 和图 10-19 所示。在图 10-18 中，频率为 100Hz 处能量巨大，该频率为刀齿通过频率。由于结构振动，因此在 750Hz 处也产生巨大能量；然而，由于在工件上明显缺少颤振痕迹、加工时也没有尖锐的噪声，所以系统并没有发生颤振。在图 10-19 中，当频率达到 665Hz 和 100Hz 时系统产生巨大能量。由留在工件表面的颤振痕迹和加工期间尖锐的噪声可知，系统产生了颤振。结论表明颤振频率为 665Hz，它接近结构主要固有频率 653Hz。注意到图 10-18 和图 10-19 中忽略了频率为 0Hz 的功率谱密度。由于加工力 F_z 在非零的静态值附近变动，所以 0Hz 这一成分比任何其他频率的成分都要强。在这一应用中，阈值算法可以忽略刀齿通过时产生的强烈的低频信号；然而，如果加工时主轴旋转速度较高，例如 7500r/min，或者刀具齿数由 4 增至 20，则刀齿通过时产生的频率将达到 500Hz，该频率接近系统固有频率。在这种情况下，力信号需要在刀齿通过频率处进行滤波。

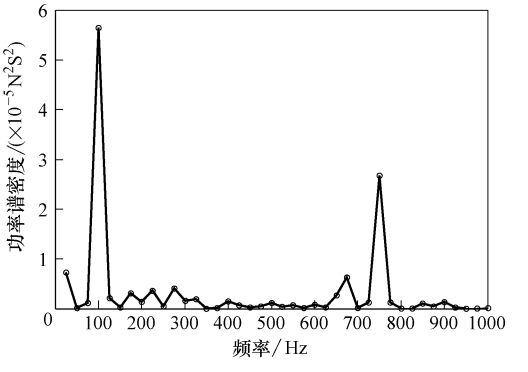


图 10-18　$d = 1.0$mm 时端铣操作中 F_z 的功率谱密度

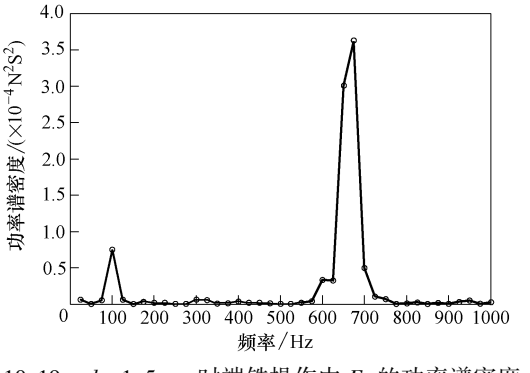


图 10-19　$d = 1.5$mm 时端铣操作中 F_z 的功率谱密度

这一节描述了检测再生颤振是否发生的技术。由于颤振会产生高且尖锐的噪声，并在工件表面留下“颤振标记”，所以操作员很容易检测出再生颤振的现象。检测颤振存在最常见的方法是设置加工过程信号的阈值频率。在这种情况下，必须注意区分主轴旋转频率与刀齿通过产生的频率。

10.6 颤振抑制及案例分析

大多数的车床加工方案都来自于手册或数据库。由于这些方案没有考虑到将要使用机械的物理属性，故不能保证不发生颤振。因此，在大多数操作中，进给量或主轴旋转运动需要根据操作者的经验进行调整，也可以调整刀具位置（如减少切削深度）来抑制颤振，且当由于渐进稳定度边界线的存在，才保证以上方法有效，这种方法一般并不采用，因为加工程序必须重新写入到多次加工中，因而大大削减了生产力。稳定叶图可当成工具使用，来设计没有颤振的切削加工，而且通过选择过程参数落在两叶之间的穴里，可大大提高生产力。针对铣刀的切削工具设计方法（Altintas 等，1999）也被提出过，其对刀齿齿节进行了轻度调整，使刀齿间距不平均。刀齿齿节不同可改变相邻刀齿振动的相位差，如果调整合理，将会抑制颤振。这些设计技术对参数变化及模型误差非常敏感，并且在大范围的操作条件下使用，可能可靠性不高。这一节将描述颤振自动抑制方法。

10.6.1 主轴转速选择

稳定叶图是根据把系统建模为一个一维结构得到的，可以看到最大切削深度位于刀齿通过频率处（刀齿数量乘以主轴转速），它对应于主结构频率及其整数分数频率。如果主结构频率已知，可用其帮助选择主轴转速；然而，结构动力学方程通常未知，故可通过花钱的测试确定参数，而且，结构动力学方程随时间剧烈变化。

然而，在颤振过程中，在切削加工输出中可见的主频接近结构主要固有频率。Smith 和 Delio（1992）利用这一事实来自动抑制颤振。步骤如下：

① 进行颤振检测，以确定颤振是否产生。

② 如果颤振存在，则确定颤振频率 ω_c。这一频率出现在加工过程信号能量最大处。

③ 将新的主轴转速设置为 $N_s = \omega_c/[N_t(N+1)]$，其中 N 是最小正整数，这样新的主轴转速就不会与最大主轴转速的限制发生冲突。

④ 重复步骤①至③，直到颤振受到抑制。

公式 $N_s = \omega_c/[N_t(N+1)]$ 可用来选择与相近的结构主要频率对应的刀齿通过频率，或者其整数部分频率。注意：如果切削深度过大且最大主轴转速过小，这一方法将不会有效果，这时的进给量或切削深度必须进行调整，或者主轴转速必须不断变化。

案例 10-6

式（10-1）给出了车削加工的进给力，式（10-26）给出了系统动力学方程。系统参数为 $P=0.75\text{kg/mm}^2$，$f_{\text{nom}}=0.1\text{mm}$，$\omega_{\text{n}}=750\text{Hz}$，$\zeta=0.1$，$k=15\text{kN/mm}$。切削深度是 5mm。当主轴转速没有限值时，如果颤振频率确定为 725Hz，则要确定选择抑制颤振的主轴转速。如果最大主轴转速为 15000r/min，则也可以确定选择抑制颤振的主轴转速。系统先模拟主轴转速为 10000r/min 时的 10 圈主轴旋转，然后模拟当主轴转速不受限制时，使用针对计算主轴速度的 10 圈主轴旋转，接着，当转速固定时，针对计算的主轴转速，进行再次模拟，并在这两种情况下绘制出进给力和刀具位移。

对于颤振频率 725Hz，最优的主轴转速是 60(725) = 43500r/min。其他可能的转速为 43500/2 = 21750r/min、43500/3 = 14500r/min、43500/4 = 10875r/min，等等。因此，当主轴转速最大值达到 15000r/min 时，就选择主轴转速为 14500r/min。图 10-20 和图 10-21 所示为时域模拟。结果表明，切削深度 5.3mm 时在转速为 43500r/min 处稳定，而不是在 14500r/min。因此，如果主轴转速限制在 15000r/min 以内，则不会通过选择主轴转速来抑制加工过程中出现的颤振。

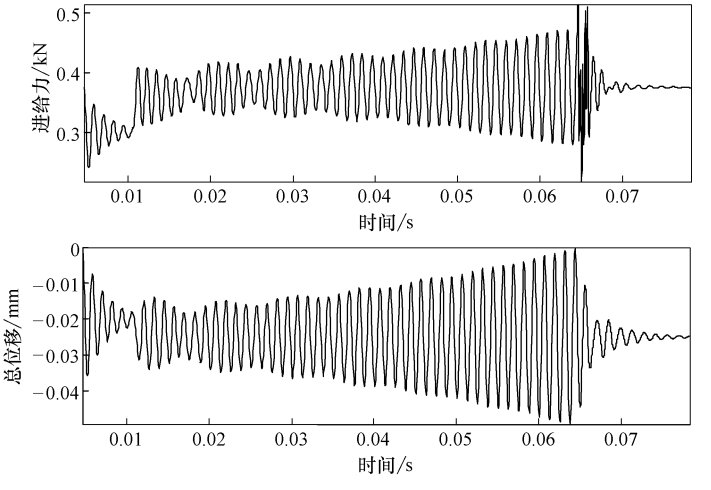


图 10-20　选择主轴转速为 $N_{\text{s}}=43500\text{r/min}$ 的时域模拟

10.6.2　进给量与切削深度选择

当颤振发生时，操作人员有时需要通过机床控制面板上的进给速度操控按钮来增加进给速度。假定主轴转速不变，那么上述操作具有增加进给量的效果。当使用线性颤振分析方法时，加工力过程增益与名义进给量之间呈线性关系，且看起来系统稳定性不受名义进给量影响。然而，稳定结果仅对一小部分名义进给量有效。众所周知，加工作用力与进给量之间呈非线性关系：$F=P(f)\,df$。压力可以 $P(f)=Kf^{\alpha}$ 的形式表示，其中$\alpha>$

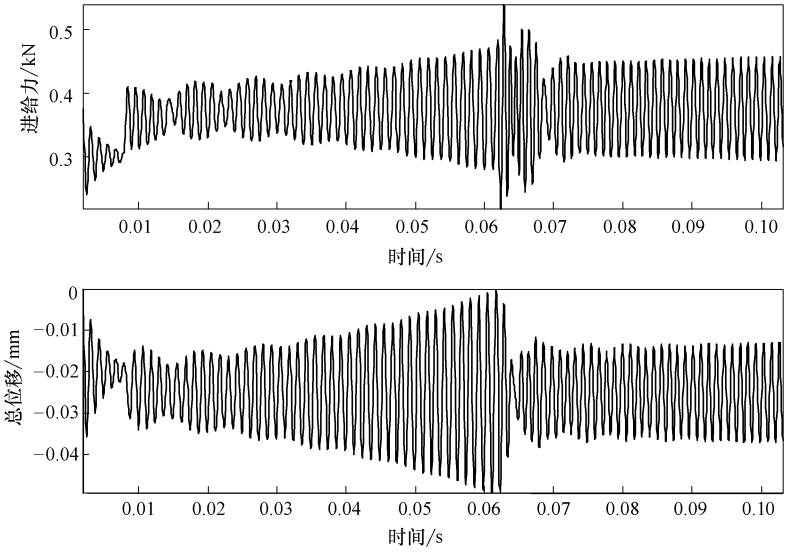


图 10-21　选择主轴转速为 $N_s = 14500\text{r/min}$ 的时域模拟

0；这样，当进给增加时，压力降低。由于稳定切削深度与压力成反比，假设主轴转速不变时，稳定极限将随进给量的增大而增大。例 3 是对这种现象的解释：当进给量从 0.1mm 增至 0.2mm 时，颤振减弱。由于进给量的增大可抑制颤振，所以颤振对进给量的灵敏度被限制，且其他如刀齿碎裂的不利的现象将可能发生。

另一抑制振动的方法就是减小切削深度（Weck 等，1975），通过稳定叶图可证实这一方法有效。但是，由于这一方法需要通过增加总的刀齿数以完成加工，使得生产力大大降低，故不作为首选方法。

10.6.3　主轴转速变化

主轴转速变化（SSV）是另一抑制颤振的方法（Inamura 和 Sata，1974；Lin 等，1990）。主轴转速围绕名义速度值变化，通常以正弦方式变化。尽管 SSV 是一个有发展的技术，但这项理论处于发展初期，该理论被要求引导设计者选择合适的幅值和频率（Radulescu 等，1997a，1997b；Sastry 等，2002 ）。同样，在某些情况下，在等转速运行时 SSV 可能引起不应该产生的颤振。

案例 10-7

式（10-1）给出了车削加工的进给力，方程（10-26）给出了系统结构动力学方程。系统参数为 $P = 0.75\text{kg/mm}^2$，$f_{\text{nom}} = 0.1\text{mm}$，$\omega_n = 750\text{Hz}$，$\zeta = 0.1$，$k = 15\text{kN/mm}$。切削深度是 5mm。先模拟额定转速为 $N_{\text{nom}} = 1000\text{r/min}$ 的系统，主轴旋转 10 周；然后再模拟主轴旋转 30 圈、主轴转速根据式（10-67）计算，并针对以下三种工况：$A = 0.1$，$\Omega = 20\text{Hz}$；$A = 0.25$，$\Omega = 20\text{Hz}$；$A = 0.25$，$\Omega = 160\text{Hz}$。绘制出这三种工况下的进给力和

刀具位移。

$$N_s(t) = N_{nom}[1 + A\sin\Omega t] \tag{10-67}$$

对应上述情况的时域模拟如图 10-22 ~ 图 10-24 所示。结果表明可以使用 SSV 来抑制颤振，但是，必须认真选择主轴转速波动的幅值和频率。

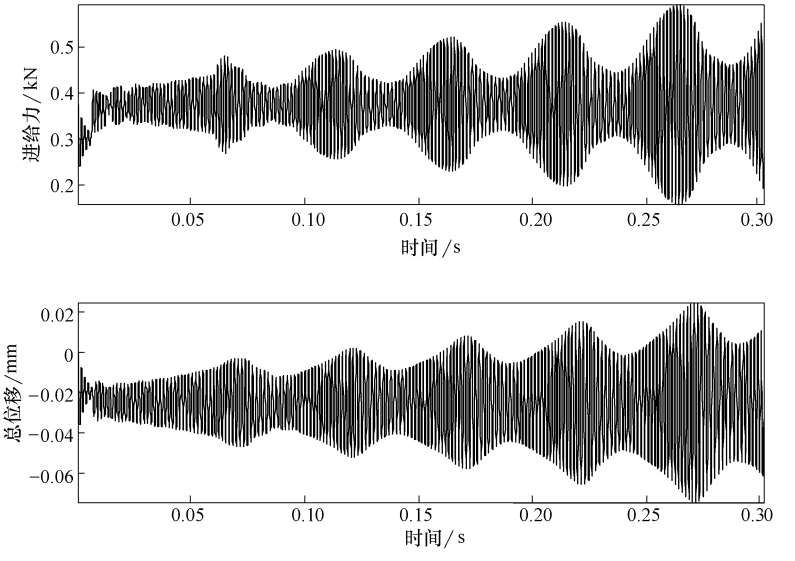


图 10-22　主轴转速变化的时域模拟，$A = 0.1$，$\Omega = 20$Hz

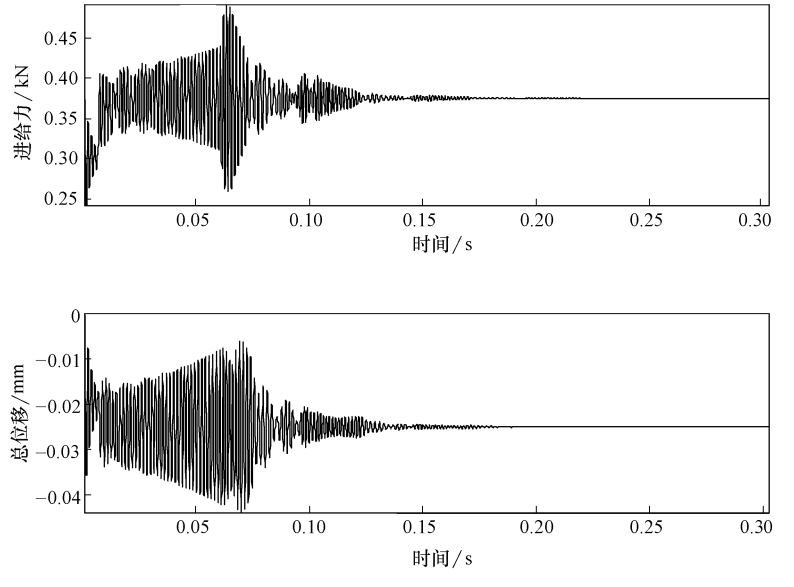


图 10-23　主轴转速变化的时域模拟，$A = 0.25$，$\Omega = 20$Hz

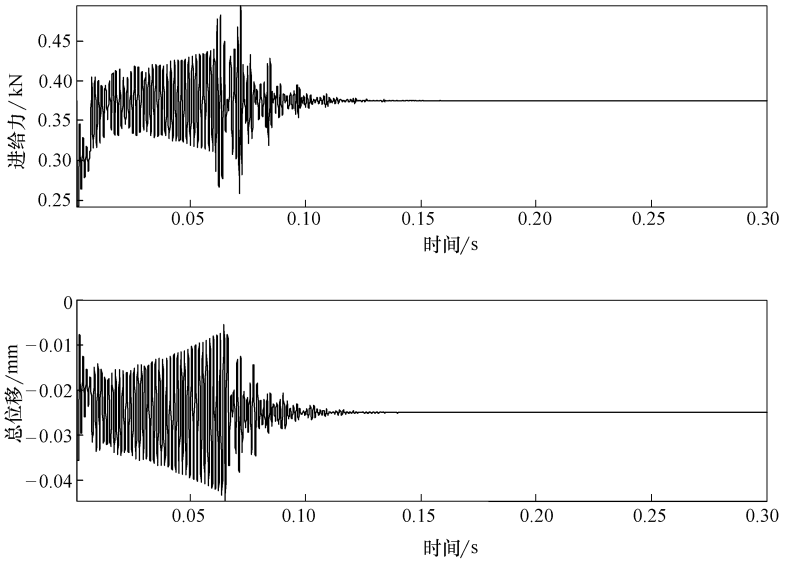


图 10-24　主轴转速变化的时域模拟，$A=0.25$，$\Omega=160$Hz

这一节主要介绍了几种抑制再生颤振的方法。三种主要的抑制颤振方法是主轴转速选择、进给量选择和 SSV。在主轴转速选择方法中，主轴转速调整为稳定叶图中两叶间的颤振频率的倍数。在进给量选择方法中，进给量增大可以抑制振动。在 SSV 方法中，主轴转速以正弦方式变化，以减少当前刀齿通过路径和刀齿之前通过路径的相位差。

10.7　个案研究

现在描述一个端铣操作再生振动的个案研究。更多的细节在 Lander 的参考文献（1997）中描述。机床是一台三轴立式铣床（图 10-25）。每一轴均安装分辨率为 10μm 的线性编码器。轴电动机（186W）驱动带轮以带动丝杠旋转，并向线性轴提供信号。主轴（2240W）驱动端铣刀（碳化钨硬质合金，RjL220. 13-02. 00-12，直径为 50 mm）。刀具有 4 个硬质合金刀片（碳化钨硬质合金，SEAN 42AFTN-M14 HX，导角为 45°）。工件材料是 6061 铝。机床开环运行。使用 Kistler9293 压电式三分量测力计进行力的过程的建模以及颤振检测。x 和 y 通道的固有频率为 4. 5kHz，刚度为 0. 7kN/μm，测量范围为 −20 ~ 20kN。z 通道的固有频率为 5kHz，刚度为 7kN/μm，测量范围为 −100 ~ 200kN。使用一个本特利内华达公司的 3000 系列型号为 190 的涡流传感器测量结构部件的静刚度。传感器增益是 8V/mm，响应从零至 10kHz，测量范围是 1. 02mm。使用一个 Kistler 型号为 802A 的石英晶体加速度计（谐振频率 36. 7kHz）测量结构部件的动态特性。

切削力和推压力分别为

$$P_C = 0.29 f^{-0.25} d^{-0.13} \left(\frac{V}{1000}\right)^{-0.72} \tag{10-68}$$

$$P_T = 0.16 f^{-0.40} d^{-0.41} \left(\frac{V}{1000}\right)^{-0.58} \tag{10-69}$$

刀具结构和切削力以及工件结构和切削力之间的传递函数矩阵分别建模为

$$\begin{bmatrix} x_t(s) \\ y_t(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(4500^2/14)}{s^2 + 2(0.07)(4500)s + 4500^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(4100^2/14)}{s^2 + 2(0.11)(4100)s + 4100^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x(s) \\ F_y(s) \end{bmatrix} \tag{10-70}$$

$$\begin{bmatrix} x_p(s) \\ y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(2600^2/9.5)}{s^2 + 2(0.09)(2600)s + 2600^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(2100^2/9.5)}{s^2 + 2(0.22)(2100)s + 2100^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x(s) \\ F_y(s) \end{bmatrix} \tag{10-71}$$

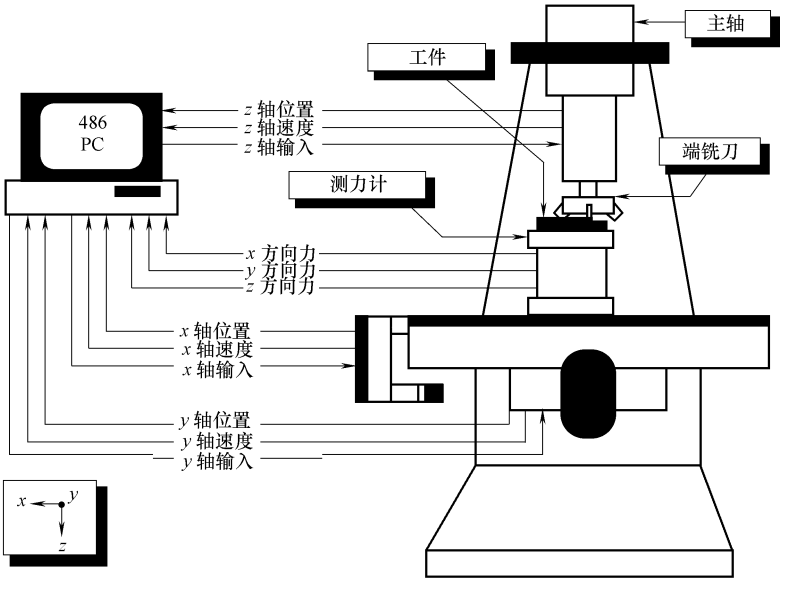


图 10-25 三轴立式铣床

通过切削力和结构模型，利用时域模拟构建出了稳定叶图。通过对切削深度每次 0.1mm 的增量，调节切削深度直至系统颤振发生，来收集实验数据。时域模拟以及实验数据结果绘制在图 10-26 中。切削条件为 $f_t = 0.10\text{mm/齿}$，$N_t = 4$ 齿，$\theta_{en} = -90°$，且 $\theta_{ex} = 90°$。案例 5 描述了这一系统的颤振检测方法。

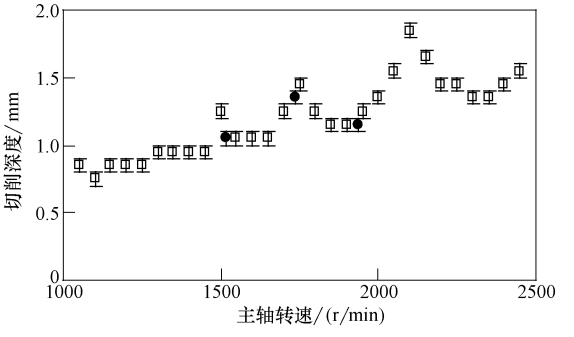


图 10-26 端铣加工的稳定叶图-时域模拟（空心点）和实验结果（实心圆）

主轴转速调节是更有效的颤振抑制方法，但是，在这一案例研究中，机床并不能自动调速，因此要调整切削深度来抑制颤振。当检测出颤振时，颤振抑制器改写加工程序以适应一个附加的刀具路径（图 10-27）。因此，新的加工切削深度是

$$d_n = \frac{d_p}{1 + N_c} \tag{10-72}$$

式中，d_p 是之前的加工切削深度；N_c 是调用的颤振抑制次数。新的数值可能大大低于稳定限值，但是，将所有路径取相等的切削深度，在高生产力和寻求稳定切削深度之间提供了很好的平衡。在 Lander 和 Ulsoy（1998，2001）的文献中介绍了这一控制器的结果。

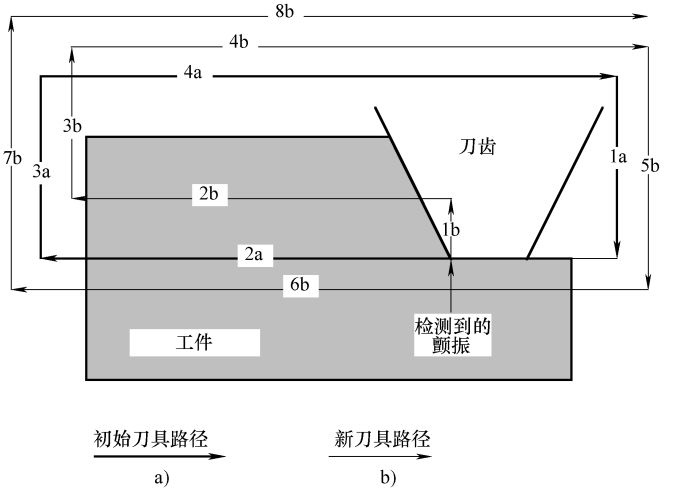


图 10-27　当颤振产生时，更改刀具路径（包含附加路径）

a）初始刀具路径；b）新的刀具路径

术　　语

符　　号	名　　称
d	切削深度(mm)
d_{lim}	有限稳定的切削深度(mm)
f	进给量(mm)
f_t	每齿进给量(mm)
F	切削加工力(kN)
F_C	切削力(kN)
F_T	轴向力(kN)
F_x	作用在刀具 x 方向的力(kN)
F_y	作用在刀具 y 方向的力(kN)
F_z	作用在刀具 z 方向的力(kN)
K	结构刚度(kN/mm)
N_s	主轴转速(r/min)
N_t	刀齿数
P	加工压力(kN/mm^2)

（续）

符　号	名　称
P_C	切削压力(kN/mm^2)
P_T	轴向压力(kN/mm^2)
t	时间(s)
T	主轴旋转周期(s)
T_t	刀齿旋转周期(s)
x_p	工件结构 x 方向的位移(mm)
x_t	切削刀具结构 x 方向的位移(mm)
y_p	工件结构 y 方向的位移(mm)
y_t	切削刀具结构 y 方向的位移(mm)
z	切削刀具结构 z 方向的位移(mm)
θ	刀齿角度(rad)
θ_{en}	刀齿进入角(rad)
θ_{ex}	刀齿退出角(rad)
ω_c	颤振频率(rad/s)
ω_n	结构固有频率(rad/s)
ψ_r	导角(rad)
ζ	结构阻尼比

参考文献

Altintas, Y. and Budak, E., Analytical prediction of stability lobes in milling, *Ann. CIRP*, 44/1, 357–362, 1995.

Altintas, Y., Engin, S., and Budak, E., Analytical stability prediction and design of variable pitch cutters, *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, 121, 173–178, 1999.

Budak, E. and Altintas, Y., Analytical prediction of chatter stability in milling, part I: general formulation, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 120, 22–30, 1998a.

Budak, E. and Altintas, Y., Analytical prediction of chatter stability in milling, part II: application of the general formulation to common milling systems, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 120, 31–36, 1998b.

Cho, D.W. and Ehmann, K.F., Pattern recognition for on-line chatter detection, *Mech. Syst. Signal Process.*, 2, 279–290, 1988.

Delio, T., Tlusty, J., and Smith, S., Use of audio signals for chatter detection and control, *ASME J. Eng. Ind.*, 114, 146–157, 1992.

Elbestawi, M.A., Ismail, F., Du, R., and Ullagaddi, B.C., Modeling machining dynamics including damping in the tool–workpiece interface, *ASME J. Eng. Ind.*, 116, 435–439, 1994.

Inamura, T. and Sata, T., Stability analysis of cutting under varying spindle speed, *Ann. CIRP*, 23/1, 119–120, 1974.

Inasaki, I., Karpuschewshi, B., and Lee, H.-S., Grinding chatter — origin and suppression, *Ann. CIRP*, 50/2, 515–534, 2001.

Koenigsberger, I., Tlusty, J. 1971. *Structures of Machine Tools*, Pergamon Press, New York.

Landers, R.G. 1997. Supervisory machining control: a design approach plus force control and chatter analysis components, Ph.D. Dissertation. Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Michigan, Ann Arbor.

Landers, R.G. and Ulsoy, A.G., Supervisory machining control: design and experiments, *Ann. CIRP*, 47/1, 301–306, 1998.

Landers, R.G. and Ulsoy, A.G., Supervisory control of a face-milling operation in different manufacturing environments, *Trans. Control Automat. Syst. Eng.*, 3, 1–9, 2001.

Lee, A.-C. and Liu, C.-S., Analysis of chatter vibration in a cutter–workpiece system, *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 31, 221–234, 1991a.

Lee, A.-C. and Liu, C.-S., Analysis of chatter vibration in the end milling process, *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 31, 471–479, 1991b.

Lin, S.C., DeVor, R.E., and Kapoor, S.G., The effects of variable speed cutting on vibration control in face milling, *ASME J. Eng. Ind.*, 112, 1–11, 1990.

Merritt, H.E., Theory of self-excited machine tool chatter: contribution to machine-tool chatter research — 1, *ASME J. Eng. Ind.*, 87, 447–454, 1965.

Minis, I., Magrab, E., and Pandelidis, I., Improved methods for the prediction of chatter in turning, Part III: a generalized linear theory, *ASME J. Eng. Ind.*, 112, 28–35, 1990a.

Minis, I. and Yanushevsky, R., A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling, *ASME J. Eng. Ind.*, 115, 1–8, 1993.

Minis, I., Yanushevsky, R., and Tembo, A., Analysis of linear and nonlinear chatter in milling, *Ann. CIRP*, 39/1, 459–462, 1990b.

Radulescu, R., Kapor, S.G., and DeVor, R.E., An investigation of variable spindle speed face milling for tool work structures with complex dynamics, part 1: simulation results, *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, 119, 266–272, 1997a.

Radulescu, R., Kapor, S.G., and DeVor, R.E., An investigation of variable spindle speed face milling for tool work structures with complex dynamics, part 2: physical explanation, *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, 119, 273–280, 1997b.

Sastry, S., Kapor, S.G., and DeVor, R.E., Floquet theory based approach for stability analysis of the variable speed face-milling process, *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, 124, 10–17, 2002.

Smith, S. and Delio, T., Sensor-based chatter detection and avoidance by spindle speed selection, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 114, 486–492, 1992.

Smith, S. and Tlusty, J., Efficient simulation programs for chatter in milling, *Ann. CIRP*, 42/1, 463–466, 1993.

Tarng, Y.S. and Li, T.C., Detection and suppression of drilling chatter, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 116, 729–734, 1994.

Tlusty, J., Dynamics of high-speed milling, *ASME J. Eng. Ind.*, 108, 59–67, 1986.

Tlusty, J. 2000. *Manufacturing Processes and Equipment*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Tlusty, J. and Ismail, F., Basic nonlinearity in machining chatter, *Ann. CIRP*, 30/1, 299–304, 1981.

Tlusty, J. and Ismail, F., Special aspects of chatter in milling, *ASME J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 105, 24–32, 1983.

Tobias, S.A. 1965. *Machine Tool Vibration*, Wiley, New York.

Tsai, M.D., Takata, S., Inui, M., Kimura, F., and Sata, T., Prediction of chatter vibration by means of a model-based cutting simulation system, *Ann. CIRP*, 39/1, 447–450, 1990.

Weck, M., Altintas, Y., and Beer, C., CAD assisted chatter-free NC tool path generation in milling, *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 34, 879–891, 1994.

Weck, M., Verhagg, E., and Gather, M., Adaptive control of face-milling operations with strategies for avoiding chatter-vibrations and for automatic cut distribution, *Ann. CIRP*, 24/1, 405–409, 1975.

Yun, I.S., Wilson, W.R.D., and Ehmann, K.F., Review of chatter studies in cold rolling, *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 38, 1499–1530, 1998.

11 流致振动

摘要

本章给出了海洋环境下流体-诱致振动的概论，主要目的是展示如何建立由水流和随机波浪引起的流体力对离岸结构的模型。本章分为三节：第一节描述了海洋环境，尤其是海洋流和随机波浪；第二节致力于利用第一节结果获得流体力；第三节给出一些例子，介绍在实践中如何利用前两节结果。在第一节中，介绍了谱密度的概念。对于给定的谱，给出了获得样本时间系列的方法。在第二节中，讨论了流体施加在物体上的力。在这个体系中，就波高与结构直径之比和结构直径与波长之比而言，惯性、拖拽或绕射力占有主导地位。莫里逊方程扩展到有运动倾向的圆柱体上。莫里逊方程要求使用实验确定的流体系数，比如附加质量、惯性和拖拽系数。这里复制了针对不同流体参数值的流体系数图形。另外还简要讨论了涡脱力。在第三节中，给出了4个例子来展示流体力如何影响海洋结构的静力学和动力学，介绍显著波高如何被选来代表在某一区域相对长时间内的海洋条件，并介绍如何从给定谱构造时间系列。最后，列出了流体中建立细长弹性体模型的可用数字程序。

11.1 海洋环境描述

在构建离岸结构模型时，需要考虑到其周围流体所施加的力量。Kinsman（1965），Sarpkaya and Isaacson（1981），Wilson（1984），Chakrabarti（1987）和Faltinsen（1993）进行了更加深入的研究。当某一结构被水包围时，它的振动特性可以发生显著改变。比如，可以通过流体阻尼（或附加质量）来降低固有频率。当考虑离岸结构的动力特性时，也必须考虑由于周围流体作用而产生的力。两个重要的流体运动源是海浪和洋流。

最稳定的大洋流是由风拖曳流过水表面产生的，它们被限制在靠近海洋表面区域。潮汐流是由于太阳和月亮的万有引力吸引产生，且它们在靠近海岸时最显著。大洋环流的最终来源是来自太阳的不均匀的热辐射引起的。

Isaacson（1988）提出了一个经验方程，就是水平方向的海洋流速为深度的函数：

$$U_c(x) = [U_{\text{tide}}(d) + U_{\text{circulation}}(d)]\left(\frac{x}{d}\right)^{1/7} + U_{\text{drift}}(d)\left(\frac{x-d+d_0}{d_0}\right) \tag{11-1}$$

式中 U_{drift} 为风致飘移流速；U_{tide} 为潮汐流速；$U_{\text{circulation}}$ 为低频长期循环流速；x 为从海底起测量的垂直距离；d 为水深；d_0 为温跃层深度与50m之间较小的一个值。U_{tide} 的值可由潮汐表中获得，U_{drift} 大约为海平面以上10m在10min内的平均风速的3%。

应该注意到，与感兴趣的工程时间尺度相比，这些洋流流动非常缓慢。因此，这些洋流可以看做是准稳定现象。另一方面，海浪则不能当做稳态现象来处理。那些控制波浪动力学的基本物理学十分复杂，因此必须建立波浪的随机模型。随后的章节将讨论谱密度的概念、可用的海浪谱密度、从海浪随时间变化的关系曲线得到谱密度的方法、从谱密度得到海浪随时间变化样本的方法、短期项与长期项统计，以及使用线性波浪理论从波高图上获得流体速度和加速度的方法。

11.1.1 谱密度

本节我们仅仅考虑表面重力波。首先，我们考虑一种规则波以使我们熟悉那些描述波的专业术语。波的表面高度用 $\eta(x, t)$ 表示，可以写成 $\eta(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$，其中 k 为波数，ω 为角频率。图 11-1 所示为两个表面高度时间曲线样本（$t=0$ 和 $t=\tau$）及固定位置处的表面高度曲线。A 为波幅，H 为波高或者最大最小波高之间的距离或者是两倍的波幅，T 为周期，$T = 2\pi/\omega$。

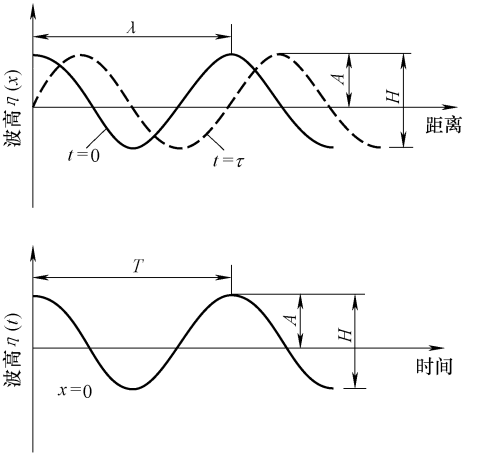


图 11-1　规则波浪

在实际情况下，波是不规则的。图 11-2所示为一不规则波表面高度时间曲线的示意图。波高和频率都很难找到。因此，我们依靠波表面高度的统计学描述，如波的频谱密度。频谱密度告诉我们在频率域内波的能量是如何分布的。随机表面高度 $\eta(t)$ 可以认为是具有不同频率的规则波的总和。表面高度 $\eta(t)$ 和它的傅里叶变换 $X(\omega)$ 的关系为

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\exp(-\mathrm{i}wt)\,\mathrm{d}\omega$$

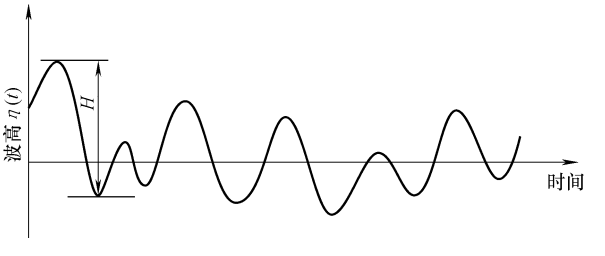


图 11-2　随机波的时间历程曲线

假如该系统的能量与 $\eta^2(t)$ 成正比，那么能量可以写成

$$E=\frac{1}{2}C\eta^2(t)$$

式中，C 为比例常数。

假设能量的期望值为

$$E\{\boldsymbol{E}\}=\frac{1}{2}CE\{\eta^2(t)\}$$

式中，$E\{\eta^2(t)\}$ 为 $\eta(t)$ 均方值。如果 $\eta(t)$ 是各态历经过程，那么 $\eta(t)$ 的均方值可近似为长时间内时间域的平均值：

$$E\{\eta^2(t)\}=\lim_{T_S\to+\infty}\frac{1}{T_s}\eta^2(t)\mathrm{d}t=\lim_{T_S\to+\infty}\frac{1}{T_s}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{11-2}$$

其中使用了巴塞伐尔理论

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{11-3}$$

其中

$$|X(\omega)|^2=X(\omega)X^*(\omega)$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)\exp(-\mathrm{i}wt)\mathrm{d}t,X^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)\exp(\mathrm{i}wt)\mathrm{d}t$$

定义功率谱密度（或简称谱）为

$$S_{\eta\eta}(\omega)\equiv\frac{1}{2\pi T_s}|X(\omega)|^2 \tag{11-4}$$

那么 $E\{\eta^2(t)\}$ 可表示为

$$E\{\eta^2(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{11-5}$$

对于零平均值过程，$E\{\eta^2(t)\}$ 也是方差 σ_η^2。谱密度具有 η^2t 的单位。当 η 为波高时，谱密度单位为 $\mathrm{m^2s}$。

由 Wiener-Khinchine 关系式，可见 $S_{\eta\eta}(\omega)$ 与自相关函数 $R(\tau)$ 有关：

$$S_{\eta\eta}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\tau)\exp(-\mathrm{i}w\tau)\mathrm{d}\tau,R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\exp(-\mathrm{i}w\tau)\mathrm{d}\omega \tag{11-6}$$

应该注意到，在某些教科书中，系数 $1/2\pi$ 出现在第二个公式中，而不是第一个公式中。图 11-3 表示了一些重要的 $S_{\eta\eta}(\omega)$ 和 $R_{\eta\eta}(\tau)$ 对。

读者应该开始熟悉谱密度的一些特性。第一个特性就是实数平稳过程的谱密度函数是实对称的。这就意味着 $S_{\eta\eta}(\omega)=S_{\eta\eta}(-\omega)$［式（11-4）］。其次，谱密度下的面积等于 $E\{\eta^2(t)\}$［式（11-5）］，且也等于 $R_{\eta\eta}(0)$，$R_{\eta\eta}(0)=\sigma_\eta^2-\mu_\eta^2$，其中 σ_η^2 为方差，μ_η^2 为 $\eta(t)$ 的平均值。在大多数情况下，我们仅考虑零均值过程，因此谱密度下的面积就等于 σ_η^2。如果过程不是零平均，可以将平均值从中减去，以使得该过程变为零均值过程。

对于海洋的应用，经常使用每秒周期数（c/s）或者赫兹表示的单边谱。我们用一个上角标“o”来表示单边谱。可以由双边谱得到如下单边谱：

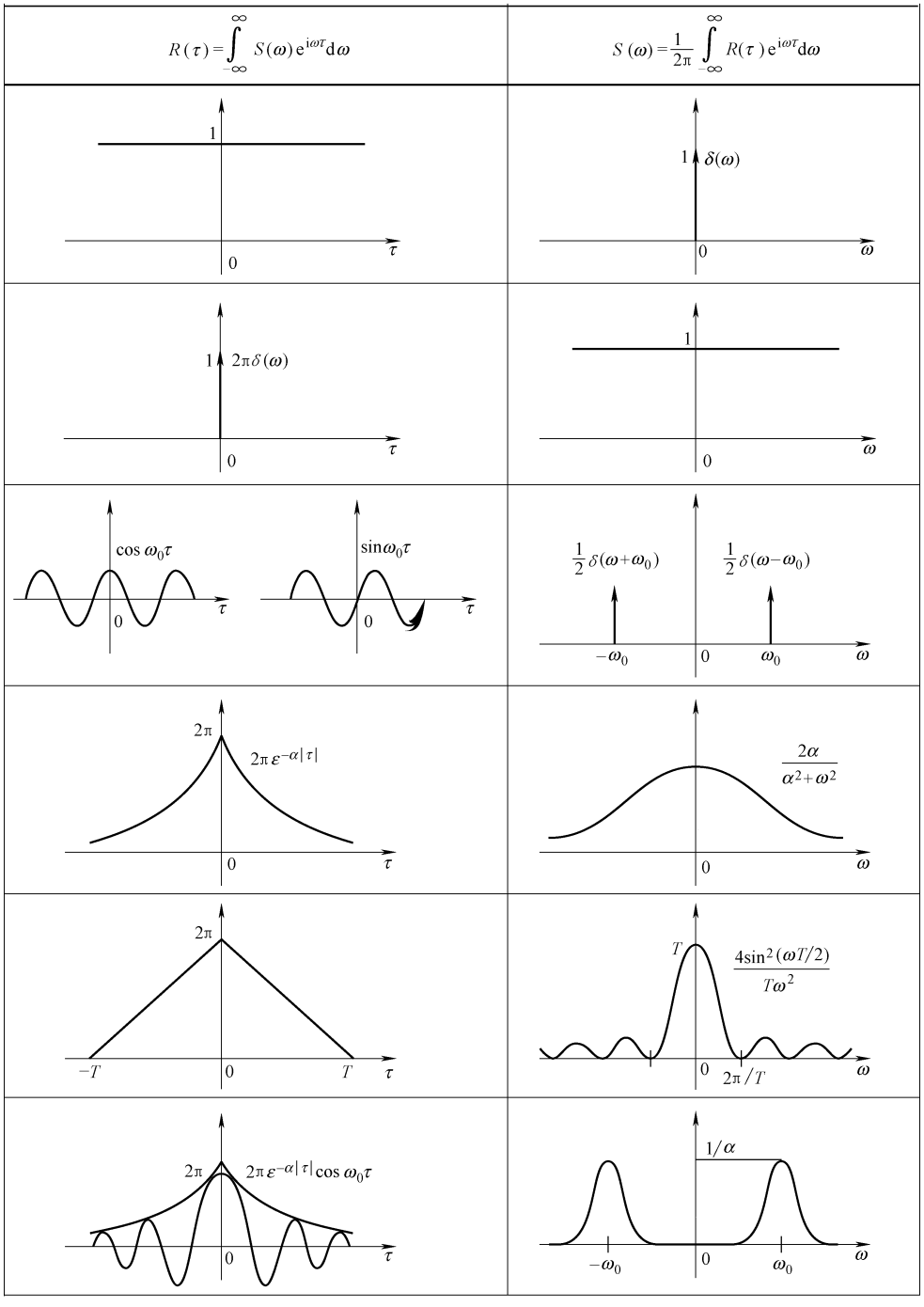


图 11-3　自相关函数与功率谱密度之间的关系

$$S^{o}_{\eta\eta}(\omega)=2S_{\eta\eta}(\omega),\ \omega\geqslant 0$$

用 ω 表示的双边谱可以转化为用 $f(\omega=2\pi f)$ 表示的双边谱

$$S_{\eta\eta}(f)=2\pi S_{\eta\eta}(\omega),\ f,\ \omega\geqslant 0$$

然后，用 ω 表示的双边谱可以转化为用 c/s（或赫兹）表示的单边谱

$$S^{o}_{\eta\eta}(\omega)=4\pi S_{\eta\eta}(\omega),\ f,\ \omega\geqslant 0$$

应当注意的是，这里我们定义的谱密度是幅值单边谱。幅值、高度以及高度双边谱是与幅值单边谱相关

$$S^{A}(\omega)=2S(\omega),\ S^{H}(\omega)=8S(\omega),\ S^{2H}(\omega)=16S(\omega)$$

11.1.2 海浪谱密度

在这一节，我们将讨论描述随机海洋的频谱密度模型。在 Chakrabarti（1987）专著的第 4 章给出了对现有谱密度模型非常完美的评论。

海浪频谱模型是半经验公式。这就意味着，它们由数学公式推导，但是需要一个或者更多由实验决定的参数。谱的精度在很大程度上取决于这些参数的选择。

在用公式表示谱密度时，影响频谱密度的参数为风区长度极限、波浪衰减与发展海域、水深、洋流和浪涌。风区长度是指波浪产生阶段风吹过的距离。风区长度极限是指距离上的限制，这个限制是由于某些物理边界而限制到全波的发展。在一个波浪发展中的海洋里，在平稳风场作用下海洋还没有达到稳定状态。相比之下，在一个波浪完全发展的海洋中，风已经作用了足够的时间，海洋也到达了它的稳定状态。在一个衰退的海洋中，风已经从它的稳定状态脱落了下来。浪涌是由于远方风暴引起的海浪运动，并且在风暴结束甚至远去的时候依然保持着。

在表征完全发展的海洋时，Pierson-Moskowitz（P-M）谱（Pierson 和 Moskowitz，1964）是最为广泛运用的。它是一个单参数模型，在这个模型中，海洋的严格条件规定用风速表示。P-M 谱表示为

$$S^{o}_{\eta\eta}(f)=\frac{8.1\times10^{-3}g^{2}}{\omega^{5}}\exp\left[-0.74\left(\frac{g}{U_{w,19.5m}}\right)^{4}\omega^{-4}\right]$$

式中，g 为万有引力常数；$U_{w,19.5m}$ 为静水面以上 19.5m 处的风速。P-M 谱也称为风速谱，因为它需要风速的数据。P-M 谱也可以用模态频率 ω_m 来表示

$$S^{o}_{\eta\eta}(f)=\frac{8.1\times10^{-3}g^{2}}{\omega^{5}}\exp\left[-1.25\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^{4}\right] \tag{11-7}$$

注意：模态频率指的是频谱图上最大峰值所对应的频率。

在某些情况下，使用显著的波高表示频谱要比风速或模态频率的表示来得方便。对于窄带高斯过程，显著波高和标准偏差有关，$H_s=4\sigma_\eta$。标准偏差就是谱密度曲线下所围面积的平方根，$\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\mathrm{d}\omega=\sigma_\eta^{2}$。那么谱密度可以写成

$$S^{o}_{\eta\eta}(f)=\frac{8.1\times10^{-3}g^{2}}{\omega^{5}}\exp\left(-\frac{0.0324g^{2}}{H_s^{2}}\omega^{-4}\right) \tag{11-8}$$

且峰值频率和显著波高的关系为

$$\omega_{\mathrm{m}} = 0.4\sqrt{g/H_{\mathrm{s}}} \tag{11-9}$$

P-M 谱适用于深水、单方向海域，是完全发展了的、局部风产生的无极限风区海域，且是在北大西洋形成的。这里不考虑浪涌的影响。尽管海域是在北大西洋形成的，但该谱也适用于其他海域。然而，由于不能建立一定距离远的波浪影响的模型，所以海洋完全成形的限制可能太过严格。因此，为了建立未完全成形海洋和完全成形海洋模型，我们考虑两参数谱，如 Bretschneider 谱。

Bretschneider 谱（Bretschneider，1959，1969）是两参数谱，其中规定了海况和发展状态。Bretschneider 谱公式为

$$S_{\eta\eta}^{\mathrm{o}}(f) = 0.169\frac{\omega_{\mathrm{s}}^4}{\omega^5}H_{\mathrm{s}}^2\exp\left[-0.675\left(\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{\omega}\right)^4\right]$$

式中，$\omega_{\mathrm{s}} = 2\pi/T_{\mathrm{s}}$，$T_{\mathrm{s}}$ 为显著周期。海况可由 H_{s} 规定，且发展状态可由 ω_{s} 规定。$\omega_{\mathrm{s}} = 1.167\omega_{\mathrm{m}}$（等价于 $\omega_{\mathrm{s}} = 1.46/\sqrt{H_{\mathrm{s}}}$）表明了 Bretschneider 谱和 P-M 谱是等价的。图 11-4 所示为 $H_{\mathrm{s}} = 4\mathrm{m}$ 时的 Bretschneider 谱。当 $\omega_{\mathrm{s}} = 0.731\mathrm{rad/s}$ 时，P-M 和 Bretschneider 谱是等同的。应当注意的是，对于发展中的海洋来说，其模态频率略高于完全发展的海洋，这可以描述为 ω_{s} 略高于 $1.46/\sqrt{H_{\mathrm{s}}}$。

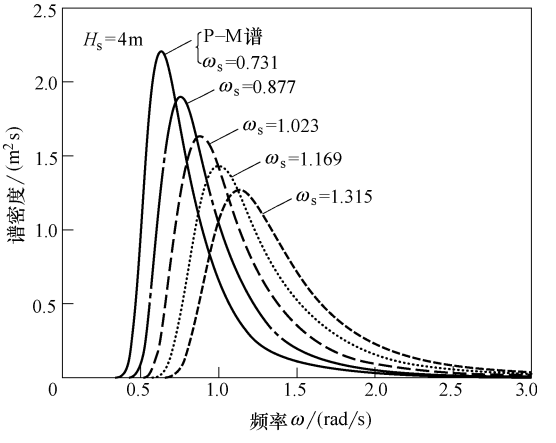


图 11-4　不同 ω_{s} 的 Bretschneider 谱

其他常用的双参数频谱密度为国际船舶结构协会（ISSC）和国际拖曳水池会议（ITTC）谱。ISSC 谱是以显著波高和平均频率表示的，其中平均频率为

$$\overline{\omega} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty \omega S(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_0^\infty S(\omega)\,\mathrm{d}\omega}} = 1.30\omega_{\mathrm{m}}$$

因此，ISSC 谱写成

$$S_{\eta\eta}^{\mathrm{o}}(f) = 0.111\frac{\overline{\omega}^4}{\omega^5}H_{\mathrm{s}}^2\exp\left(-0.444\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^4\right)$$

ITTC 谱基于显著波高和零交叉频率，表达成

$$S_{\eta\eta}^{o}(f) = 0.795\frac{\omega_z^4}{\omega^5}H_s^2\exp\left(-0.318\left(\frac{\omega_z}{\omega}\right)^4\right)$$

其中零交叉频率 ω_z 为

$$\omega_z = \sqrt{\frac{\int_0^\infty \omega^2 S(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_0^\infty S(\omega)\,\mathrm{d}\omega}} = 1.41\omega_m$$

Bretschneider、ITTC 和 ISSC 谱被称为双参数谱，它们可以统一写成

$$S_{\eta\eta}^{o}(f) = \frac{A}{4}\frac{\tilde{\omega}^4}{\omega^5}H_s^2\exp\left(-A\left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^4\right)$$

A 和 ω 在表 11-1 中已给出。

表 11-1 双参数谱模型

$$S_{\eta\eta}^{o}(\omega) = (A/4)H_s^2\tilde{\omega}^4/\omega^5\exp(-A(\omega/\tilde{\omega})^{-4})$$

模　　型	A	$\tilde{\omega}$
Bretschneider	0.675	ω_s
ITTC	0.318	ω_z
ISSC	0.4427	$\bar{\omega}$

到目前为止我们所讨论的频谱还不允许我们生成带有两个尖峰的频谱来描绘当地的或者远处的风暴，或者规定峰的尖锐度。Ochi-Hubble（O-H）谱（Ochi and Hubble，1976）是如下形式的六参数谱：

$$S_{\eta\eta}^{o}(f) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\frac{[(4\lambda_i+1)\tau\omega_{mi}^4/4]^{\lambda_i}}{\Gamma(\lambda_i)}\frac{H_{si}^2}{\omega^{4\lambda_i+1}}\exp\left[-\left(\frac{4\lambda_i+1}{4}\right)\left(\frac{\omega_{mi}}{\omega}\right)^4\right]$$

式中，$\Gamma(\lambda_i)$ 为一伽马函数；H_{s1}、ω_{m1} 和 λ_1 分别为低频成分的显著波高、模态频率和波形因数，H_{s2}、ω_{m2} 和 λ_2 分别为高频成分的显著波高、模态频率和波形因数。假设整个频谱是一个窄带的，则等效显著波高为

$$H_s = \sqrt{H_{s1}^2 + H_{s2}^2}$$

对于 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 0$，频谱降为 P-M 谱。假设整个频谱为窄带的话，则 λ_1 的值远大于 λ_2。O-H 谱代表了具有无限风区长度的单向海域。海况和发展状态可以用 H_{si} 和 ω_{mi} 来规定。此外，λ_i 可以用来控制谱的频率带宽。比如，小的 λ_i（较宽的频率范围）表示了一个发展中的海洋，而一个大的 λ_i（较窄的频率范围）表示了一个浪涌的环境。图 11-5 所示了 $\lambda_1 = 2.72$，$\omega_{m1} = 0.626\text{rad/s}$，$H_{s1} = 3.35\text{m}$，$\lambda_2 = 2.72$，$\omega_{m2} = 1.25\text{rad/s}$，$H_{s2} = 2.19\text{m}$ 的 O-H 谱。

最后，另外一个被广泛应用的频谱是 Joint North 海浪工程（JONSWAO）谱，该谱是由 Hasselmann 等提出的（1973）。该频谱为一有限风区谱，因为它考虑了在有限风区

内的生长，同时也考虑到了浅水中的衰减。JONSWAP 谱表示成

$$S_{\eta\eta}^{o}(\omega)=\frac{\alpha g^2}{\omega^5}\exp\left[-1.25\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^4\right]\gamma^{\exp[-(\omega-\omega_m)/2\tau^2\omega_m^2]}$$

式中，γ 为峰度参数；τ 为形状参数。峰度参数 γ 为最大频谱能量和相应 P-M 谱的最大谱能量比值。这就是说，当 $\gamma=7$ 时，峰值谱能量为相应 P-M 谱能量的 7 倍。

$$\gamma=\begin{cases}7.0 & \text{对于每一个幅值数据}\\ 3.3 & \text{对于选择的 JONSWAP 数据的平均值}\\ 1.0 & \text{对于 P-M 谱}\end{cases}$$

$$\tau=\begin{cases}0.07 & \text{对于 } \omega\leqslant\omega_m\\ 0.09 & \text{对于 } \omega>\omega_m\end{cases}$$

另外，$\alpha=0.076(\overline{X})^{-0.22}$，当风区长度独立时，为 0.0081；$\overline{X}=gX/U_w^2$；$X$ 为风区长度（海里）；U_w 为风速（节）；$\omega_m=2\pi\times3.5(g/U_w)\overline{X}^{-0.33}$

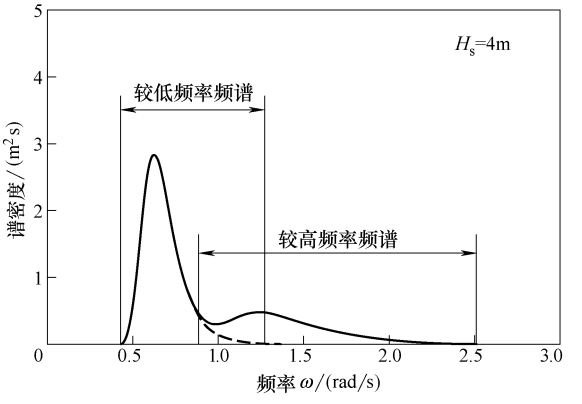


图 11-5　Ochi-Hubble 谱

图 11-6 所示为对于三个峰度参数，当 $\alpha=0.0081$、$\omega_m=0.626$rad/s 时的 JONSWAP 谱。

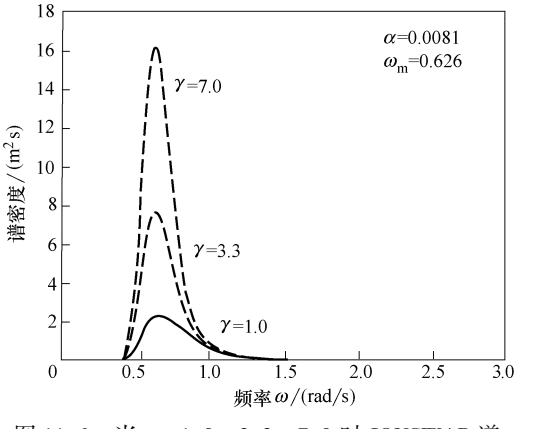


图 11-6　当 $\gamma=1.0$、3.3、7.0 时 JONSWAP 谱

11.1.3 时间序列逼近谱密度

根据波面高度的时间历程，谱密度函数可以由两种方法获得。

第一种方法是使用自相关函数 $R_{\eta\eta}(\tau)$，由 Wiener-Khinchine 关系式［式（11-6）］，该自相关函数与谱密度函数 $S_{\eta\eta}(\omega)$ 有关。

自相关函数 $S_{\eta\eta}(\omega)$ 为 $\eta(t)\eta(t+\tau)$ 的期望值或者记作 $R_{\eta\eta}(\tau)=E\{\eta(t)\eta(t+\tau)\}$，其中 t 为任意时刻，τ 为延迟时间。对于一个弱稳定过程，自相关仅是延迟时间的函数。

假设过程为各态历经的，则对于一长度为 T_s 的给定时间历程，自相关函数可近似为

$$\widehat{R}_{\eta\eta}(\tau)=\lim_{T_S\to\infty}\frac{1}{T_s-\tau}\int_0^{T_s-\tau}\eta(t)\eta(t+\tau)\mathrm{d}t \quad (\text{对于}\ 0<\tau<T_s)$$

注意，上角标^用来强调变量为基于长度为 T_s 的时间历程样本的近似。然后，谱密度可以通过对 $\widehat{R}_{\eta\eta}(\tau)$ 取傅里叶余弦变换得到：

$$\widehat{S}_{\eta\eta}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{T_s}\widehat{R}_{\eta\eta}(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau \tag{11-10}$$

获得频谱密度函数的第二种方法是使用频谱密度与时间系列的傅里叶变换之间的关系。关系如下

$$\widehat{S}_{\eta\eta}(\omega)=\frac{1}{\pi}\lim_{T_S\to\infty}\frac{1}{2\pi T_s}|\widehat{X}(\omega)\widehat{X}^*(\omega)| \tag{11-11}$$

其中 $\widehat{X}(\omega)$ 为

$$\widehat{X}(\omega)=\int_0^{T_s}\eta(\mathrm{t})exp(-i\omega\mathrm{t})d\mathrm{t}$$

共轭复数 $\widehat{X}^*(\omega)$ 为

$$\widehat{X}^*(\omega)=\int_0^{T_s}\eta(\mathrm{t})exp(i\omega\mathrm{t})d\mathrm{t}$$

为了获得时间系列的傅里叶变换，可以使用离散傅里叶变换式（DFT）或者快速傅里叶变换法（FFT）。关于如何使用的细节问题，参见 Tucker（1991）文献中的附录 1。现在，频谱的分析几乎总是通过 FFT 实现，因为它比使用相关函数法要快速得多。

应当注意到样本时间历程的长度应该足够长以使得极限收敛。使用更长的样本并不会改善估计值的精度。相反，我们应该使用更多的样本或者将一个长样本分割成许多小样本。如果有 n 个样本，频谱密度对于每个样本时间历程既可以使用方程式（11-10）也可以使用方程式（11-11）来求解，并且可以用它们的平均值来给出估算。

由波形记录得到的频谱密度依赖于记录过程的细节，比如记录的长度、采样间隔、滤波的程度和类型、平滑程度，以及时间的离散。

11.1.4 由谱密度生成时间序列

在非线性分析中，结构响应可以通过时域上的数字积分求得，因此，需要将波面高

度谱转化为与之等效的时间历程。可以将波面高度谱描述成由很多不同角频率和随机相位角的正弦函数之和，也就是，$\eta(t)$ 写成

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega_i t - \varphi_i) \sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega_i)\Delta\omega_i} \tag{11-12}$$

式中，φ_i 为 0～2π 之间的均匀随机数；ω_i 为离散采样频率；$\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$；$N$ 为分段数。联系到频谱曲线下面面积等于方差 σ_η^2，谱线以下微单元面积为 $S_{\eta\eta}(\omega_i)\Delta\omega_i$，它可以记作 σ_i^2，那么所有微单元面积的总和等于波面高度的方差，或者记作 $\sigma_\eta^2 = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2$，时间历程可以写成

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega_i t - \varphi_i) \sqrt{2}\sigma_i$$

以相等的时间间隔选择采样频率 ω_i，因而 $\omega_i = i\omega_1$。然而，时间历程将会有最低频率 ω_1，其周期为 $T = 2\pi/\omega_1$。为了避免这个多余的周期性，Borgman（1969）认为我们挑选频率时应该使得对于每个间隔的频谱曲线以下的面积应该相等，或者记为 $\sigma_i^2 = \sigma^2 = \sigma_\eta^2/N$。时间历程可以写成

$$\eta(t) = \sqrt{\frac{2}{N}\sigma_\eta} \sum_{i=1}^{N} \cos(\bar{\omega}_i t - \varphi_i) \tag{11-13}$$

式中，$\bar{\omega}_i = (\omega_i + \omega_{i-1})/2$。选择的离散频率 ω_i，使得间隔 $0 < \omega < \omega_i$ 之间的面积等于间隔 $0 < \omega < \omega_N$ 之间曲线以下所围总面积的 i/N，或者为

$$\int_0^{\omega_i} S_{\eta\eta}(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{i}{N}\int_0^{\omega_N} S_{\eta\eta}(\omega)\mathrm{d}\omega \quad (i = 1,\cdots,N)$$

其中假设频谱下面频率超过 ω_N 的面积可以忽略不计。如果 $\eta(t)$ 为窄带高斯过程，那么标准差可由 $\sigma_\eta = H_s/4$ 代替，并且时间历程可以写成

$$\eta(t) = \frac{H_s}{4}\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^{N} \cos(\bar{\omega}_i t - \omega_i)$$

Shinozuka（972）曾提出在方程式（11-13）中的采样频率 $\bar{\omega}_i$ 应当根据密度函数 $f(\omega) \equiv S_{\eta\eta}^{o}(\omega)/\sigma_\eta^2$ 随机选取。这等效于使用 Monte Carlo 法进行了一次积分。根据 $f(\omega)$ 分布的随机频率 ω 可以由均匀分布随机数 x 求得，$\omega = F^{-1}(x)$，其中 $F(\omega)$ 为 $f(\omega)$ 的累积分布。

在方程式（11-13）中采用这种方法求得的随机频率产生样本时间系列。应该指出的是，应该获取多个样本时间历程，并平均，综合数字仿真中所用的时间历程。

11.1.5 短期项统计

在讨论海浪统计时，我们经常使用“显著波”这一术语来描述不规则海面。显著波不是可以看到的物理波，而是一种对随机波的统计描述。显著波高的概念被 Sverdrup 和 Munk（1947）第一次引入，作为所有波中最高的三分之一的平均高度。通常船只在项目中合作获取海洋统计数据，就是用所观察到的海浪高度报告风暴环境的大致估计

值。这种观察得出的海浪高度通常都非常接近显著波高。

平稳性和遍历性是描述短期项波浪统计时所作的两个假设。这些假设仅仅在“短”时间间隔内有效——大约两个小时或者一个持续的风暴——但不是几周或者几年。假设波面高度具有弱平稳性，因而其自相关仅仅是延迟时间的函数。因此，其均值和方差是常数，并且频谱密度函数不随时间变化，所以，显著波高和显著波周期在只考虑短期项统计时为常数。在这种情况下，单个波高和波的周期为随机变量。在考虑短期时间间隔时，那么为了离岸结构的分析和设计，我们需要形成确定的统计学。

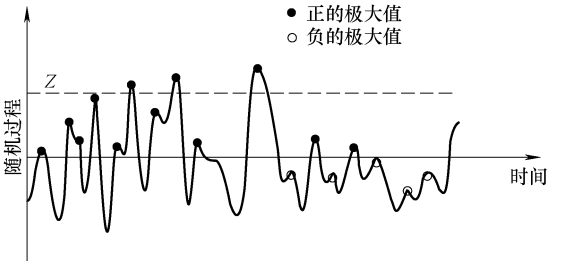


图 11-7 一个时间历程样本

考虑一个零平均随机过程的样本时间历程，如图 11-7 所示。我们要问的问题是：超过某一特定界限值（比如图中的 Z）经常是多少次，最大数是如何分布的？同样，我们可能要问：什么时候可以期望看到第一次超过该特定界限，窄带随机过程的峰值是多少？第一个问题十分重要，因为一次过载很可能使得结构失效；第二个问题也很重要，因为当循环载荷也是引起结构失效的一个原因。

随机过程 $X(t)$ 以正斜率（零上切）穿过 Z 的频率可以由下式计算

$$v_{z^+} = \int_0^\infty v f_{X\dot{X}}(z,v)\,\mathrm{d}v$$

其中 $f_{X\dot{X}}$（x，$\dot{x}$）是 X 和 $\dot{X}(t)$ 的联合概率密度函数。那么第一次上切的期望时间就是穿越频率的倒数

$$E\{T\} = 1/z^+$$

极大值 A 的概率密度函数可由下式求得

$$f_A(a) = \frac{\int_{-\infty}^{0} -\omega f_{X\dot{X}\ddot{X}}(a,0,\omega)\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{0} -\omega f_{\dot{X}\ddot{X}}(0,\omega)\,\mathrm{d}\omega}$$

其中 $f_{X\dot{X}\ddot{X}}$（x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$）为 X、$\dot{X}$、$\ddot{X}$ 的联合概率密度函数。

如果 $X(t)$ 为高斯过程，我们可就将联合概率密度函数写为

$$f_{X\dot{X}}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_{\dot{X}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{X}}}\right)^2\right] \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < \dot{x} \infty)$$

和

$$f_{X\dot{X}\ddot{X}}(x\dot{x}\ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,|M|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\{x\}-\{\mu_X\})^{\mathrm{T}}[M]^{-1}(\{x\}-\{\mu_X\})\right]$$

其中

$$[M]=\begin{bmatrix}\sigma_X^2 & 0 & \sigma_{\dot X}^2\\ 0 & \sigma_{\dot X}^2 & 0\\ \sigma_{\dot X}^2 & 0 & \sigma_{\ddot X}^2\end{bmatrix}\text{和}\{x\}-\{\mu_X\}=\begin{bmatrix}x-\mu_X\\ \dot x-\mu_{\dot X}\\ \ddot x-\mu_{\ddot X}\end{bmatrix}$$

那么，对于稳定的高斯过程，上切率为

$$v_{z^+}=\int_0^\infty f_{X\dot X}(Z,\dot x)\dot x\mathrm{d}\dot x=\frac{1}{2\pi\sigma_X\delta_{\dot X}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma_X}\right)^2\right]\int_0^\infty\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot x}{\sigma_{\dot X}}\right)^2\right]\dot x\mathrm{d}\dot x$$

$$=\frac{\sigma_{\dot X}}{2\pi\sigma_X}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma_X}\right)^2\right]\qquad(11\text{-}14)$$

并且极值点的概率密度函数由 Rice 密度函数给出（Rice，1954）

$$f_A(a)=\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma_\eta^2(1-\alpha^2)}\right]+a\frac{\alpha}{\sigma_\eta^2}\Phi\left(\frac{a\alpha}{\sigma_\eta\sqrt{\alpha^2-1}}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma_\eta^2}\right]$$

（对于 $-\infty<a<\infty$）

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态随机变量的累积分布函数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-z^2/2)\mathrm{d}z$$

其中 α 为不规则因数，等效于零上切次数与峰值数的比率（$\eta[t]$ 以正斜率穿越零的次数）。α 范围为从 0～1，它也等于

$$\alpha=\frac{\alpha_\eta^2}{\alpha_\eta^2\alpha_{\cdot\cdot\eta}^2}$$

如果 $X(t)$ 为宽带过程，那么 $\alpha=0$，且 Rice 分布将会简化成高斯概率密度函数，表达式为

$$f_A(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma_\eta^2}\right]\quad(\text{对于}-\infty<a<\infty)$$

如果 $X(t)$ 为窄带过程，将会保证不论 $\eta(t)$ 什么时候穿越它的平均值，它都会有一个峰值。在这种情况下，不规则因数接近于 1，并且 Rice 分布会简化为 Rayleigh 概率密度函数，表达式为

$$f_A(a)=\frac{a}{\sigma_\eta^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma_\eta^2}\right](0<a<\infty)$$

换句话说，窄带稳定的高斯过程的幅值是根据 Rayleigh 分布函数来分布的。

对于 α 各种值的 Rice 分布如图11-8所示。注意到除了 $\alpha=1$ 以外，Rice 分布包括正、负极大值，但当 $\alpha=1$ 时，所有的极大值都是正的。正的极大值是

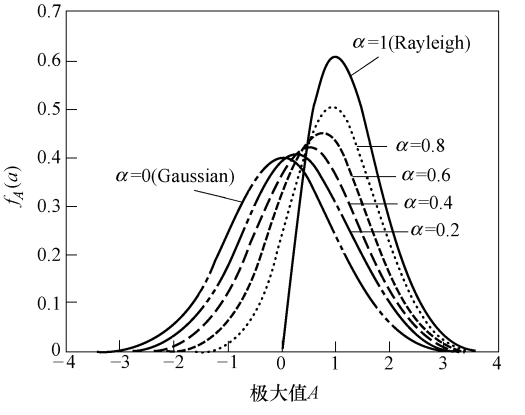


图 11-8　对于极大值的 Rice 分布

在平均值 $X(t)$ 以上的局部极大值，负极大值是在平均值以下的局部极大值，如图 11-7 所示。在某些情况下，负极大值可能并不具有物理意义。在这些情况下，我们可以使用截断的 Rice 分布，其中只用到了 $f_A(a)$ 的正值部分。$f_A(a)$ 是通过正极大值点的概率密度下的面积归一化得到的（Longuet-Higgins，1952；Ochi，1973）：

$$f_A^{\text{trunc}}(a) = \frac{f_A(a)}{\int_0^\infty f_A(a)\,\mathrm{d}a} \quad (a \geqslant 0)$$

截断的 Rice 分布如图 11-9 所示。

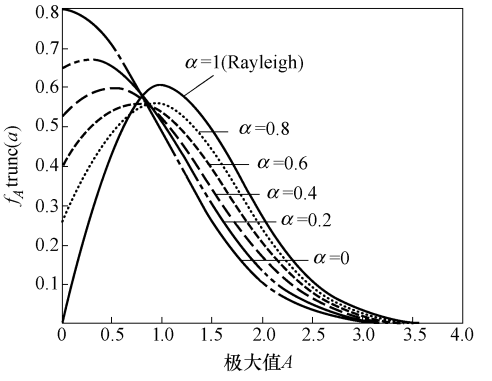


图 11-9 截断的 Rice 分布

如果 $X(t)$ 为波面高度，则它的极大值 A 就是波面高度的幅值，那么波高 $H=2A$，根据如下公式分布

$$f_H(h) = f_A(H/2)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}H} = \frac{h}{4\sigma_\eta^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{h^2}{4\sigma_\eta^2}\right] \quad (\text{对于} 0 < h < \infty)$$

对于给定的波浪，波高小于 h（累积分布）的概率为

$$F_H(h) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{h^2}{4\sigma_\eta^2}\right] \quad (\text{对于} 0 < h < \infty)$$

如果 $\eta(t)$ 为稳态窄带过程，那么这些峰值将按照 Ravleigh 分布函数来分布，且波高的均方根值 $\sqrt{E\{H^2\}}$ 为

$$\sqrt{E\{H^2\}} = \int_0^\infty h^2 f_H(h)\,\mathrm{d}h = 2\sqrt{2}\sigma_\eta$$

此外，其均值和显著波高为

$$H_0 \equiv E\{H\} = \sqrt{2\pi}\sigma_\eta, H_s \equiv E\{H_{1/3}\} = 4\sigma_\eta \tag{11-15}$$

其中 $E\{H_{1/3}\}$ 表示三分之一最高波浪的期望。

11.1.6 长期项统计

由于离岸结构要设计成具有相当长的寿命，所以我们也必须考虑长期项的海浪统计学。之前，当我们考虑短期项统计时，我们假设显著波高和频谱是时不变的。这种假设仅仅在最多几天的时间周期内有效。对于更长时间周期，显著波高有其自身的统计特性并且是随机变化的。

当我们使用一种短期统计来描述一个长期事件时，一些不可能事件看起来变得毫无道理的可能。比如，我们考虑一种按照 Rayleigh 分布的波高超过某个极值的概率。假设该波的平均周期是 10s，任何给定波高超过 300ft[㊀]的概率为 10^{-10}。数值给的很小，而且 300ft 波高的发生也几乎不可能。然而，在未来 10 年内（3×10^8s）波高超过 300ft 至少

㊀ 1ft = 0.3048m。

一次的概率为

$$1-(1-10^{-10})^{3\times10^{8}/10}=0.997$$

因此，统计说明波高在未来 10 年内超过 300ft 至少一次几乎为一确定事件。这一预测是短期统计数据的一个缺点，因为这种规模的波未到达这个概率。

为了计算波高超过某一特定极值的概率，我们需要一种可用于极端事件的统计。随机幅值序列中的实际最大幅值是随机变量本身。它是具有平均值、标准差和其他统计特性的概率分布。事实上，这些极大值的分布被称为极值分布（EVDs）。Gumbel（1958）提出了三种外推法，俗称三渐近线法。它们分别是 Gumbel、Fretchet 和 Weibull 分布。我们将在下面的章节中讨论 Gumbel 和 Weibull 分布。现在，我们首先了解 N-年风暴的概念。

在长期统计中，我们总是提到 N-年风暴。这意味着在任何给定的年份里，我们有一次 N-年风暴的概率是

$$p=\frac{1}{N}$$

因此，我们在 n 年内有 m 次 N-年风暴的概率为

$$Pr\{n\text{ 年中 }m\text{ 次 }N\text{-年风暴}\}={}_{n}P_{m}\left(\frac{1}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

其中排列 ${}_{n}P_{m}$ 表达式为

$${}_{n}P_{m}=\frac{n!}{(n-m)!}$$

则在未来 n 年内至少出现一次 N-年风暴的概率为

$$Pr\{\text{在 }n\text{ 年内至少一次 }N\text{ 年风暴}\}=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}$$

对于一个大的 N，概率近似为 $1-\exp(n/N)$。应当注意到：在未来 N 年中确切的出现一次 N-年风暴的概率不为 1，但是

$$Pr\{\text{在 }N\text{ 年内出现一次 }N\text{ 年风暴}\}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{M-1}$$

当 $N\to\infty$，我们发现

$$P=1/e\approx0.3679$$

在未来 N 年出现至少一次 N-年风暴的概率为

$$Pr\{\text{在 }N\text{ 年内至少一次 }N\text{ 年风暴}\}=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N}$$

当 $N\to\infty$，我们发现

$$P=1-1/e\approx0.6321 \tag{11-16}$$

11.1.6.1 Weibull 分布

Weibull 分布极其适合极值概率分布。在长期项统计中，显著波高非常符合 Weibull 分布。其概率密度和累计分布如下

$$f(h)=\frac{m}{\beta}\left(\frac{h-\gamma}{\beta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{h-\gamma}{\beta}\right)^{m}\right],F(h)=1-\exp\left[-\left(\frac{h-\gamma}{\beta}\right)^{m}\right]\quad(\gamma<h)\tag{11-17}$$

式中，m 为形状参数。处理累计分布，我们得到

$$\ln\{-\ln[1-F(h)]\}=m\{\ln(h-\gamma)-\ln(\beta)\}$$

其中，等号左边根据数据得到。如果我们令 $y=\ln\{-\ln[1-F(h)]\}$，$x=\ln(h-\gamma)$，y 为斜率为 m 的直线，并且与 y 轴的截距为 $-m\ln\beta$，则有

$$y=mx-m\ln\beta$$

假设我们有长时间的显著波高数据，目标是找到最适合显著波高分布的 Weibull 参数 γ、β，以及 m。这些参数通常由最小二乘法或 Weibull 论文来确定。使用后一种方法，我们首先要估计一个 γ 值以使得离散点（x，y）或者 $\{\ln(h-\gamma)$，$-\ln[1-F(h)]\}$ 形成一条直线。这条直线的斜率为 m，当直线穿过 y 轴时，y 的值为 $-m\ln\beta$。这种方法将在 11.3.3 节中加以说明。

Gumbel 分布为

$$f(h)=\alpha\exp[-\alpha(h-\beta)]\exp\{\exp[-\alpha(h-\beta)]\}$$

$$f(h)=\exp\{-\exp[-\alpha(h-\beta)]\}\quad(-\infty<h<\infty)\tag{11-18}$$

当按照 $\ln[-\ln F(h)]$ 与 h 的关系绘制图形时，直线的斜率为 $-\alpha$，与 y 轴的截距为 $\alpha\beta$。

另一种可能会用到的分布为对数正态分布，公式（Jsaper，1954）为

$$f(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma h}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\ln h-\mu)^2}{\sigma^2}\right],F(h)=\Phi\left(\frac{\ln h-\mu}{\sigma}\right)\quad(0\leqslant h)\tag{11-19}$$

11.1.6.2 通过线性波理论得到波速

与方程式（11-12）中给出的波高相对应的波速可由线性波理论求得。线性波理论，也称之为空气波理论、正弦波理论或者小振幅理论，是最简单的波理论。因为这种理论形成了波的概率谱描述的基础，所以它又十分重要。

线性波理论假设与波长和波深相比，波高很小。此外，假设流体质点遵循一圆形轨道。对于更多细节描述，读者可以参考 Kinsman（1965）和 LeMehaute（1976）的相关研究。

在线性波理论中，波的表面高度为

$$\eta(y,t)=A\cos(\omega t-ky)\tag{11-20}$$

这是一个如图 11-10 所示向右运动的平面波。线性波理论将这个正弦表面波高与波速联系起来，表达式为

$$w_y(x,y,t)=A\omega\frac{\cosh kx}{\sinh kd}\cos(\omega t-ky),w_y(x,y,t)=A\omega\frac{\sinh kx}{\sinh kd}\sin(\omega t-ky)\tag{11-21}$$

式中，k、ω 和 A 分别为波数、角频率和表面波幅值。波速随时间变化，水平坐标为 y，从海底测量的深度为 x。波速是由 y 和 t 表示的正弦关系，但是随距离海面的距离的增加而呈指数衰减。频率 ω 与波数 k 的离散关系为

$$\omega^2 = gk\tanh kd$$

式中，d 为水深。对于深水而言，$\tanh kd$ 接近于 1，频率为

$$\lim_{d\to\infty}\omega^2 = gk$$

对于方程式（11-12）给出的表面波高，表面高度和波速为

$$\eta(y,t) = \sum_{i=1}^{N}\cos(\omega_i t - k_i y - \varphi_i)\sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega_i)\Delta\omega_i}$$

$$w_y(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i\frac{\cosh k_i x}{\sinh k_i d}\cos(\omega_i t - k_i y - \varphi_i)\sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega_i)\Delta\omega_i} \tag{11-22}$$

$$w_y(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i\frac{\sinh k_i x}{\sinh k_i d}\sin(\omega_i t - k_i y - \varphi_i)\sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega_i)\Delta\omega_i}$$

波的加速度可以通过波速对时间求导的方法得到。波速和加速度的样本时间历程可由 Borgman 法或者 Shinozuka 法求得。

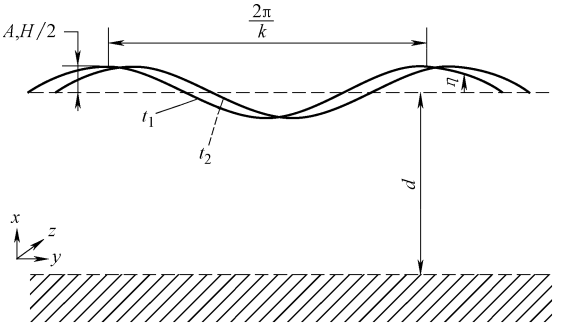


图 11-10　两个不同时间的正弦波样本示意图

11.1.7　结语

在本节，引入了波谱密度的概念。然后，可以看到如何使用这个概念描述海洋波高。谱密度或频谱与 Wiener-Khinchine 关系式的自相关函数有关：

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\eta}(\tau)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}\tau$$

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

此外，实数域的稳态过程的频谱密度函数依然是实对称，或者记为

$$S_{\eta\eta}(\omega) = S_{\eta\eta}(-\omega) \tag{11-23}$$

频谱密度曲线下方所围面积为

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = R_{\eta\eta}(0) = \sigma_\eta^2 - \mu_\eta^2 \tag{11-24}$$

如果对于频谱密度函数仅仅讨论 $\omega\geqslant 0$，那么这一侧的频谱与双边频谱的关系为

$$S_{\eta\eta}^0(\omega) = 2S_{\eta\eta}(\omega)\quad(\omega\geqslant 0)$$

当频率单位为 Hz 而不是 rad/s 的时候，以上谱关系记为

$$S_{\eta\eta}(f) = 2\pi S_{\eta\eta}(\omega) \quad (\omega \geqslant 0)$$

经常用来描述波高的谱为 P-M、Bretschneider、ITTC、ISSC、O-H 以及 JONSWAP 频谱。使用最广泛的谱是 P-M 频谱，该频谱为单参数频谱。P-M 频谱可用于深水、单向海洋、完全成形的海洋以及无边际风区局地风产生的海洋，且最初源于成形的北大西洋。该频谱的单参数可以描述为海平面 19.5m 以上的风速或者为能说明海况的显著波高。当用显著波高来表示时，表达式为

$$S^0_{\eta\eta}(f) = \frac{8.1 \times 10^{-3} g^2}{\omega^5} \exp\left(-\frac{0.0324 g^2}{H_s^2} \omega^{-4} \right)$$

Bretschneider、ITTC 以及 ISSC 频谱为双参数频谱，其中的发展状况和海况都可以规定。O-H 频谱为六参数频谱，它可以允许我们描述当地以及远距离风暴的影响，并说明峰的尖锐度、海况和发展状态。JINSWAP 频谱允许我们考虑有限风区里的增长。

对于给定的海洋频谱，时间历程的样本可以从下式中得到

$$\eta(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sigma_\eta \sum_{i=1}^{N} \cos(\overline{\omega}_i t - \varphi_i)$$

在 Borgman 法中，选择采样频率为 $\overline{\omega}_i = (\omega_i - \omega_{i-1})/2$，使得在 ω_{i-1} 和 ω_i 之间面积相等。在 Shinozuka 法中，可随机选择采样频率。选择采样频率的传统方法是平均间隔法，这里不推荐。

当考虑相对短的时间间隔时，例如大约两个小时或者一场风暴的持续时间，可以假设频谱和它的统计特性与时间无关。在这种情况下，稳态高斯过程的局部极大值或者峰值的分布可以使用 Rice 分布描述。当这个过程是窄带时，Rice 分布简化为 Rayleigh 分布，当为宽带时，变为高斯分布。在长期统计中，频谱和它的统计特性可能随时间而变化。在这种情况下，“N-年风暴”这个术语常常用来表示海况，并且其显著波高和 Weibull 分布非常接近。

最后，用线性波理论将波速和波加速度同波速联系起来。

11.2 流体力

可能作用在物体上的流体力的几种形式如下所示：

（1）拖拽力

由于顺流和逆流区域的压力差产生的力，可以看做是在匀速流体中保持物体稳定所需的力。拖拽力与流体相对于结构速度的平方成比例。

（2）惯性力

当流体通过结构发生加速或者减速时产生的力。同时也是保持刚体在流体中匀加速运动时所需的力，它与流体加速度成比例。Lamb（1945）首先用公式表示了在非黏性流体中惯性力的概念。

（3）附加质量

在稳态流体中，当物体加速或者减速时，物体会携带一定数量的围绕它的流体运

动。这部分夹带的流体称为附加的、表面的或者实际质量。为了加速物体，需要额外的力来加速或减速附加质量。

（4）绕射力

结构表面上的入射波发生散射的时候产生的力。当物体尺寸大于入射波长的时候这种力尤其重要。

（5）Froude-Kryloff 力

由入射波作用在结构表面产生的压力，假设结构本身并不存在，且不会干涉入射波。

（6）升力

由于流体的不对称分离或者由于以非对称方式脱落的涡流产生的力。与流向方向成直角的分力称为升力。

（7）波浪冲击力

这是由带有特别高幅值和能量的单个偶然波产生的力，它在自由表面上可能十分重要。Sarpkaya 和 Isaacson（1981）评价了水对圆柱体的冲击的研究。Miller（1977，1980）发现在刚体支撑的水平圆柱体上的峰值波冲击力与水质点的水平速度平方成比例。

11.2.1 波浪力状态

之前，我们讨论了由水波和水流引起的各种形式的力。在某些情况下，力中的一种形式可能会是主导的。Hogben（1976）对各种状态下的流体力进行了文献综述。具有重要性的载荷状态可以用图 11-11 所示的垂直柱体情况下的 H/D 与 $\pi H/\lambda$ 的关系来说明，其中 H 为波高，D 为圆柱直径，λ 为波长。在线性波理论中，H/D 与 Keulegan-Carpenter 数的关系为

$$K = \pi H/D$$

Keulegan-Carpenter 数给出了拖拽力相对于惯性力的重要性的测定。$\pi D/\lambda$ 项称为绕射参数，它决定了绕射影响的重要程度。随着 H/D 增加，拖拽力变得越来越重要，而惯性力变得越来越不重要。当 $\pi D/\lambda$ 增加时，绕射力变得更加重要。

采用线性波理论，最大拖拽力与最大惯性力之比为

$$\frac{f_{\text{drag}}}{f_{\text{inertia}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{H}{D} = \frac{K}{2\pi^2}$$

从以上关系中我们可以发现：当 $H/D = 0.314$ 时，拖拽力为惯性力的 5%。当 $D/\lambda < 0.2$ 且 $\frac{f_{\text{drag}}}{f_{\text{inertia}}} > 0.1$ 左右时，可以使用 Morison 方程。应当注意到在图 11-11 中只有在表面附近结论才有效。拖拽力可以从底部延伸到表面附近，这时它占主导地位，使得 Morison 方程可以使用。

比如，考虑一个直径 10m 的带腿固定式平台和一个直径 0.8m 的支撑装置。对于 $\lambda = 100\text{m}$，$H = 8\text{m}$ 的 10-年风暴，固定平台腿的 H/D 和 D/λ 比值分别为 0.8 和 0.1。同

样，支撑装置的 H/D 和 D/λ 比值分别为 10 和 0.08。如图 11-11 所示，对于平台支撑腿来说，惯性力占主导，而对于支撑装置来说，惯性力和拖拽力都非常重要。

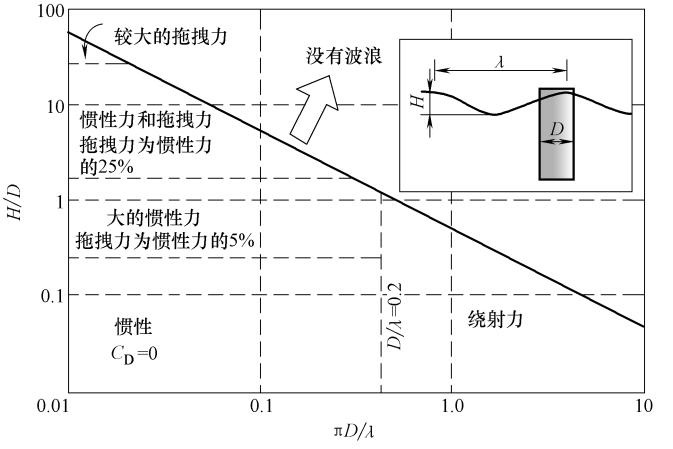


图 11-11 表面附近的载荷状态

11.2.2 作用于小结构上的波浪力——Morison 方程

附加质量 M_A 可以写成

$$M_A = C_A M_{disp}$$

式中，C_A 为附加质量系数；M_{disp} 为被结构移动的流体质量。对于直径为 D、高为 h 的圆柱体，所移动的流体质量为 $\pi \frac{D^2 h}{4}$。应当注意到附加质量为一张量。因此，我们可以说由于物体在 x_j 方向上的加速度导致了 x_i 方向上的附加质量力，表示为 M_{ij}^A。因为 M_{ij}^A 是对称的，所以使得由在 x_j 方向上的加速度导致的 x_i 方向上的附加质量力等于在 x_i 方向上的加速度导致的 x_j 方向上的附加质量力。如果交叉区域不对称，则非对角项不为零。

同样的，惯性力可以表示为

$$F_M = C_M M_{disp} \dot{w} \tag{11-25}$$

式中，比例常数 C_M 称为惯性系数。

应当注意：因为物体所带动的空气质量太小的原因，对于在空气中振动的物体来说，附加质量和惯性的影响经常被忽略。

拖拽力和流体速度 w 的平方、流体密度 ρ、物体投影到与流动方向垂直的平面面积 A_f 成比例：

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A_f w[w]$$

式中，C_D 为拖拽系数。绝对值符号是为了确保拖拽力始终作用在流动方向上。对于一个直径为 D、高为 h 的圆柱体，其 A_f 为 Dh。

对于一个非零速物体，拖拽力为

$$F_{\mathrm{D}}=\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho A_{\mathrm{f}}(w-v)\mid w-v\mid \tag{11-26}$$

其中（$w-v$）为流体相对于物体的速度。

Morison 等（1950）把惯性项和拖拽项［方程式（11-25）和方程式（11-26）］组合在一起，得出作用在物体上的流体力为

$$f=\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho A_{\mathrm{f}}w\mid w\mid +C_{\mathrm{M}}\rho M_{\mathrm{disp}}\dot{w}$$

对于一个圆柱体来说，单位长度上的流体力为

$$f=\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho Dw\mid w\mid +C_{\mathrm{M}}\rho\pi\frac{D^2}{4}\dot{w}$$

对于一个速度为 v 的移动圆柱体，Morison 力为

$$f=\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho D(w-v)\mid w-v\mid +C_{\mathrm{M}}\rho\pi\frac{D^2}{4}\dot{w}$$

11.2.2.1 倾斜圆柱体

现在考虑一个如图 11-13 所示的倾斜圆柱体。流动方向与圆柱体成 θ 角。通常，我们仅考虑流体力的法向分量。法向分量为

$$f^{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho D(w^{\mathrm{n}}-v^{\mathrm{n}})\mid w^{\mathrm{n}}-v^{\mathrm{n}}\mid +C_{\mathrm{M}}\rho\pi\frac{D^2}{4}\dot{w}^{\mathrm{n}} \tag{11-27}$$

其中用角标 n 表示法向分量。（$w^{\mathrm{n}}-v^{\mathrm{n}}$）为流体相对于结构的相对速度的法向分量。假设流体流动方向向右，并且圆柱体也向右移动，如图 11-12 所示，则流体和圆柱体速度的法向分量为

$$w^{\mathrm{n}}=\mid w\mid \cos\theta$$

$$v^{\mathrm{n}}=\mid v\mid \cos\theta$$

在三维空间中，画出法向分量方向可能有一些困难。在此，我们使用如下公式找到法向分量

$$(w^{\mathrm{n}}-v^{\mathrm{n}})\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}\times(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{t} \tag{11-28}$$

式中，$\boldsymbol{t}$ 为圆柱体的切向单位矢量；$\boldsymbol{n}$ 为圆柱体法向单位矢量。注意法向方向取决于流速方向和圆柱体倾斜方向。

在某些情况下，切向的拖拽力可能也需要考虑，且其表达式为

$$f^{\mathrm{t}}=\frac{1}{2}C_{\mathrm{T}}\rho D(w^{\mathrm{t}}-v^{\mathrm{t}})\mid w^{\mathrm{t}}-v^{\mathrm{t}}\mid \tag{11-29}$$

式中，C_{T} 为切向拖拽系数，且 C_{T} 通常为一非常小的数。

流体力的法向分量相比于切向分量，前者占有主导地位。流体力并不作用于流体移动方向，这似乎很奇怪。相反，在方程式（11-28）所定义的法向方向的力则十分显著。在 11.3.1 节中，我们将通过拖拽电缆来说明这代表什么意思。

流体系数的确定如下所述。

拖拽、惯性以及附加质量系数必须通过实验获得。然而，对于一个长的圆柱体，

C_M 接近于它的理论极限值（均匀加速的非黏性流动）－2，且 C_A 接近于 1（Lamb，1945；Wilson，1984）。事实上，惯性系数和拖拽系数至少为三个参数的函数（Wilson，1984）：

$$C_M = C_M(Re, K, \text{圆柱体表面粗糙度})$$

$$C_D = C_D(Re, K, \text{圆柱体表面粗糙度})$$

式中，Re 为雷诺数；K 为 Keulegan-Carpenter 数。表达式为

$$Re \equiv \frac{\rho_f UD}{\mu}, K \equiv \frac{UT}{D} \qquad (11\text{-}30)$$

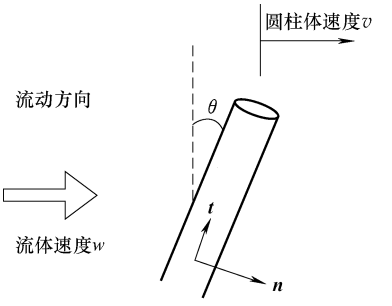


图 11-12 倾斜圆柱体

式中，ρ_f 为流体密度；U 为自由水流速度；D 为结构直径；μ 为动力或者绝对黏度；T 为波的周期。

Sarpkaya 研究了这些水动力系数的广泛变化，得到了如图 11-13 ~ 图 11-15 所示的坐标图（Sarpkaya，1976；Sarpkaya 等，1977）。图 11-13 所示为在各种变化的 Re 和降低的 β（定义 $\beta = Re/K$）下，光滑圆柱体惯性系数和拖拽系数与 K 之间的函数关系。从这幅图中可以看出，当 Re 和 β 值较低时，在 $10 < K < 15$ 范围内，惯性系数降低，拖拽

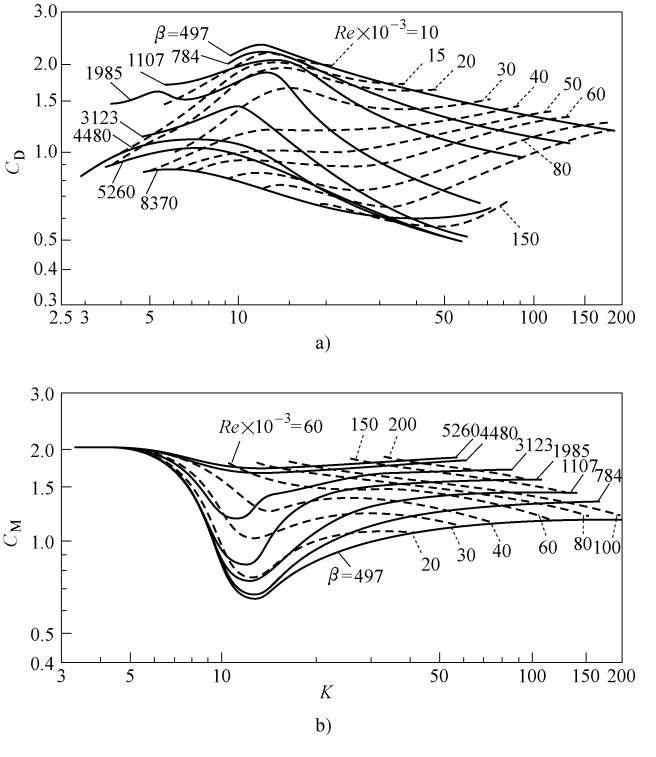


图 11-13 对于不同的 Re 和 β，光滑圆柱体惯性系数和拖拽系数与 K 之间的函数关系

（来源：Sarpkaya，1976，Proceedings of the Eighth Offshore Technology Conference）

系数升高。我们发现这些系数的上升和下降都和脱落的涡流有关，这些涡流也施加了垂直于结构和流动方向的力。

图 11-14 和图 11-15 所示为粗糙圆柱体的惯性系数和拖拽系数，其粗糙度由 k/D 测定。在图 11-14a 中，Re 数在 $10^4 \sim 10^5$ 时，拖拽系数有明显下落，称之为拖拽转折点。对于较大的 Re 数，拖拽系数保持不变。当表面变得更加粗糙时，下降发生在更低的 Re 数处，且对于较高的 Re 数，拖拽系数是增加的。

对于已知 Re 数和 Keulegan-Carpenter 数的流体和已知表面粗糙度的圆柱体来说，图 11-14 ~ 图 11-16 可以用来得到惯性系数和拖拽系数更合适的值。

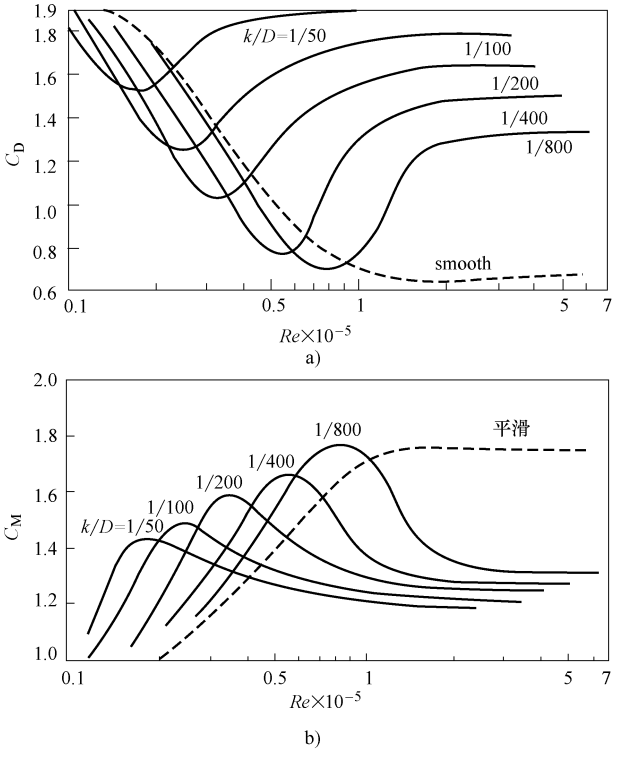


图 11-14　当 $K=20$ 时圆柱体表面粗糙度（k/D）取不同值，拖拽系数和惯性系数与 Re 之间的函数关系

（来源：Sarpkaya，1976，Proceedings of the Eighth Offshore Technology Conference）

11.2.3　涡流诱导的振动

当流体经过一个固定的圆柱体时，对于一个非常低的 Re 数（$0 < Re < 4$），流体分离和汇聚都十分平滑。当 Re 数在 4 ~ 10 之间时，涡流就形成了并且依附在圆柱体的下游面。它们十分稳定，并且在流体中没有振动。对于一个 Re 大于 40 的流体而言，在圆柱体周围由脱落的涡流诱发的振动就开始了。这些脱落的涡流沿垂直于流动和结构的方

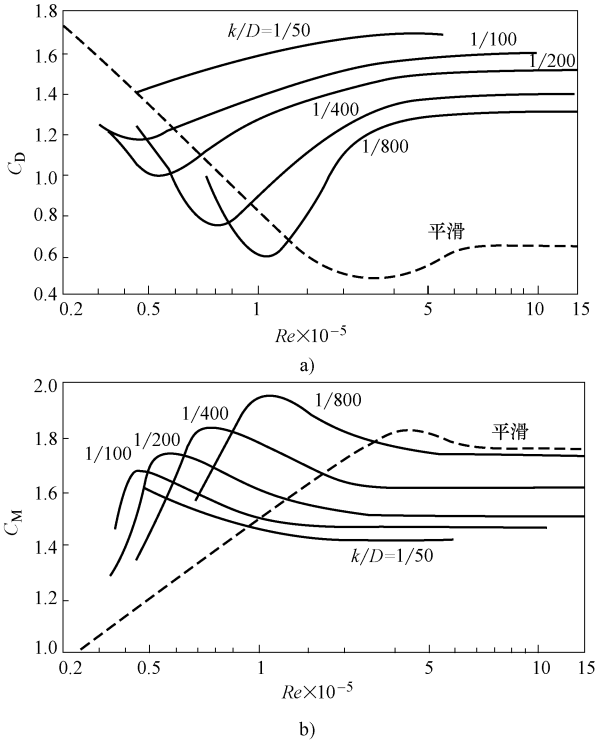


图 11-15 当 $K=60$ 时圆柱体表面粗糙度（k/D）取不同值，拖拽系数和惯性系数与 Re 之间的函数关系

（来源：Sarpkaya，1976，Proceedings of the Eighth Offshore Technology Conference）

向对圆柱体施加振动的力。振动的频率与无量纲参数-Stouhal 数有关，定义为

$$St \equiv \frac{f_V D}{U} \tag{11-31}$$

式中，f_V 为振动频率；U 为流动稳定速度；D 为圆柱体直径。对圆柱体来说，层流（$10^3 < Re < 2 \times 10^5$）时，Stouhal 数大致在 0.22 附近，紊流时在 0.3 左右（Patel，1989）。

由于这些脱落的涡流产生的升力为

$$f_L = \frac{1}{2} C_L \rho A_f U^2 \cos^2 \pi f_V t \tag{11-32}$$

式中，C_L 为升力系数，它也是 Re、K 和表面粗糙度的函数。升力系数的实验结果表明了典型值大量分散在 0.25～1 的范围内。对于光滑圆柱，当 Re 和 K 增加时，升力系数接近 0.25。应当注意的是，涡流力在整个圆柱长度方向上通常不是相关的。这就是说，脱落涡流力的相位沿着长度方向是变化的。相关长度——在该长度区间上的脱离是同步的——对于层流，这个长度大约是圆柱体直径的 3～7 倍。如果区间力是随机相位，那么净影响将很小。在长度为 L 的圆柱体上的合力就仅仅为 Lf_L 上的一小部分。这一小部

分称为结合收纳，而且取决于相关长度和总长度的比。

当流体通过自由振动的圆柱时，脱落频率也受到圆柱振动的影响。当脱落频率接近于圆柱体的第一阶固有频率时［固有频率的 ±（25% ~ 30%）（Sarpkaya 和 Isaaccson，1981）］，圆柱体控制着涡流脱落。涡流将在固有频率处脱落，而非在按照 Strouhal 数决定的频率处脱落。这称之为锁定或者同步化，这是振动物体和运动流体间非线性相互作用的结果。图 11-16 所示为脱落频率，它作为结构存在的条件下流速的函数曲线。f_1 和 f_2 为结构的固有频率。

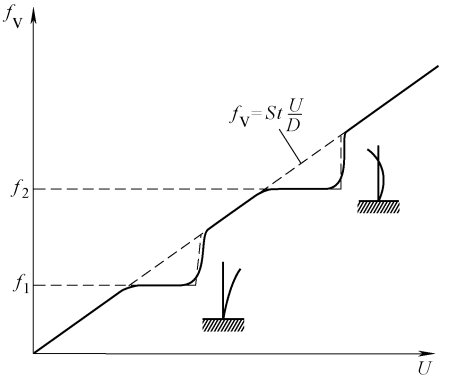


图 11-16　流体弹性共振的案例

结构的响应幅值和出现锁定现象的流速范围是一个降低的阻尼参数函数——阻尼力和激振力的比值（Vandiver，1985，1993）。如果这个降低的阻尼参数值很小，那么锁定现象将在一个相当大的流速范围内出现。

对于刚性圆柱体来说，现有的涡流引起的振动模型包括单自由度模型和耦合模型。单自由度模型假设涡流脱落的影响是一个外部激励力函数，它不受物体运动的影响。耦合模型假设控制结构运动和升力系数的方程是耦合的，因而流体和结构相互影响（Billah，1989）。

11.2.4　结语

本节简要讨论了一些流体力，其中惯性力、拖拽力和绕射力比较重要，它们是结构直径和波长比 D/λ、波高和结构直径之比 H/D 的函数。作用在小结构上的波浪力可用 Morison 方程建模，且仅在 $D/\lambda < 0.2$ 和 $H/D > 0.63$ 左右时有效。Morison 方程包括了附加质量、惯性和拖拽的影响。附加质量表示式为

$$M_A = C_A M_{disp}$$

对于横向速度为 v 的圆柱体，其拖拽力和惯性力的法向和切向力为

$$f^n = \frac{1}{2}C_D\rho D(w^n - v^n) \mid w^n - v^n \mid + C_M\rho\pi\frac{D^2}{4}\dot{w}^n$$

$$f^t = \frac{1}{2}C_T\rho D(w^t - v^t) \mid w^t - v^t \mid$$

流体系数至少是三个参数的函数：雷诺数、Keulegan-Carpenter 数以及圆柱表面粗糙度。这些系数的关系曲线如图 11-13 ~ 图 11-15 所示。

由脱落涡流所引起的升力频率和 Strouhal 数有很大关系：

$$St = \frac{f_V D}{U}$$

由脱落涡流产生的升力可以写成

$$f_{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}C_{\mathrm{L}}\rho A_{\mathrm{f}}U^{2}\cos 2\pi f_{\mathrm{V}}t$$

如果结构是自由振动，那么锁定或者同步化就可能发生在脱落频率接近结构固有频率的时候，也就是说结构控制着涡流脱落。很多非线性模型可以用来捕捉这种现象。

11.3 举例

本节将介绍四个例子：第一个例子说明了静止状态下拖拽电缆的拖拽力的法向和切向分量的作用；第二个例子说明了铰接塔在周围有流体的环境中的运动方程是如何推导的；第三个例子说明了如何从长周期显著波高数据中选出一个显著波高来代表某一特定状态；最后一个例子说明如何由给定的频谱重建时间时间数列数据。

11.3.1 拖拽电缆的静止状态

为了海洋监控、海洋或地理测量或者海洋考察的目的，带仪器包的船用电缆或远程操作车辆经常由船舶或潜艇拖拽。比如，由国家海洋与大气管理中心（NOAA）实施的项目 VENTS 的目的就是研究海底火山和地热散发对全球海洋的影响和后果。为了定位和标注海洋中山脊系统地热的分布，一种称为 CTD（Conductivity, Temperature and Depth Sensors）的仪器包被拖拽于船后使用。

我们考虑如图 11-17 所示系统，一根电缆和一个被船以匀速拖拽的物体，水流速为零。钢索会形成什么形状呢？船只和被拖拽的物体之间距离为多少呢？

我们很快意识到这种情况等价于在一只静止的船处在反向恒速水流中，则运动方程为

$$\sum \boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}(s,t)=\boldsymbol{0}=\frac{\partial}{\partial s}(T\boldsymbol{t})+f^{\mathrm{n}}\boldsymbol{n}+f^{\mathrm{t}}\boldsymbol{t}+mg\boldsymbol{k}$$

式中，m 为单位长度的电缆质量；$\boldsymbol{a}$（s，t）为电缆加速度；s 为沿电缆的坐标；T 为张力，是 s 的函数；（$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$）为曲线坐标系下的单位矢量组；$\boldsymbol{k}$ 为重力方向向下的单位矢量；g 为重力加速度；f^{n}为法向拖拽力；f^{t}为切向拖拽力。由于流体加速度和电缆加速度为零，因此附加质量和惯性项为零。法向和切向拖拽力在式（11-27）和式（11-29）中给出。在本题中，它们表示为

$$f^{\mathrm{n}}=C_{\mathrm{D}}\rho\frac{D}{2}U^{2}\cos^{2}\theta,f^{\mathrm{n}}=-C_{\mathrm{T}}\rho\frac{D}{2}U^{2}\sin^{2}\theta$$

相应的标量方程为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}-C_{\mathrm{T}}\rho\frac{D}{2}U^{2}\sin^{2}\theta-mg\cos\theta=0 \tag{11-33}$$

$$-T\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}+C_{\mathrm{D}}\rho\frac{D}{2}U^{2}\cos^{2}\theta-mg\sin\theta=0$$

式中，θ 为切向矢量与垂直方向之间沿顺时针方向测量的夹角。注意到我们之前令 $\partial\boldsymbol{t}$ 和 $\partial s=(-\partial\theta/\partial s)\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{k}=-\cos\theta\boldsymbol{t}-\sin\theta\boldsymbol{n}$。方程式（11-33）表明了外力的切向分量增加了拉力，而法向分量引起了牵引电缆的弯曲。因为拖拽力的法向分量相比于切向分量

要大很多，所以大部分的流体力被用来转动电缆。

根据受力简图（图 11-17），电缆与它连接的拖拽体的垂直方向夹角为

$$T(0)\cos\theta(0)=W,T(0)\sin\theta(0)=\text{拖拽力}$$

一旦我们知道物体的重力和作用于物体的拖拽力，那么就可以得到在 $s=0$ 处的拉力和角度。如果与重力相比拖拽力可以忽略，那么电缆必定与垂直方向非常接近，并且在 $s=0$ 处的张力和拖拽物体的重力近似相等：

$$T(0)\approx W \text{ 和 } \theta(0)\approx 0$$

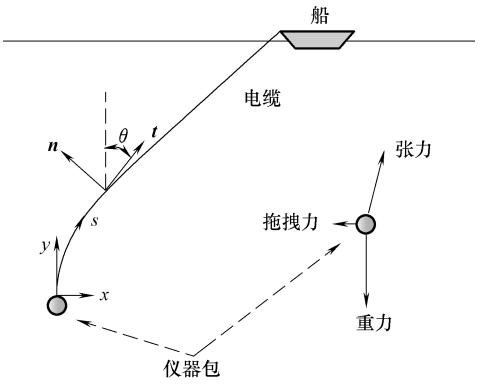


图 11-17　处于静平衡的拖拽系统和作用在被拖拽物体上的力

现在，我们假设就存在这么一种情况。然后，在这些初始条件下，常微分方程［式（11-33）］系统可以用数值方法求解出 $T(s)$ 和 $\theta(s)$。例如，甚至非常简单的有限差分方程也能用。一组方程为

$$T_{i+1}=T_i+\left(mg\cos\theta_i-C_T\rho\frac{D}{2}U^2\sin^2\theta_i\right)\Delta s \tag{11-34}$$

$$\theta_{i+1}=\theta_i-\left(mg\sin\theta_i+C_D\rho\frac{D}{2}U^2\cos^2\theta_i\right)\Delta s/T_i \tag{11-35}$$

当 $\Delta s=0.05$ 时，使用 $T_i=T(i\Delta s)$ 是非常合适的。

在笛卡尔坐标系下，x、y 与 θ 的关系如下

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sin\theta,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\cos\theta$$

也可通过数值积分求解。

图 11-18 所示为当 $mg=1.5\text{N/m}$、$C_D\rho\frac{D}{2}U^2=10\text{N/m}$、$C_T\rho\frac{D}{2}U^2=0.1\text{N/m}$、$W=100\text{N}$、电缆长度为 100m 时的结果，要注意船的位置在 $x=0$、$y=0$ 处。

有意思地看到 θ 接近于一临界值，且靠近船时，曲线形状慢慢直线了。数学上讲，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$的值变为零了。这就是当拖拽力在完全被电缆重力的法向分量平衡时。在这个位置的角度 θ_{cr}可以由第二个控制方程获得，并且

$$mg\sin\theta_{cr}=-f^n,\frac{\sin\theta_{cr}}{\cos\theta_{cr}}=C_D\rho\frac{D}{2}U^2\frac{1}{mg}$$

在本例，$\theta_{cr}=1.184\text{rad}$，且该值与图 11-18 相吻合。

11.3.2　作用于铰接塔上的流体力

离岸结构是用于石油工业的，比如用于石油勘探、储存和石油泊岸设施。它们被设

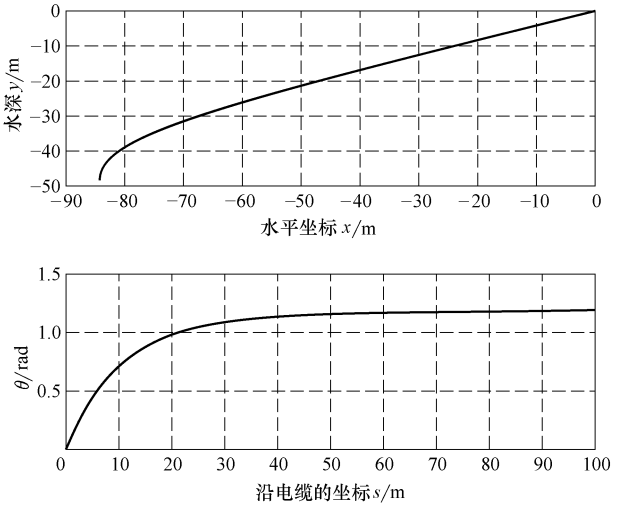


图 11-18 当 $mg = 1.5\text{N/m}$、$C_D\rho\frac{D}{2}U^2 = 10\text{N/m}$、$C_T\rho\frac{D}{2}U^2 = 0.1\text{N/m}$、$W = 100\text{N}$ 时拖拽电缆的平衡状态、电缆与垂直方向所成的角度

计成在诸如钻井和生产石油这样的离岸工作时能够自我支撑并保持足够稳定。如图11-19所示的铰接塔为一个包括基座、轴、链接基座和主轴的万向节、压仓室、浮力室和平台的离岸平台。压仓室提供额外的重力使得塔的底部能够落在海底上，浮力室增加必要浮力防止塔过度下沉。

铰接塔可以实实在在地建模成刚体倒立摆，其中平台部分作为质点考虑，主轴考虑成一根均匀刚体长杆，浮力室简化为一浮力点。在二维模型中，塔的运动可以用单自由度描述（Chakrabarti 和 Cottor，1979；Bar-Avi，1996）。关于塔偏转角的运动方程可以通过对图 11-20 中点 O 力矩求和得出

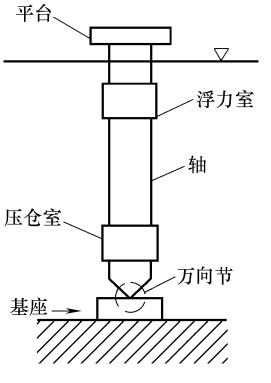


图 11-19 铰接塔示意图

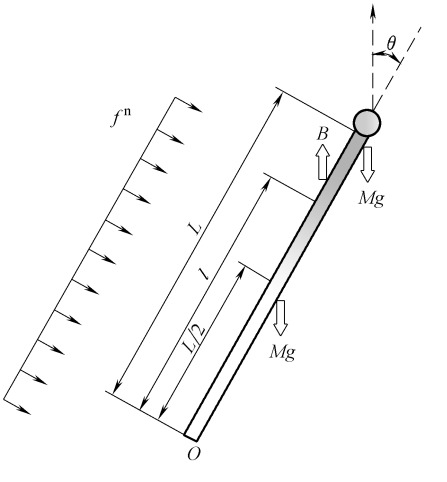


图 11-20 自由体简图

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\sum M_O = mg\frac{L}{2}\sin\theta + MgL\sin\theta - Bl\sin\theta + \int_0^L f^{\mathrm{n}}x\mathrm{d}x$$

式中，I 为关于点 O 的转动惯量，可由 $I=\frac{mL^3}{3}+ML^2$ 求得；m 为主轴质量；g 为重力加速度；L 为主轴长度；M 为顶点质量；B 为浮力室所提供的浮力；l 为浮力力臂；f^{n}为单位长度上的法向流体力；x 为从点 O 开始沿主轴的坐标。

单位长度流体力的法向分量为

$$f^{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho D(w^{\mathrm{n}}-v^{\mathrm{n}})\mid w^{\mathrm{n}}-v^{\mathrm{n}}\mid + C_{\mathrm{M}}\rho\pi\frac{D^2}{4}\dot{w}^{\mathrm{n}} - C_{\mathrm{A}}\rho\pi\frac{D^2}{4}a^{\mathrm{n}}$$

其中，最后一项为由于附加质量产生的法向力。v^{n} 和 a^{n} 为物体在法向上的速度和加速度，为

$$v^{\mathrm{n}}=x\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},a^{\mathrm{n}}=x\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

如果我们假设周围流体是静止不动的，那么流体的法向速度和加速度（w 和 $\dot{w}$）为零。因此，由流体力产生的力矩表示为

$$\begin{aligned}\int_0^L f^{\mathrm{n}}x\mathrm{d}x &= \int_0^L\left(-C_{\mathrm{D}}\rho\frac{D}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)+C_{\mathrm{A}}\rho\pi\frac{D^2}{4}x\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)x\mathrm{d}x\\ &= -C_{\mathrm{D}}\rho\frac{D}{2}\frac{L^4}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)+C_{\mathrm{A}}\rho\pi\frac{D^2}{4}\frac{L^3}{3}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

且运动方程为

$$\left(3\frac{L^2}{3}+ML^2+C_{\mathrm{A}}\rho\pi\frac{D^2L^3}{4\ 3}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\left(mg\frac{L}{2}+MgL-Bl_{\mathrm{b}}\right)\sin\theta-C_{\mathrm{D}}\rho\frac{D}{2}\frac{L^4}{4}\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

注意到法向流体拖拽力直接增加到刚性长杆的恢复力矩上。一旦初始条件给出（$\theta[0]$ 且 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t[0]$），那么运动方程可直接求出数值解。

如果假设偏转角 θ 很小，那么运动方程可以得到简化。更特殊的，如果 θ^2 跟 1 比可以忽略的话，那么就可以得到

$$\sin\theta\approx\theta$$

运动方程可简化为

$$\left(m\frac{L^2}{3}+ML^2+C_{\mathrm{A}}\rho\pi\frac{D^2L^3}{4\ 3}\right)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-\left(mg\frac{L}{2}+MgL-Bl_{\mathrm{b}}\right)\theta+C_{\mathrm{D}}\rho\frac{D}{2}\frac{L^4}{4}\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=0$$

这类似于带有非线性阻尼项的线性振子运动方程。注意到当刚度项（θ 的系数）变为负值时，系统将会变得不稳定。当浮力不够或者 $B<\frac{1}{l_{\mathrm{b}}}\left(mg\frac{L}{2}+MgL\right)$时会发生这种情况。

11.3.3 显著波高分布——Weibull 分布和 Gumbel 分布

NOAA 下属的国家浮标数据中心（NBDC）收集了海洋数据，比如各地的风向、洋流、海浪、压力和温度数据，而且记录的这些数据是公开的。现在我们将在这些数据有

效的某个地方设计一个铰接塔（11.3.2 节）。第一个任务就是描绘环境。使用收集来的所有信息是无效的和不切合实际的。相反，我们更倾向于选择一个能够代表典型和极端状态的一个单一数据，比如 10-和 50-年风暴。现在，我们仅仅考虑随机波浪，那么我们希望能够找到能够代表 10-和 50-年风暴的显著波高数据。

从 NBDC 在 Monterey 海湾外的浮标数据中，可知各种显著波高范围出现次数，其列于表 11-2 中。在 12 年中每小时取一次测量值。我们首先建立使用 11.1.6 节介绍的方法建立相应的 Weibull 分布。首先估算 γ，使得一对 $\ln[-\ln\{1-F(h)\}]$ 和 $\ln\{h-\gamma\}$ 形成一条直线。图 11-21 所示为当 $\gamma \approx 0.84$ 时，$\ln[-\ln\{1-F(h)\}]$ 和 $\ln\{h-\gamma\}$ 的图形更接近于直线。该直线斜率和 y 轴截距分别为 1.6 和 −0.78。那么 Weibull 参数为：$m=1.6$ 和 $\beta=1.6$。

表 11-2 各种显著波高范围出现的次数

显著波高 h/m	出现次数	总和
<1	2367	2367
1~2	46353	48720
2~3	34285	83005
3~4	13181	96186
4~5	3813	99999
5~6	716	100715
6~7	145	100860
7~8	32	100892
8~9	8	100900
9~10	2	100902
总共	100902	

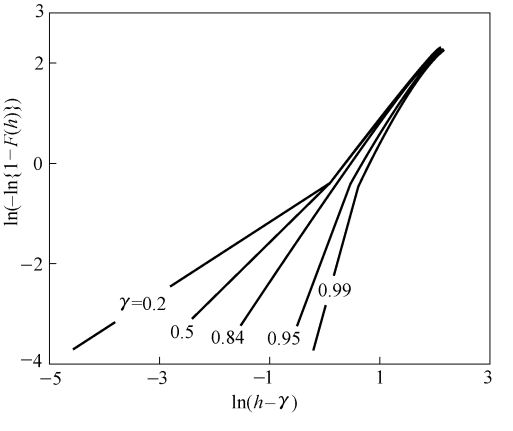


图 11-21 对应各种 γ 值的 $\ln[-\ln\{1-F(h)\}]$ 和 $\ln\{h-\gamma\}$ 曲线图

同样，我们可以通过画出一对［h，$\ln\{F(h)\}$］曲线形成的直线，来发现对应的 Gumbel 概率密度函数。对于表 11-2 中所示数据，该直线斜率为 -1.52，y 轴截距为 2.84，因而得到 $\alpha=-1.52$，$\beta=1.87$。

图 11-22 中实线所示为 Weibull 概率密度和累计分布［式（11-17）］，Gumbel 概率密度和累计分布为虚线所示［式（11-18）］，从表 11-2 中得到的离散概率分布和累计分布在图中用记号标出。

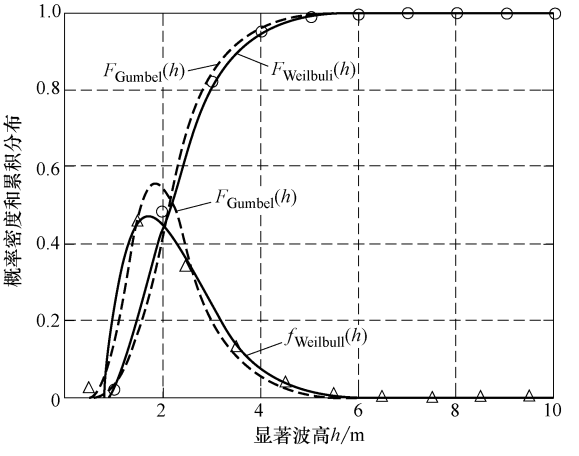


图 11-22　在 Monterey 海湾外海域测得的最高的显著波高数据的概率密度和累计分布的 Weibull 和 Gumbel 近似（标记点为表 11-2 给出的数据）

接下来是找到可以代表 N-年风暴的显著波高 h_N。在任何给定年份都没有 N-年风暴的概率为 $1-1/N$，并且等价于在同一年中显著波高没有超过 h_N 的概率。在单次测量中，$h<h_N$ 的概率为 $F(h_N)$，且在一年中，每一次测量 $h<h_N$ 的概率为 $F(h_N)^{24\times365}$。那么，得到

$$1-\frac{1}{N}=F(h_N)^{24\times365}$$

表 11-3 所示为根据 Weibull 和 Gumbel 分布求出的代表 5-年、10-年以及 50-年风暴的显著波高。

表 11-3　从 Weibull 和 Gumbel 分布对有代表性的显著波高长期预测的比较

（单位：m）

分布	5-年波高	10-年波高	50-年波高
Weibull 分布	7.84	8.15	8.79
Gumbel 分布	8.83	9.33	10.4

Gumbel 概率分布给出了较高的显著波高。对于这组特别的数据，Weibull 分布似乎更加适合拟合该数据（图 11-22），并且 Weibull 分布在离岸工业中的应用更加频繁。

11.3.4 重构给定显著波高的时间序列

之前，我们求出了能代表给定地点5-年，10-年和25-年风暴的显著波高。联想到显著波高能够完整的表征 Pierson-Moskowitz 频谱。一旦确定了谱密度，那么通过 Borgman 或者 Shinozuka 法（11.1.4 节）就可以确定样本时间历程的波形轮廓 $\eta(t)$。在此，Shinozuka 法用于产生随机波高。

我们首先要找到按照 $S^0_{\eta\eta}(\omega)/\sigma^2_\eta$ 分布的随机频率，用显著波高表示的 P-M 频谱已由方程式（11-8）给出。

$$S^0_{\eta\eta}(\omega)=0.7795\omega^{-5}\exp\left(-\frac{3.118}{H_s^2}\omega^{-4}\right)$$

方差为

$$\sigma^2_\eta=\int_0^\infty S^0_{\eta\eta}(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\frac{H_s^2}{16}$$

概率密度和累积分布函数为

$$f(\omega)=S^0_{\eta\eta}(\omega)/\sigma^2_\eta=\frac{12.472}{H_s^2}\omega^{-5}\exp\left(-\frac{3.118}{H_s^2}\omega^{-4}\right)$$

$$F(\omega)=1-\exp\left(-\frac{3.118}{H_s^2}\omega^{-4}\right)$$

累积分布函数的逆函数为

$$F^{-1}(x)=\left(-\frac{H_s^2}{3.118}\ln(1-x)\right)^{-1/4}$$

根据 $f(\omega)$ 分布的随机频率可以由 0～1 的均匀分布的概率数 x 中求得。表 11-4 所示为从 0～1 之间的均匀随机数，并且随机频率根据 $f(\omega)^3$ 来分布，使用了 7.84m 的显著波高。

表 11-4 根据均匀随机数的 $f(\omega)$ 生成的随机分布频率

均匀随机数 $0<x<1$	根据 $f(\omega)$ 分布的随机数
0.950	$[-19.713\ln(1-0.950)]^{-1/4}=0.360$
0.231	$[-19.713\ln(1-0.231)]^{-1/4}=0.662$
0.606	$[-19.713\ln(1-0.606)]^{-1/4}=0.483$
⋮	⋮

用这种方式我们可以得到 100 个随机数，波高也可以通过方程式（11-13）获得。通过用均匀随机数（不同于用于生成随机频率的均匀随机数）乘以 2π，我们可以得到随机相位 φ_i。

图 11-23 表明表面高度是时间的函数，相应的水面波速是时间的函数（11.1.7 节），且在 $t=0$ 时刻，波速是水深的函数。注意波速随水深衰减。

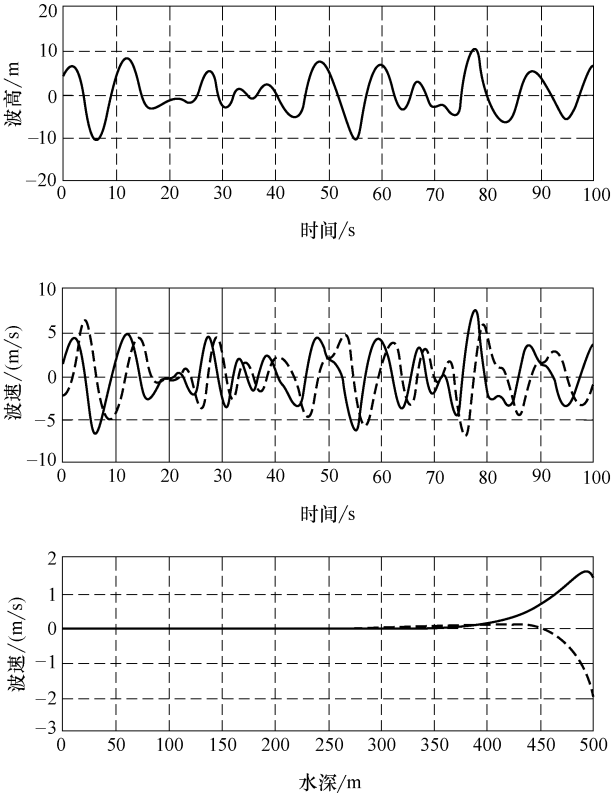


图 11-23　波高和波速

11.3.5　可用的数值计算程序

对于建立细长结构的动力学模型，很多数值计算程序都是可用的，比如竖管、拴绳、管缆以及系泊缆。本节的第一个例子就是由数字程序 WHOI Cable 求解的，这个程序是由 Woods Hole Oceanographic Institution 开发的。WHOI Cable 为一套时域程序，该程序可以在三维和二维模型中用来分析拖拽和系泊的电缆系统的动力学，可以考虑弯曲、扭转以及拉伸情况。

考察弹性竖管有比较性的研究是由 ISSC 委员会 V7 小组利用计算机程序来完成的，该计算机程序是由 11 个不同的研究所在 1988—1991 年期间开发的，且 Larsen（1992）报道了研究结果。最近，Brown 和 Mavarkos（1999）对悬挂线和链式系泊缆进行了有比较性的动态分析研究，并报道了利用 15 个不同计算程序的计算结果。参与者包括工程顾问、学者和涉及海洋科技的研究所。采用的时域程序包括了：Chalmer University of Technology 开发的 MODEX、Institute Francais du Petrole 开发的 FLEXAN-C、MARIN 开发的 DYWFLX95、MARINTEK 开发的 R. FLEX、National Technical University of Athens 开发的 CABLEDYN、Noble Denton Consultancy Services Ltd 开发的 DMOOR、Orcina Ltd Consult-

ing Engineers 开发的 V. ORCAFLEX、Petrobras SA 开发的 ANFLEX、University College London 开发的 TDMOOR-DYN 和 Zentech International 开发的 FLEXRISER。这些程序中的一部分对于学术研究所和政府实验室是免费的。

致谢

作者对 Woods Hole Oceanographic 学院和德克萨斯技术大学机械工程系的资助表示感谢。

参考文献

Bar-Avi, P. 1996. Dynamic response of an offshore articulated tower, Ph.D. thesis, The State University of New Jersey, Rutgers, May 1996.

Billah, K. 1989. A study of vortex induced vibration, Ph.D. thesis, Princeton University, May 1989.

Borgman, L., Ocean wave simulation for engineering design, *J. Waterway Harbors Div.*, 95, 557–583, 1969.

Bretschneider, C. 1959. *Wave variability and wave spectra for wind-generated gravity waves.* Technical Memorandum No.118, Beach Erosion Board, U.S. Army Corps of Engineers, Washington D.C.

Bretschneider, C. 1969. Wave forecasting. In *Handbook of Ocean and Underwater Engineering*, Ed. J.J. Myers, McGraw-Hill, New York.

Brown, D. and Mavrakos, S. Comparative study on mooring line dynamic loading, *Marine Structures*, 12, 131–151, 1999.

Chakrabarti, S.K. 1987. *Hydrodynamics of Offshore Structures*, Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K.

Chakrabarti, S.K. and Cottor, D., Motion analysis of articulated tower, *J. Waterway Port Coast. Ocean Div.*, 105, 281–292, 1979.

Faltinsen, O.M. 1993. *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*, Cambridge University Press, Cambridge.

Gumbel, E. 1958. *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York.

Hasselmann, K., Barnett, T., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D., Enke, K., Ewing, J., Gienapp, H., Hasselmann, D., Kruseman, P., Meerburg, A., Muller, P., Olbers, D., Richter, K., Sell, W., and Walden, H. 1973. Measurement of wind-wave growth and swell decay during the joint North Sea wave project (JONSWAP), *Technical Report 13 A*. Deutschen Hydrographischen Zeitschrift.

Hogben, N. 1976. Wave loads on structures, *Behavior of Offshore Structures (BOSS)*,Oslo, Norway.

Isaacson, M., Wave and current forces on fixed offshore structures, *Can. J. Civil Eng.*, 15, 937–947, 1988.

Jasper, N., Statistical distribution patterns of ocean waves and of wave induced ship stresses and motions with engineering applications, *Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Engrs*, 64, 375–432, 1954.

Khinchine, A., Korrelations theorie der stationaren stochastischen prozesse, *Math. Ann.*, 109, 604–615, 1934.

Kinsman, B. 1965. *Wind Waves*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Lamb, H. 1945. *Hydrodynamics*, 6th Ed., Cambridge University Press, New York.

Larsen, C. Flexible riser analysis — comparison of results from computer programs, *Marine Structure*, 5, 103–119, 1992.

LeMehaute, B. 1976. *Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*, Springer-Verlag, New York.

Longuet-Higgins, M., On the statistical distribution of the height of sea waves, *J. Mar. Res.*, 11, 3, 245–266, 1952.

Miller, B., Wave slamming loads on horizontal circular elements of offshore structures, *Nav. Arch.*, 3, 81–98, 1977.

Miller, B. 1980. Wave slamming on offshore structures, *Technical Report No. NMI-R81*. National Maritime Institute.

Morison, J., O'Brien, M., Johnson, J., and Schaaf, S., The force exerted by surface waves on piles, *Pet. Trans., AIME*, 189, 149–157, 1950.

Ochi, M., On prediction of extreme values, *J. Ship Res.*, 17, 29–37, 1973.

Ochi, M. and Hubble, E. 1976. Six parameter wave spectra. ASCE pp. 301–328. *Proceedings of the Fifteenth Coastal Engineering Conference*, Honolulu, HI.

Patel, M. 1989. *Dynamics of Offshore Structures*, Butterworths, London.

Pierson, W. and Moskowitz, L., A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii, *J. Geophys. Res.*, 69, 24, 5181–5203, 1964.

Rice, S.O. 1954. Mathematical analysis of random noise. In *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, N. Wax, Ed., Dover Publications, New York.

Sarpkaya, T. 1976. In-line and transverse forces on cylinders in oscillating flow at high Reynolds numbers, OTC 2533, pp. 95–108. *Proceedings of the Eighth Offshore Technology Conference*, Houston, TX.

Sarpkaya, T., Collins, and N., Evans, S. 1977. Wave forces on rough-walled cylinders at high Reynolds numbers, OTC 2901, pp. 175–184. In *Proceedings of the Ninth Offshore Technology Conference*, Houston, TX.

Sarpkaya, T., and Isaacson, M. 1981. *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, Van Nostrand Reihold, New York.

Shinozuka, M., Monte Carlo Solution of structural dynamics, *Comput. Struct.*, 2, 855–874, 1972.

Sverdrup, H., and Munk, W. 1947. Wind, sea, and swell: theory of relations for forecasting, *Technical Report 601*. U.S. Navy Hydrographic Office.

Tucker, M. 1991. *Waves in Ocean Engineering: Measurements, Analysis, and Interpretation*, Ellis Horwood, Chichester, U.K.

Vandiver, J. 1985. Prediction of lockin vibration on flexible cylinders in sheared flow, May 1985. In *Proceedings of the 1985 Offshore Technology Conference*, Paper No. 5006, Houston, TX.

Vandiver, J., Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents, *J. Fluids Struct.*, 7, 5, 423–455, 1993.

Wiener, N., Generalized harmonic analysis, *Acta Math.*, 55, 117–258, 1930.

Wilson, J. 1984. *Dynamics of Offshore Structures*, Wiley, New York.

12 声级和分贝

摘要

本章将介绍声音的基本特性和声传播，也将定义和描述代表声波幅值的级和分贝。

12.1 概述

声音与振动相关，并被描述为通过流体的传播扰动，该流体通常为空气或水。存在各种各样的噪声源，每种声源都有其独特的产生机理，该机理可能覆盖了很宽范围的现象，其中包括流体力学和结构振动。当压力波动叠加到周围的空气压力上时，声音就可以被听者的耳朵所察觉。声压就是周围空气压力的增量变化。通常来说，声压由传声器检测，并作为音频测量仪器的振动电信号输出。我们对称为声音的这些压力波给出数学描述。声学领域涉及声音和振动，并将在本书的第 12 章～第 20 章进行详细介绍。

12.2 声波特性

声波特性是以纯音的压力波动来描述的。纯音是指特定频率和幅值的正弦压力波，其以一定速度传播，该速度由介质（空气）的温度和压力决定。

考虑一个在恒定截面积管道中的假定声场，如图 12-1a 所示。左端有一往复运动的活塞发出声波，声波沿轴线向右端传播。传声器位于右端捕获声音。图 12-1b 所示为 $t = t_0$ 时刻管道中的瞬时压力分布。图 12-1c 所示为 $x = x_0$ 处传声器所捕获的压力波动的时间历程。

如图 12-1b 所示，在波形中连续两个波峰之间的距离称为波长 λ。波长和频率 f 以及波速 c 有关

$$\lambda = \frac{c}{f}(\text{ft 或 m}) \tag{12-1}$$

如图 12-1c 所示，对于一个完整循环所需的时间间隔称为正弦波的周期 T。周期 T 与频率 f 有关，即

$$T = \frac{1}{f}(\text{s}) \tag{12-2}$$

声速就是声波传播的速度 c，且空气中的声速为

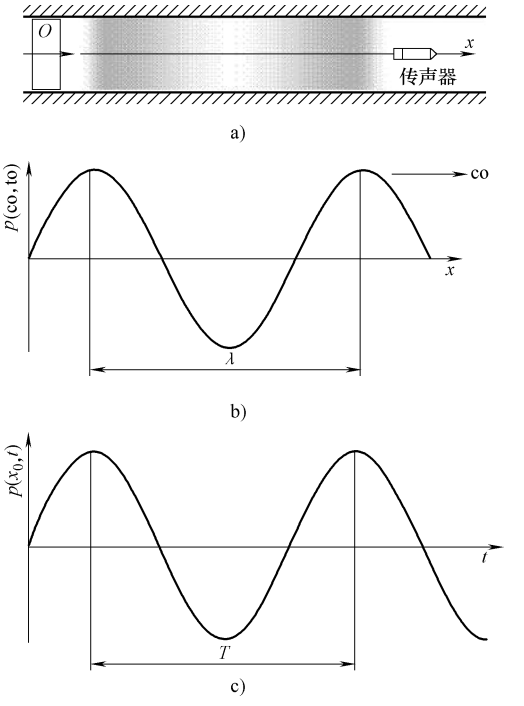


图 12-1　在恒定截面积管道中的假定声场

a）声波在管道中传播　b）瞬时压力分布　c）在 $x=x_0$ 处由传声器测得的压力变化时程曲线

$$c=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}(\text{ft/s 或 m/s}) \tag{12-3}$$

式中，γ 为比热容比，p_0 为周围或者平衡压力，ρ 为周围或者平衡密度。对于空气，γ 取 1.4，那么式（12-3）变为

$$c=\sqrt{\frac{1.4p_0}{\rho}}(\text{ft/s 或 m/s}) \tag{12-4}$$

由于 p_0/ρ 与气体温度有关，所以式（12-4）可进一步简化。假定空气为理想气体，那么速度 c 与开氏温度下的绝对温度有关

$$c=20.05\sqrt{T}(\text{m/s}) \tag{12-5}$$

其中 T 与开氏温度的换算公式为

$$T=273.2°+(℃)\ \text{K} \tag{12-6}$$

案例 12-1

当温度为 15℃时，计算声速 c。

解：

$$T=273.2°+15°=288.2\text{K}$$

$$c=20.05\sqrt{288.2}=340.4\text{m/s}$$

该值为声速在空气中的典型速度。

12.3 声级和分贝

声压和声功率通常由分贝来表示。这允许我们使用一种对数而不是线性尺度。由于能对较小的数值进行精确计算，所以对数非常有优势，因而它在相当宽的数值范围内都能使用。

12.3.1 声功率级

声功率级描述了给定声源辐射的声音功率相对于国际参考值 10^{-12}W 的大小。声功率级 L_W 定义为

$$L_W = 10\log\left(\frac{W}{W_{re}}\right)(\mathrm{dB}) \tag{12-7}$$

式中 W 表示声功率；$W_{re} = 10^{-12}$W（参考值）。

案例 12-2

计算声功率为 10W 的小型通风风扇的声功率级。

解：

$$L_W = 10\log\left(\frac{W}{W_{re}}\right) = 10\log\left(\frac{10}{10^{-12}}\right) = 130\mathrm{dB}$$

12.3.2 声压级

声压级和声功率级一样用分贝来描述。声压级 L_p 定义为

$$L_p = 10\log\left(\frac{\bar{p}^2}{p_{re}^2}\right) = 20\log\left(\frac{\bar{p}}{p_{re}}\right)(\mathrm{dB}) \tag{12-8}$$

式中，$\bar{p}$ 表示均方根（RMS）声压（Pa 或 N/m^2）；$p_{re} = 2 \times 10^{-6}\mathrm{Pa} = 0.0002\mu\mathrm{bar}$。$2 \times 10^{-6}$Pa 被选作参考压力，因为人们发现在这种压力下平均年轻人可以察觉 10^3Hz 的声音。这个参考值通常被作为在 10^3Hz 下听觉的阈值。

案例 12-3

在 200Hz 的风沙声下，L_p 为 50dB，求出该声音下的声压 RMS 值。

解：

给出 L_p 为 50dB，由方程式（12-8）求得 $\bar{p}$ 为

$$50 = 20\log\left(\frac{\bar{p}}{p_{re}}\right)$$

于是

$$\bar{p} = 10^{50/20}p_{re} = 316.2p_{re}$$

$$\bar{p} = 6.32 \times 10^{-3}\mathrm{Pa} = 0.0632\mu\mathrm{bar}$$

注意：由于上式求得的值很小，与人耳感知能力不相符。

12.3.3 总声压级

声压级是在纯音假设下定义的。然而，在实际情况下，任何真实的声音都包含很多其他的成分。考虑含有 n 个成分的纯音，表示如下：

$$\begin{cases} p_1(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ p_n(t) = a_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n) \end{cases} \tag{12-9}$$

$$p(t) = p_1(t) + \cdots + p_n(t) \tag{12-10}$$

如果 $p(t)$ 的 L_p 用压力均方值根 $\bar{p}$ 来估计，则有

$$\bar{p} = \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2} = \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [p_1(t) + \cdots + p_n(t)]^2\,\mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{12-11}$$

由于

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T p_i(t)p_j(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (i \neq j)$$

是有效的，$\bar{p}$ 可以用下式求得：

$$\bar{p} = [\overline{p_1(t)}^2 + \cdots + \overline{p_n(t)}^2]^{1/2} = [\bar{p}_1^2 + \cdots + \bar{p}_n^2]^{1/2} \tag{12-12}$$

其中

$$\bar{p}_i^2 \equiv \overline{p_i(t)}^2 \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T p_i^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_i^2 \tag{12-13}$$

定义 $L_{pi} = 10\log(\bar{p}_i^2/p_{re}^2)(i = 1, 2, \cdots, n)$，于是全声压级 $p(t)$ 的 L_p 为

$$L_p = 20\log\frac{\bar{p}}{p_{re}} = 10\log\frac{1}{p_{re}^2}(\bar{p}_1^2 + \cdots + \bar{p}_n^2)$$

或者用 L_{pi} 来表示 L_p，公式为

$$L_p = 10\log(10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p2}/10} + \cdots + 10^{L_{pn}/10}) \tag{12-14}$$

案例 12-4

求解由三个纯音组合的总声压级，其中每个纯音的声压级分别为 $L_{p1} = 60\mathrm{dB}$（$f_1 = 250\mathrm{Hz}$），$L_{p2} = 65\mathrm{dB}$（$f_1 = 500\mathrm{Hz}$），$L_{p3} = 55\mathrm{dB}$（$f_1 = 1000\mathrm{Hz}$）

解：

我们有 $10^{L_{p1}/10} = 10^6$，$10^{L_{p2}/10} = 10^{6.5}$ 和 $10^{L_{p3}/10} = 10^{5.5}$。那么总的声压级 L_p 可由式(12-14)求得：

$$\begin{aligned} L_p &= 10\log(10^6 + 10^{0.5}\times 10^6 + 10^{-0.5}\times 10^6) \\ &= 10\log 10^6(1 + 10^{0.5} + 10^{-0.5}) = 60 + 10\log 4.497 = 66.5\mathrm{dB} \end{aligned}$$

注意：65、60 和 55dB 的总声压级仅是 66.5dB。

13 听力及其心理学效应

摘要

在本章我们首先论述人的听力特征，包括对于听力机制的解剖学和功能的简要描述；其次解释人体听力的频率和响度响应，描述听力损失导致的永久性损伤；最后，通过定义指数、响度（宋）、噪声标准曲线和声级来论述人对噪声产生的心理效应。

13.1 导论

本章考虑人类听力的特征。在简短的解剖学和人类听力机制功能的介绍之后，将论述这些有关听力的方面在噪声控制中的重要性。人耳对声音的感知力是一个复杂的过程，依赖于声音的频率和声音的压力幅度，我们将考虑人耳的结构和听力机制。在这里，我们同样会简要研究几种测量噪声对人产生的心理作用的方法。

13.2 人耳的结构及功能

人耳的主要组成部分如图 13-1a 所示。人耳一般分为三个主要部分：外耳、中耳和内耳。

人耳的可见部分称为耳廓。由于相比于我们所能听到的声音波长来说，人耳的尺寸非常小，因此相对于从听者后面传来的声音，耳廓对于从听者前面传来的声音仅产生微小的加强作用，也就是说，人类的声音接收系统仅存在微小的正面指向性。外耳的其余部分由耳道开始止于耳鼓，这部分形成了一个大约 3kHz 的共振腔。这种共振或近于共振环境使得耳道有一个近乎无反射的终端，因而为耳鼓提供了一个很好的对声音的阻抗匹配，声音在其中可以得到很好的传播。

中耳包括三块小的耳骨：锤骨、砧骨以及镫骨。中耳起到阻抗变换器的作用，它可以把声波传送中的空气和耳鼓所在位置的低阻抗，与卵圆窗以外耳蜗里淋巴液中的高阻抗匹配起来。如果没有这种阻抗匹配转换，将会出现阻抗不匹配，导致大概 30dB 的听力损失。

在内耳，耳蜗是主要的组成部分，在耳蜗中声音实际上被真正的接收。耳蜗的图解如图 13-1b 所示。耳蜗位于极其坚硬的颞骨内，它的整个长度几乎被基底膜划分。在耳蜗的尾部，借蜗孔连接两条通道，它可以使两部分的淋巴液在其中流动。基底膜长 3cm

宽 0.02cm，含有 24000 个神经末梢，终连于位于隔膜上的毛细胞。卵圆窗的运动被传送到基底膜以及基底膜上相关的感觉细胞。感知的这种运动称为声音。

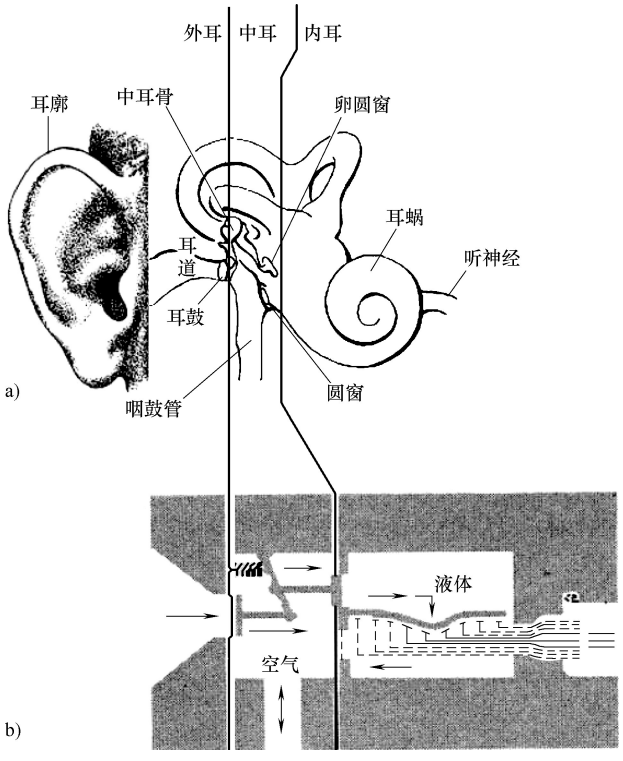


图 13-1　人耳结构及功能

a）人耳的主要部件　b）人耳功能图

13.3　频率与响度响应

听阈，定义为双耳听阈，指的是在一个自由声场中当声音信号减弱时，人耳依旧能听到的声音压力。通常被认为是正常的听力的听阈如图 13-2 所示。从该图曲线中可以看出，人耳听力的最敏感范围是 2 000 ~ 5 000Hz；另外，我们可以看出人对这一范围的响应接近于 0dB，或 2×10^{-6}Pa。在听力范围的另一端存在痛阈，通常情况下此值大约为 135 ~ 140dB，因此，正常的听力动态范围为 140dB。

另外很容易从图 13-2 的曲线中观察到听阈是频率的函数。例如：在正常听力范围内，在 0dB 级一个人刚好能够听到 2000Hz 的声音。然而，一个人需要大约 15dB 的声压级才能够勉强听到 200Hz 的声音。因此，在描述声音的主观响度时，有必要考虑人耳的特征。响度的概念通过响度级量化。

一个特定声音的响度级是由这个声音的响度与 1000Hz 纯音的响度进行主观比较来确定的。1000Hz 纯音的响度级在数值上等于用分贝度量的声压级，响度级用“方”度

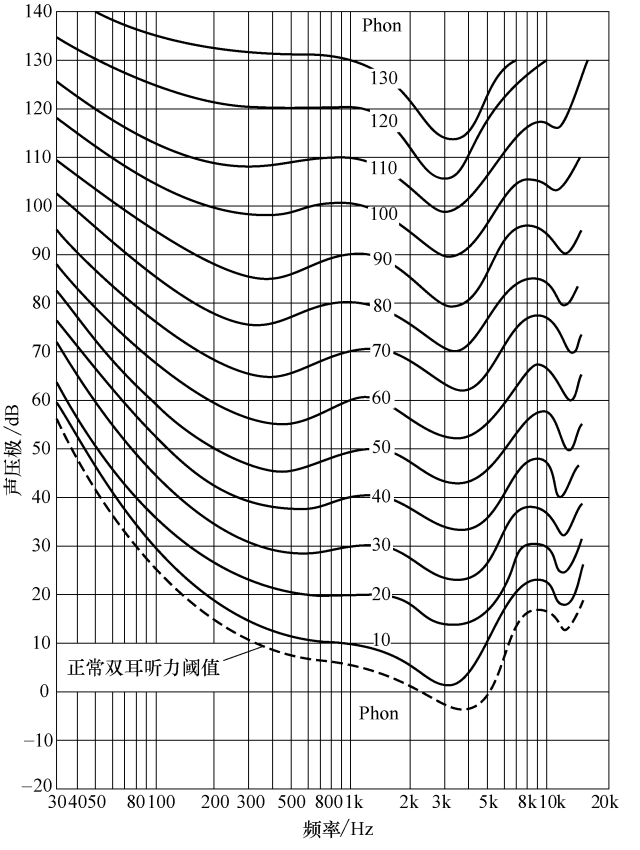


图 13-2　自由声场中双耳听力的等响度等高线图

量，被认为具有等响度。一套国际标准化的等响度的等高线绘于图 13-2 中。为了与响度级的定义保持一致，注意在 1000Hz 上，所有的用方度量的等响度等高线等于用分贝度量的声压级。

案例 13-1

计算 100Hz、响度级为 30phon 的纯音声压级。

解：

从图 13-2 中可以得到声压级为 44dB。

13.4　听力损失

过度以及长时间的噪声暴露会造成永久性的听力损失。提出的各种理论都试图对其特性进行表征，并预测对于给定噪声暴露下可能对人造成的损失。事实上，关于这一复杂生物现象，任何理论的绝对证据是难以得到的。然而，现在已收集到可靠的数据，该数据是关于工人长期暴露于近似相同的噪声环境下受到的影响。

现已确定在过度的噪声暴露下，听者的感觉细胞会被破坏从而导致永久性听力损失。这些感觉细胞是位于基底膜上的毛细胞。此外，其他类型的内耳损坏包括听觉神经元的损坏、耳蜗器官结构的损坏。总的来说，各种理论和大量数据已用于建立在噪声暴露规范阐述的噪声暴露标准。

13.5 噪声的心理学效应

在这一节，我们将会讨论一些被广泛接受的噪声心理学效应并对其进行定量分析。现已有许多指标用于定量分析噪声的心理学效应，但在下文中只介绍其中的一部分，其中包括响度（sone）、噪声标准（NC）曲线和声级。

13.5.1 响度说明

正如之前所讨论的，响度级的单位是方，与之相关的量为响度，其单位为 sone（宋）。1 宋定义为 1000Hz、声压级为 40dB 的纯音的响度。回忆响度级的定义，或参考图 13-2，一个 40 方的音调的响度等于 1sone。这种关系可以简单地表示为

$$S = 2^{(L_L - 40)/10}\ \text{sone} \tag{13-1}$$

式中，S 代表响度（sone），L_L代表响度级（phon），式（13-1）也可转化为

$$L_L = 33.2\log S + 40\ \text{phon} \tag{13-2}$$

案例 13-2

运用适当的公式进行如下转换［式（13-1）或式（13-2）］：

（1）将 80phon 转换为 sone；（2）将 100sone 转换为 phon。

解：

（1）用式（13-1），将方转换为宋：

$$S = 2^{(L_L - 40)/10}\text{sone} = 2^{(80-40)/10}\text{sone} = 2^4\text{sone} = 16\text{sone}$$

（2）用式（13-2），将宋转换为方：

$$L_L = 33.2\log S + 40 = 33.2\log 100\text{phon} + 40\text{phon} = 66.4\text{phon} + 40\text{phon} = 106.4\text{phon}$$

当声音是由许多不同频率成分组成时，如何确定“总响度”（sone）？最常用的方法是建立一个复杂噪声的响度，这种方法是由 Stevens[2] 提出的。该方法基于对 1 倍频程、1/3 倍频程或 1/2 倍频程频带声压级的测量。测量出的倍频程声压级与图 13-3 所示的等响度指标等高线结合，通过简单的计算便可确定响度或响度级。

求解过程步骤如下：

① 在感兴趣的频带范围内，测量频带声压级（1 倍频程、1/3 倍频程或 1/2 倍频程），通常频带从 50 ~ 10000Hz 中选择。

② 对图 13-3 等高线的每一个频带赋予中心频率和频带声压级，并确定每个频带的响度指标。

③ 计算总响度 S_t，单位为宋，公式为

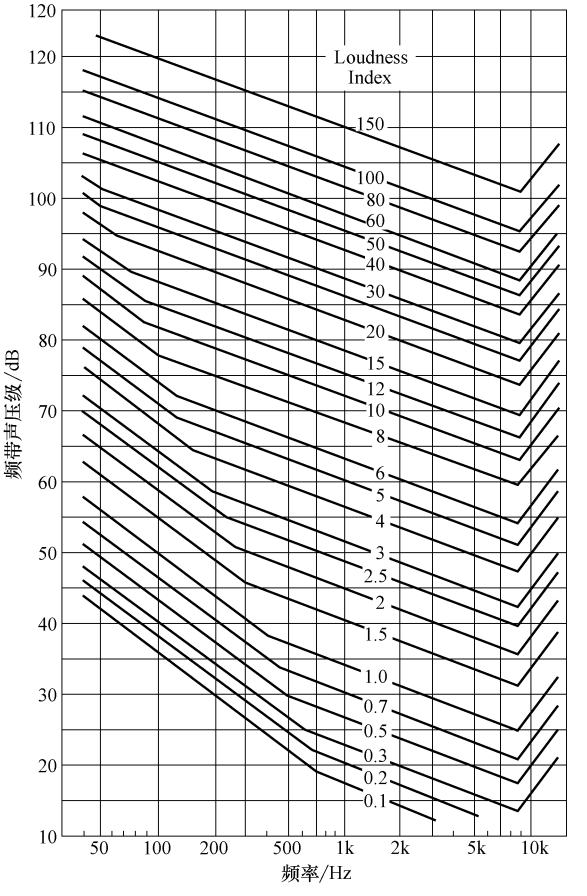


图 13-3　等响度指标等高线[2]

$$S_t = I_m(1 - K) + K\sum_{i=1}^{n} I_i \text{ (sone)} \tag{13-3}$$

式中，S_t为总响度（sone）；I_m为最大响度值；I_i为响度值，其中包括 I_m；K 为选中频带的加权系数。对于 1 倍频程、1/2 倍频程、1/3 倍频程的频带，K 分别为 0.3、0.2、0.15。

④ 如果需要，可以用式（13-2）计算响度级（phon），也可以通过图 13-3 所示的转换曲线将其转换为响度级。

案例 13-3

下表给出了一个复杂噪声测量结果的 1 倍频程频带声压级和响度指标

中心频率/Hz	频带声压级/dB	响度指数/sone	中心频率/Hz	频带声压级/dB	响度指数/sone
63	66	2.5	1000	73	10.6
125	63	3.2	2000	76	15.2
250	65	4.8	4000	81	25.1
500	70	7.5	8000	79	29.0

运用之前所述的方法计算响度级。

解：

首先，响度指数根据图 13-3 确定，并且记录在带有频带声压级的表格中。其次，我们注意到应使用 1 倍频程。因此在式（13-3）中有 $K=0.3$，和

$$S_t = I_m(1-0.3)+0.3\sum_{i=1}^{8} I_i$$

根据以上表格，可以得到 $I_m=29.0\text{sone}$，求和得到 $\sum I_i = 97.9\ \text{sone}$。因此有

$$S_t = 29(1-0.3)\,\text{sone}+0.3(97.9)\,\text{sone}=49.67\,\text{sone}$$

可以看出响度 $S_t \approx 50\text{sone}$。响度级可以根据式（13-2）计算：

$$L_L = 33.2\log S_t + 40 = 33.2\log 50\,\text{sone}+40 = 96.4\,\text{phon}$$

因此，响度级 L_L 等于 96phon。

13.5.2 噪声标准曲线

噪声标准曲线（在这里简略讲解）制定于 1957 年，用于评价室内噪声。噪声标准曲线是一种评价室内背景噪声的方法。对于一个给定的噪声等级，每一条曲线规定了倍频带最大声压级。如果已知某一给定噪声频谱的倍频带声级，那么可以通过在该组 NC 曲线上绘制噪声频谱，来给出用 NC 曲线表示的噪声等级，从而确定最高渗透点。

在 1971 年，一些反对意见致使噪声标准曲线得到了修正。新的曲线（图 13-4）称

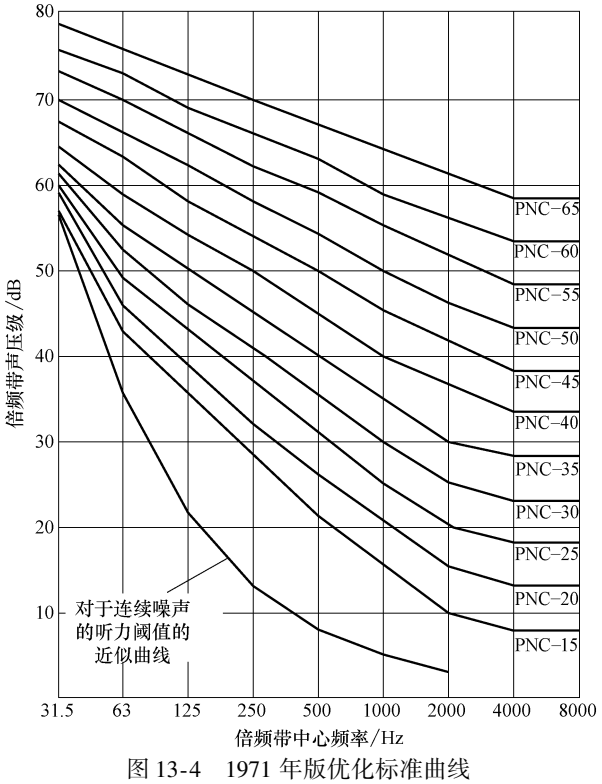


图 13-4　1971 年版优化标准曲线

为优化噪声标准（PNC）曲线。尽管新的曲线与原噪声曲线有所区别，但两者用的是同一种方法。

案例 13-4

计算下表中倍频带噪声频谱的 PNC 等级。

中心频率	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
频带声压级/dB	65	60	60	63	55	50	45	40

解：

发现最高穿透点落在 500Hz 处的 PNC-60 曲线上，因此答案是 PNC-60。

13.5.3　声级

声级是声音压力等级，它是根据一特定的加权曲线计权。有三种计权：A、B 和 C，以及相关的声级，它们现已发展为一种以合理的方式主观评价噪声对人耳影响的方法。图 13-5 和表 13-1 分别给出了每一种加权曲线平坦响应的频率响应和分贝转换。

A 加权网络现已基本上专门用于从听力损失和烦扰两个方面来测量人对噪声的反应。这种测量方法称为声级测量方法。声级的标志为 L，单位为 dBA。同理，dBB 和 dBC 分别代表 B 加权网络和 C 加权网络。

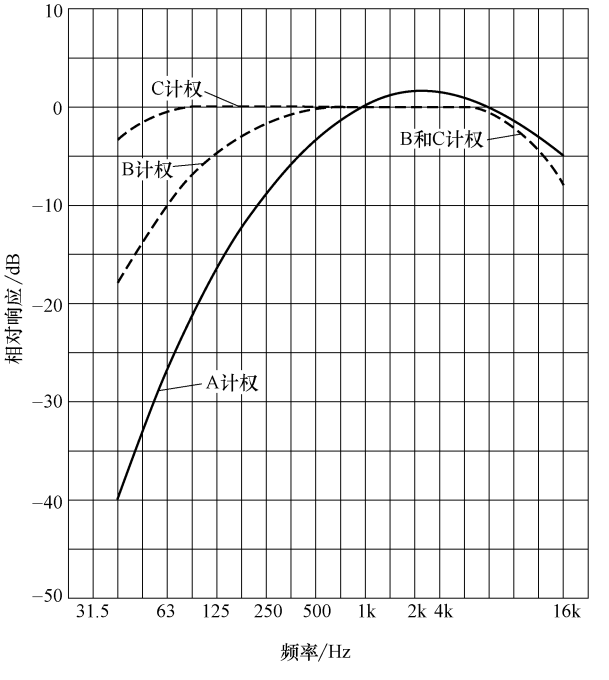


图 13-5　针对 A、B、C 计权网络的频率响应

表 13-1　根据 A 计权平坦响应的声级转换图表

频率/Hz	A 计权/dB	频率/Hz	A 计权/dB	频率/Hz	A 计权/dB
50	-30.2	400	-4.8	3150	+1.2
63	-26.2	500	-3.2	4000	+1.0
80	-22.5	630	-1.9	5000	+0.5
100	-19.1	800	-0.8	6300	-0.1
125	-16.1	1000	0	8000	-1.1
160	-13.4	1250	+0.6	10000	-2.5
200	-10.9	1600	+1.0	12500	-4.3
250	-8.6	2000	+1.2	16000	-6.6
315	-6.6	2500	+1.3		

在噪声消除问题中，经常有必要将计算得到的 1 倍频程带或 1/3 倍频程声压级转换为总声级（单位 dBA）。表 13-1 给出了从平坦响应声压经 A 加权后的声级转换。

案例 13-5

表 13-2 中给出了一组倍频程声压级，试确定它们的总 A 加权声级 L。

表 13-2　倍频程声压级

f_c/Hz	$L_{平坦}$/dB	ΔL_A/dB	$L_A = L_{平坦} + \Delta L_A$/dB	L_{iA}
63	74	-26.2	47.8	0.60×10^5
125	71	-16.1	54.9	3.09
250	61	-8.6	52.4	1.74
500	60	-3.2	56.8	6.31
1000	62	0	62.0	1.585×10^6
2000	60	+1.2	61.2	1.318
4000	62	+1.0	63.0	1.995
8000	69	-1.1	67.9	6.166
总计				12.238×10^6

注：f_c—频带中心频率；$L_{平坦}$—平坦加权的声压级；ΔL_A—A 加权级；L_{iA}—带 A 加权的声强。

解：

根据表 13-1 的平坦响应级的分贝转换 $L_{平坦}$、每一个倍频程带 A 加权的声强 I_{iA} 以及 I_{iA} 的总和。最后，带 A 加权的总声级 $L_{总}$ 为

$$L_{totalA} = 10\log \sum_{i=1}^{n} I_{iA} = 10\log 12.238 \times 10^6 \text{dB} = 70.9 \text{ dB}$$

参 考 文 献

1. Irwin, J.D. and Graf, E.R. 1979. *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. American National Standard USAS S3.4-1968. 1968. *Procedure for the Computation of Loudness of Noise*, America National Standards Institute, New York, NY.

14 噪声控制标准与法规

摘要

在这一章我们将论述噪声控制标准与立法发展过程背后的基本思想，考虑到这些标准依国家以及政府权力的不同而有所区别。欧盟关于噪声的立法与日本的相关法规将作为典型例予以介绍，同时还有关于噪声评定措施的简介。

14.1 导论

为了防止人们暴露于过度噪声之下，不同地区制定了不同的法规予以控制。尽管这些控制法规的范围、控制机制、技术要求以及所依据的基本原理有所不同，但它们均试图找到人们对于安静环境的需求和保持经济发展、社会活动之间的平衡。总的来说，噪声标准根据一天当中时间的不同以及关注的使用地方的不同而有所变化，对于休息时间以及对噪声比较敏感的区域，噪声标准通常比较严格，例如学校、医院和居住人群密集的区域。不同国家往往采用不同的噪声标准和法规以适应当地的情况和需求。本章不能详述世界上所有主要控制标准和法规，甚至不能详述主要工业化国家。本章仅简要介绍法规中关于噪声排放与接受方面的主要问题。更多关于正在进行的噪声控制的细节问题可以参见参考文献[2,3]。

14.2 噪声政策背后的基本思想

所有噪声政策的初衷都是为了保护人们的生活质量不会受到各种噪声的污染。当制定一项噪声政策时，考虑噪声的排放与排入（或接收）之间的区别是非常有用的[6]。前者按字面上的理解指的就是声音能量或者一个噪声源产生能量的排放与辐射，而后者指的是接收、察觉或者观察辐射噪声，这同样也会导致在噪声源附近的噪声暴露范围。因此，噪声排放由政府制定的法律法规控制，而噪声排入由环境质量标准来控制。描述测量噪声排放的幅度用“声功率级”，描述测量噪声排入的幅度用“声压级”。

全球噪声控制的专业组织——国际噪声控制学会（I-INCE）最近开始致力于发展一项全球噪声政策[5]。在回答“噪声是全球性问题还是地区性问题?”这个问题时，国际噪声控制协会在一次特别会议上提到了一个普遍观点。它指出噪声从根本上来讲是一

个全球性问题，但只有在地方政府的参与下许多噪声问题才可能得到解决。技术研究组的任务就是用全球化方法研究噪声问题，以便定义出对更加有效的国际性噪声控制政策的需求，有关陈述如下：

“所有能发出可听声音的交通工具、设备、机械和装备都是制造产品；它们大多数流入世界贸易中，并且其中大部分产品在两个或两个以上不同国家的不同跨国公司生产。这些产品的噪声排放是国际协议与法规的恰当主题。在全球的许多地方，这些产品在运作过程中产生的噪声排入会随着交通流的增加或工业化步伐的加快而日趋严重。”

技术研究组将噪声领域分为如下几类：

（1）工作噪声　在室内和室外的工作地点接收到的噪声，它是由临近工作地点的所有噪声源产生。

（2）环境噪声　个人在室内和室外的家庭环境中感觉到的噪声，它是由其他人控制的声源产生。

（3）消费品噪声　由发出噪声的产品其使用者或者旁观者接受到的噪声，个人对这种噪声有一定的控制能力，包括车辆乘员舱中的噪声，但不包括工作场所噪声和环境噪声。

14.3　立法

世界卫生组织（WHO）在2000年发表了具有历史意义的“社区噪声指导”，被认为是目前对于暴露噪声标准最重要的建议。负责把这些法规制定成法律的政府机构有：美国联邦政府、欧盟和日本政府。下面将详述欧盟对噪声排入的立法，并以此作为立法程序的典例。

2002年7月18日，一项关于评价与管理环境噪声的欧盟指令在欧洲共同体官方公报上公布。它要求欧盟成员国在2004年7月18日前完成国家立法。从那时起，这项工程开始实行，包括周期性噪声测绘、制订行动计划和公众信息。这项指令加强了欧盟在减少噪声排放中的地位。

2002年，环境噪声的欧盟指令的进展使一项有关评定与管理环境噪声的指令得到批准，该指令缩写为“DAMEN”。根据DAMEN法规的第一条，它的目标是“定义一个通用的标准，来避免、防止或减少有害的影响，包括暴露于环境噪声下产生的烦扰。”DAMEN法令的简单描述如图14-1所示。

14.3.1　行动计划

如果测绘的噪声结果超过了当地或国家的限值，或者发现因为其他原因而不满意，行动计划就需要依情况而有所改进。这些行动计划需要和相关的居民一起讨论。行动计划的摘要应送交至欧盟委员会。

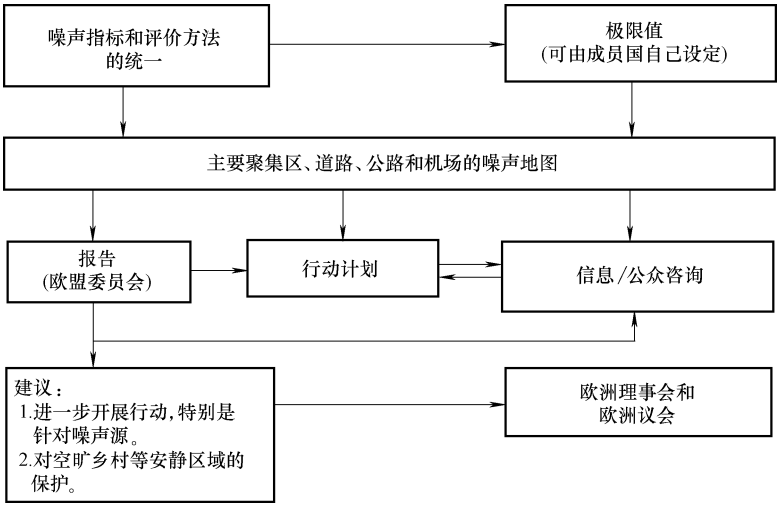


图 14-1　DAMEN 的概述［来源：Wolde，T. T. 2003. 欧盟对噪声排入的立法，pp. 4367-4371. In Proceedings of Inter-noise 2003（N832）］

14.3.2　欧盟委员会公布的数据

自 2009 年起，每隔五年，欧盟委员会应发表一份噪声测绘和行动计划的摘要报告。

14.3.3　对欧盟后续行动的建议

在 2004 年，欧盟委员会计划向欧盟议会和理事会提交一份报告，这份报告包括了有关环境噪声源的欧盟已有措施的回顾，以及当时的改进建议（如果可行的话）。2009 年，欧盟委员会向欧盟议会和理事会提交一份指令实施的报告。这份报告特别评估欧盟进一步行动的需要，如果结果可行，将会以如下几个方面策略予以实施：

- 制定长期和中期的目标以减少受环境噪声有害影响的人数。
- 对特定噪声源产生的噪声排放采取额外的措施。
- 保护空旷乡村的安静区域。

14.4　法规

当中央政府颁布了一项噪声法规时地方政府就要去实施。噪声法规被认为是起到“使国家噪声最小化”的作用。比如说，工厂噪声、建筑施工噪声以及道路交通噪声就在噪声控制法规的范围之内，这就意味着中央政府有责任控制这些噪声；另一方面，社区噪声和工厂噪声在地方政府最初制定的法规范围之内。所以可以说地方政府对噪声政策负有绝大部分的责任，尽管他们可能并不彻底了解法规所涉及的情况。接下来我们将举一个关于噪声法规的典型例子：日本对于环境噪声问题的噪声法规系统框架。

在日本，《声环境质量标准》在旧法颁布 27 年后，于 1999 年修订。图 14-2 为日本

环境噪声法律系统的框架。

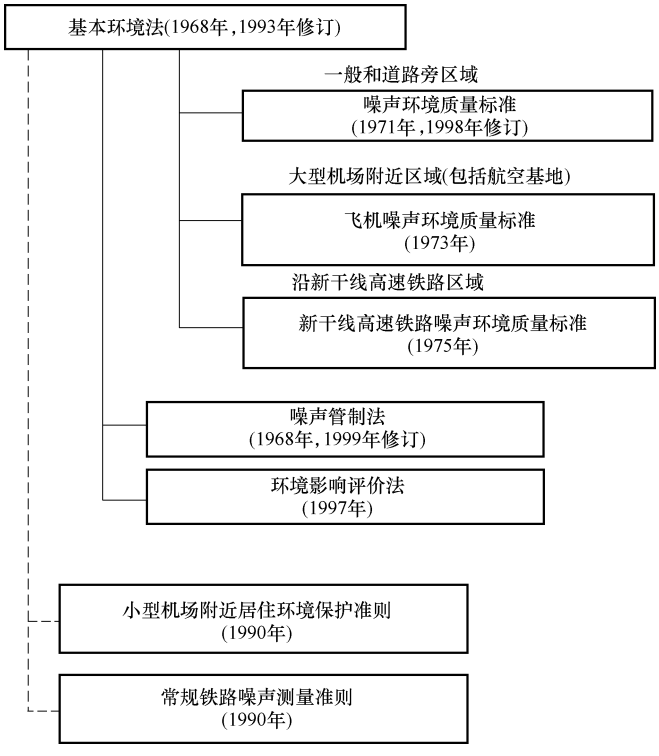


图 14-2　日本环境噪声法律体系［来源：Tachibana，H. and Kaku，J. 2003. Acoustic measures for the environmental noise assessment in Japan，pp. 3317-3322. In Proceedings of Inter-noise 2003（N1007）］

这些法律和标准中的每一项都是针对某种特定的噪声问题（噪声源）来立法的，因此对于不同的噪声问题，规定的噪声指标也有所区别。从历史的角度看待这个问题，可以说每一项法律和标准都通过当时可用的测量技术，及时反映了特定的噪声问题。但针对当前情况、国际的动态环境和当前声学测量技术，有些法律和标准显得过时了。

14.5　评定噪声的方法

通常来讲，A 加权网络应用于获得噪声评定的方法。因为这些方法由政府立法规定，所以它们就依赖于法律法规和标准。下面列出了日本立法制定的噪声评定方法，以此给出立法背后的一些概念问题[6]。

在关于环境噪声问题的法规和标准中，采用了各种各样的噪声评定方法。为了将来改进这些法规和标准，现有措施应该考虑噪声排放与噪声排入两者之间的不同、噪声测量监测和影响评价预测之间的不同。在表 14-1 中分类列举了日本根据不同的环境噪声特性立法制定的相关措施。

表 14-1 日本环境噪声法律和标准中规定的评价方法

噪 声 源	法律和标准噪声指标		评 价 时 间
道路	噪声环境质量标准	$L_{Aeq,T}$①	白天(6:00-22:00)； 晚上(22:00-6:00)
新干线高速铁路	新干线高速铁路环境质量标准	$L_{A,Smax}$②	每次通过时
常规铁路	常规铁路噪声测量规则	$L_{Aeq,T}$	白天(7:00-22:00)； 晚上(22:00-7:00)
飞机	飞机噪声环境质量标准	WECPNL③	时间加权
小型机场附近	居住环境保护准则	L_{den}④	没有规定
建筑施工	噪声管制法	根据时间变化：	
工厂	(特定的噪声源)	L_A⑤；$L_{A,Fmax}$⑥；	每一次事件
大型零售商店	为了保护居住环境法律,法律关注大型零售商店所采取的措施和方法	L_{A5}⑦；$L_{A,Fmax,5}$⑧	

① $L_{Aeq,T}$：等效连续 A 计权声压级。
② $L_{A,Smax}$：慢变的 A 计权声压级的最大值。
③ WECPNL：计权等效连续感觉噪声级（根据 $L_{A,Smax}$ 计算）。
④ L_{den}：白天/傍晚/晚上等效连续 A 计权声压级。
⑤ L_A：快变的 A 计权声压级的最大值。
⑥ $L_{A,Fmax}$：A 计权声压级。
⑦ L_{A5}：达到 A 计权声压级 90% 以上的值。
⑧ $L_{A,Fmax,5}$：达到快速 A 计权声压级最大值 90% 以上的值。
来源：Tachibana, H. and Kaku, J. 2003. Acoustic measures for the environmental noise assessment in Japan, pp. 3317-3322. In Proceedings of Inter-noise 2003 (N1007)

当考虑噪声测量监测与影响评估的噪声预测之间的一致性时，应用基于如指标 L_{Aeq} 这样的能量最为合理。当然，L_{Aeq}不是万能的，仍然需要一些辅助的调整来完成不同特性下的准确环境噪声评估。然而，在日本应该考虑在不久的将来统一使用 L_{Aeq}的可能性。尽管 L_{Aeq}现已在各个国家广泛地应用于飞行器噪声的评定中，但是在日本仍然在使用 WECPNL。WECPNL 与 L_{Aeq}的概念很相近，且两者之间的评定指标的转换也不困难。

图 14-2 所示的法律和标准的目的在于测量和评定环境噪声，并起到保护和维持现状的作用。因此，任何一个噪声指标都要恰当地适用于每一种噪声问题，如表 14-1 所示，它列举了日本的环境噪声法律和标准中的噪声评定方法。尤其是当在环境影响评估中对未来噪声情况做预测时，噪声指标应该适用于理论计算。在噪声法律和标准中规定的如噪声百分级（L_{A5}）和最大级（$L_{A,Fmax}$或 $L_{A,Smax}$）这样的统计噪声指标，应由统计的方法得出。原则上，用简单的物理计算模型很难预测出这些参数。在这方面，以能量为基础的噪声指标如 L_{Aeq}，可以容易地用基于能量的计算来处理，并且使预测模型的物理意义变得简单而清晰。在环境影响评估中，预测结果应该和相关的法律或标准进行比较。以道路交通噪声为例，在新的环境质量标准中已经采用了 L_{Aeq}，因而在理论上，建立在能量指标的基础上的预测变得十分简单。

在预测道路交通噪声时，在一条有限路径上，一辆机动车可以看做是一个具有恒定声功率的稳定声源。但在另一方面，在预测建筑噪声时，由于必须处理具有时间变化特

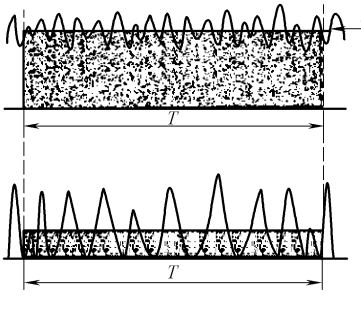
性的各种各样的机器和设备，因而存在非常复杂的问题。因此，在“Acoustic Society of Japan CN-model 2002”中给出的建筑噪声预测方法中，规定了用不同的噪声指标来描述不同噪声源发出的噪声输出，见表 14-2 所示，该表给出了噪声源分类，并给出了用于表示这些噪声源声学输出的指标。最后，表 14-3 给出了针对噪声源声学输出的测量定义和指标。

表 14-2　噪声源分类和表述噪声源声学输出的指标

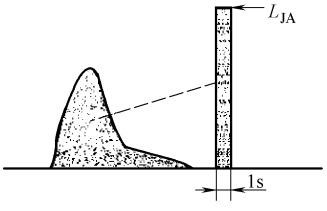
时间变化特点	声学输出指标表达符号	术　　语
稳态	L_{WA}	A 计权声功率级
	$L_A(r_0)$	在参考距离处($r_0=1m$)A 计权声功率级
随机波动，且波动范围很宽	L_{WAeff}	有效 A 计权声功率级
	$L_{Aeff}(r_0)$	在参考距离处($r_0=1m$)有效 A 计权声压级
	$L_{A,Fmax,5}(r_0)$	在参考距离处($r_0=1m$)快速 A 计权声压级最大值的 90% 以上范围内的值
间歇性脉冲	L_{IA}	A 计权声功率级
	L_{WAeff}	有效 A 计权声功率级
	$L_{Ae}(r_0)$	在参考距离处($r_0=1m$)单次事件声暴露级
	$L_{A,Fmax}(r_0)$	在参考距离处($r_0=1m$)快速 A 计权声压级最大值

来源：Tachibana，H. and Kaku，J. 2003. Acoustic measures for the environmental noise assessment in Japan，pp. 3317-3322. In Proceedings of Inter-noise 2003（N1007）

表 14-3　噪声源声学输出的测量定义和指标

指标	定　　义	测 量 方 法
L_{WA}	$L_{WA}=10\log\frac{P_A}{P_0}$　　(1) 其中，$P_0=1pW$ $r_0=1m$  	$L_{WA}=L_A(r)+20\log\frac{r}{r_0}+8$　　(2) 其中，$L_A(r)$是在距离 r 处测量的 A 计权声压级
L_{WAeff}	有效 A 计权声功率级，适用于波动、间歇的和脉冲噪声。  	$L_{WAeff}=L_{Aeff}(r)+20\log\frac{r}{r_0}+8$　　(3) 其中，$L_{Aeff}(r)$是在距离 r 处测量的 A 计权声压级 $L_{Aeff}=10\log\left[\frac{1}{T}\int_1^2\frac{p_A^2(t)}{p_0^2}dt\right]$　　(4) 其中，$T(t_1-t_2)$是平均时间(s)，$p_0=20\mu Pa$

（续）

指标	定　义	测量方法
L_{1A}	$L_{JA}=10\log\frac{E_A}{E_0}$　（5） 其中，$E_0=1\text{pJ}$ 这里，  	$L_{JA}=L_{AE}(r)+20\log\frac{r}{r_0}+8$　（6） 其中，$L_{AE}(r)$是在距离 r 处测量单次事件声暴露级 $L_{AE}=10\log\left[\frac{1}{T}\int_1^2\frac{p_A^2(t)}{p_0^2}\text{d}t\right]$　（7） $T_0=1\text{s}$，t_1-t_2 是指包含事件的时间(s)。
$L_A(r_0)$ $L_{A,Fmax}(r_0)$	A 计权声压级转换成参考点距离处（$r_0=1\text{m}$）的声压级值	$L_A=L_A(r)+20\log\frac{r}{r_0}+8$　（8） 其中，$L_A(r)$是在距离 r 处测量的 A 计权声压级。

来源：Tachibana，H. and Kaku，J. 2003. Acoustic measures for the environmental noise assessment in Japan，pp. 3317-3322. In Proceedings of Inter-noise 2003 （N1007）

参考文献

1. Fahy, F. 1985. *Sound and Structural Vibration, Radiation, Transmission and Response*, Academic Press, New York, chap. 2.
2. Fields, J.M. and de Jong, R.G., Standardized general-purpose noise reaction questions for community noise survey: research and a recommendation, *J. Sound Vib.*, 242, 641–679, 2001.
3. Harris, C.M., Ed. 1979. *Handbook of Noise Control*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, chap. 37.
4. Irwin, J.D. and Graf, E.R. 1979. *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, New York, chap. 5.
5. Lang, W.W. and Wolde, T.T. 2003. Progress report for TSG#5 'Global Noise Policy', pp. 98–101. In *Proceedings of Inter-noise 2003* (N872).
6. Tachibana, H. and Kaku, J. 2003. Acoustic measures for the environmental noise assessment in Japan, pp. 3317–3322. In *Proceedings of Inter-noise 2003* (N1007).
7. Tachibana, H. and Yamamoto, K. 2003. *Construction Noise Prediction Model*, ASJ CN-Model 2002, proposed by the Acoustical Society of Japan, EURONOISE, in Naples (2003.5).
8. Wolde, T.T. 2003. The European Union's legislation on noise immission, pp. 4367–4371. In *Proceedings of Inter-noise 2003* (N832).

15 仪器仪表

摘要

本章介绍了对噪声控制工程有用的声源识别和声源排列中的几种测量方法。本章还将介绍诸如镜面-传声器、传声器阵列这样的声强测量、指向性测量设备，以及它们的原理和应用。

15.1 声强测量

每一项噪声控制工程都始于对噪声源的识别和声源排列。对于这个目的，现在已经有很多切实有效并且广为运用的方法。这一节将介绍诸如镜面-传声器、传声器阵列这样的声强测量、指向性测量设备，以及它们的原理和应用。像声全息图法[1,2]和声场空间变换法这样同样有用的方法在参考文献中作了介绍。

15.1.1 理论背景

声强用来测量声音能量方向和大小的量。瞬时强度矢量 $\boldsymbol{I}(t)$ 等于瞬时声压 $p(t)$ 乘以相应的质点速度 $\boldsymbol{u}(t)$，即 $\boldsymbol{I}(t)=p(t)\boldsymbol{u}(t)$。

在实际应用中，时间平均强度 $\bar{I}$ 更加重要，它的公式为

$$\bar{I}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}p(t)u(t)\,\mathrm{d}t \tag{15-1}$$

强度矢量表示的是流过单位面积的净功率。因此，面积为 S 的封闭曲面上的声源功率 W 为穿过面积的声强的积分，即

$$W=\iint_S \bar{I}\,\mathrm{d}S \tag{15-2}$$

式（15-2）表明，对包络声源表面声强的测量可以估计出声源发出的声功率，这表示出了声强概念的实用性。

15.1.2 测量方法

在商业产品中声强测量系统的原理用到了两个紧密放置的声压传声器[4,5]，如图 15-1 所示。

在某一特殊方向 r 上的粒子速度 $u_r(t)$ 可以

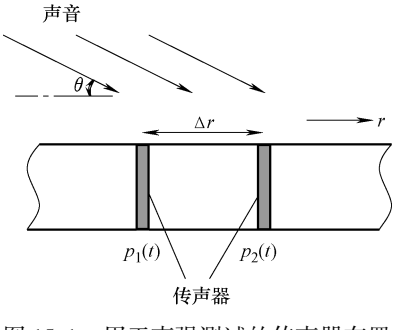


图 15-1 用于声强测试的传声器布置

近似用这一方向上分隔距离为 Δr 的两点声压差对时间积分得到：

$$u_r(t) = -\frac{1}{\rho_0}\int_{-\infty}^{t}\frac{p_2(\tau)-p_1(\tau)}{\Delta r}\mathrm{d}\tau \tag{15-3}$$

p_1 和 p_2 是来自两个传声器的声压信号。两个传声器中心的声压近似为

$$p(t) = \frac{p_1(t)+p_2(t)}{2} \tag{15-4}$$

因此，方向 r 上的声强计算公式为

$$I_r(t) = -\frac{1}{2\rho_0\Delta r}[p_1(t)+p_2(t)]\int_{-\infty}^{t}[p_2(\tau)-p_1(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{15-5}$$

一些商业声强分析仪用式（15-5）来测量声强，另一类分析仪则用频率公式计算：

$$I_r(\omega) = -\frac{\mathrm{Im}[G_{12}]}{\omega\rho_0\Delta r} \tag{15-6}$$

式中，G_{12} 是两个传声器信号的互谱。式（15-6）使得用双通道快速傅里叶变换（FFT）分析仪对声强测量变得可能。

15.1.3 声强测量的误差

双传声器方法的主要系统误差是由于用一个有限压力差来近似压力梯度造成的。当入射声音是平面波时，被测声强 $\hat{I}_r$ 和实际声强 I_r 的比值为

$$\hat{I}_r/I_r = \frac{\sin(k\Delta r\cos\theta)}{k\Delta r\cos\theta} \tag{15-7}$$

式中，θ 为图 15-1 中定义的角度；k 是声波数。式（15-7）表明，频率上限与两个传声器之间的距离成反比。

造成误差的另一个原因就是两个测量通道的相位失配。用式（15-5）计算声强时，两个传声器信号 p_1 和 p_2 之间的相位差 φ 非常重要。因此，两个测量通道之间的相位失配 $\Delta\varphi$ 一定要小于 φ。因为 φ 会随着频率的升高而增大，因此误差在低频时非常严重。其他可能的误差，如传声器的灵敏度和在有限平均时间下的随机误差通常情况下是比较小的。

15.1.4 应用

声强测量的一个重要应用就是运用式（15-2）确定声功率级。此外，由于声强的测量非常接近声源的表面，这令噪声源的识别和排列变得可行。在接近声源表面测量声强时，使得噪声源识别和排列变得可能。图 15-2 所示为铁路车辆车轮的噪声声强。在车轮的附近安装一个声强探头，并通过在距离车轮 100mm 的侧面里把探头横穿，测量出声强的垂直分量。这些数据表示出车轮在每一频率上的自由振动特性；车轮在 700Hz 处振动有一个节圆直径，在 1150Hz 处振动有三个节圆直径。声强矢量的可视化同样给出了关于噪声源的有价值信息。图 15-3 表示在时速 120km/h 的铁路列车附近测量的每一倍频带下的声强矢量。这些结果表明滚动噪声的主要辐射源是频率在 500Hz ~ 1kHz 带宽的铁轨和频率在 2 ~ 4kHz 带宽的车轮。

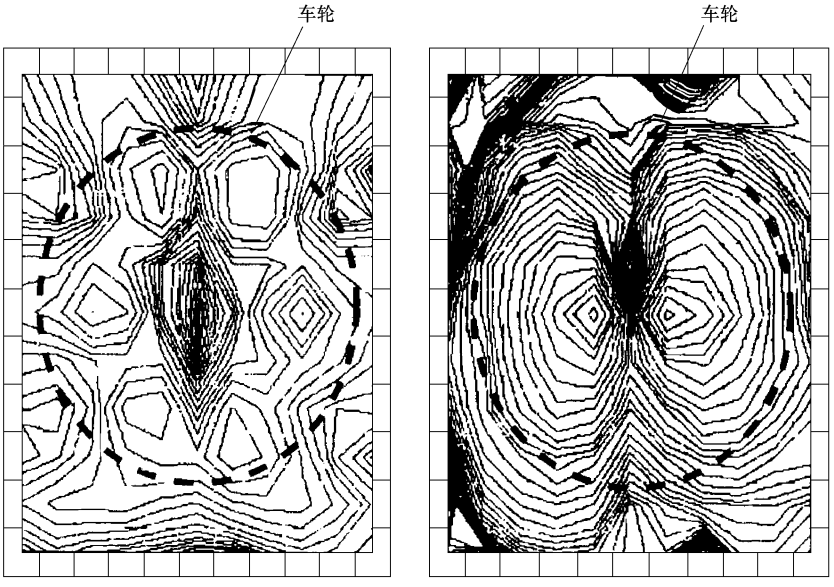


图 15-2　铁路列车车轮辐射的声强测量（1dB 的云图）

a）700Hz 处　b）1150Hz 处

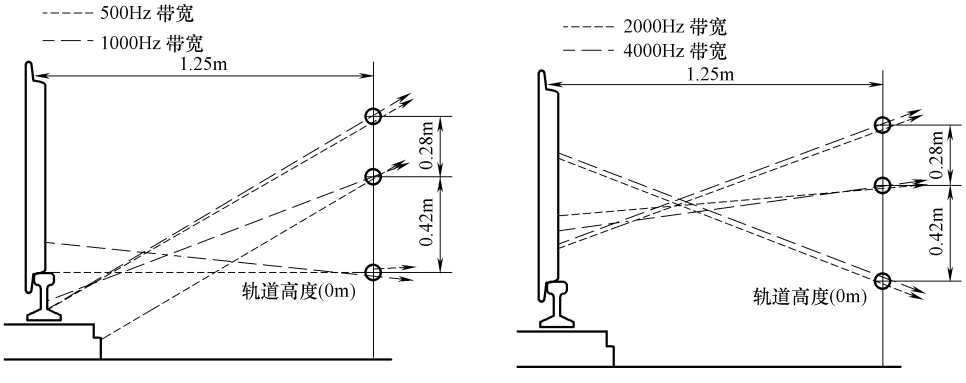


图 15-3　在行驶速度为 120km/h 铁路列车附近测量的声强矢量

15.2　镜面-传声器系统

15.2.1　测量原理

一个镜面-传声器系统包含一个椭圆形或抛物线形的反射镜和一个放置在其焦点的全向传声器。图 15-4 所示为一个椭圆形的反射镜、一个全向传声器和一个噪声源的布

置。这里 S 和 S' 分别表示反射镜的前面和背面；$P(r)$ 表示这个格局下的声压力场；$P_i(r)$ 表示自由空间下的声压力场；r_m 为传声器的位置；r 为反射镜上的一点；法矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 指向中间。

运用 Green 定理，传声器位置的声压 $P(r_m)$ 计算方法为

$$P(r_m) = P_i(r_m) + \iint_{(S+S')} P(r) \frac{\partial}{\partial n_0} \times \left[\frac{e^{ikR_m}}{4\pi R_m}\right] d^2 r \tag{15-8}$$

式中，$k = 2\pi f/c_0$ 是波数，f 是声音的频率，c_0 是声速；$R_m = |r - r_m|$，为传声器和反射镜之间的距离。如果声波的波长远小于反射镜的直径，那么在前表面 S 上声压场 $P(r)$ 可以近似为 $2P_i(r)$，在后表面 S' 上为 0。在这样的频率范围内，入射场的 $P_i(r_m)$ 可以忽略不计。做了这些近似后，假设噪声源为位于 r_s 的单级点声源，式（15-8）可化简为

$$P(r_m) = -\frac{m(f)}{8\pi^2} \iint_s \frac{e^{ik(R_m+R_s)}}{R_m R_s} \left(ik - \frac{1}{R_m}\right) \times \cos\theta(r)\, d^2 r \tag{15-9}$$

式中，$m(f)$ 是声源质量流量的幅度；$R_s = |r - r_s|$，是声源和反射镜表面之间的距离；$\theta(r)$ 的定义图 15-4 所示。当噪声源放置在反射镜的远焦点时，相对于 r 而言，声音传递路径长度 $R_m + R_s$ 恒等于 r，此时可获得一个强烈的信号。当噪声源沿垂直于反射镜轴线方向移动时，声波传送长度 $R_m + R_s$ 由于 r 的变化而增大，且传声器的信号因为受到干涉而减弱（观察图 15-5，我们称之为“指向性模式”）。传声器的峰值级与自由场级的比值 G 为“增益系数”。反射镜的空间分辨率由它的放置位置 w 确定，在某一位位置上，传声器的信号会相应地减弱一定的量（如 3dB）。在图 15-4 中，G 和 w 与反射镜的几何参数有关：

$$G = 10\log(CD^4/\lambda^2 B^2)\ (C = \text{const.}) \tag{15-10}$$

$$w \propto \lambda L/D \tag{15-11}$$

增益系数 G 以每倍频程 6dB 的速率增长，空间分辨率 w 与频率成反比。低频极限由反射镜的大小决定。另一方面，除全向传声器本身容量外，高频没有限制。因此，反射镜-传声器系统很适合做比例模型测试。

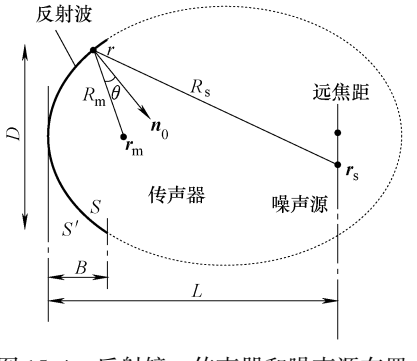


图 15-4　反射镜、传声器和噪声源布置

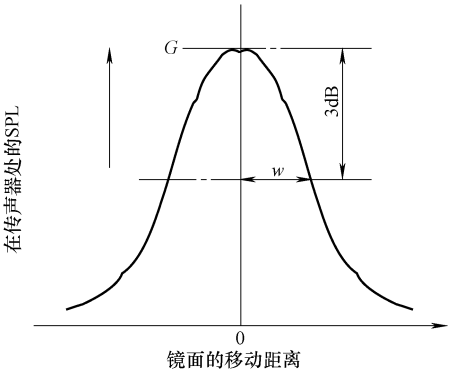


图 15-5　镜面-传声器系统的指向性模式

15.2.2 应用

反射镜-传声器系统因为它的指向性特征，已被证实在识别噪声源上非常有用[8-10]。对一个噪声源区域进行扫描可得到噪声源地图。这种测量方法有一个优势，就是可以测量远距离的声场且仅需要一个传感器，但是缺点是测量过程耗费时间。

图 15-6 给出了一个噪声源地图的案例，它是由一个 1:5 比例缩小的高速火车模型，在风洞中运用反射镜-传声器系统测量方法得到空气动力噪声。列车的表面被分为几个噪声源区域，每个区域的噪声源分布由横穿过列车表面的反射镜-传声器来测量。反射镜的直径和焦距分辨为 1.7m 和 3m。获得了噪声源强度的细节图，它显示出高速列车空气动力噪声产生在相对局限的区域，就是在局部表面结构上。反射镜-传声器系统可以用于移动噪声源声源分布的测量。图 15-7 给出了用抛物线反射镜-传声器系统测量的高速列车噪声的时程曲线，反射镜直径为 1m。时程曲线的峰值对应受电弓、车门、两节车厢间的空隙和观察窗，这表明这些地方就是主要噪声源。

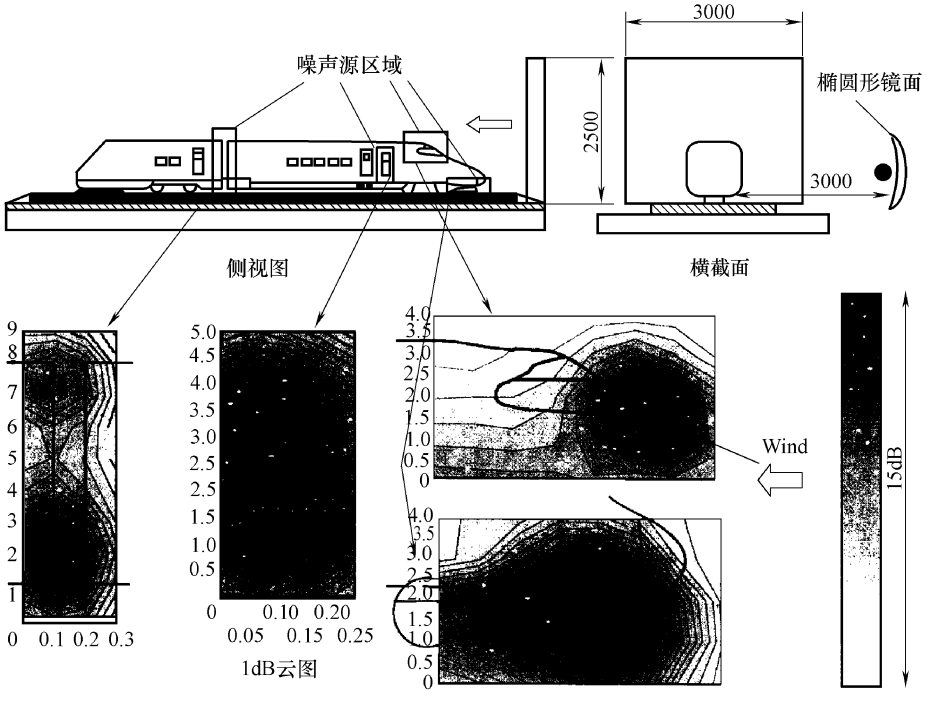


图 15-6 在风洞中用椭圆形反射镜-传声器系统测量一个 1:5 比例缩小的新干线高速火车模型噪声源分布

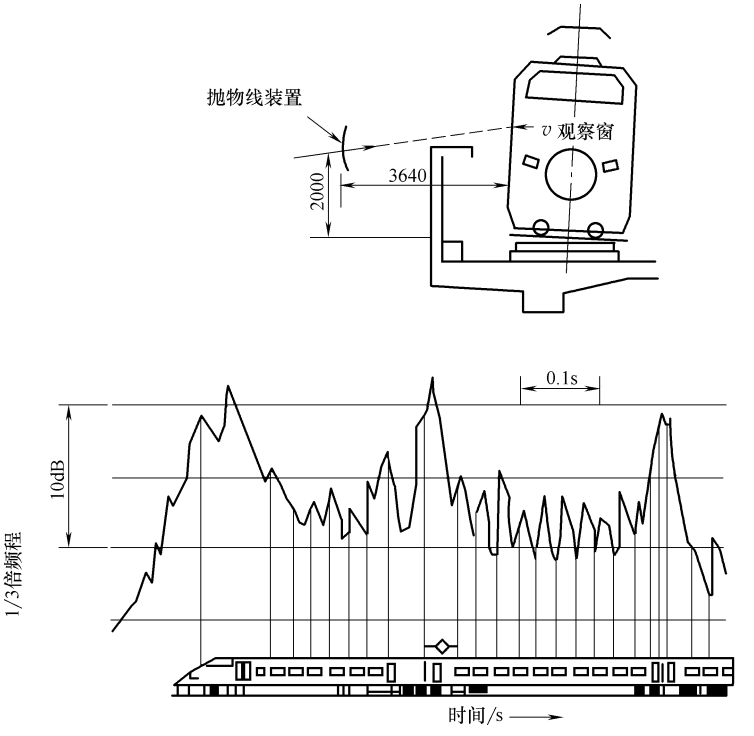


图 15-7 用抛物线反射镜-传声器系统（$D=1\text{m}$，列车行驶速度 =274km/h）测量得到的 A 计权 1/3 倍频程（$f_0=8\text{kHz}$）声压级时程曲线

15.3 传声器阵列

15.3.1 传声器阵列的原理

一个传声器阵列[11]包含有若干个空间分布的传声器用以测量声场。每个传声器的时域信号累加，考虑噪声源和传声器之间的时间延迟，最后得到一个指向性输出信号。这种算法叫做“波束成型”。现在，加入有 M 个全向传声器分布在一个噪声源远声场中。阵列的输出信号汇聚在声源的某一位置 r，因而 $z(r,t)$ 可由每个传声器延时信号和加权信号总和计算得出：

$$z(r,t)=\sum_{m=1}^{M} w_m p_m(t-\Delta m) \tag{15-12}$$

式中，$p_m(t)$ 是来自第 m 个传声器的信号，w_m 是加权因子，Δm 是第 m 个传声器信号的延时，计算公式为

$$\Delta m = \frac{r_o - r_m}{c_0} \tag{15-13}$$

其中，r_o 和 r_m 分别为信号汇聚点到参考点 o 以及到第 m 个传声器之间的距离。当信号汇聚点位置与声源位置重合时，就会获得一个强烈信号（图 15-8）。如果这一过程在声源表面的多个汇聚点 r 处重复进行，则会获得一个噪声源地图。

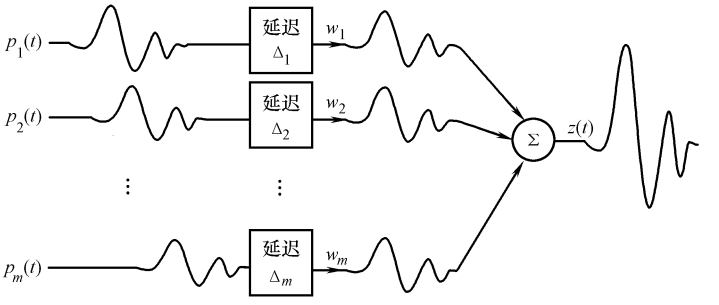


图 15-8　传声器阵列原理图（各个时间延迟是这样选择的：就是来自给定点达到的信号可以连贯相加）

15.3.2　阵列的指向性模式

传声器阵列的性能由空间分辨率和信噪比决定。为简便起见，假设一个线性阵列，内有 $M = 2N + 1$ 个传声器均匀布置，且间距为 d。当一个平面谐波以入射角 θ 传播时，所有权重因子都为 $1/M$，则阵列的输出信号与中心传声器输出信号的比值为

$$W(\theta) = \frac{1}{M} \frac{\sin((M/2)kd\sin\theta)}{\sin((1/2)kd\sin\theta)} \tag{15-14}$$

式中，k 为波数。图 15-9 所示为式（15-14）中根据 k 和 d 不同乘积而得到的阵列的指

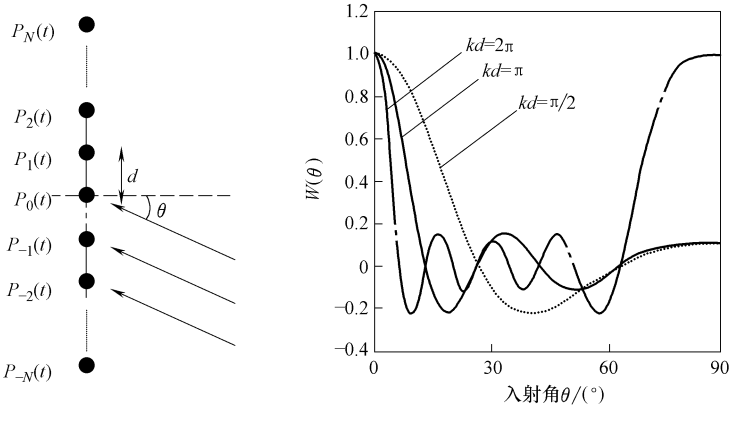


图 15-9　不同 k 和 d 乘积值的线性阵列的指向性模式（$M = 2N + 1 = 9$）

向性模式。最高的峰出现在 $\theta=0$ 时，称之为“主瓣”，一些较低的峰也出现在与真正声源方向分离的位置，把这些峰称为“旁瓣”。主瓣的宽度决定了阵列分离两个相近声源的性能（把它称为空间分辨率），并且主瓣与旁瓣的比值决定了阵列的信噪比。当 kd 增大时，空间分辨率也提高，也就是说，与阵列的长度和波长之比成比例。但当 $kd=2\pi$ 时，由于在 $\theta=90°$ 处的空间混淆（当 $d>\lambda/2$ 时这种情况发生，λ 为波长），因而此时会出现和真声源相同强度的峰，因此声音频率 f 应限制在 $f<c_0/2d$ 范围内，以避免混淆。

在上述的线性阵列中，这种指向性只存在于列阵的方向上（一维）。如果传声器在二维平面中分布，那么将会得到二维的指向性图。最近，很多种传声器布置方案被提出来，以获得更高的空间分辨率并且减少旁瓣[12-15]。

15.3.3 应用

传声器阵列已用于多种情况下的噪声源识别，比如在风洞试验中。在一些已发表的文献［10，16-18］中可以找到很多实际的例子。使用传声器阵列测量的优点是它的测量时间要比反射镜-传声器系统的时间短很多。此外，低频率限制不是非常严重，因为阵列的尺寸是很容易扩大的。

现在再给出一个基本的例子。9 个传声器以 1/3 倍频程、$d=\lambda/2$ 等间距排列，它们的信号做无延时累加。在这种情况下，阵列就汇聚在一个固定的方向上，垂直于阵列的轴线。图 15-10 是高速列车行驶通过时产生的噪声时域曲线，它是由位于轨道 25m 外的线性传声器阵列测量得到的。从图中可以看出，列车的受电弓、车头和车厢间的间隙是主要的噪声源。

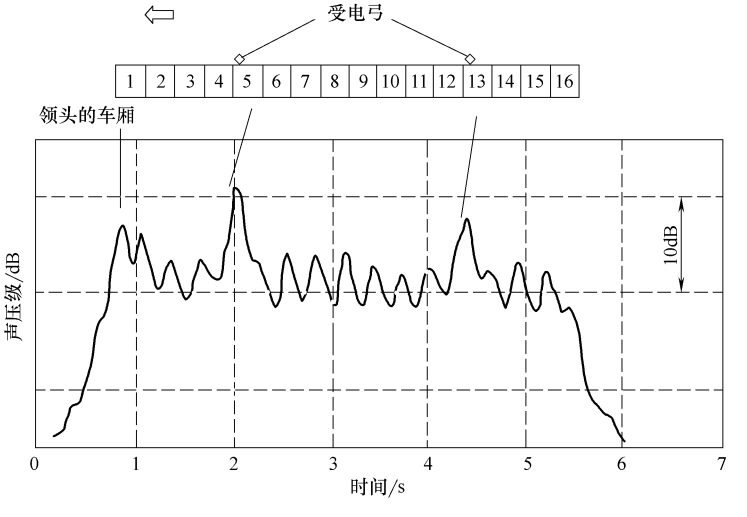


图 15-10　用布置在离轨道 25m 远的线性传声器阵列测量列车通过时声压级时间历程（列车行驶速度 285km/h）

参考文献

1. Ferris, H.G., Computation of far field radiation patterns by use of a general integral solution to the time independent scalar wave equation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 41, 1967.
2. Maynard, J.D., Nearfield acoustic holography: theory of generalized holography and the development of NAH, *J. Acoust. Soc. Am.*, 78, 1985.
3. Ginn, K. and Hald, J., The effect of bandwidth on spatial transformation of sound field measurements, *Inter-Noise*, 87, 1987.
4. Fahy, F.J., Measurement of acoustic intensity using the cross-spectral density of two microphone signals, *J. Acoust. Soc. Am.*, 62, 1977.
5. Chung, J.Y., Cross-spectral method of measuring acoustic intensity without error caused by instrument phase mismatch, *J. Acoust. Soc. Am.*, 64, 1978.
6. Grosche, F.R., Stiewitt, H., and Binder, B., On aero-acoustic measurements in wind tunnels by means of a highly directional microphone system, *Paper AIAA-76-535*, 1976.
7. Sen, R., Interpretation of acoustic source maps made with an elliptic-mirror directional microphone system, *Paper AIAA-96-1712*, 1996.
8. Blackner, A.M. and Davis, C.M., Airframe noise source identification using elliptical mirror measurement techniques, *Inter-Noise 95*, 1995.
9. Dobrzynski, W., Airframe noise studies on wings with deployed high-lift devices, *Paper AIAA-98-2337*, 1998.
10. Dobrzynski, W., Research into landing gear airframe noise reduction, *Paper AIAA-2002-2409*, 2002.
11. Johnson, D.H. and Dudgeon, D.E. 1993. *Array Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
12. Elias, G., Source localization with a two-dimensional focused array: optimal signal processing for a cross-shaped array, *Inter-Noise 95*, 1995.
13. Dougherty, R.P. and Stoker, R.W., Sidelobe suppression for phased array aeroacoustic measurements, *Paper AIAA-98-2242*, 1998.
14. Nordborg, A., Optimum array microphone configuration, *Inter-Noise 2000*, 2000.
15. Hald, J. and Christensen, J.J., A class of optimal broad band phased array geometries designed for easy construction, *Inter-Noise 2002*, 2002.
16. Piet, J.F. and Elias, G., Airframe noise source localization using a microphone array, *Paper AIAA-97-1643*, 1997.
17. Hayes, J.A., Airframe noise characteristics of a 4.7% scale DC-10 model, *Paper AIAA-97-1594*, 1997.
18. Stoker, R.W., Underbrink, J.R., and Neubert, G.R., Investigation of airframe noise in pressurized wind tunnels, *Paper AIAA-2001-2107*, 2001.

16 噪声源

摘要

本章简要介绍了声辐射的数学描述，并对声源、单极子和偶极子进行了简单介绍。引入了格林函数对简单噪声源的模型进行了讨论。作为一种简单声辐射案例，描述了嵌入在平面上的声源产生的声场。最后，通过引入实际机械中的功率转化因子，呈现了噪声源声功率的估计。

16.1 概述

通过仔细检查噪声测量数据，可以发现存在大量的噪声源。每一个声源都有其独特的产生机理，现象范围很宽，包括了流体力学和结构振动。然而，在分析中，噪声源在产生机理上一般简化成相当简单和经典的模型。

可能和流体介质接触的固体振动产生直接作用于流体的声波或者振动力，会导致介质中声能的释放。在第 17 章，将会介绍理想状态下的声源。我们会假定在声源区域之外的流体介质最初是静止的，并且是均匀的。另外，我们还会着重研究在无限介质中波的传播。

一般来说，被感知为声音的声波表明了在介质中一小部分的能量密度，只有非常小的一部分声源体的机械能被转化成了声能。被定义为声能与机械能之比的转化因子，是在 $10^{-7}\sim10^{-5}$之间的数。下面给出了一些典型的比较常见的噪声源声能转化因子估计值的案例。

16.2 声辐射

16.2.1 点声源

16.2.1.1 简单声源：单极子产生的球面波

在一个以直角坐标系 oxy 的 o 点表示场点的介质中，如图 16-1a 所示，声压波的传播 $p(x,\ y,\ z,\ t)$的表达式由下面的偏微分方程描述：

$$\nabla^2 p-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tag{16-1}$$

式中，c 表示声波的传播速率。如果声源地是紧凑的而且其生成运动没有优先方向，那么它便会产生以球面方式向外传播的波。由于介质就面积而言被假定为无限的，因而波形由距离声源中心的距离来决定。在这种状态下的声波方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{16-2}$$

当假定单极子声源具有角频率 ω 时，向外传播波形的最简单表达式为

$$\begin{aligned} p(r,t) &= p_\omega(r) \mathrm{e}^{-i\omega t}, \\ p_\omega(r) &= \frac{-\omega\rho}{4\pi r} S_\omega \mathrm{e}^{ikr} \kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \tag{16-3}$$

式中，ρ 表示介质的密度；κ 表示波数。这里，ρ_ω 被用来表示角速度为 ω 时声压的正弦分量。变量中的下标 ω 代表变量的正弦分量，但是和声能、声功率有关的变量比如 ω、I、W，并没有下标 ω，即使它们代表正弦分量。在这种情况下，声源被认为是一个半径为 a、表面上的径向速度为 U_ω 的“脉动的球体”。因此，从源头向外的流动 S_ω 是和 U_ω 有关的，如下式表达，并如图 16-1a 所示：

$$S_\omega = 4\pi a^2 U_\omega \tag{16-4}$$

应该注意到，当把有限半径 a 的脉动球体假设为物理声源时，由无限小尺寸和有限幅度单极子产生的声场，可以用式（16-3）进行数学描述。

其他和球面波有关的量表示如下[1]：

$$\begin{cases} u_{r\omega} = \dfrac{-1}{4\pi r^2}(ikr-1) S_\omega \mathrm{e}^{ik(r-ct)} \text{（辐射速度）} \\ \omega = \rho \left(\dfrac{-1}{4\pi r^2} \right)^2 |S_\omega|^2 \left[(kr)^2 + \dfrac{1}{2} \right] \text{（能量密度）} \\ I = \rho c \left(\dfrac{k}{4\pi r} \right)^2 |S_\omega|^2 = \dfrac{|p|^2}{\rho c} \text{（能流强度）} \\ W = (4\pi r^2) I = \rho c \dfrac{\pi}{\lambda^2} |S_\omega|^2 = \dfrac{\rho\omega^2}{4\pi c} |S_\omega|^2 \text{（总功）} \end{cases} \tag{16-5}$$

应该注意括号中的第一项 kr，在 $|kr|$ 远小于 1 时，kr 可以忽略不计，因此有

$$\omega = \frac{\rho}{2} (|S_\omega| / 4\pi r^2)^2 = \frac{\rho}{2} u_{r\omega}^2 = \left(\frac{\lambda}{\omega} \right) \frac{1}{4\pi r^2}$$

减小了。相反的，当 $|kr|$ 远大于 1 时，$\omega = \rho (k/4\pi r^2)^2 |S_\omega|^2 = \dfrac{I}{c}$ 才成立。

16.2.1.2 简单声源：由往复运动活塞产生的平面波

另一个简单声波的例子是由一维流体介质场产生的，如图 16-1 所示。把 x 坐标轴固定在波传播的轴线上，比如，具有常数横截面积的管道轴线。这时波动公式为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{16-6}$$

而周期声源的解表示为

$$p(x,t)=p_\omega(x)\mathrm{e}^{-i\omega t},p_\omega(x)=\rho c u_\omega \mathrm{e}^{ikx} \tag{16-7}$$

这就是所谓的在原点由活塞运动产生的平面波，速度表示为

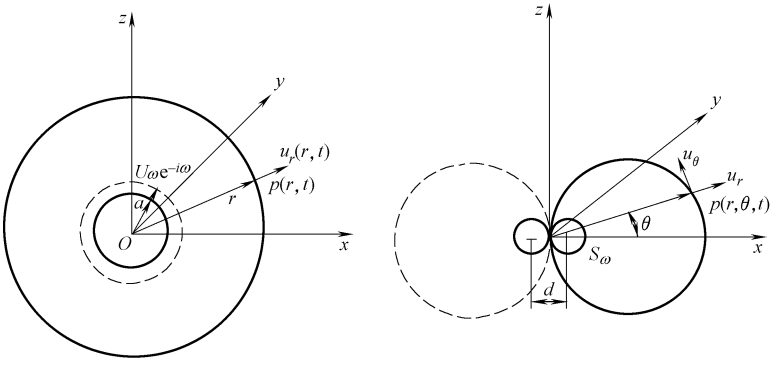
$$u(t)=u_\omega(x)\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{16-8}$$

其他和平面波有关的变量为

$$\begin{cases} u_\omega(x)=u_\omega \mathrm{e}^{ikx}(\text{粒子速度}) \\ \omega=I=\rho c\,|u_\omega|^2=|p_\omega|^2/\rho c^2(\text{能量密度,声强度}) \\ W=SI\ (\text{总功率}) \end{cases} \tag{16-9}$$

式中，S 为横截面面积。

平面波只能是在非常有限的情况下才能产生，但是它的应用是相当广泛，因为传播通过管道或者是通过有逐渐变化横截面积这样的类似管道的声波可以近似为平面波。通过运用平面波的描述，网络理论被应用到声波传播通过分支和交叉口的情况。



a) b)

图 16-1 单极子和偶极子的指向性

a）用单极子表示的球体声场 b）由偶极子表示的轴对称声场

16.2.1.3 偶极子与多极子和它们的声场

让我们回到三维声场中，方程式（16-1）中第二个简单解就是“偶极子”声场。试想如果有一对单极子，相互靠近，符号相反，大小 S_ω 相同，被放在 x 轴线上，如图 16-1b 所示。由于只有一个优选方向被指定在 x 轴线上，所以声场是轴对称的，表达式为

$$p(r,\theta,t)=-k^2 D_\omega \frac{\rho c\cos\theta}{4\pi r}\left(1+\frac{i}{kr}\right)\mathrm{e}^{-i(\omega t-kr)} \tag{16-10}$$

D_ω 被定义为

$$D_\omega=S_\omega d \tag{16-11}$$

式中，d 表示两个单极子之间的间隔距离，如图 16-1b 所示。数学上来说，d 将收敛于 0，保证 D_ω 有限，并且优选轴为 x 轴。物理上来说，声场一般都是由一对相互之间有有限距离的单极子形成的，这个距离相比于波长 λ 来说是很短的，正如下面实际例子中

所描述的。

与偶极子声场有关的特征变量描述如下[1]：

$$\begin{cases} u_{r\omega} = -\dfrac{k^2 D_\omega \cos\theta}{4\pi r}\left(1+\dfrac{2i}{kr}-\dfrac{2}{k^2 r^2}\right)\mathrm{e}^{-i\omega t+kr}\ (\text{辐射速度}) \\ u_{\theta\omega} = i\dfrac{k^2 D_\omega \sin\theta}{4\pi r^2}\left(1+\dfrac{i}{kr}\right)\mathrm{e}^{-i\omega t+kr}\ (\text{边缘速度}) \\ w = \rho\left(\dfrac{k^2 \mid D_\omega \mid}{4\pi r}\right)^2\left[\cos^2\theta+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{kr}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{kr}\right)^4(1+3\cos^2\theta)\right]\ (\text{能量密度}) \\ I_r = \rho c\left(\dfrac{k^2 \mid D_\omega \mid}{4\pi r}\right)^2\cos^2\theta, I_\theta = 0\ (\text{声强度}) \\ W = \dfrac{\rho\omega^4}{12\pi c^3}\mid D_\omega \mid^2\ (\text{总功率}) \end{cases} \tag{16-12}$$

偶极子声场中还应注意以下内容。

当假定 $|kr|$ 远大于 1 时，式（16-10）中括号内第二项的内容是可以忽略不计的。因此由 $p(r, \theta, t)$ 表示的方向可化简为 $\cos\theta$。只要有 $|kr|$ 远大于 1 这个假设，类似的指向性也将会出现在 I_ω 和 $u_{r\omega}$、$u_{\theta\omega}$ 与 ω 上。

一对偶极子将会产生四极子，一对四极子将会产生八极子，以此类推。一般来说，这些都被叫做多极子。除了是多极子之外，四极子还一般用来代表由混合液体流动产生的声场，特别是射流。多极子的更多细节见参考文献［1］。

16.2.2 有限体积的声源

16.2.2.1 用格林函数表示声场

为了表示分布声源产生的声场，声源项可以放在式（16-1）的右边。带声源项的偏微分方程是从以角频率 ω 周期性运动的流体动力学的公式推导得到：

$$\nabla^2 p_\omega + k^2 p_\omega = -m_\omega + \mathrm{div} F_\omega \tag{16-13}$$

$$p(x,y,z,t) = p_\omega(x,y,z)\mathrm{e}^{(i\omega t)}$$

式中，p_ω 是声压的幅值；m_ω 是以 $-i\omega p s_\omega$ 表示的有效单极子声源密度，其中 s_ω 表示一般点声源强度，方程式（16-4）是针对分布声源。F_ω 是在流体中点的力密度的矢量表示。引入角速度为 ω 的格林函数 g_ω，它在一般情况下满足下面的方程，且是有用的：

$$\nabla^2 g_\omega + k^2 g_\omega = -\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\mathrm{e}^{i\omega t_0} \tag{16-14}$$

式中，$\delta(z)$ 是变量 z 的 Dirac 脉冲函数；坐标（x_0，y_0，z_0）表示单元声源的位置 r_0；它具有周期变化的角速度 ω；t_0 是和声源有关的时间。方程式（16-14）的解为

$$g_\omega(rr_0) = \frac{1}{4\pi R}\mathrm{e}^{ikr}$$

$$|r-r_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \tag{16-15}$$

式中，r 是用坐标系（x，y，z）表示的声场的位置矢量，用 g_ω（r，r_0）来表示方程式（16-13）的解。

$$p_\omega(r) = \iiint [m_\omega(r_0) - \mathrm{div}F_\omega(r_0)]g_\omega(r,r_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0 \tag{16-16}$$

16.2.2.2 小振动体产生的辐射声场

作为最简单的声源，脉动球是很难在现实中被实现的。图 16-2 所描绘的接近于单极子的声源在很多实验中都需要使用，其在八面体的每个面上都安装上扬声器。由这种近似声源辐射出来的远声场几乎和脉动球体产生的远声场一样，但是必须满足 $kr \gg 1$ 才成立。

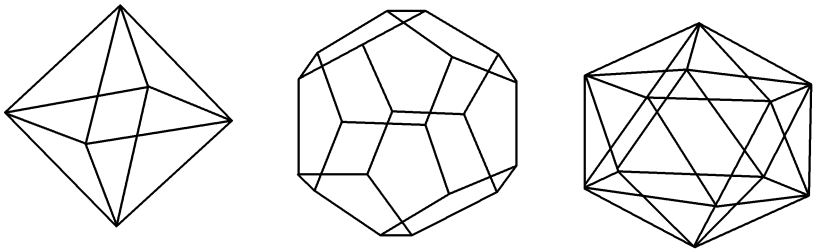


图 16-2 实际的单极子声源

在这种情况下，由方程式（16-16）所描述的声场，假设 $F_\omega(r_0)=0$，$m_\omega(r_0) = -i\omega\rho U_\omega\delta(n)$，并且 $\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0 = \mathrm{d}n\mathrm{d}S$，此时声源 $m_\omega(r_0)$ 是分布在一个厚度为 $\mathrm{d}n$ 的薄层、球表面的微面积单元 $\mathrm{d}S$ 上。在这些情况下，把这些关系式代入式（16-16）中，可以得到

$$p_\omega(r) = -\iint_S \frac{i\omega\rho U_\omega}{4\pi R}\mathrm{e}^{ikR}\mathrm{d}S = -\frac{i\omega\rho}{4\pi R_0}(4\pi a^2)U_\omega\mathrm{e}^{ikR_0} \tag{16-17}$$

式中，$\iint_S$ 表示在近似球表面上的积分，那么 $R \equiv |r - r_0| \approx R_0 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 也成立。式（16-17）的最后化简式给出的表达式和通过式（16-3）和式（16-4）推导出来的结果一样。

在图 16-1 中描述了由单极子声源产生的声场。该声场不随刚性平面 AB 的出现而发生改变，如图 16-3 所示。由于对称性，这个刚性平面一点也不改变声场，因为在平面上只有粒子速度的切向分量受到激励。如图 16-4 所示，把对称性和半无限场结构应用于表达由隔板结构产生的声场中。

让我们设想在无限介质中由一个微小振动体产生的声场，如图 16-4a 所示。由于这个振动是由外力产生的，所以这个声源就由力 $-F_\omega(r_0)$ 来表示。因此，声场就由方程式（16-16）来表示，假设 $m_\omega(r_0)=0$。通过运用一个矢量分析定律，比如 $g_\omega(r, r_0)\mathrm{div}F_\omega(r_0) * \mathrm{grad}_0 g_\omega + \mathrm{div}_0(g_\omega F_\omega)$，那么这个声场可以表示为

$$p_\omega(r) = \iiint F_\omega(r_0)\nabla_0 g_\omega(r,r_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0 \tag{16-18}$$

式中，$\iiint(\mathrm{div})_0(g_\omega F_\omega)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0 = \iint_S g_\omega F_\omega \mathrm{d}S_n(x_0,y_0,z_0)$。假定半径为 a_0 的小球沿 x 轴

以角频率 ω 振动。用速度 $U_t = U_\omega e^{-i\omega t}$ 替代振动球体，这个声场是由集中体力产生，$F(t) = -m(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)U(t) = i\omega m U_\omega e^{-i\omega t}$，（$m$ 是球体的质量），在原点 $r_0 = 0$。然后用 $F_\omega(r_0) = (F_{x\omega} i)\delta(x_0)\delta(y_0)\delta(z_0)$ 来表示 $F_\omega(r_0)$；$F_{x\omega} = im\omega U_\omega$。当 $ka_0 \ll 1$ 成立时，这个近似简化是合适的。代入近似表达式后，式（16-18）可以重新写为

$$p_\omega(r) \approx F_{x\omega}\frac{\partial}{\partial x_0}g_\omega(r, r_0, \theta) = -k^2 D_\omega \frac{\rho c}{4\pi r}\cos\theta\left(1 + \frac{i}{kr}\right)e^{ikr} \tag{16-19a}$$

$$D_\omega = \frac{i}{k\rho c}F_{\omega x} \tag{16-19b}$$

由于这个声场是关于 x 轴对称的，所以声压 $\rho_\omega(r, \theta)$ 仅取决于 r 和 θ，其中 r 和 θ 在式 16-4b 中进行了定义。这个表达式适用于在自由空间中由微小振动体产生的声场。

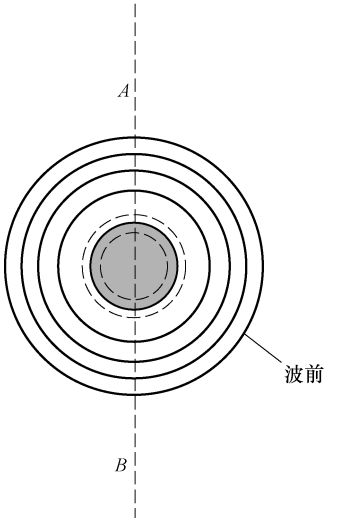


图 16-3　振动球体的声场

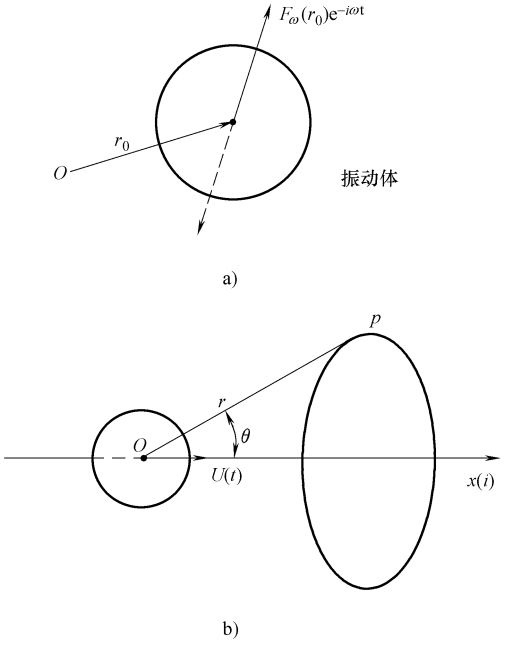


图 16-4　由振动微型体产生的声场
a）振动的微型体　b）沿 x 轴振动的球体

16.2.3　由平面声源产生的辐射

16.2.3.1　在无限大平面上小型物体产生的辐射

如图 16-3 所示，把无限刚性平面引入到声场中，简化了由靠近大平面的振动体产生声场的公式。本节讨论的构造与在一个无限大平面障碍中布置的声源有关，故介质是被限制在平面的一侧。

通过采取由刚性平面产生的图像效果，格林函数 $g_\omega(r, r_0)$ 可以简化为如下形式，该公式同时也可称为瑞利公式[2]：

$$g_\omega(r,r_0)=\frac{1}{2\pi R}\mathrm{e}^{ikr}$$

$$R=|r-r_0| \tag{16-20}$$

式中，r_0表示声源在平面上的投影位置。因此，式（16-16）可以表示为

$$p_\omega(r)=\iiint\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{2\pi R}[m_\omega(r_0)-\mathrm{div}F_\omega(r_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0 \tag{16-21}$$

16.2.3.2 圆活塞产生的辐射

让我们考虑由嵌装到一个无限挡板表面上的半径为 a 的刚性圆形活塞产生的声场，该活塞以角速度 ω 做简谐振动。这个例子的解适用一系列相关问题，其中包括从法兰管风琴的开口端产生的辐射噪声。

其坐标系如图 16-5 所示，其中无限挡板和活塞放置在 Oxy 平面内。注意：点 P 为观察点，矢量表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OP}$，而声源点 Q 表示为 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{OQ}$。

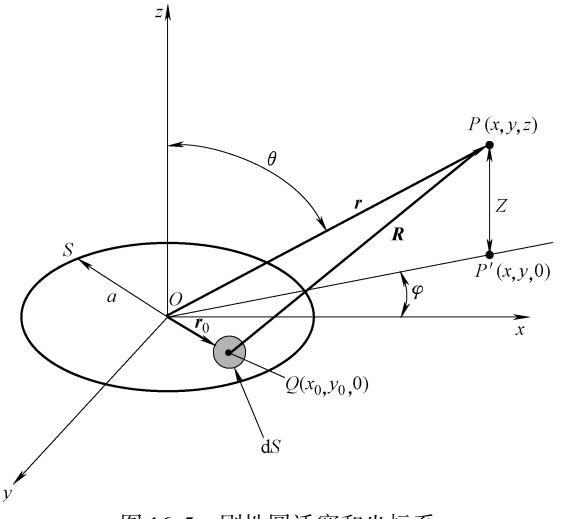


图 16-5 刚性圆活塞和坐标系

由于声音只能从 z 大于 0 的半无限平面来观察，因此 $m_\omega(r_0)$ 在式（16-21）中始终是非零。因为活塞的速度是沿着 z 轴的 $U_\omega\mathrm{e}^{-i\omega t}$，$m_\omega(r_0)=-i\omega\rho U_\omega\delta(z_0)$，只分布在圆形活塞上。最终，式（16-21）可以重新表示为

$$p_\omega(r)=\frac{-i\omega\rho U_\omega}{2\pi}\iint_S\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{16-22}$$

假设 a 远小于 r，则下面近似表达式可以成立：

$$\begin{aligned}R&\approx r-(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi)\sin\theta\\ \frac{1}{R}&\approx\frac{1}{r}\end{aligned} \tag{16-23}$$

式中，φ 和 θ 表示定义观察点 P 的角度，如图 16-5 所示。通过把笛卡尔直角坐标系 x_0、y_0 转化为极坐标系 ρ、φ_0，即 $x_0=\rho\cos\varphi_0$，$y_0=\rho\sin\varphi_0$，由上面的积分，式(16-22)可以重写为

$$p_\omega(r) = \frac{-i\omega\rho U_\omega}{2\pi R}\mathrm{e}^{ikr}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_0 \times \int_0^a \exp[-k\rho\cos(\varphi_0-\varphi)\sin\theta]\rho\mathrm{d}\rho \tag{16-24}$$

通过引入一阶贝塞尔函数 $J_1(z)$，完成积分：

$$\begin{aligned} p_\omega(r) &= \frac{-i\omega\rho\mathrm{e}^{ikr}}{2\pi r}f_\omega(\theta) \\ f_\omega(\theta) &= \pi a^2 U_\omega\left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right] \end{aligned} \tag{16-25}$$

注意：在积分的过程中，对 φ 的依赖性已经消失了，这是由声场的轴对称性引起的。在位置 $\boldsymbol{r}$ 处产生的相应的声强度为

$$I_r(\theta) \approx \frac{|p_\omega|}{\rho c} = \frac{\rho c U_\omega{}^2 a^2}{4r^2}(ka)^2\left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]^2 \tag{16-26}$$

图 16-6 说明了在 ka 的两种情况下，I_r 对 θ 的依赖性。注意：对于相对较小的 $ka=2\pi a/\lambda$，I_r 几乎是独立于 θ 的，类似于单极子的依赖性情况。

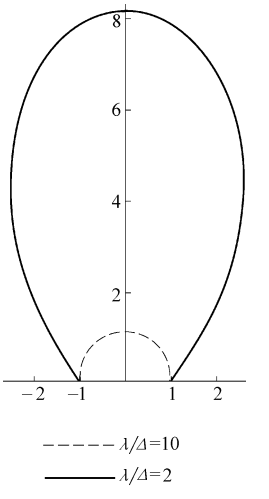


图 16-6　振动活塞产生的声强指向性

16.2.3.3　矩形板产生的声辐射

如图 16-7 所示，u_ω（x_0，y_0）为一个挡板式平面散热器的法向速度分布，该挡板位于 $-L_x \leqslant x_0 \leqslant L_x$，$-L_y \leqslant y_0 \leqslant L_y$ 区域内 $z_0=0$ 的平面上。

在这种情况下，这个声压场如下面公式表示，这个公式与上一章节的相似：

$$p_\omega(r) = \frac{-i\omega\rho}{2\pi}\int_{-L_y}^{L_y}\mathrm{d}y_0\int_{-L_x}^{L_x}\frac{U_\omega(x_0,y_0)\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{d}x_0 \tag{16-27}$$

假定 $2L_x$ 和 $2L_y$ 远小于 r，则如式（16-23）一样的近似是可以接受的。因此，$p_\omega(r)=p_\omega(r,\theta,\phi)$，并取下面的形式[2]：

$$p_\omega(r,\theta,\phi) = \frac{-i\omega\rho\mathrm{e}^{ikr}}{2\pi r}\int_{-L_y}^{L_y}\mathrm{d}y_0\int_{-L_x}^{L_x}U_\omega(x_0,y_0)\exp[-ik\sin\theta(x_0\cos\phi+y_0\sin\phi)]\mathrm{d}x_0 \tag{16-28}$$

假定 $U_\omega(x_0,y_0)=U_\omega=$常数，也就是说这个刚性的矩形活塞沿 z 轴上以振幅 U_ω 振动，则式（16-28）的积分可以表示为

$$p_\omega(r,\theta,\phi) = \frac{i\omega\rho\mathrm{e}^{ikr}}{2\pi r}(4L_xL_y)\mathrm{e}^{ikr}S(kL_x\sin\theta\cos\phi)S(kL_y\sin\theta\sin\phi) \tag{16-29a}$$

其中，函数 $S(z)$ 定义为

$$S(z) = \frac{\sin z}{z} \tag{16-29b}$$

现在我们来考虑弹性板，它也有相同的长度 $2L_x$ 和 $2L_y$，但是 $U_\omega(x_0,y_0)$ 表示的是弯曲振动模态，矩形板弯曲模态形式取大致相同的面积和形状的邻近区域的一般形式，它们在振动相位上交替变化，并且被零振动的节线分离开来。

对于简支边，法向振动速度分布可以表示为

$$U_\omega(x_0,y_0)=U_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{2L_x}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{2L_y}\right)\quad(0\leqslant x\leqslant 2L_x,0\leqslant y\leqslant 2L_y)\tag{16-30}$$

注意到在图 16-7 中，坐标系的中点 O 从面板的中心转移到了最左边和最前面的点边。

在这种情况下，由式（16-23）给出的近似依然是成立的。积分的结果相当简化，如下所示：

$$p_\omega(r,\theta,\phi)=\frac{-i\omega\rho U_{mn}\mathrm{e}^{kr}}{2\pi r}\frac{4L_xL_y}{mn\pi^2}\left[\frac{(-1)^m\mathrm{e}^{i\alpha}-1}{(\alpha/m\pi)^2-1}\right]\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{i\beta}-1}{(\beta/n\pi)^2-1}\right]\tag{16-31}$$

这里 α 和 β 被定义为

$$\begin{aligned}\alpha&=2kL_x\sin\theta\cos\phi\\ \beta&=2kL_y\sin\theta\sin\phi\end{aligned}\tag{16-32}$$

在 $\boldsymbol{r}$ 处相应的声强 $I_r(\theta,\varphi)$ 可以表示为

$$I_r(r,\theta,\phi)=\frac{|p_\omega|^2}{\rho c}=4\rho c\,|U_{mn}|^2\left(\frac{4kL_xL_y}{\pi^3 rmn}\right)^2\left\{\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\frac{\alpha}{2})\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\frac{\beta}{2})}{[(\alpha/m\pi)^2-1][(\beta/n\pi)^2-1]}\right\}\tag{16-33}$$

式中，当 m 是奇整数时用 $\cos(\alpha/2)$，m 是偶整数时用 $\sin(\beta/2)$；$\cos(\beta/2)$ 用于偶数 n，$\sin(\beta/2)$ 用于奇数 n。

16.2.4 噪声源声功率估计

16.2.4.1 机械的声功率转换因子

由于特殊的机械可能会引入到环境[4]中，所以估计声功率的期望值经常很有必要。一种针对特殊的机械的估计方法是通过计算声功率的转换因子 η_n 来实现的。这个因子被定义为：

$$\eta_n=\frac{P}{P_m}\tag{16-34}$$

式中，P 为机械的声功率（单位是 W）；P_m 为机器的功率（单位是 W）。这个关系对于机械和电器设备都是成立的。表 16-1 列出了一些常用噪声源的转换因子。

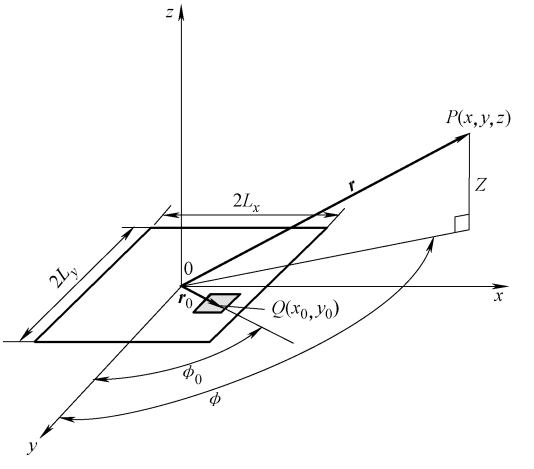


图 16-7 弹性矩形板和坐标系统

案例 16-1

估计一个典型的功率为 1kW 的电动机，在 1200r/min 工作时的声功率。

解：

见表 16-1 所示，对于典型的电动机，$\eta_n=1\times10^{-7}$。因此，由式（16-34），可以得到

$$P = \eta_n P_m = (1 \times 10^{-7}) \times 1000 = 10^{-4}(\mathrm{W})$$

以此作为电动机的总的声功率，可得到

$$L_\omega = 10\log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right)(\mathrm{dB}) = 80\ (\mathrm{dB})$$

表 16-1　常用噪声源声功率转换因子的估计值①

噪　声　源	转换因子		
	低	中	高
压缩机,空气(1～100hp)	3×10^{-7}	5.3×10^{-7}	1×10^{-6}
齿轮传动	1.5×10^{-8}	5×10^{-7}	1.5×10^{-6}
扬声器	3×10^{-2}	5×10^{-2}	1×10^{-1}
发动机,内燃机	2×10^{-7}	5×10^{-7}	2.5×10^{-6}
电动机(1200r/min)	1×10^{-8}	1×10^{-7}	3×10^{-7}
泵,转速超过 1600r/min	3.5×10^{-6}	1.4×10^{-5}	5×10^{-5}
泵,转速低于 1600r/min	1.1×10^{-6}	4.4×10^{-6}	1.6×10^{-5}
涡轮,气体	2×10^{-6}	5×10^{-6}	5×10^{-5}

① 对于 500～4000Hz 之间的 4 个倍频程的总声功率。

来源：Irwin，J. D. and Graf，E. R. 1979. Industrial Noise and Vibration Control，Prentice Hall，Englewood Cliffs，NJ.

16.2.4.2　风扇噪声

对于家用排风扇产生的噪声危害我们是非常熟悉的。风扇的机械功率可以表示为

$$P_m = p_T Q \tag{16-35}$$

式中，p_T 是通过风扇的总的压力升高；Q 表示的是体积流量。由气动声学理论推导出来的流动速度的 6 次幂定律，风扇的声功率与 $p_{T2.5}Q$ 成比例。因此，由下面公式定义的特定比率 k_T 对于风扇来说比 η_n 更有用：

$$k_T = \frac{P_m}{p_{T2.5}Q} \tag{16-36}$$

此外，通常下式给出的特定的风扇噪声级 K_T 就比 k_T 更有用：

$$K_T = L_W - 10\log(p_{T2.5}Q)\,\mathrm{dB} \tag{16-37}$$

式中，p_T 是总升压，单位是毫米水银柱；而 Q 表示的是流量，单位是 m^3/min；L_W 是总的声功率级，单位是 dB；K_T 是风扇噪声的辐射效率。这个效率是随风扇的类型和该模型分配的流量而变化的。特别的是，当流量处在空气动力学功率效率最大的时候，K_T 却是处于最小。因此，当风扇工作在最高效率工作的时候，我们要充分利用声环境。为了方便设计，L_W 通常用 A-加权总声级（dB-A）而不是用线性总声级（dB）来估计的。表 16-2 给出了用 A-加权总声级来估计的低压风扇的具体的风扇噪声级。

表 16-2　低压风扇的具体风扇噪声级

类　　型	K_T/dB	类　　型	K_T/dB
轴向式	-87.5～-70.7	离心式/涡轮	-104.7～-89.7
离心式/cirroco	-87.5～-85.7	横流风扇	-76.7～-68.7
离心式/径流式	-98.7～-84.7		

案例 16-2

研究一个通风轴流风动机，它的相关参数如下：$p_T = 10\text{mmAq}$，$Q = 30\text{m}^3/\text{min}$，$D = 30\text{cm}$（含风扇转子的管道直径）。估计声强 $I_r(\theta)$ 的指向性分布，对于风扇噪声的主要成分，假定 $r = 3\text{m}$，$f = 150\text{Hz}$，从表 16-2 中可知 $K_T = -79.0\text{dB-A}$。风扇噪声被假定为在管道口按平面声波辐射。

解：

首先，我们将以 dB-A 为单位的 K_T 更改到线性尺度。从 A 加权网络图的频率响应中，可以得到 $f = 150\text{Hz}$，修正值为 $\Delta K_T = 15\text{dB}$。这样，修改后的具体风扇噪声级 $K_T = -79.0 + 15.0 = -64.0\text{dB}$。由式（16-37）可知，$L_W = K_T + 25\log P_T + 10\log Q = -64\text{dB} + 25\text{dB} + 15\text{dB} = -24\text{dB}$。由此可得排放出的总声功率就是 $W = 10^{-24/10} = 3.98 \times 10^{-3}\text{W}$。因为我们假定在管道口的风扇噪声为平面声波，所以就可以用 $a = 15\text{cm}$ 圆形活塞的声辐射模型来计算辐射声波。在这道题中，$ka = 2\pi a/(c/f) = 0.415$，或者说是 $\lambda/a = 15.1$。从图 16-6 可知，单极子模型对于声强指向性分布是有效的，因此 $I_r = W/2\pi r_2 = 0.704 \times 10^{-4}\text{W/m}^2$ 或 $|p|^2 = I_r\rho c = 2.92 \times 10^{-2}$（$\text{Pa}^2$）。这个值和声压级 $L_p = 10\log|p|^2/p_{ref} = 78.6\text{dB}$ 或 $L_p(\text{A}) = L_p - 15 = 63.6\text{dB} - A$ 是一样的。

参 考 文 献

1. Morse, P.M. and Ingard, K.U. 1986. *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, chap. 7.
2. Junger, M.C. and Feit, D. 1986. *Sound, Structures, and Their Interaction*, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, chap. 4.
3. Fahy, F. 1985. *Sound and Structural Vibration. Radiation, Transmission and Response*, Academic Press, New York, chap. 2.
4. Irwin, J.D. and Graf, E.R. 1979. *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, chap. 5.

17 吸声设计

摘要

本章介绍吸声设备的设计基础，引入了吸收系数和声阻抗的概念，介绍了吸声材料的特性和参数，以及基本要素。对于声学建模、分析和诸如管道部件的设计考虑、噪声衰减装置如消声器也进行了介绍，并用一个实际设计案例来阐述本章提到的概念。

17.1 概述

吸声设备被广泛地运用在建筑声学、机械噪声的治理对策等场合中。在本章，从噪声控制的观点解释了设计吸声设备的必要性。建筑声学是一个重要的研究领域，涉及建筑、吸声设计和噪声测量设备。

在降低噪声方面，噪声的特征非常重要，必须根据每个噪声频率需要多少必要的衰减来选择适当的吸声材料。特别的是，吸声材料的声学特性比如材料的类型和吸声机制都是很重要。本章将给出吸声机理，并对于内衬消声器或阻抗消声器衰减量的预测和计算方法进行概述。

17.2 吸声基础

当声波在介质中传播时，由于黏度、热传导和分子吸收等这些原因，声能就衰减了。在一个体积小，在四周有边界面的介质中，衰减是特别可观的，比如，当介质是一根薄管。这是因为存在由介质黏度及材料和管壁的媒介之间的热传导控制的能量耗散。可以利用吸声材料去调整这样的声学能量的耗散。

当声波碰到了吸声材料的表面后，一些声能就会丢失。图 17-1 显示了无限大平面介质吸声材料被空气和反射波（声压为 p_r）在带空气的边界面处隔开。在该边界面处，声压为 p_i的平面波以角度 θ、沿着箭头方向反射出去。当 $\theta=0$ 时，空气中的声压 p 可以表示为

$$p = p_i + p_r = (A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{17-1}$$

式中，A、B 为入射波和反射波声压的幅值（单位为 Pa）；$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$；$k=2\pi f/c$，为波数（单位为 1/m）；ω 为角频率（rad/s）。

吸声材料中的声压 p_m可以用一个复传播常数来表示：

$$p_m = p_{x=0} e^{-\gamma x} e^{j\omega t} \tag{17-2}$$

式中，γ 为吸声材料中的传播常数（单位是 m^{-1}），注意：$\gamma = \delta + j\beta$，γ 是材料本身的属性，且当考虑大面积材料时，γ 不取决于安装条件；δ 为衰减常数，注意：δ 告诉我们当声波通过材料时声波会衰减多少；β 为相位常数，注意：β 测量的是声波通过介质时的传播速度。

确定材料中的声速关系式可表示为

$$c_m = \omega/\beta \tag{17-3}$$

在边界表面上必须满足边界条件。单位面积的空气和吸波材料的声阻抗分别用 z 和 z_a 表示。

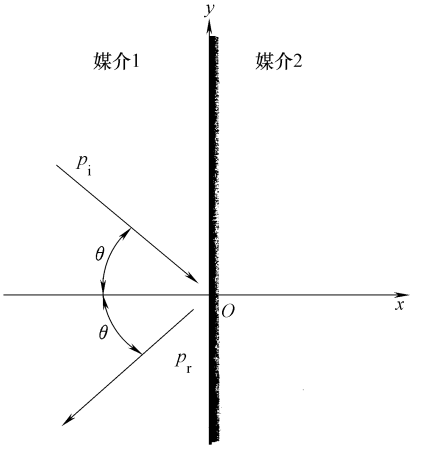


图 17-1 平面波入射到无限面吸收材料上

边界两边的声压和粒子速度都是相等的。因而有

$$\left.\begin{aligned} p_i + p_r &= p_{x=0} \\ \frac{p_i + p_r}{z_a} &= \frac{p_{x-0}}{z} \end{aligned}\right\} \tag{17-4}$$

声压的反射系数幅值可以根据式（17-4）来获得，表达式为

$$r = \frac{p_r}{p_i} = \frac{z_a - z}{z_a + z} \tag{17-5}$$

反射率是能量的反射率。吸声材料的吸收系数 α 定义为

$$\alpha = 1 - |r^2| \tag{17-6}$$

通过表面的阻抗 z_n 是一个表示声能的耗散和吸收系数的量。它是通过在反射声波中边界表面的声压和粒子速度之间的比来表示的：

$$z_n = \left(\frac{p}{u}\right)_{x=0} = \left(\frac{\rho c}{\cos\theta}\right)\frac{p_i + p_r}{p_i - p_r} \tag{17-7}$$

注意：z_n 是一个复数，并且涉及幅值和相位，这些都取决于反射声波中边界表面的声压。

在斜入射的情况下，表面阻抗可以用如下公式来表示：

$$z_n = Z\gamma z/q \tag{17-8}$$

式中，z 为声阻抗（单位为 $Pa \cdot s/m^3$）。这里，

$$Z = \frac{z_1 \cosh(ql) + (\gamma z/q)\sinh(ql)}{z_1 \sinh(ql) + (\gamma z/q)\cosh(ql)}$$

$$q = \sqrt{\gamma^2 + k^2 \sin^2\theta}$$

在以 θ 角度入射的斜入射的情况下的吸收系数 $\alpha(\theta)$ 可以表示为

$$\alpha(\theta) = 1 - \left|\frac{z_n \cos\theta - \rho c}{z_n \cos\theta + \rho c}\right|^2 \tag{17-9}$$

17.3 吸声材料

17.3.1 多孔材料

多孔声学材料是一个特定类别的更广泛的一类气-固混合物。它们的范围从多孔固体，如多孔岩石、纤维状颗粒状固体、发泡塑料和装饰材料，到多孔或混浊气体，如悬浮和乳化液。声音在气体饱和多孔固体中衰减，这是由于气体在固态中的运动受到了限制造成的。这些材料的一个方便的微观结构模型就是刚性固体基质中的一种，该基质横穿圆柱体，带固定半径的毛细孔（管）垂直其表面。该模型使得我们能够在带刚性管壁的狭长管中采用 Kirchoff 声传播理论。因此，这种耗散机制可以定义为：

① 在固体管壁和黏性气体之间相对运动有关的、每个毛细管管壁处边界层的黏性损失。

② 在压缩稀松气体和固体壁之间的热传导。

17.3.2 管状材料

用管状吸声材料研究低频声波的吸声。管状吸声材料本身的吸声并不令人满意。当有声学波通过其中时，这种材料会产生弯曲振动，并且吸声产生于材料内部的摩擦。对于硬质胶合板和石膏板，存在一个 100～200Hz 之间的固定频率，并且吸收系数为0.3～0.5。通过用纤维吸声材料包裹住胶合板表面来提高吸收系数是有可能的。

17.3.3 膜材料

对于膜材料，其吸声机制利用了共振。因此，共振频率是一个控制参数。膜的声学阻抗的虚部（电抗引入的术语）提高了共振。相关的固有频率公式为

$$f_r = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{1.4\times10^5}{L}\right)+K_m\right\} \tag{17-10}$$

式中，f_r为固有频率（Hz）；m 为表面密度（kg/m^2）；L 为空气层的厚度（m）；K_m为板刚度（kg/m^2s^2）

一些板的 K_m值如图 17-2 所示。当膜和后面的刚性壁之间的空气层厚度是 50～100mm 时，在 300～1000Hz 之间频率范围内的吸收系数近似在 0.3～0.4。

17.3.4 穿孔板

吸声材料做成的带孔板（板上带孔）放置在离刚性墙有一固定间隙的地方，如图 17-3 所示。吸声特性取决于板的厚度 t、穿孔直径 d、刚性墙和穿孔板之间间隙 L 等。吸收系数在共振频率达到最大。在这种情况下，共振频率可以表示为

$$f_r = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{(T+0.8d)L}} \tag{17-11}$$

式中，声速是 c；空气层厚度是 L（一般是 300mm 或者更少）；这个板所穿孔的面积与板的总面积之比是 ε（穿孔率）。吸收系数近似在 0.3～0.4。

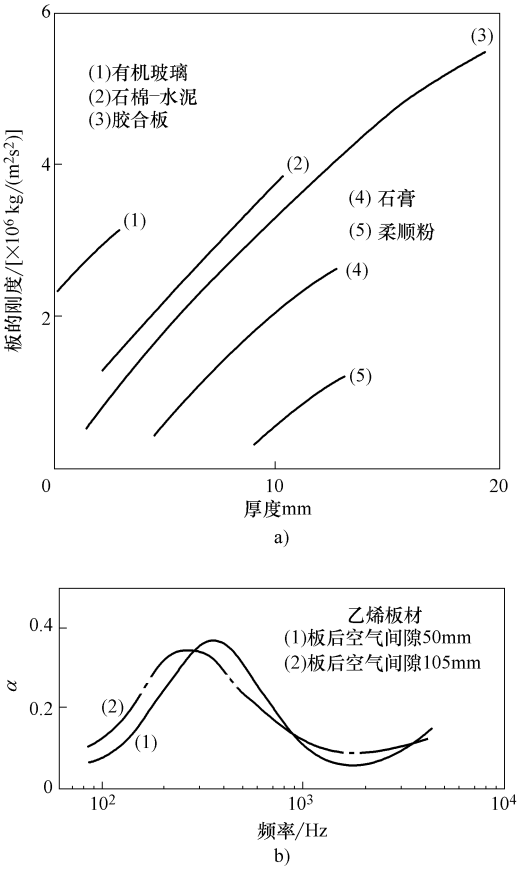


图 17-2 膜吸声材料的 K_m 值

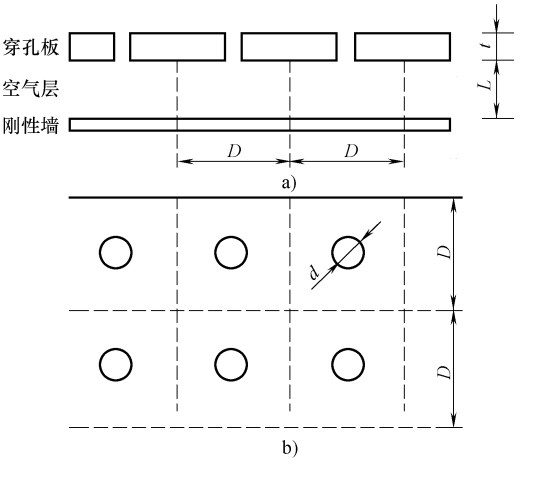


图 17-3 穿孔板结构的吸声特性

a）剖面图 b）平面图

17.3.5 谐振腔

另一种实现吸声的方法是用一种亥姆霍兹类型的谐振腔，它由一个里面含有空气的任意形状的容器组成，如图 17-4 所示。谐振腔内的空气通过一个连接管直接与房间里的大气相通，这个连接管可长可短，并且可以是任意横截面形状。一个亥姆霍兹类型的谐振腔的例子可以是 1gal 的罐。当一个声波射到一个瓶子的瓶颈开口处时，颈部的空气就会开始振动，在容器中的空气就会周期性的膨胀和压缩。在瓶颈处产生的、放大的空气粒子运动，由于插入颈部空气和容器内的空气之间的相位对消，因而造成由颈部里面和周围的摩擦力耗散了能量。这种类型的吸声器可以设计成在很窄的频率范围内或甚至在很宽的频带内产生最大程度的吸声。亥姆霍兹类型的谐振腔的共振频率可以表示为

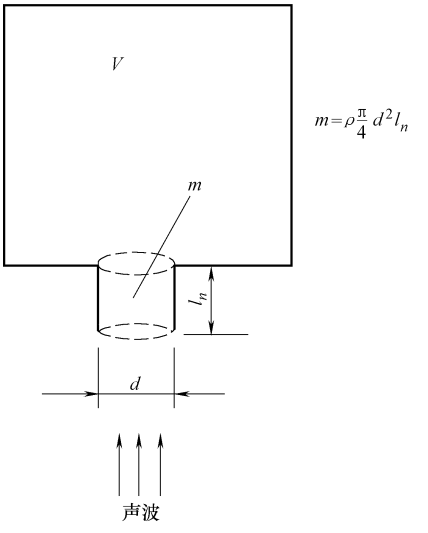


图 17-4 亥姆霍兹谐振腔的几何图形（气体 V 通过直径为 d、长度为 l_n 的瓶颈与无限大开口面相连）

$$f_r=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{(t+0.8d)L}} \tag{17-12}$$

式中，c 为声速（m/s）；S_n为瓶颈的横截面面积（m^2）；d_n为瓶颈的直径（m）；V 为容器的体积（m^3）。

17.4 复合墙体声学特性计算

17.4.1 多孔毯状物与板材组合的吸收系数

在噪声控制中一个常见的问题就是要减少从管道或其他物体上辐射的噪声。达到这种目的一个方法就是把管道内壁衬上几厘米厚的多孔吸声材料，并且将其用某种固体板材盖住，如图 17-5 所示。

考虑如图 17-5 所示的声波垂直入射到吸声结构上。假设声压和体积流量的边界条件是相同的。对于入射到刚性墙面上的平面波，反射系数的幅度是 -1[1]，可以得到如下公式：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -m_1 & m_1 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l_1} & e^{\gamma l_1} & -(1+e^{-2jkl_2}) \\ 0 & m_2 e^{-\gamma l_1} & m_2 e^{\gamma l_1} & -(1-e^{-2jkl_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17-13}$$

式中，$j=\sqrt{-1}$；$m_1=z_0/z_1$；$m_2=z_1/z_2$；z_0、z_1、z_2分别为每一个介质的声阻抗（Pa·s/m³）；γ为复杂的传播常数（1/m）。

在垂直入射下的吸声系数可以表示为

$$\alpha_0=1-\left|\frac{B_0}{A_0}\right|=1-|B_0|^2 \tag{17-14}$$

随机入射下的吸声系数可以近似表示为

$$\alpha=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha(\theta)_i \tag{17-15}$$

式中，θ为声波的入射角，$0<\theta<\pi/2$。

众所周知，声波在纤维材料中的传播速度是随空气而变，下面的公式适用于边界平面：

$$\sin\theta/\sin\theta'=c/c_m \tag{17-16}$$

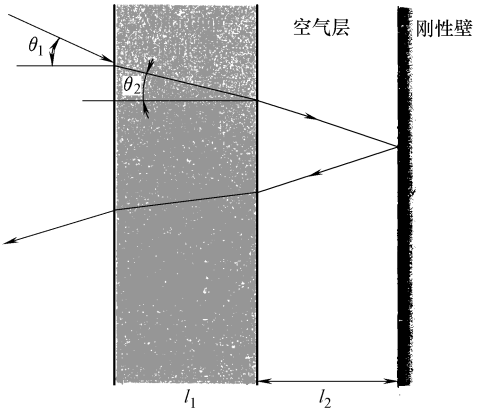


图 17-5 采用多孔毛毯和空气层（空气层侧入射角 θ_1、多孔毛毯侧入射角 θ_2）的吸声结构

式中，c_m是声波在纤维材料中的声速，它是通过式（17-18）中的虚部计算出来的。在背面空气层界面的反射角θ'是通过类似的方式获得。因此，下面的公式代入式(17-13)中以替代吸收器的厚度l_1和空气层厚度l_2，得到斜入射情况下的吸收系数为

$$l_1'=l_1/\cos\theta',\ l_2'=l_2/\cos\theta'' \tag{17-17}$$

在传播声波的吸声材料中，复杂的传播常数γ是一个非常重要的物理量，它就是给定的单位长度上的声学衰减和相位变化。在吸声材料的气动弹性率K_a和吸声材料体积弹性模量Q之间，γ可以用如下的等式来表示（对于$K_a>20Q$）[2,3]：

$$\gamma=j\omega\sqrt{Y/K}\sqrt{<\rho_1>-j<R_1>/\omega} \tag{17-18}$$

$$<R_1>=\frac{R_1[1-\rho_0(1-Y)/\rho_m]}{\left[1+\dfrac{\rho_0(\kappa-1)}{\rho_m}\right]^2\left[1+\dfrac{1}{\rho_m{}^2\omega^2[1+\rho_0(\kappa-1)/\rho_m]^2}\right]}$$

$$<\rho_1>=\rho_0\kappa-\frac{\dfrac{R_1^2(Y/\kappa+\rho_m/\rho_0\kappa)}{\rho_m{}^2\omega^2[1+\rho_0(\kappa-1)/\rho_m]^2}+\dfrac{1+\rho_0Y(\kappa-1)/\rho_m\kappa}{1+\rho_0(\kappa-1)/\rho_m}}{1+\dfrac{1}{\rho_m{}^2\omega^2[1+\rho_0(\kappa-1)/\rho_m]^2}}$$

式中，ρ_m为声学材料的密度（kg/m³）；ρ_0为空气密度（kg/m³）；c_0为在空气中的声速（m/s）；K为空气体积弹性系数（N/m²）；R_1为由于骨架速度和间隙中空气速度的不同引起的单位厚度材料的交变流动阻力（Pa·s/m²），R_1的数值已在表 17-1 中给出；Y为孔隙率，Y=材料中空隙体积与材料总体积的比值，孔隙率也等于总的体积减去纤维的体积，然后除以总的体积；$\kappa=5.5-4.5Y$，骨架中间隙的结构因子；ω为角频率（rad/s），$\omega=2\pi f$。

吸声材料的声阻抗 z_1 为

$$z_1 = R + \mathrm{j}X = -\frac{\mathrm{j}K\gamma}{\omega Y} \tag{17-19}$$

这里

$$R = \rho_0 c_0 \{1 + 0.0571(\rho_0 f / R_\mathrm{f})^{-0.754}\}$$
$$X = -\rho_0 c_0 \{0.0870(\rho_0 f / R_\mathrm{f})^{-0.732}\}$$

17.4.2 穿过一张多孔板的传声损失

假定一个声波垂直射入一个多孔板的左边，并在右边产生幅值减小了的波。相关的多孔板的传声损失可以表示为

$$\left.\begin{aligned} TL_0 &= 10\lg(X + Y) \\ X &= \left\{1 + \frac{\omega^2 m^2 P R_\mathrm{f}}{2\rho_0 c_0 (\omega^2 m^2 P^2 + R_\mathrm{f}^2)}\right\}^2 \\ Y &= \left\{\frac{\omega m R_\mathrm{f}^2}{2\rho_0 c_0 (\omega^2 m^2 P^2 + R_\mathrm{f}^2)}\right\}^2 \end{aligned}\right\} \tag{17-20}$$

式中，m 为毛毯的表面密度（$\mathrm{kg/m^2}$）；P 为毛毯的多孔率（多孔率 = 总的体积减去纤维的体积，然后除以总的体积）；R_f 为材料的比流动阻力（Pa · s/m）；ρ_0 为空气密度（$\mathrm{kg/m^3}$）；c_0 为空气中的声速（m/s）。

表 17-1 玻璃-羊毛板的流动阻力值（JIS 质量规范范围）

板的类型	K	总密度 ρ /($\mathrm{kg/m^3}$)	比流动阻力 R_1 /($\times 10^{-3}$ Ns/$\mathrm{m^4}$)	JIS 玻璃-羊毛板标准
#1 玻璃-羊毛板	8	8 ± 2	1.5 ~ 7.0	JIS A 9505-A
	12	12 ± 2	2.5 ~ 12.0	
	16	16 ± 2	4.7 ~ 17.0	
	20	20 ± 3	5.0 ~ 22.0	
	24	24 ± 3	6.5 ~ 27.0	
#2 玻璃-羊毛板	12	12 ± 2	1.5 ~ 7.0	JIS A 9505-B
	16	16 ± 2	2.5 ~ 10.0	
	20	20 ± 3	3.0 ~ 13.0	
	24	24 ± 3	4.0 ~ 16.0	
	32	32 ± 4	6.0 ~ 22.0	
	48	48 ± 5	11.0 ~ 38.0	
	64	64 ± 6	18.0 ~ 60.0	
	96	96 ± 10	27.0 ~ 95.0	
#3 玻璃-羊毛板	96	96 ± 10	15.0 ~ 40.0	JIS A 9505-C

17.4.3 通过复合夹心板的传声损失

考虑一个很宽的墙，它有两个无限面积的面板（薄板），被充满的单一纤维声学材

料隔开，如图 17-6 所示。假设平面波以角度 θ 入射。就行进波和每一个边界表面的反射波的幅值而言，当这个墙壁两侧的压力相同时，可以建立以下关系式[4]：

$$\left.\begin{aligned}
&A_0 + B_0 = A_1 + B_1\\
&(A_0 - B_0)/z_0 = (A_1 - B_1)/z_1\\
&A_1 e^{-jkl'_1} + B_1 e^{jkl'_1} = A_2 + B_2\\
&(A_1 e^{-jkl'_1} - B_1 e^{jkl'_1})/z_1 = (A_2 - B_2)/z_2\\
&A_2 e^{-\gamma l'_2} + B_2 e^{\gamma l'_2} = A_3 + B_3\\
&(A_2 e^{-\gamma l'_2} - B_2 e^{\gamma l'_2})/z_2 = (A_3 - B_3)/z_3\\
&A_2 e^{-\gamma l'_3} + B_2 e^{\gamma l'_3} = A_4 + B_4\\
&(A_2 e^{-\gamma l'_3} - B_2 e^{\gamma l'_3})/z_3 = (A_4 - B_4)/z_0
\end{aligned}\right\} \tag{17-21}$$

A 和 B 是声压的幅值。

根据式（17-17），$l'_1 = l_1/\cos\theta_1$，$l'_2 = l_2/\cos\theta'_2$，可以计算出 l'_1 和 l'_2。

墙中的声速可以用下面公式中的纵向弹性模量 E_i 来表示：

$$c_i = \sqrt{E_i/\rho_i} \tag{17-22}$$

声阻抗 z_i（$i = 1, 3$）的实部由 $R_i = r_i/\cos\theta$ 得出，它的虚部是由 $X_i = m_i\omega$ 得出。内阻 r_i 是诸如材料、频率、温度和密度这些因素的函数。表 17-2 给出了几种常用材料的内阻值。

如果传声一侧的空间是无限的，那么式（17-21）中的 B_4 就等于 0。因此，传声损失为

$$TL(\theta) = 10\lg\left|\frac{A_4}{A_0}\right|^2 \tag{17-23}$$

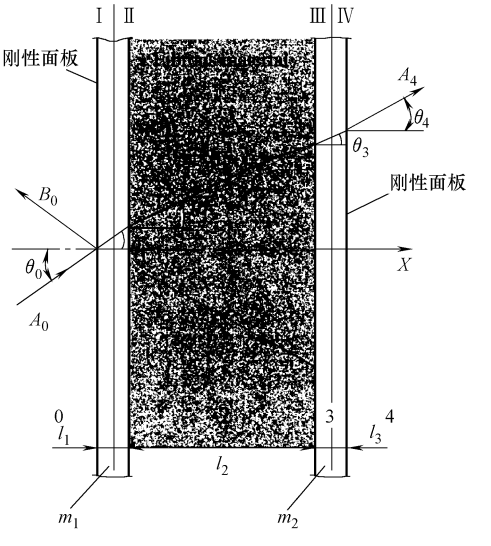


图 17-6 夹心板的剖面图

表 17-2 几种常用材料的内阻值

材 料	厚度/mm	内阻/(Pa·s/m³)
铝	0.4	3.0
胶合板	3.0	7.5
石膏板	7.0	15.0

17.5 内衬管的衰减

17.5.1 内衬管中衰减量的计算

内衬管是一个空气过道，这个过道由一个或很多个由声学材料如玻璃或者是矿物纤维毯状物覆盖的表面。平行挡板仅是通常由矩形或圆截面的一系列并排的管道。如果这些管壁都由吸声材料覆盖，那么由于空气在多孔毯状物中进出的黏性运动就会使声产生衰减。

图 17-7 所示为一根内衬管的轴测图。内衬管声波衰减量主要取决于管道长度 l_e、内衬厚度 b、内衬密度 ρ、空气过道的宽度 l 和声波的波长。在低频（$l/\lambda < 0.1$）时，内衬管中声波衰减量可以通过如下的经验公式计算得出：

$$ATT = K_1 P/S \tag{17-24}$$

式中，K_1为根据内衬材料随机入射情况下确定的吸收系数，如图 17-8 所示；P 为声学内衬管道周长（m）；S 为管道内横截面积（m^2）。

如果吸声材料内衬在矩形横截面中，如图 17-9 ~ 图 17-11 所示，那么就可以用表 17-3[5] 给出的公式估计声波衰减量。

表 17-3　几种内衬管道的衰减计算公式

参见图 17-9	低频范围：$\frac{\omega l}{nc}<1$	中频范围：（$K_y S_y l_y$；参见图 17-9）	高频范围：$\frac{\omega l}{nc}>5$
（A）	$\beta = \frac{4.34}{n l_y}$	$\beta = \frac{8.7c}{l_y^2 \omega}(K_y S_y l_y^2)$	$\beta = 21.4 \frac{c^2 n}{\omega^2 l_y^3}$
（B）	$\beta = 4.34\left(\frac{1}{n_y l_y} + \frac{1}{n_x l_x}\right)$	$\beta = \frac{8.7c}{\omega}\left(\frac{K_y S_y l_y^2}{l_y^2} + \frac{K_x S_x l_x^2}{l_x^2}\right)$	$\beta = 21.4 \frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{n_y}{l_y^3} + \frac{n_x}{l_x^3}\right)$
（C）	$\beta = \frac{8.7}{n l_y}$	$\beta = \frac{34.7c}{l_y^2 \omega}\left(\frac{K_y S_y l_y^2}{4}\right)$	$\beta = 171 \frac{c^2 n_y}{\omega^2 l_y^3}$
（D）	$\beta = 4.34\left(\frac{2}{n_y l_y} + \frac{1}{n_x l_x}\right)$	$\beta = \frac{8.7c}{\omega}\left(\frac{K_y S_y l_y^2}{l_y^2} + \frac{K_x S_x l_x^2}{l_x^2}\right)$	$\beta = 21.4 \frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{8n_y}{l_y^3} + \frac{n_x}{l_x^3}\right)$
（E）	$\beta = 8.7\left(\frac{1}{n_y l_y} + \frac{1}{n_x l_x}\right)$	$\beta = \frac{34.7c}{\omega}\left(\frac{K_y S_y l_y^2}{4l_y^2} + \frac{K_x S_x l_x^2}{4l_x^2}\right)$	$\beta = 171 \frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{n_y}{l_y^3} + \frac{n_x}{l_x^3}\right)$
（F）	$\beta = \frac{17.4}{nl}$	$\beta = \frac{69.5c}{4l^2\omega} KSl^2$	$\beta = \frac{341 c^2 n}{\omega^2 l^3}$

注：β 是衰减量（dB/m）；n 是图 17-9 所示的吸声系数；$K_y S_y l_y$ 是图 17-10 所示的阻尼函数；c 是声速；l 是管道宽度；$\omega = 2\pi f$：角频率；x，y 为图 17-9 所示的坐标。

来源：Bruel，P. V. 1951. Sound Insulation and Room Acoustics，Chapman & Hall，London，p. 159.

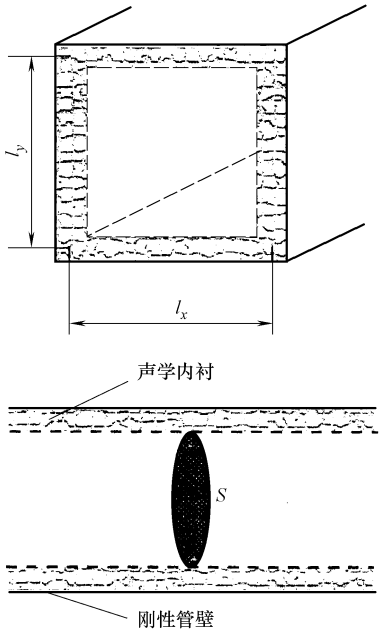


图 17-7 内衬管道的说明

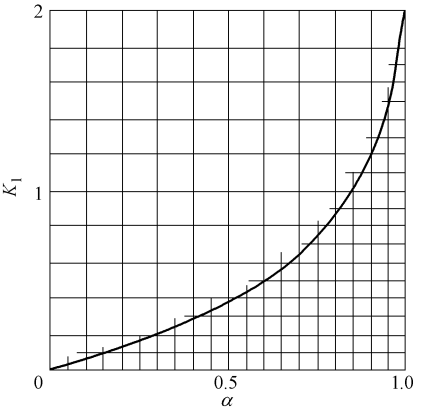


图 17-8 针对混响室方法获得吸声系数的 K_1 值

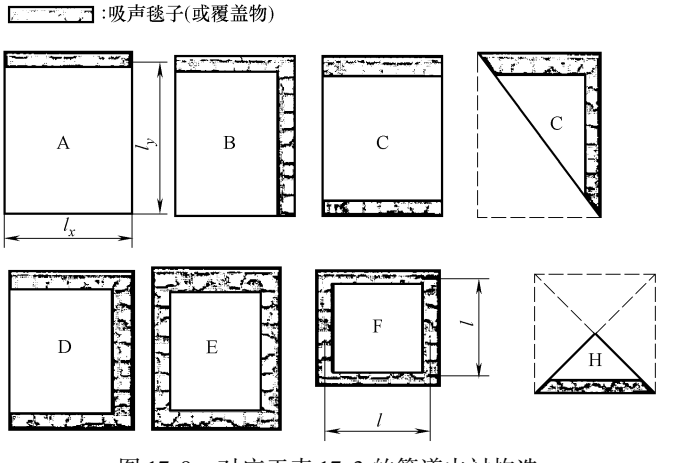


图 17-9 对应于表 17-3 的管道内衬构造

17.5.2 内衬弯管中的声衰减

图 17-12 所示为内衬弯管。内衬弯管的插入损失 *IL* 来自于两种机制：反射波回到声源一侧，进入高频的散射能量被弯管以外的衬垫迅速衰减掉了。更高频率的模态将会被衰减，甚至被无衬管道衰减，尤其对于低于两个衬垫之间风道宽与等于 0.5 的声波长之比值的频率。当频率高于这个比值时，内衬弯管的插入损失被认为可以和混响场管道

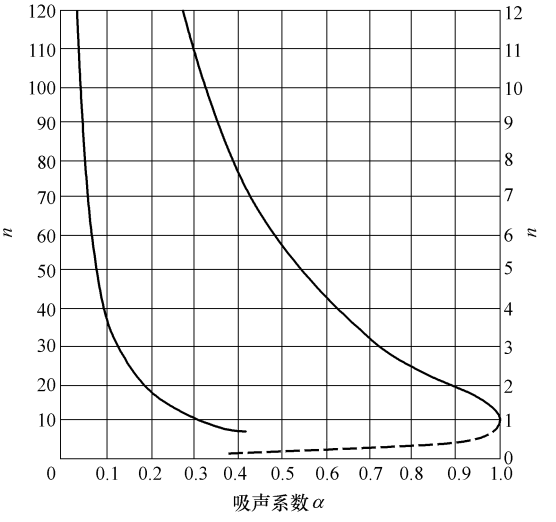


图 17-10　吸声系数和驻波系数 n 之间的关系

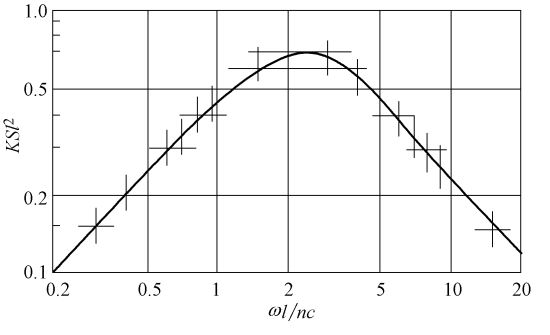


图 17-11　作为无量纲频率 $\omega l/nc$ 函数的阻尼函数

末端修正相媲美。弯管的插入损失可以从下面公式中得到[6]：

$$IL = \frac{K_1 P}{S} + (l_1 + l_2) + \phi \tag{17-25}$$

其中 ϕ 可以根据图 17-13 得到。

内衬弯管总的插入损失和弯管以外的内衬衰减如图 17-13 所示。

17.5.3　分离器内衬管道中的衰减

使用平行或锯齿状挡板式分离器（分配器）来增加周长-面积之比，从而产生更紧凑的衰减器。在岩石-羊毛毯子中，一种平行类型的分离器管道的衰减可以直接由图 17-14得到。衰减的峰值和声波波长及分离器间隔有关。由于这个声学毯子锯齿形分布，所以高频下的衰减量高于平行分离器产生的衰减量[7]。

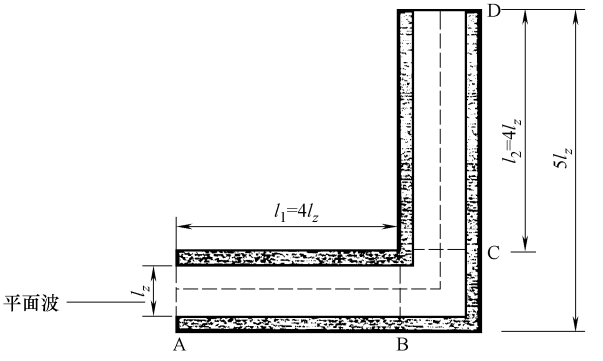


图 17-12 带平面波入射的典型内衬弯管示意图

（来源：Beranek, L. L. Noise Reduction, McGraw-Hill, 1960）

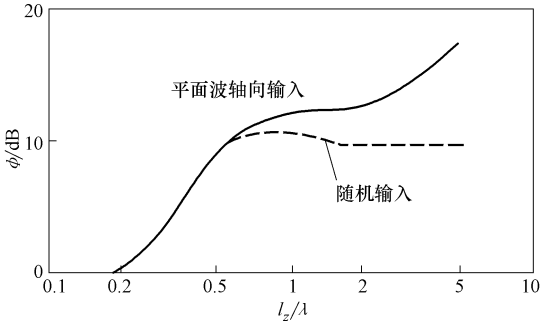


图 17-13 内衬弯管的插入损失（内衬材料要延长超过弯头 2～4 倍管宽度，图上数据才有效）

（来源：Beranek, L. L. Noise Reduction, McGraw-Hill, 1960）

17.6 阻性消声器的衰减

17.6.1 一个内衬膨胀室的传声损失

阻性消声器的几何形状和术语如图 17-15 所示。对于 $f<1.2c/D$（D 为消声器的直径），平面波的假设是可以接受的。

腔室轻型内衬的传声损失可以用下面公式得到[8,9]：

$$TL_0=10\lg\left[\left\{\cosh(\delta_e l_e/2)+\frac{m+1}{2m}\sinh(\delta_e l_e/2)\right\}^2\cos^2 kl_e+\left\{\sinh(\delta_e l_e/2)+\frac{m+1}{2m}\cosh(\delta_e l_e/2)\right\}^2\sin^2 kl_e\right] \tag{17-26}$$

式中 δ_e 为内衬管道单位长度的衰减，并由下式给出：

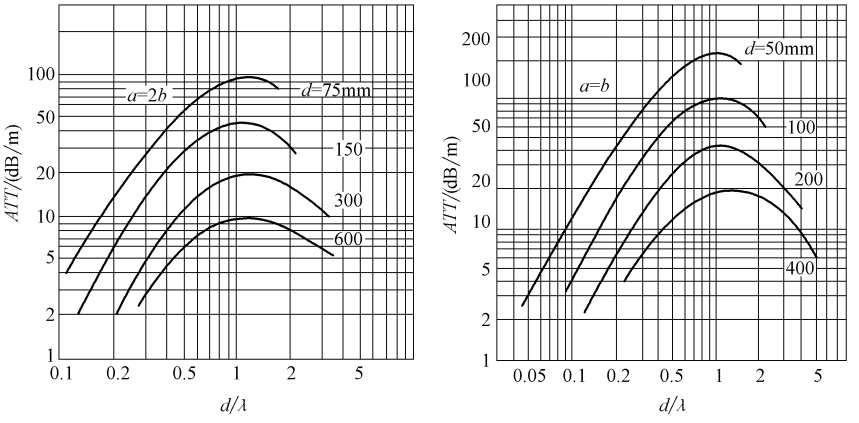


图 17-14　分离器管道的声学衰减

（每个挡板由两块穿孔金属板构造，内面填入总密度为 100～140kg/m^3 的矿棉）

a—开口区宽度　b—挡板宽度　d—挡板之间的中心距　λ—声的波长

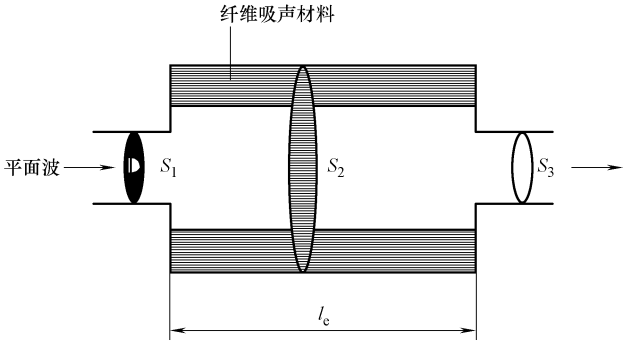


图 17-15　阻性消声器

$$20\lg(\delta_e l_e)=\frac{K_1 P l_e}{S} \tag{17-27}$$

K_1的值可以根据吸收系数获得，如图 17-8 所示。特别的是，δ_e为

$$\delta_e=\frac{1}{l_e}10^{0.05K_1Pl_e/S} \tag{17-28}$$

式中，m 为消声器的膨胀面积或内衬截面面积与消声器伸入或伸出截面面积之比值；$k=2\pi f/c$；l_e为消声器的长度。

腔室内衬厚玻璃棉的传声损失采用下面的经验公式计算得到[10]：

$$TL=10\lg\left[1+\left\{\frac{1}{2}\alpha_g mkl_e\right\}^2\right] \tag{17-29}$$

式中，α_g是从表 17-4 中可以得到的系数，采用玻璃棉的填充体积和密度；m 为消声器的膨胀面积或内衬截面面积与消声器伸入或伸出截面面积之比值；$k=2\pi f/c$；l_e为消声

器的长度。

表 17-4　玻璃棉填充系数 α_g

V_g/V	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
α_g	0.106	0.124	0.288	0.365	0.529	0.677	0.794	0.885	0.935	0.960	0.987	1.0

17.6.2　一个送风静压箱/充气室的传声损失

对于送风静压箱/充气室的几何形状和术语的描述如图 17-16 所示。送风静压箱/充气室在很多方面都和内衬膨胀室相同。它们之间的主要差别是气腔进口和出口不在一条线上。一般来说，入口和出口之间存在一个偏移量来引导声波的传播。声波会在直角转弯处反射，因为管道的横截面尺寸太大了。特别是在高频的情况下，当声波从入口传到出口的时候，几乎所有的声能都可能反射多次后离开了内衬一侧。一个简单的送风静压箱/充气室的传声损失可以根据以下公式近似得到[11]：

$$TL = 10\lg\left\{S_w\left(\frac{\cos\theta}{2\pi d^2}+\frac{1}{R}\right)\right\} \quad (17\text{-}30)$$

式中，S_w为进口和出口的面积，$S_w = lW$；d 为从进口到出口的斜边距离，$d = \{(L-l)^2 + H^2\}^{1/2}$；$\cos\theta = H/d$；$R = a/(1-\alpha_m)$；$a$ 为总内衬面积乘以吸收系数；a_m为衬吸声系数的统计值。

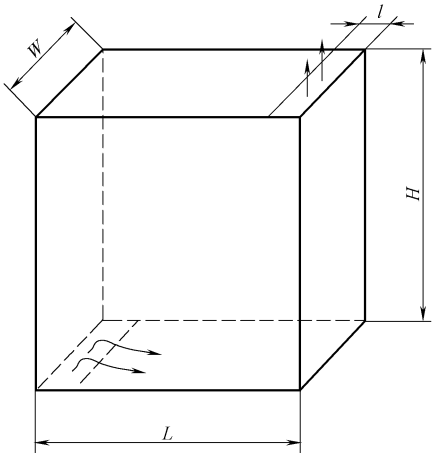


图 17-16　式（7-26）所用单压气室术语（几何参数）的表示

17.7　一般考虑

对于一个特定的问题，如为了进行噪声控制措施的设计，我们考虑的不仅是之前探讨过的材料的基本声学性质，并且还有问题的一些实际的方面，如（ⅰ）气体流动速度、（ⅱ）气体的温度、（ⅲ）湿度和（ⅳ）气流的水头损失。客户十分依赖设计者的专业技术，以实现在运行状态下对噪声控制设备充分的保护。

17.7.1　对于有衬里的声学材料的表面处理

市场上的纤维材料含有某种形式的树脂黏合剂。比较长的絮状纤维和比较短纤维是可用的。絮状物的包装密度大概在 60～100kg/m^3 之间，它必须用穿孔的薄金属或铁丝网将材料包起来，因而纤维在吸声材料中可以保持任意形状。穿孔的金属不用考虑数值孔径、孔形状、孔直径和金属厚度。从声学的角度来看，一个合适的数值孔径见表 17-5。

表 17-5　穿孔金属板用于吸声材料处理（气体流速为 25m/s 或更小）

穿孔率:30% ~50%	孔的形状:圆形、狭缝或两者的混合形状
孔直径:5 ~10mm	金属:铁、不锈钢(用于腐蚀气体场合)

17.7.2　气流速度

在发动机排气或通风系统的高速气流中，噪声控制问题通常涉及声学材料。由于高速的气流过声学材料，声学材料的恶化会是一个特别严重的问题。除此之外，气流的湍流导致材料振动后就会引起更深的恶化。解决这个问题的一个办法就是在一些防护面层之后安装声学材料，它的复杂性随气流速度而变化。

在这个问题上的一些有限的信息是可以通过实地经验得到的，如图 17-17 所示[12]。然而，处理结构的参数没有很好地建立起来，比如，涉及穿孔金属板、金属网、吸声材料和气流的那些参数。在流速超过 25m/s 的情况下，就可以使用多层吸声材料，相关的性能分析可能变得更复杂。

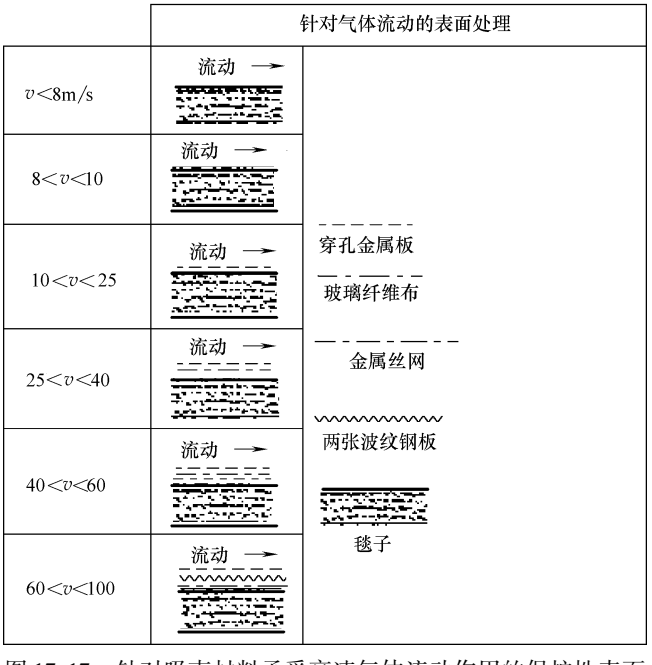


图 17-17　针对吸声材料承受高速气体流动作用的保护性表面

17.7.3　气体温度

在很多噪声控制问题中，温度是一个很重要的因素。有时辐射噪声的高温管道，如柴油发动机或者抽风机，必须包装。一个合适的选择，就是运用一种简单的材料，同时解决热和声学绝缘问题。在极其高温的情况下，材料的抗拉强度就会减小，并且材料也可能受到热冲击。

当温度是一个非常重要的考虑因素时，表 17-6 给出了常用的几种吸声材料。

表 17-6　常用的几种吸声材料

材　　料	最大允许温度/℃	材　　料	最大允许温度/℃
带黏结剂的玻璃纤维	320 ~ 360	石棉纤维	760
玻璃棉	960 ~ 1060	氧化铝	1190
矿棉毡	1160		

17.7.4　暴露在灰尘和水中

如果没有进行灰尘处理的话，那么穿孔金属的孔就会被堵塞住，并且由于灰尘粘附在吸声材料的表面，因而吸声性能就会恶化。灰尘的积累和排除可能就要被设计成腔式消声器，并运用在吸声装置上。

比如冷却塔风扇遇到了相当数量的潮气。为了不让水滴沉积在吸声材料上，就必须采取一些预防工作。设备的底面必须用防锈材料来处理。图 17-18 表示采用垂直入射吸收系数情况下，由于湿度的影响造成吸声材料的声学特性的退化[13]。

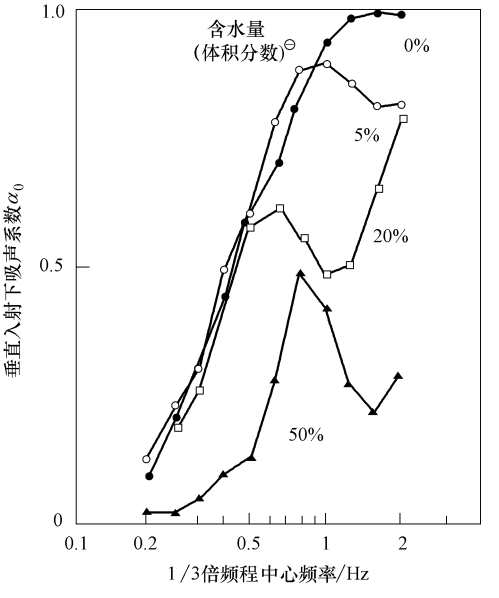


图 17-18　由含水量引起的吸声系数退化

17.8　阻性消声器的实际例子

下面的案例是针对一个通风系统的轴流式扇风机，为了降低噪声，设计一个阻性消声器的例子。

㊀ 原著未提，应该是体积分数。译者注

1）轴流式扇风机的技术参数

- 体积流量：$Q=125\text{m}^3/\text{min}$；
- 风压：$p=80\text{mm Aq}$；
- 转子叶片数：$Z=10$；
- 固定叶片数：$Z_s=5$；
- 转速：$N=2580\text{r}/\text{min}$；
- 输入轴功率：$P=3.75\text{kW}$。

2）下面介绍消声器装置所需要的衰减量和压头损失。风机噪声从进口和出口方都传播，大概需要37.5dB的性能水平（噪声减少量），当比声压级K_s是基于轴流风机技术参数得到时

$$K_s=L_A-10\lg(p^2Q) \tag{17-31}$$

3）图17-19所示为轴流风机的噪声频谱。叶片通过频率BPF是当气流通过叶片时速度波动的基本部分。可以在图17-19看到在频率430Hz（$Q\times Z=(2580/60)\times 10$）处的噪声频谱。通过添加背景噪声谱到这个频谱，可以看出：当频率接近430Hz时，一个消声器可以带来超过20dB的衰减，并且频率在800～1000Hz的范围内，产生大概15dB的衰减是必要的。

消声器的压头损失保持在4mm Aq以内。

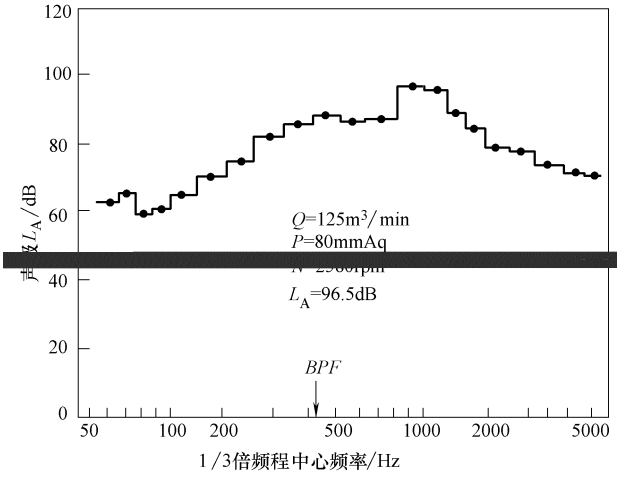


图17-19　工厂通风系统轴流风机的噪声频谱图

4）阻性消声器的结构如图17-20所示。消声器的外径的最大值是ϕ750mm，长度是根据优化性能来选择的。

5）玻璃棉的包装密度选择为$65\text{kg}/\text{m}^3$。玻璃棉的表面处理用的穿孔金属板厚1mm、孔直径为6mm、穿孔率为36%。直径为ϕ200mm的吸声体在中心部位支撑，且在流动方向上通过三个支柱焊接到外圆柱体上，在圆周方向上通过两个支柱焊接到外圆柱体上。

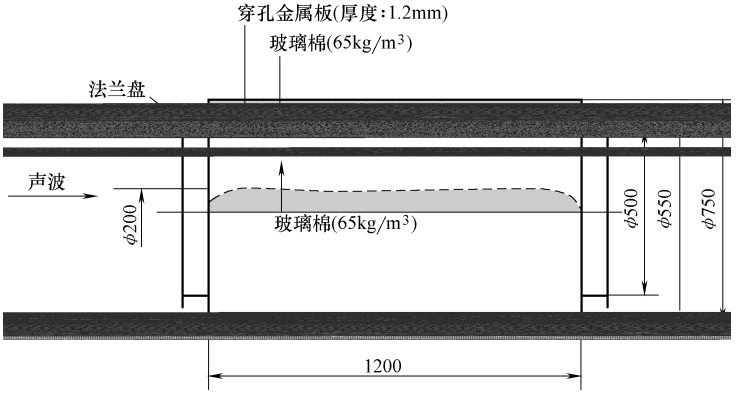


图 17-20 轴流风机阻性消声器的半剖面图

6）阻性消声器的衰减特性可以通过式（17-27）计算出来

$$TL = 10\lg\left[1 + \left\{\frac{1}{2}\alpha_g mkl_e\right\}^2\right]$$

填充到消声器中的玻璃棉体积比接近于 $(0.75^2 - 0.55^2 + 0.2^2)/0.75^2 = 0.53$。对于包装密度为 100kg/m³ 的情况，我们可以得到 $0.53 \times 65/100 = 0.347$。从表 17-2 中可以得到 $\alpha_g \approx 0.6$。

所需的膨胀比 m、长度 l_e，还有波数 k 为

$m = (750/500)^2 = 2.25$，$l_e = 1.2\text{m}$，$k = 2\pi f/c$。

声速 c 随环境温度而变化。对于 25℃，声速是 346.5m/s（$=331.5 + 0.6 \times 25$）。在 100～1000Hz 之间的 TL 值就可以计算出来了，为

$$f = 100\text{Hz}: TL = 5.0\text{dB}$$

$$f = 430\text{Hz}: TL = 16.1\text{dB}$$

$$f = 1000\text{Hz}: TL = 23.4\text{dB}$$

流速满足压头损失期望值 p_{loss}（单位：mm Aq），并且可以由以下的经验公式计算得到[12]：

$$p_{\text{loss}} = \left\{0.142 m_f^{-0.1}\left(\frac{l_e}{d_1}\right)^{3/4}\left(\frac{d_m}{d_1}\right)^{-1/3}\right\}\frac{v^2}{g} \qquad (17\text{-}32)$$

采用的数据如下：

$m_f = (550/500)^2 = 1.21$，是空气流道和消声器之间的横截面积之比。

$d_1 = 500\text{mm}$，进口直径。

$l_e = 1.2\text{m}$，消声器长度。

$d_m = 200\text{mm}$，吸声体直径。

$v = 10\text{m/s}$ 或更少，进口流速。

$g = 9.8\text{m/s}^2$，重力加速度。

相应的压头损失是 3.25mm Aq，这个量是和 JIS B 833 相对应的，并且基本上接近于预测值。特别的是，4mm Aq 或者更小设计值条件，也是满足的。轴流风机和消声器

之间的连接用厚的合成橡胶隔振。

7）在消声器安装之后，从图 17-21 的波谱中可以得到衰减的结果。可以证明衰减特性几乎和设计的值相同。当这个近似是有效时，频率的范围是：

$$f < c/d = 346.5/0.175 = 1980\text{Hz}$$

当频率低于 250Hz 时，衰减的估计值就稍微高估了。

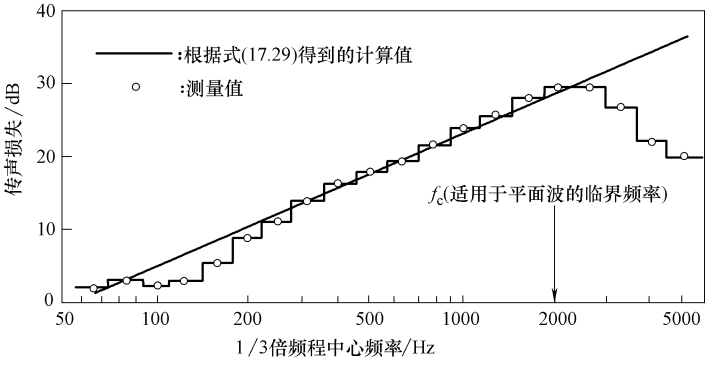


图 17-21　设计的阻性消声器噪声衰减特性

参 考 文 献

1. Obata, T., Hirata, M., Nishiwaki, N., Ohnaka, I., and Kato, K., Noise reduction characteristics of dissipative mufflers, 1st report, acoustical characteristics of fibrous materials, *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, 42, 363, 3500, 1976.
2. Zwikker, C. and Kosten, C.W. 1949. *Sound Absorbing Materials*, Elsevier, New York.
3. Beranek, L.L., Acoustical properties of homogeneous isotropic rigid tiles and flexible blankets, *J. Acoust. Soc. Am.*, 19, 4, 556, 1947.
4. Obata, T. and Hirata, M., Estimation of acoustical transmission loss for combined walls, *Proc. Japan Soc. Mech. Eng. Annu. Meet.*, 780, 1, 42, 1978.
5. Brüel, P.V. 1951. *Sound Insulation and Room Acoustics*, Chapman & Hall, London, p. 159.
6. Beranek, L.L. 1971. *Noise and Vibration Control*, McGraw-Hill, New York, chap. 17, p. 390.
7. King, A.J., Attenuation of lined ducts, *J. Acoust. Soc. Am.*, 30, 6, 505, 1958.
8. Davis, D.D. Jr. and Stokes, G.M., 1954. *Natl. Advisory Comm. Aeronaut. Ann. Rept.*, 1192.
9. Davis, D.D. Jr. 1957. *Acoustical Filters and Mufflers. Handbook of Noise Control*, C.M. Harris, Ed., McGraw-Hill, New York, chap. 21.
10. Hagi, S., Studies on Silencer for Ventilating System, A Doctoral Thesis of University of Tokyo, 1961.
11. Wells, R.J., Acoustical plenum chambers, *Noise Control*, 4, 4, 9, 1958.
12. Obata, T. and Hirata, M., Estimation of acoustic power of flow-generated noise within silencer and head losses, *J. Acoust. Soc. Japan*, 34, 9, 532, 1978.
13. Koyasu, M., Acoustical properties of fibrous materials, personal letter, RC-SC35, *Japan Soc. Mech. Eng. Div. Meet.*, 15, 1975.

18 抗性消声器设计

摘要

本章将探讨噪声抑制设备，如消声器，并着重对插入长管中的抗性消声器进行详细讨论。本章介绍了对消声器建模和分析有用的分析和经验公式，并指出它们的应用范围和局限性；给出了设计步骤，包括必要的计算；还给出了消声器声学系统性能分析方法论和参数优化设计；最后以一个用于双往复式空气压缩机的消声器为例进行了说明。

18.1 概述

在噪声抑制设备中，当运输的气体通过管道时，对抗性消声器的需求也就提高了。为了让声波传输通过管道后能被最小化，一套声学抑制设备就必须被纳入到管道系统中去。比如，在内燃机中，就要求把吸气和排气噪声降到可以接受的水平。这可以在噪声进入环境之前，在进气管和排气管中插入一个消声器来衰减压力脉动来完成这个任务。

成功的消声器设计必须满足至少以下三条标准：①消声器性能是频率的函数（气体流过消声器产生的最大允许噪声可能也需要规定）；②在给定的温度和流量条件下，通过消声器的允许最大平均压降；③允许的最大容积和空间限制。

消费者可能会要求根本不可能实现的大的噪声衰减，几乎没有背压，并且尺寸很小。另外，对于消费者来说，下面几点很重要：这个消声器不贵并且耐用，不存在维护问题。不得不说，实际上对于消声器设计来说，这些要求都是不可行的，并且不得不修改到实际的水平。在这个章节，我们会为大家介绍一些对消声器设计非常有用的分析和经验工具。

18.2 基本关系式

18.2.1 分析模型

抗性消声器的物理行为可能需要用线性微分方程式来进行建模。必须遵循质量守恒定律，同时还要必须满足 3 个联立方程组：牛顿定律、Boyle-Charles 定律和守恒定律。当把这些方程联立起来后，可以得到平面的、一维声压波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{18-1}$$

$$p = \rho c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{18-2}$$

式中，ξ 为质点运动位移（m）；c 为声速（m/s）；p 为声压（Pa）；ρ 为空气密度（kg/m^3）；t 为时间（s）；x 为沿声波传播的坐标系（m）。

方程式（18-1）和式（18-2）关于角频率 ω 的稳态解为

$$\xi = (A e^{-jkx} - B e^{jkx}) e^{j\omega t} \tag{18-3}$$

$$p = -\rho c^2 k (A e^{-jkx} - B e^{jkx}) e^{j\omega t} \tag{18-4}$$

式中，A 和 B 是针对行进波和反射波的粒子运动声压幅值；k 为波数，$k = 2\pi f/c$；$j = \sqrt{-1}$。

18.2.2 边界条件

边界条件介绍如下：

1. 声源

假定声源与消声器的存在无关，并且假定粒子的流量为常数，则有

$$S\dot{\xi} = 常数 \tag{18-5}$$

式中$\dot{\xi}$表示为对时间的微分。

2. 管道的开口端

在非法兰圆管开口端的反射系数 R 是可以计算出来的，表达式为

$$R = \frac{B e^{jkx}}{A e^{-jkx}} \tag{18-6}$$

反射系数的幅值 $|R|$ 作为 ka 的一个函数，如图 18-1a 所示，这里 a 是管的半径。相位的移动可以从图 18-1b 中确定，其中 α/a 是关于 ka 的函数。并且，反射系数为[1]

$$R = -|R| e^{-2jk\alpha} \tag{18-7}$$

对于经常用在抗性消声器设计中较小的 ka 值，$|R| \approx 1$，$\alpha/a = 0.163$。

3. 闭口端

在刚性壁上，质点运动的位移是零，因此有

$$\xi = 0 \tag{18-8}$$

4. 交界处的条件

下面的公式对应于质点流量连续性和压力连续性，即使横截面突然改变，也有

$$S_i \dot{\xi}_i = S_{i+1} \dot{\xi}_{i+1} \tag{18-9}$$

$$p_i = p_{i+1} \tag{18-10}$$

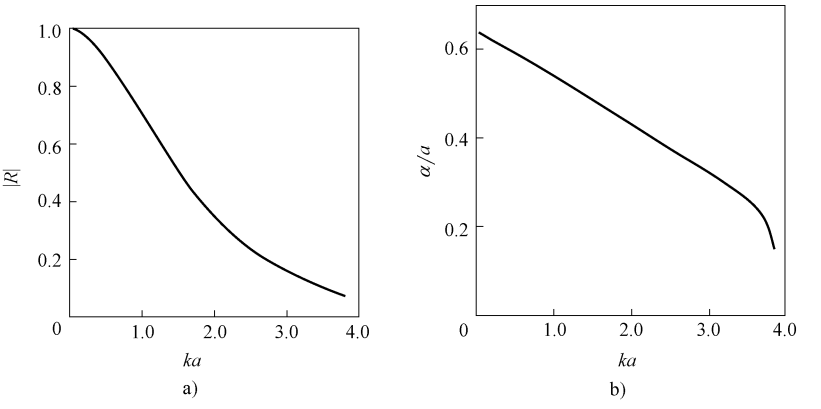


图 18-1　边界条件相关参数的关系（来源：Levine，H. and Schwinger，J.，On the radiation of sound from an unflanged circular pipe，J. Phys. Rev.，73，383，1948.）

a）非法兰圆管开口端反射系数幅值　b）非法兰圆管闭口端修正

18.3　抗性消声器的效果

抗性消声器的声学性能可以用插入损失来表示，并在系统接有消声器和没有接有消声器的情况下，在某个外部点位置测量噪声级的差来研究插入损失。传声损失定义为非反射声源和排气管终端的插入损失。

18.3.1　插入损失

一个简单的膨胀式消声器的安装示意图如图 18-2 所示。在管子的开口端，如图 18-2所示，声源的行进波和反射波在长度 l 上变成了 $A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kl}$ 和 $B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kl}$，其中幅值表示为 A_0 和 B_0。对于长度 l_0 的反射系数为

$$R_0 = \frac{B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}kl_0}}{A_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kl_0}} \tag{18-11}$$

这是根据公式（18-6），当 $x = l_0$ 时得到的。

从管子的开口端逃逸出来的声波能量 W_0 为

$$W_0 \propto \frac{S_0 A_0^2 (1 - R_0^2)}{\rho_0 c_0} \tag{18-12}$$

式中，ρ_0 为空气密度；c_0 为空气中的声速。与开口端有一些距离测量的声压级，其计算公式为

$$p_0 = 10\lg\left(\frac{Q_\mathrm{d}}{4\pi r^2} + \frac{4}{R_r}\right) + PWL_{r_0} \tag{18-13}$$

式中，r_0 为距离；R_r 为空间常数，$R_r = A/(1-\alpha)$；其中 A 为室内吸声功率（室内表面积乘以室内平均吸收系数），α 为室内平均吸收系数，Q_d 为开口端的指向性系数。

因此，当 Q_d 值都相同时，插入损失的测量值可以由式（18-14）获得。功率级定义为

$$PWL = 10\lg\left(\frac{W}{10^{-12}}\right)$$

则有

$$IL = PWL_{r_0} - PWL_r \tag{18-14}$$

由式（18-14），IL 可以表示为

$$IL = 10\lg\left|\frac{S_0}{S_3}\left|\frac{A_0}{A_3}\right|^2\right|\left|\frac{1-R_0^2}{1-R_3^2}\right| \tag{18-15}$$

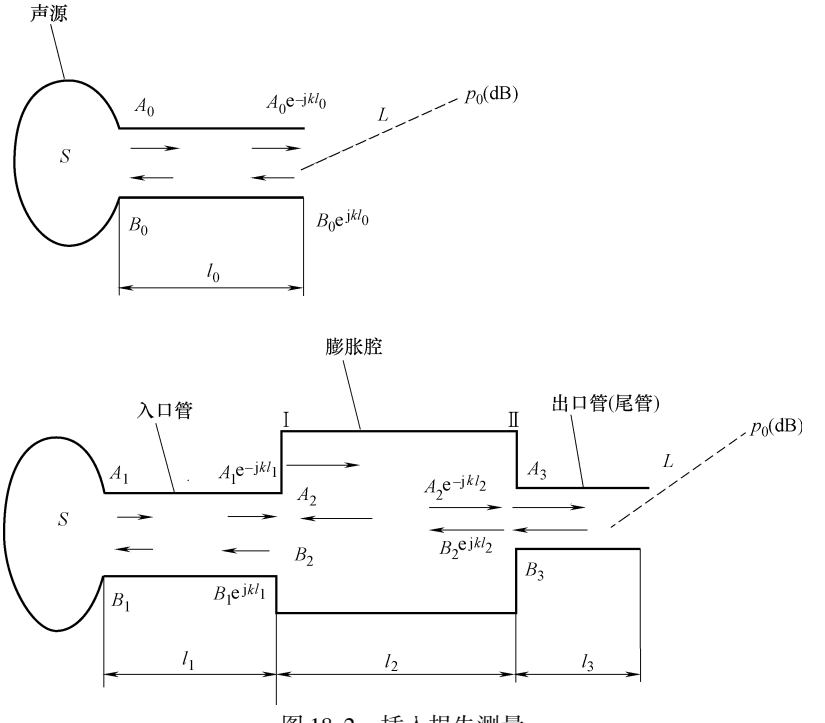


图 18-2　插入损失测量

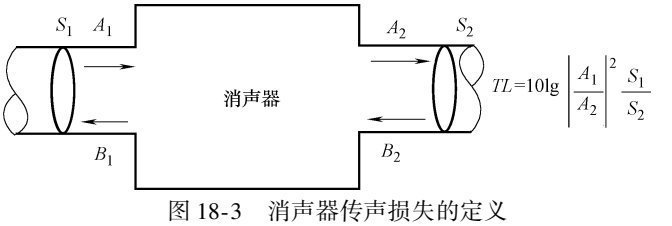


图 18-3　消声器传声损失的定义

18.3.2　传声损失

在图 18-3 所示的系统中，消除声源和辐射特性是令人期待的，可以只观察消声器本身的一些特性。这可以通过定义一个叫“传声损失”的物理量来评估，即

$$TL = 10\lg\left|\frac{A_1}{A_2}\right|^2\frac{S_1}{S_2} \tag{18-16}$$

在计算 TL 的过程中，很难把反射波分离出去。理论计算很简单，同时也很有用。

$$TL = 10\lg\left|\frac{A_1}{A_2}\right|^2\frac{S_1}{S_2}$$

18.4 计算步骤

对于图 18-2 所示的抗性消声器，以下的公式是根据式（18-5）~式（18-7）和式（18-9）得到。进气管、腔和尾管通过不同的下标来表示[2]。

（1）声源

$$S_0(A_0 - B_0) = S_1(A_1 - B_1) \tag{18-17}$$

（2）管的开口端

$$\left.\begin{aligned} B_0 e^{jkl_0} &= A_0 e^{-jkl_0} R_0 \\ B_3 e^{jkl_3} &= A_3 e^{-jkl_3} R_3 \end{aligned}\right\} \tag{18-18}$$

（3）突然膨胀（连接处Ⅰ）

$$\left.\begin{aligned} A_1 e^{-jkl_1} + B_1 e^{jkl_1} &= A_2 + B_2 \\ S_1(A_1 e^{-jkl_1} - B_1 e^{jkl_1}) &= S_2(A_2 - B_2) \end{aligned}\right\} \tag{18-19}$$

（4）突然收缩（连接处Ⅱ）

$$\left.\begin{aligned} A_2 e^{-jkl_2} + B_2 e^{jkl_2} &= A_3 + B_3 \\ S_2(A_2 e^{-jkl_2} - B_2 e^{jkl_2}) &= S_3(A_3 - B_3) \end{aligned}\right\} \tag{18-20}$$

通过这些线性公式，可以得到下面的公式：

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{B_0} = \frac{m_{10}}{1 - R_0 e^{-2jkl_0}}\Big\{ & j(1 + R_3 e^{-2jkl_3})(\sin kl_1 \cos kl_2 + m_{21} kl_1 \sin kl_2) \\ & + m_{32}(1 - R_3 e^{-2jkl_3})(m_{21}\cos kl_1 \cos kl_2 - \sin kl_1 \sin kl_2)\Big\} \end{aligned} \tag{18-21}$$

当不存在反射系数时，$R_0 = R_3 = 0$，可得

$$\begin{aligned} IL = 10\lg m_{03}\Big\{ & m_{10}^2(\sin kl_1 \cos kl_2 + m_{21} kl_1 \sin kl_2)^2 + m_{10}^2 m_{32}^2 \\ & \times (m_{21}\cos kl_1 \cos kl_2 - \sin kl_1 \sin kl_2)^2\Big\} \end{aligned} \tag{18-22}$$

这里 $m_{10} = S_0/S_1$，$m_{21} = S_2/S_1$，$m_{32} = S_3/S_2$，$m_{03} = S_0/S_3$，这些都是管道横截面积的比。

对于反射因素，$R_0 = R_3 = -1$，$S_0 = S_1 = S_3$，并且 $m_{21} = m$，插入损失的公式变为

$$IL = 20\lg\left|\left\{\frac{\cos kl_1}{\cos kl_0}\left[\cos kl_{21}\cos kl_3 - m\sin kl_2 \sin kl_3 - \tan kl_1\left(\cos kl_2 \sin kl_3 + \frac{1}{m}\sin kl_2 \cos kl_3\right)\right]\right\}\right| \tag{18-23}$$

$|A_1/A_3|$也可以根据式（18-18）~式（18-20）来获得。当反射系数的幅值 $R_0 = R_3 = 0$，$S_0 = S_1 = S_3$，且管道开口端横截面的膨胀率 $m_{21} = m$，则传声损失为

$$TL = 10\lg\left\{1 + \frac{1}{4}\left(m - \frac{1}{m}\right)^2 \sin^2 kl_2\right\} \tag{18-24}$$

当 $R_0 = R_3 = -1$，$S_0 = S_1 = S_3$，并且 $m_{21} = m$，那么 TL 可以根据下面公式得到：

$$TL = 10\lg\left|1 + \frac{1}{m^2}(m^2-1)\left[(m^2+1)\sin^2 kl_3 - 1\right]\sin^2 kl_2 + \frac{1}{2}\left(-m + \frac{1}{m}\right)\sin 2kl_2 \sin 2kl_3\right| \tag{18-25}$$

抗性消声器的一些主要结构如图 18-4 所示。

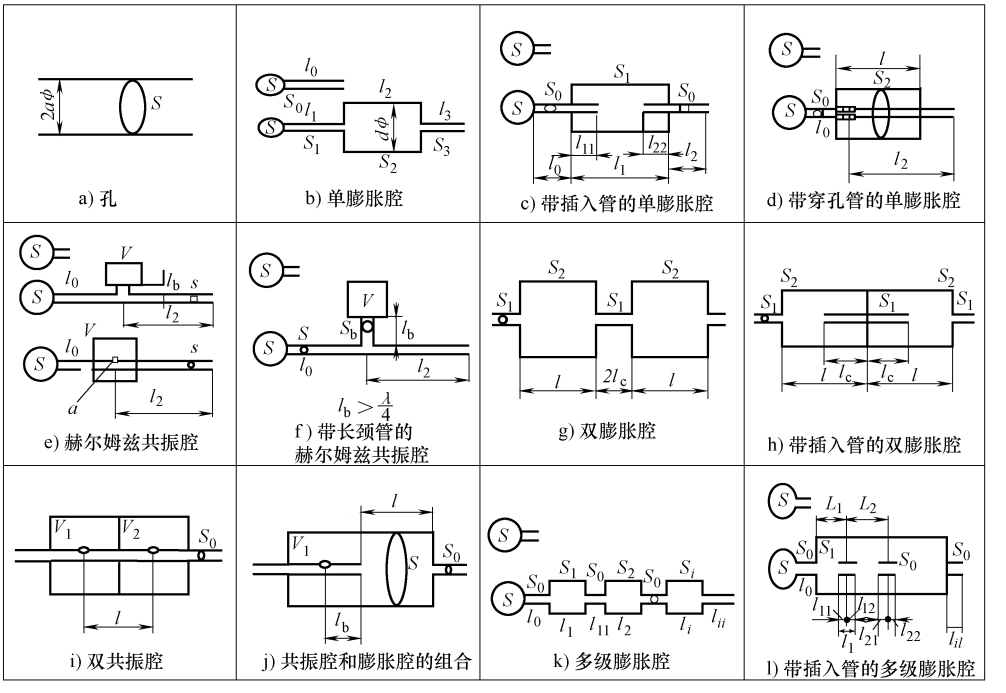


图 18-4　12 种抗性消声器的结构示意图

在有插入管和共振腔存在的膨胀室中，插入损失和传声损失的计算公式见表 18-1。

表 18-1　抗性消声器的传声损失和插入损失

比较 / 分类	抗性消声器（图 18-4）	TL(dB)	应用极限和评价
传声损失	a)	$TL = 10\lg\left[1 + \left(\frac{kS}{4a}\right)^2\right]$ a 为孔口半径	$a/\lambda < 0.1, R = 0$
	b)	$TL = 20\lg\left\|(1 + R_3 e^{-2jkl_3})(\cos kl_2 + jm_{21}\sin kl_2) + m_{32}(1 - R_3 e^{-2jkl_3})(j\sin kl_2 + m_{21}\cos kl_2)\right\|$ 式中，$m_{10} = S_1/S_0$；$m_{21} = S_2/S_1$；$m_{32} = S_3/S_2$；R_0，R_3 为开口端反射系数；l_3 为尾管长度。 (1) 当 $R_0 = R_3 = 0$，$S_0 = S_1 = S_3$ 时 $TL = 10\lg\left\{1 + \frac{1}{4}\left(m_{21} - \frac{1}{m_{21}}\right)^2 \sin kl_2\right\}$ (2) 当 $R_0 = R_3 = -1$，$S_0 = S_1 = S_3$ 时 $TL = 10\lg\left\{1 + \left(\frac{m_{21}^2 - 1}{m_{21}^2}\right)^2 \left[(m_{21}^2+1)\sin^2 kl_3 - 1\right]\sin^2 kl_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_{21}} - m_{21}\right)\sin 2kl_2 \sin 2kl_3\right\}$	$f < 1.22c/D$

（续）

比较 / 分类	抗性消声器（图 18-4）	TL（dB）	应用极限和评价
传声损失	c）	$TL=10\lg\left\{\left[2\cos k(l_1-l_{11}-l_{22})-\frac{m-1}{m}\sin k(l_1-l_{11}-l_{22})(\tan kl_{11}+\tan kl_{22})\right]^2+\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)\sin k(l_1-l_{11}-l_{22})+(m-1)\cos k(l_1-l_{11}-l_{22})(\tan kl_{11}+\tan kl_{22})-\frac{(m-1)^2}{m}\tan kl_{11}\tan kl_{22}\sin k(l_1-l_{11}-l_{22})\right]^2\right\}$ $m=S_1/S_0$	$R\approx 0$
	d）	$TL=10\lg\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{m}{\frac{kS_2}{C_0}-\cot kl}\right)^2\right\}$ $C_0=NC_i$；N 为孔洞数量 $C_i=2\pi a_i^2/(l_b+\pi a_i)$；$l_b$为管厚，$a_i$为孔的半径；$m=S_{12}/S$	$R\approx 0$
	e）	$TL=10\lg\left[1+\frac{1}{4}\left\lvert\frac{\frac{\sqrt{C_0V}}{S}}{\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}}\right\rvert^2\right]$ $f_r=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{C_0}{V}}$ $C_0=\frac{2\pi a^2}{2l_b+\pi a}$ l_b 为颈部长度或管厚；a 为颈部或孔的半径；c 为声速	$R\approx 0$，$l_b\ll\lambda$ 共振腔尺寸$\ll\lambda$
	f）	$TL=10\lg\left[1+\frac{m^2}{4}\left(\frac{\tan kl_b-\frac{S_b}{kV}}{\frac{S_b}{kV}\tan kl_b+1}\right)\right]$ $m=S_b/S$	$R\approx 0$，$l_b\ll\lambda$ 共振腔尺寸$\ll\lambda$
	g）	$TL=20\lg\frac{1}{16m^2}\lvert[4m(m+1)^2\cos 2k(l+l_c)-4m(m-1)^2\cos 2k(l-l_c)]+\mathrm{j}[2(m^2+1)(m+1)^2\sin 2k(l+l_c)-2(m^2+1)(m-1)^2\sin 2k(l-l_c)-4(m^2-1)^2\sin 2kl_c]\rvert$ $m=S_2/S_1$	$R\approx 0$
	h）	$TL=10\lg\lvert[\cos 2kl-(m-1)\sin 2kl_c\tan kl_c]^2+\left\{\frac{\mathrm{j}}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)\sin 2kl+(m-1)\tan kl_c\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)\cos 2kl-\left(m-\frac{1}{m}\right)\right]\right\}^2\rvert$ $m=S_2/S_1$	$R\approx 0$

（续）

比较 / 分类	抗性消声器（图 18-4）	TL(dB)	应用极限和评价
传声损失	i)	$TL=10\lg\left\{\frac{1}{4}\left\|\frac{A_1+\mathrm{j}B_1}{A_2+\mathrm{j}B_2}\right\|^2\right\}$ $A_1=Y_3X_1^2+Z_0Y_3^2+Z_0(X_1+X_3)^2$ $B_1=X_1Y_3^2+X_1X_3(X_1+X_3)$ $A_2=Y_3X_1^2\cos kl+Z_0X_1Y_3\sin kl$ $B_2=X_1Y_3^2+X_1X_3(X_1+X_3)\cos kl-Z_0X_1(X_1+X_3)\sin kl$ $X_1=\frac{\omega\rho}{C_0}-\frac{\rho c^2}{\omega V_1}$ $X_2=\frac{\omega\rho}{C_0}-\frac{\rho c^2}{\omega V_2}$ $X_3=\frac{Z_0^2\left(X_2\cos 2kl+\frac{1}{2}Z_0\sin^2 kl\right)}{(X_2\sin kl-Z_0\cos kl)^2+X_2^2\cos^2 kl}$ $Y_3=\frac{Z_0X_2^2}{(X_2\sin kl-Z_0\cos kl)^2+X_2^2\cos^2 kl}$ $Z_0=\frac{\rho c}{S_0}$ $C_0=\frac{2\pi a^2}{2l_\mathrm{b}+\pi a}$ l_b 为管厚；a 为孔的半径	$R\approx 0$， 共振腔尺寸$\ll\lambda$
	j)	$TL=10\lg\left\{\left[\cos kl+\frac{\rho c}{4S_0X}\left(m+\frac{1}{m}\right)\sin kl-\frac{\rho c}{4S_0X}\left(m-\frac{1}{m}\right)\cos 2kl_\mathrm{b}\sin kl\right]^2\right.$ $\left.+\left[\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)\sin kl+\frac{\rho c}{4S_0X}\left(m-\frac{1}{m}\right)\sin 2kl_\mathrm{b}\sin kl-\frac{\rho c}{2S_0X}\cos kl\right]^2\right\}$ $X=\frac{\omega\rho}{C_0}-\frac{\rho c^2}{\omega V}$ $m=\frac{S}{S_0}$	$R\approx 0$
插入损失	b)	$IL=10\lg\frac{1}{m_{30}}\times\left\|\frac{m_{10}}{1-R_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kl_0}}[\mathrm{j}(1+R_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kl_3})(\sin kl_1\cos kl_2+m_{21}\cos kl_1\sin kl_2)\right.$ $\left.+m_{32}(1-R_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kl_3})(m_{21}\cos kl_1\cos kl_2-\sin kl_1\sin kl_2)]\right\|^2$	$f<1.22c/D$， R 如图 18-1 所示
	(1)	$IL=10\lg\left\|[1+(m_{21}^2-1)]\left(1-\frac{m_{21}^2+1}{m_{21}^2}\sin^2 kl_1\right)\sin^2 kl_2\right.$ $\left.+\frac{1}{2}\left(m_{21}-\frac{1}{m_{21}}\right)\sin 2kl_1\sin 2kl_2\right\|$	$R_0=R_3=0$， $S_0=S_1=S_3$
	(2)	$IL=10\lg\left\|\left\{\frac{\cos kl_1}{\cos kl_0}\left[\cos kl_2\cos kl_3-m_{21}\sin kl_2\sin kl_3-\tan kl_1\left(\cos kl_2\sin kl_3\right.\right.\right.\right.$ $\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{m_{21}}\sin kl_2\cos kl_3\right)\right]\right\}\right\|^2$	$R_0=R_3=-1$， $S_0=S_1=S_3$

（续）

比较 / 分类	抗性消声器（图 18-4）	*TL*（dB）	应用极限和评价
插入损失	c）	$IL=20\lg\left\lvert\dfrac{\cos kl_1\cos kl_2-m\sin kl_1\sin kl_2}{\cos kl_{11}\cos kl_{22}}\right\rvert$ $m=S_1/S_0$	$R=-1$
	d）	$IL=20\lg\left[\cos^2 kl_2+\dfrac{m}{\dfrac{kS_2}{C_0}-\cot kl}\sin 2kl_2+\left(\dfrac{m}{\dfrac{kS_2}{C_0}-\cot kl}\right)^2\sin^2 kl_2\right]$ $C_0=NC_i$；$C_i=2\pi a_i^2/(l_b+\pi a_i)$，$N$ 为孔洞数量；l_b 为管厚；a_i 为孔的半径；$m=S_{12}/S$。	$R=-1$， $kl_0\ll 1$
	e）	$IL=10\lg\left\lvert\dfrac{\dfrac{\sqrt{C_0V}}{S}}{\dfrac{f}{f_r}-\dfrac{f_r}{f}}\sin 2kl_2+\dfrac{\dfrac{\sqrt{C_0V}}{S}}{\left(\dfrac{f}{f_r}-\dfrac{f_r}{f}\right)^2}\sin^2 kl_2+\cos^2 kl_2\right\rvert$ $f_r=\dfrac{c}{2\pi}\sqrt{\dfrac{C_0}{V}}$ $C_0=\dfrac{2\pi a^2}{2l_b+\pi a}$ l_b 为颈部长度或管厚；a 为颈部或孔的半径。	$R=-1$， $kl_0\ll 1$
	f）	$IL=10\lg\left[\cos^2 kl_2+m\sin 2kl_2\dfrac{\dfrac{S_b}{kV}\tan kl_b+1}{\tan kl_b-\dfrac{S_b}{kV}}+\left(m\dfrac{\dfrac{S_b}{kV}\tan kl_b+1}{\tan kl_b-\dfrac{S_b}{kV}}\right)^2\sin^2 kl_2\right]$ $f_r=\dfrac{c}{2\pi}\sqrt{\dfrac{C_0}{V}}$ $C_0=\dfrac{2\pi a^2}{2l_b+\pi a}$ l_b 为颈部长度或管厚；a 为颈部或孔的半径。	$R=-1$， $kl_0\ll 1$
	k）	$IL=20\lg\lvert(\cos kl_1\cos kl_{11}-m_1\sin kl_1\sin kl_{11})+(\cos kl_2\cos kl_{22}-m_2\sin kl_2\sin kl_{22})+\cdots+(\cos kl_i\cos kl_{ii}-m_i\sin kl_i\sin kl_{ii})\rvert$	$R=-1$， $kl_0\ll 1$
	l）	$IL=20\lg\left\lvert\left(\dfrac{\cos kL_1\cos kl_1-m\sin kL_1\sin kl_1}{\cos kl_{11}}+\dfrac{\cos kL_2\cos kl_2-m\sin kL_2\sin kl_2}{\cos kl_{12}\cos kl_{21}}+\cdots+\dfrac{\cos kL_n\cos kl_n-m\sin kL_n\sin kl_n}{\cos kl_{(n-1)2}}\right)\right\rvert$	$R=-1$， $kl_0\ll 1$

注：A 为孔洞中管的半径或边支的直径；c 是声速；C_0 是传导率；D 是腔室直径；f 是频率；f_r 是共振腔的共振频率；$k=2\pi f/c$，是波数；L 是长度；$m=S_i/S_{i+1}$，是横截面之比；IL 是插入损失；N 是孔洞数量；R 是反射系数；S 是横截面积；TL 是传声损失；V 是腔室体积；Z 是声阻抗；ρ 是密度；λ 是波长；$\omega=2\pi f$，为角频率。

18.5 模型的运用范围

18.5.1 平面波的近似条件

当平面波近似有效时，频率的范围为

$$f_c < 1.22\frac{c}{D} \tag{18-26}$$

式中，f_c为平面波的临界频率（Hz）；c 为声速（m/s）；D 为消声器的直径（m）。

18.5.2 温度的影响

在高温和高速气流的环境下，发动机排气管中温度变化的主要影响就是相应的声速的改变，而声速是和绝对温度的平方根成正比的。设计抗性消声器时，需要采用管内气体中的实际声速作为参数，得到的每个单元最准确的密度ρ_0和声速c_0都需要用来计算声阻抗。声阻抗 z 表示为

$$z = -\mathrm{j}\frac{\rho_0 c_0}{S}\frac{1}{kl} \tag{18-27}$$

其中：

S 为管开口处的横截面积；k 为波数，$k=2\pi f/c_0$；l 为管单元长度。

注意：谐振腔室的波阻抗与$\rho_0 c_0^2$成正比。然而，c_0^2与气体的绝对温度（T）成正比，而且ρ_0与$1/T$成正比。因此，这个腔室的声阻抗是与温度无关的。连接件阻抗是关于 T 的函数，但是在大多数情况下，连接件处在管温度状态。对于一个共振腔类型的消声器，在管和腔室之间的温度差对消声器性能的影响可能是很小的。

18.5.3 管中气体流动的影响

管处在高温和高速气流的环境下，压力幅值是很大的，并且比理论预测得更大。特征曲线法在这些情况下是可取的。

在抗性消声器中，当管中气体流过一个截面陡然变化的膨胀管或小孔时，由于在消声器中存在不规则的气体流动产生了新的噪声，所以计算出来的传声损失或者插入损失可能会被过高估计。

18.5.4 管中摩擦损失的影响

当声波在管中传播时，声波将由于黏性摩擦而衰减。对于小直径长管来说，这个影响是很大的。管中摩擦阻尼可以被结合到传播常数 γ 中，因而有

$$\gamma = \delta + \mathrm{j}k \tag{18-28}$$

式中，δ 为管子每单位长度的衰减常数。把式（18-28）代入到式（18-3）和式（18-4）中，可以得到

$$\xi = (A\mathrm{e}^{-\gamma l} - B\mathrm{e}^{\gamma l})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{18-29}$$

$$p = -\rho c^2 k(A\mathrm{e}^{-\gamma l} + B\mathrm{e}^{\gamma l})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{18-30}$$

下面给出了两种情况下衰减系数 δ 的经验公式[3]：

（1）对于无缝钢管或者是氯化乙烯管公式（当管内壁的粗糙度在 4 ~ 8μm 之间且长度小于 3m 时的回归公式）为

$$\delta = 26000\lambda^{-0.5}\frac{\mu}{\rho c d} \tag{18-31}$$

式中，λ 为声波的波长（m）；μ 为管中气体的黏度（Pa·s）；ρ 为气体密度（kg/m^3）；d 为管直径（m）。

（2）对于衬有玻璃棉的管，公式为

$$\left.\begin{aligned}\delta_2 &= 2491\lambda^{-0.476}\left(\frac{\rho c d}{\mu}\right)^{-1.068}\\ \delta_6 &= 5175\lambda^{-0.476}\left(\frac{\rho c d}{\mu}\right)^{-1.303}\\ \delta_6 &= 11596\lambda^{-0.476}\left(\frac{\rho c d}{\mu}\right)^{-1.270}\end{aligned}\right\} \tag{18-32}$$

式中，δ 的下标表示的是吸声材料的厚度，单位为 mm。

18.6 实际案例：用于往复式压缩机的膨胀类消声器

比如，针对向工厂机械车间提供高压空气的问题，考虑使用双向运动往复式压缩机。

往复式压缩机的技术参数如下：

输出压力：6.9×10^5Pa；

驱动轴转速：600r/min；

驱动轴的功率：450kW；

伸入管直径：380mm。

由压缩机旋转产生的 10Hz 和 20Hz 压力脉动如图 18-5 所示。来自于消声器入口的压力波传播到自由空间，并可能破坏附近的私人住宅。当存在低频可听见的声音时，玻璃嵌板木门、木制滑动门，以及植物的叶子、树叶都会发生振动。在频率为 10Hz 和 20Hz 处，15 ~ 20dB 的衰减是必要的。为了解决这个问题，建议使用带膨胀腔和尾管的消声器。尾管的反射系数接近于 $R=-1$ 和 $ka = 2\pi fa/c = 2\pi\times20\times0.19/345 = 0.0692$。

$$IL = 20\lg\left|\cos kl_2\cos kl_3 - m\sin kl_2\sin kl_3\right|$$

式中，k 为波数（1/m），$k = 2\pi f/c$；l_2为腔的长度（m）；l_3为尾管的长度（m）；m 为腔和进口之间的横截面膨胀比。

当 $kl_2 = kl_3 = \pi/2$ 时，有

$$IL = 20\lg|m|$$

为了满足理想的 IL 值，需要 $m>10$。对于20Hz，可以采用 $kl_2=kl_3=\pi$。在 $f=10$Hz 处，当 $kl_2=kl_3=\pi/2$ 时，有 $IL=0$；在 $f=15$Hz 处，采用 $kl_2=kl_3=\pi/2$。在以上这两种频率状态下，都可以满足 IL 的 20dB 条件。因此，在声速 $c=345$m/s 时，就选择 $l_2=l_3=345/(4\times15)=5.75$（m）。

所研究的往复式压缩机的进气口的噪声频谱和本例中消声器设计的插入损失如图 18-5 所示。

如图 18-6 所示，对腔室的直径或者长度以及尾管进行恰当的选择。在 10Hz 处，IL 值确定如下：

$$IL=20\lg\left|\cos(2\pi\times10\times4.5/345)\cos(2\pi\times10\times6/345)-(1.6/0.38)^2\right.$$
$$\left.\sin(2\pi\times10\times4.5/345)\times\sin(2\pi\times10\times6/345)\right|$$
$$=20\lg|0.6825\times0.4600-17.728\times0.7308\times0.8879|=21.0(\text{dB})$$

同样，在 20Hz 处，有

$$IL=20\lg\left|\begin{matrix}\cos(2\pi\times20\times4.5/345)\cos(2\pi\times20\times6/345)-(1.6/0.38)^2\\ \sin(2\pi\times20\times4.5/345)\times\sin(2\pi\times20\times6/345)\end{matrix}\right|$$
$$=20\lg|(-0.0682)\times(-0.5767)-17.728\times0.9977\times0.8170|=23.2(\text{dB})$$

很显然，在这两种频率下的衰减都满足预期的最低限度 20dB 的要求。在低频的情况下，IL 的计算值在图 18-5 上用连续曲线来表达。

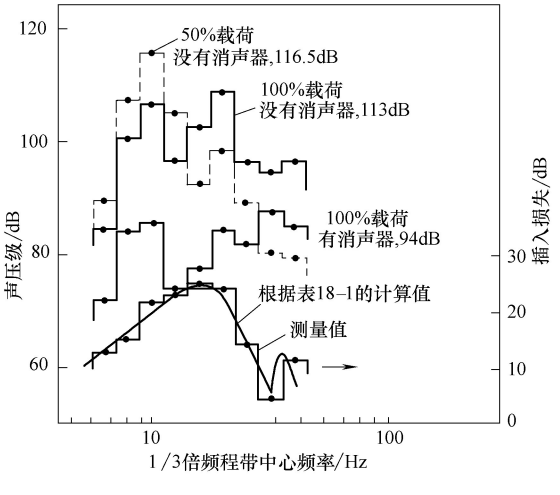


图 18-5　往复式压缩机进气口噪声频谱和设计的消声器插入损失

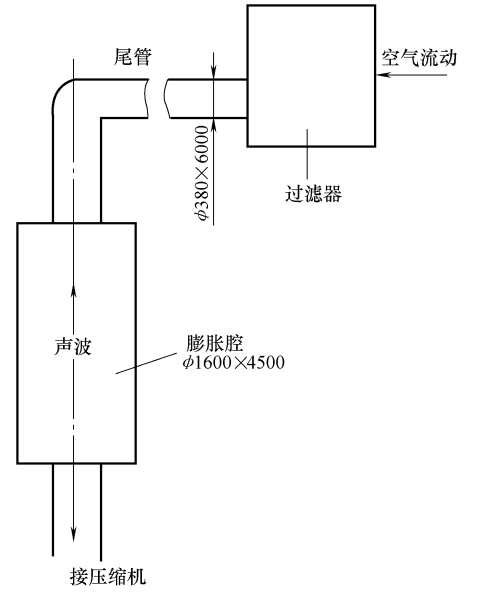


图 18-6　针对往复式压缩机噪声控制设计的消声器

参 考 文 献

1. Levine, H. and Schwinger, J., On the radiation of sound from an unflanged circular pipe, *J. Phys. Rev.*, 73, 383, 1948.
2. Ohnaka, I., Lecture for noise reduction of machines, no. 2, *J. Marine Eng. Soc. Jpn.*, 4, 179, 1969.
3. Suyama, E. and Hirata, M., Attenuation constant of plane wave in a tube, *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 35, 152, 1979.

19 隔声设计

摘要

本章讲述对隔声有用的理论和设计步骤，也给出了传递损失、传递系数和阻抗相应的概念和表达式，介绍了用于诸如带吸声材料的单面板和多面板及墙隔声结构的分析和设计步骤，还描述了用于隔声部件和系统设计的实际应用。

19.1 隔声理论

19.1.1 隔声表述[1]

19.1.1.1 传递系数

一般用 I_i 来表示单位时间内单位面积上的声能，其中一部分能量在墙壁中消耗了，除了被墙壁反射的能量之外，剩下的就通过墙壁传播出去了。用 I_t 来表示传递出去的声能，则墙壁的传递系数定义为

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} \tag{19-1}$$

19.1.1.2 传递损失

对于隔声性能的表达式，可以用传递损失（*TL*）来表示，定义为（也可以参看第17章和第18章）

$$TL = 10\log\left(\frac{1}{\tau}\right) = 10\log\left(\frac{I_i}{I_t}\right) \tag{19-2}$$

19.1.2 单面墙的传递损失

考虑一个平面声波以角度 θ 射入置在均匀空气空间中防渗的无限平板上，如图19-1所示。射入波、反射波和传播波的声压分别表示为 p_i、p_r 和 p_t，则它们的表达式为

$$\begin{aligned} p_i &= P_i e^{j\omega t - jk(x\cos\theta + y\sin\theta)} \\ p_r &= P_r e^{j\omega t - jk(-x\cos\theta + y\sin\theta)} \\ p_t &= P_t e^{j\omega t - jk(x\cos\theta + y\sin\theta)} \end{aligned} \tag{19-3}$$

式中，P_i、P_r 和 P_t 分别是入射波、反射波和传播波声压幅值；ω 是角频率；k 是声波的波数；假定这个平板相比于入射声波的波长是足够的小，那么在平板的入射和传播表面

上的振动速度就是一样的，平板在 x 轴方向上的振动速度 u 与入射和传播声波的粒子速度相同，由此可以得到关系式为

$$u = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\rho}\frac{\partial(p_\mathrm{i}+p_\mathrm{r})}{\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\rho}\frac{\partial p_\mathrm{t}}{\partial x} \tag{19-4}$$

$$\frac{p_\mathrm{i}+p_\mathrm{r}-p_\mathrm{t}}{u} = Z_\mathrm{m} \tag{19-5}$$

式中，ρ 是空气密度；Z_m 是单位面积平板的机械阻抗。根据这些公式，可知传递系数 τ_θ 以及入射角为 θ 时的传递损失 TL_θ 为

$$TL_\theta = 10\log\left(\frac{1}{\tau_\theta}\right) = 10\log\left|\frac{p_\mathrm{i}}{p_\mathrm{t}}\right| = 10\log\left|1+\frac{Z_\mathrm{m}\cos\theta}{2\rho c}\right|^2 \tag{19-6}$$

式中，c 为入射波、反射波和传播波分别在空气中的声速。

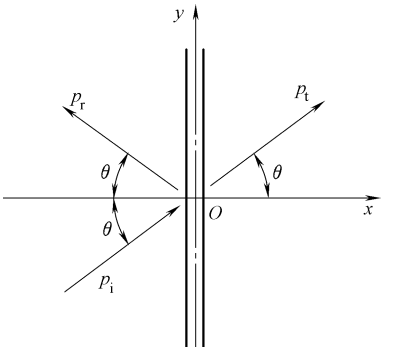


图 19-1　入射到无限平板上的平面波

19.1.2.1　吻合效应

考虑图 19-1 所示的 xy 平面内的平板振动。板的运动方程表示为

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + B(1+\mathrm{j}\eta)\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4} = p_\mathrm{i}+p_\mathrm{r}-p_\mathrm{t}$$
$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \approx \frac{Eh^3}{12} \tag{19-7}$$

式中，m 为表面密度；B 为平板每单位长度的弯曲刚度，ξ 为 x 方向的位移；E 为平板杨氏模量；h 为平板厚度；η 为平板损耗因子；ν 为平板泊松比。

以角度 θ 入射、角频率为 ω 的平面声波在平板内产生了弯曲波，设位移 $\xi = \xi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_1 y)}$ 作为方程式（19-7）的解，由此可以得到单位面积的机械阻抗为

$$Z_\mathrm{m} = \frac{p_\mathrm{i}+p_\mathrm{r}-p_\mathrm{t}}{\partial\xi/\partial t} = \eta\frac{Bk_1^4}{\omega} + \mathrm{j}\left(\omega m - \frac{Bk_1^4}{\omega}\right) \tag{19-8}$$

式中，$k_1 = k\sin\theta\,(k=\omega/c)$，是入射声波在 γ 方向产生的弯曲波的波数。强迫弯曲声波的传播速度 c_1 和平板自由弯曲声波速度 c_B 分别为

$$c_1 = \omega/k_1$$
$$c_\mathrm{B} = \left(\frac{\omega^2 B}{m}\right)^{1/4} \tag{19-9}$$

通过式（19-9）简化式（19-8），得到

$$Z_\mathrm{m} = \eta\omega m\left(\frac{c_\mathrm{B}}{c_1}\right)^4 + \mathrm{j}\omega m\left[1-\left(\frac{c_\mathrm{B}}{c_1}\right)^4\right] \tag{19-10}$$

当式（19-10）中的强迫弯曲声波传播速度 c_1 和自由弯曲声波速度 c_B 相等时，Z_m 的虚部就变成 0，“共振”就出现了，此时传声损失就急剧减少——这种现象就叫吻合效应。

与入射角度有关的共振频率为

$$f=\frac{c^2}{2\pi\sin^2\theta}\sqrt{\frac{m}{B}} \tag{19-11}$$

最小的共振频率称为临界吻合频率，或者简称为临界频率，并且可以化简为

$$f=\frac{c^2}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{B}}\approx\frac{c^2}{1.8c_{\mathrm{L}}h} \tag{19-12}$$

式中，$c_{\mathrm{L}}=\sqrt{E/\rho_{\mathrm{P}}}$平板内纵波声速；$\rho_{\mathrm{P}}$是平板密度。

图 19-2 显示了典型隔声材料临界频率与板厚度之间的关系。根据关系式 $c_{\mathrm{B}}/c_1=\sqrt{f/f_{\mathrm{c}}}\sin\theta$，式（19-10）变为

$$Z_{\mathrm{m}}=\eta\omega m\left(\frac{f}{f_{\mathrm{c}}}\right)^2\sin^4\theta+\mathrm{j}\omega m\left[1-\left(\frac{f}{f_{\mathrm{c}}}\right)^2\sin^4\theta\right] \tag{19-13}$$

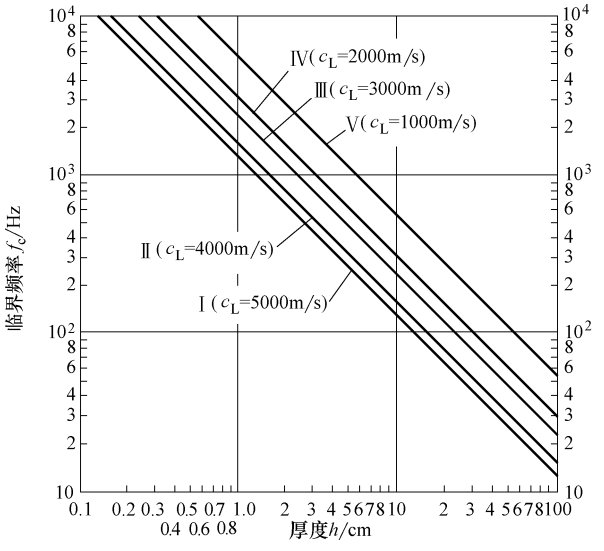


图 19-2　典型隔声材料临界频率与板厚度之间关系

Ⅰ—铝、钢或玻璃　Ⅱ—硬纸板或铜板　Ⅲ—密实混凝土、胶合板或砖　Ⅳ—石膏板　Ⅴ—铅或轻质混凝土

（来源：Beranek，L. L. 1988. Noise and Vibration Control，INCE/USA.）

19.1.2.2　传声损失的质量定律

当$f\ll f_{\mathrm{c}}$时，式（19-13）变为 $Z_{\mathrm{m}}\approx\mathrm{j}\omega m$。那么传声损失就取决于入射角度、频率和平板的表面密度，这就叫做传声损失的质量定律。

垂直入射的质量定律表示的是入射角度 $\theta=0$ 时的传声损失，其公式为

$$TL_0=10\log\left[1+\left(\frac{\omega m}{2\rho c}\right)^2\right] \tag{19-14}$$

当 $\omega m\gg 2\rho c$ 时，式（19-14）就变为

$$TL_0\approx 10\log\left(\frac{\omega m}{2\rho c}\right)^2=20\log mf-42.5\text{（对于空气）} \tag{19-15}$$

任意入射声波的质量定律表示的是入射角度 θ 平均值在 0 ~ 90°之间的传声损失，这个是通过完美的扩散声场来实现的。表达式为

$$TL_r = 10\log(1/\tau_r) \approx TL_0 - 10\log(0.23TL_0) \tag{19-16}$$

其中任意入射传声系数 τ_r 定义为

$$\tau_r = \int_0^{\pi/2} \tau_\theta \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta / \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{19-17}$$

式（19-16）的近似表达式见式（19-18），它一般用于实际中，并且大部分情况下是有用的。

$$TL_r = 18\log mf - 44 \tag{19-18}$$

场入射的质量定律表示的是入射角度 θ 平均值在 0 到大约 78°之间的传声损失，据实践证明这个是符合实际声场的，因而有

$$TL_f = TL_0 - 5 \tag{19-19}$$

图 19-3 对上述 3 种传声损失进行了比较。

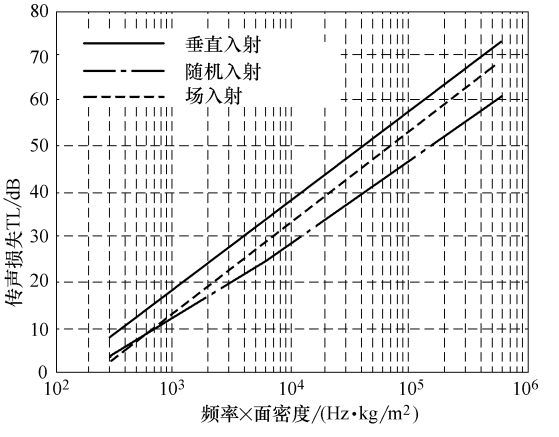


图 19-3　基于质量定律的理论传声损失

19.1.2.3　传声损失的刚度定律[2]

前面讨论的平板都假定为无限的。然而，实际上的平板都是在其边界处被某些结构来支撑，而且平板也是有限的。有人认为有限平板的传声损失与平板的振动激励性质有关，比如声波入射、振动模态和声辐射特性，因此控制关系就变得很复杂。在下面的频率区间内，公认为传声损失遵守质量定律，即

$$\frac{c}{2a} < f \ll f_c \tag{19-20}$$

其中 a 是矩形平板的短边长度。

当 $f < c/2a$ 时，整个平板都是同相位激励，且从支撑边缘产生的刚性影响就产生了。如果用 K 表示平板的等效刚度，并且假定损失因子为 0，那么平板的机械阻抗可以由公式（19-8）得到，因此有

$$Z_{\mathrm{m}}=\mathrm{j}\left(\omega m-\frac{K}{\omega}\right) \tag{19-21}$$

当 $Z_{\mathrm{m}}=0$ 时的频率对应平板的第一阶固有频率 f_{11} 为

$$f_{11}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{m}}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2\right] \tag{19-22}$$

因此，带简支边的矩形平板的等效刚度为

$$K=B\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2$$

这里 a 和 b 分别表示是矩形平板的短边和长边长度。在式（19-21）中，假定 $f\ll f_{11}$，质量项可以忽略，并且根据式（19-6）可以得出垂直入射传声损失 TL_{s0} 为

$$TL_{s0}=10\log\left|1-\mathrm{j}\frac{K}{2\rho c}\right|^2=10\log\left[1+\left(\frac{K}{2\rho c}\right)^2\right]=20\log(K/f)-74.5 \tag{19-23}$$

这就称为传声损失刚度定律，并且每倍频程有 6dB 的衰减。

对于上面提到的单面板的传声损失，如图 19-4 所示，并且概括如下：

（1）在区域Ⅰ（$f\ll f_{11}$）中，传声损失由平板刚度控制，有

$$TL=TL_0-40\log\left(\frac{f}{f_{11}}\right) \tag{19-24}$$

（2）在区域Ⅱ（$f\approx f_{11}$）中，传声损失由平板的低阶固有频率控制，并且估计过程会变得更复杂。

（3）在区域Ⅲ（$f\ll f_{11}\leqslant f_c/2$）中，传声损失由质量（面密度）来控制，有

$$TL=18\log mf-44 \tag{19-25}$$

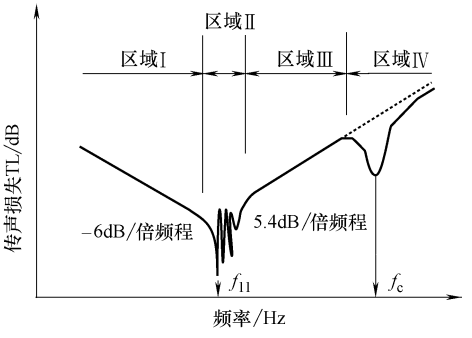


图 19-4　单面板传声损失特性

（4）在区域Ⅳ（$f>f_c/2$）中，传声损失由质量和平板的阻尼来控制，并且吻合效应降低了传声损失。

对于 $f_c/2<f\leqslant f_c$，TL 通过式（19-25）中 $f=f_c/2$ 的点和式（19-26）中 $f=f_c$ 的点的直线来表达。

对于 $f>f_c$，有

$$TL=TL_0+10\log\left(\frac{2\eta f}{\pi f_c}\right) \tag{19-26}$$

19.1.3　多面板的传声损失

为了实现高的隔声性能，我们通常使用双层墙或者是由像钢板一样的隔声材料和像玻璃纤维那样的吸声材料组成的多面板。在本节，将描述多面板的传声损失[3]。

19.1.3.1　计算方法

以一块横向方向无限的多面板为例，如图 19-5 所示，它是由 n 个声学单元组成，每个声学单元又由三种基本材料构成：不可渗透的平板、空气层和吸声层。然后，考虑

一个平面波以角度 θ 入射到第 n 层的左边表面上。设入射波的声压为 p_i，反射波的声压为 p_r，声波穿过结构传播，然后从第一单元的右边辐射出声波，这个平面声波以声压 p_t、传播角度 θ 入射到自由空间中。

在分析中，我们添加下角标 k（$k=1, 2, \cdots, n$）到 k 个单元的物理参数上，并且“2”和“1”分别表示的是这些参数的左边和右边的值，如图 19-5 所示。入射表面的声压 p_{n2} 与入射波的声压 p_i 之比为

$$\frac{p_{n2}}{p_i}=\frac{p_i+p_r}{p_i}=\frac{2Z_{n2}}{Z_{n2}+\rho c/\cos\theta} \tag{19-27}$$

式中，Z_{n2} 表示垂直入射到第 n 个单元的左边声阻抗；$\rho c/\cos\theta$ 表示与表面垂直的声阻抗，它和第 1 层的辐射阻抗 Z_{11} 相同，如图 19-5 所示。在每个界面处使用常见的声压匹配条件，就可以得到斜入射的传声系数表达式为

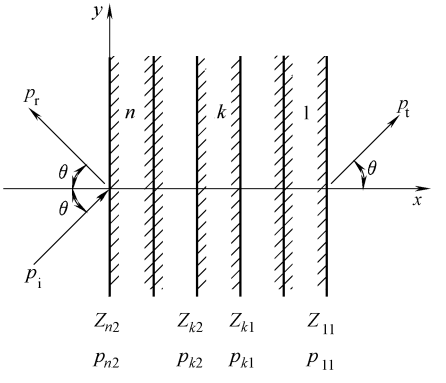


图 19-5 n 个单元多面板的计算模型

$$\tau(\theta)=\left|\frac{p_t}{p_i}\right|=\left|\frac{p_{11}}{p_i}\right|=\left|\frac{p_{n2}}{p_i}\right|^2\cdot\left|\frac{p_{n1}}{p_{n2}}\cdots\frac{p_{k1}}{p_{k2}}\cdots\frac{p_{11}}{p_{12}}\right|^2 \tag{19-28}$$

由此可以得到任意入射时传声损失的表达式为

$$TL=10\log\left(\frac{\int_0^{\theta_1}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\theta_1}\tau(\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta}\right) \tag{19-29}$$

式中，θ_1 是极限角度，高于它就没有声音可以被接收到，其变化范围为 78°～87°。

如果知道了式（19-27）中的 Z_{n2} 和式（19-28）中每个单元层的声压比，就可以通过式（19-29）计算 TL。如果知道了每个单元层阻抗之间的关系，那么就可以通过（从最右单元到最左单元）每个单元处的阻抗匹配条件来获得 Z_{n2}。

现在就列出通过这三个基本单元的声压比和声阻抗的关系。

19.1.3.2 不可渗透的平板

考虑一块厚度为 h 的无限大、不可渗透平板的振动，其振动由板两侧声压差诱发而起，如图 19-6 所示。在这种情况下，板每一侧的粒子速度就必须和板的振动速度相同。那么，根据式（19-8），可以得到表达式：

$$Z_2=Z_1+Z_m \tag{19-30}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{Z_2}{Z_1} \tag{19-31}$$

式中，p_2 和 p_1 分别表示的是在 $x=0$ 处入射面的声压和在 $x=h$ 处的传输面的声压；Z_m 是平板的机械阻抗；Z_2 和 Z_1 分别表示的是在 $x=0$ 处入射面的声阻

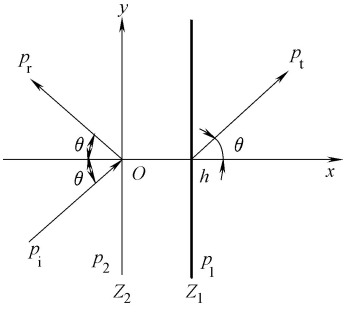


图 19-6 无限平板的平面声波激励

抗和在 $x=h$ 处的传输面的声阻抗。

19.1.3.3 吸声材料

对于一块厚度为 d 的吸声材料层，其横向尺寸无限大，如图 19-7 所示，考虑有一平面波以和垂直方向成角度 θ 的方向入射。推导吸声材料的波动方程，并利用声压通过 $x=0$ 和 $x=d$ 处的声压连续性条件，再用一些数学变换，就可以得到如下结果：

$$Z_2=\frac{\gamma Z_0}{q}\cot(qd+\varphi) \tag{19-32}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\cos(qd+\varphi)}{\cos\varphi} \tag{19-33}$$

$$q=\gamma\sqrt{1+\left(\frac{k}{\gamma}\right)^2\sin^2\theta}$$

$$\varphi=\operatorname{arccoth}\left(\frac{qZ_1}{\gamma Z_0}\right) \tag{19-34}$$

式中，γ 是传播常数；Z_0是均质、各向同性吸声材料的特征阻抗。

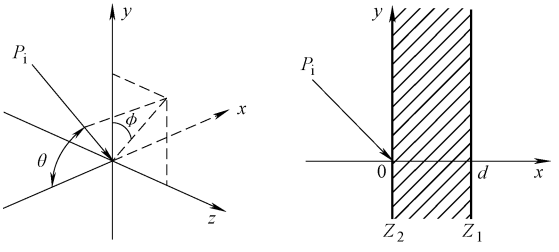


图 19-7 声波方向示意关系图

如果是用多孔材料作为吸声材料，那么下面的关系是适合于 γ 和 Z_0的[4]：

$$\begin{aligned}&Z_0=R+\mathrm{j}X\\&R/\rho c=1+0.0571(\rho f/R_1)^{-0.754}\\&X/\rho c=-0.0870(\rho f/R)^{-0.732}\end{aligned} \tag{19-35}$$

$$\begin{aligned}&\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta\\&\alpha/k=0.189(\rho f/R_1)^{-0.595}\\&\beta/k=1+0.0978(\rho f/R_1)^{-0.700}\\&(0.01\leqslant\rho f/R_1\leqslant1)\end{aligned} \tag{19-36}$$

式中，ρ 是空气密度；f 是频率；R_1是流动阻力。特别注意：R_1定义为多孔吸声材料每单位厚度的流动阻力。利用一根流动阻力测量管测量到的数据，可以得到

$$R_1=\frac{\Delta p}{lu} \tag{19-37}$$

式中，Δp 是管中吸声材料的进口处和出口处的压力差；u 是平均流动速度；l 是吸声材料的厚度。已知多孔吸声材料如玻璃纤维或者石棉的流动阻力和表观密度相关，如图 19-8 所示。

19.1.3.4 气腔

对于气腔来说，$Z_0=\rho c$，$\gamma=\mathrm{j}k$。因此，式（19-32）到式（19-34）可以化简为

$$Z_2=\frac{\rho c}{\cos\theta}\coth(\mathrm{j}kd\cos\theta+\delta) \tag{19-38}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\cosh(\mathrm{j}kd\cos\theta+\delta)}{\cosh\delta} \tag{19-39}$$

$$\delta=\operatorname{arccoth}\left(\frac{Z_1\cos\theta}{\rho c}\right) \tag{19-40}$$

19.1.3.5 双面墙[2]

应用上面得到的理论公式，就可以很容易得到一个由三个单元（无法渗透的面板、气腔和另一块无法渗透面板）组成的双层墙传声损失，如图 19-9 所示。假定这两块无法渗透的面板都有相同的表面密度 m，且平板的机械阻抗为 $\mathrm{j}\omega m$，则可以得到关于单元 1 和单元 3 的相应公式为

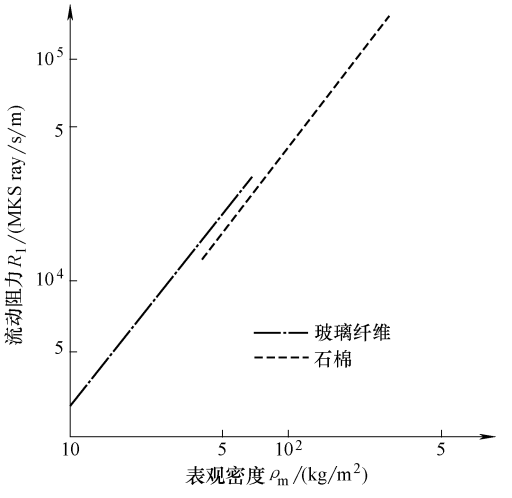


图 19-8 多孔吸声材料的流动阻力与表观密度之间的关系

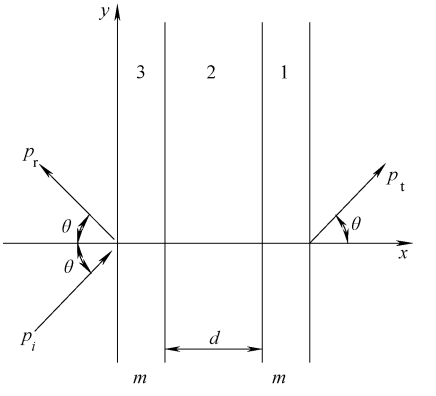


图 19-9 带气腔的双面墙计算模型

$$Z_{12}=Z_{11}+Z_m=\frac{\rho c}{\cos\theta}+\mathrm{j}\omega m$$
$$\frac{p_{12}}{p_{11}}=\frac{Z_{12}}{Z_{11}}=1+\mathrm{j}\frac{\omega m\cos\theta}{\rho c} \tag{19-41}$$

$$Z_{32}=Z_{31}+Z_m=Z_{22}+\mathrm{j}\omega m$$
$$\frac{p_{32}}{p_{31}}=\frac{Z_{32}}{Z_{22}}=1+\mathrm{j}\frac{\omega m}{Z_{22}} \tag{19-42}$$

对于单元 2，有

$$Z_{22}=\frac{\rho c}{\cos\theta}\cot(\mathrm{j}kd\cos\theta+\delta')$$

$$\frac{p_{22}}{p_{21}}=\frac{\cos(\mathrm{j}kd\cos\theta+\delta')}{\cosh\delta'} \tag{19-43}$$

其中，通过应用单元 1 和单元 2 界面处的阻抗匹配条件，就引入了下面的定义：

$$\delta'=\operatorname{arccoth}\left(\frac{Z_{21}\cos\theta}{\rho c}\right)=\operatorname{arccoth}\left(\frac{Z_{12}\cos\theta}{\rho c}\right)=\operatorname{arccoth}\left(1+\mathrm{j}\,\frac{\omega m\cos\theta}{\rho c}\right) \tag{19-44}$$

在这种情况下，式（19-27）可以化简为

$$\frac{p_{\mathrm{i}}}{p_{32}}=\frac{Z_{32}+\rho c/\cos\theta}{2Z_{32}}=\frac{Z_{22}+\mathrm{j}\omega m+\rho c/\cos\theta}{2(Z_{22}+\mathrm{j}\omega m)} \tag{19-45}$$

把式（19-41）~式（19-45）代入到式（19-28）中，就可以得到双面墙的传声损失为

$$TL_\theta=10\log[1/\tau(\theta)]=10\log[1+4a^2\cos^2\theta(\cos\beta-a\cos\theta\sin\beta)^2] \tag{19-46}$$

$$a=\omega m/2\rho c$$

$$\beta=kd\cos\theta$$

在式（19-46）中，传声损失是 0，且当下面的公式成立时，声波的全流道（滤波器术语中的“全部通过”）才出现：

$$\cos\beta-a\cos\theta\sin\beta=0 \tag{19-47}$$

当 $\beta\ll1$（$kd\ll1$）时，垂直入射的全流道频率是

$$f_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho c^2}{md}} \tag{19-48}$$

它是由两个质量为 m 和一根弹性常数为 $\rho c^2/d$ 的弹簧组成的振动系统的固有频率。

当 $\beta\gg1$（$kd\gg1$）时，方程式（19-47）的解为

$$\beta\approx n\pi$$

且垂直入射下的全流道频率为

$$f_n=\frac{nc}{2d}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{19-49}$$

它们是气腔 d 的声学共振频率。

式（19-46）给出了垂直入射下传声损失的特征，具体内容如下：

（1）$f<f_{\mathrm{r}}\left(\beta<\sqrt{2\rho d/m}\right)$时

$$TL\approx10\log(4a^2)=TL_0+6 \tag{19-50}$$

这和表面密度为 $2m$ 的单面墙的传声损失相等。

（2）$f_{\mathrm{r}}\leqslant f<f_1/\pi$（$\sqrt{2\rho d/m}\leqslant\beta<1$）时

$$TL\approx10\log(4a^2\beta^2)=2TL_0+20\log(2kd) \tag{19-51}$$

这个传声损失表明每倍频程有 18dB 的增加。

（3）$f=(2n-1)c/4d(\beta=n\pi-\pi/2)$时

$$TL\approx10\log(4a^2)=2TL_0+6 \tag{19-52}$$

在图 19-10 中，将这些频率处的传播损失连成一条直线，可以看出每个倍频程有 12dB 的增加。当这两个不可渗透的板有不同的表面密度 m_1 和 m_2 时，那么从式（19-41）~式（19-52）可化简为

（1）$f<f_{\mathrm{r}}\left(\beta<\sqrt{2\rho d/m}\right)$ 时

$$TL = 20\log[\omega(m_1 + m_2)/2\rho c] \tag{19-53}$$

（2）$f_r \leqslant f < f_1/\pi(\sqrt{2\rho d/m} \leqslant \beta < 1)$ 时

$$TL = TL_1 + TL_2 + 20\log(2kd) \tag{19-54}$$

（3）$f = (2n-1)c/4d(\beta = n\pi - \pi/2)$ 时

$$TL = TL_1 + TL_2 + 6 \tag{19-55}$$

在这些公式中，TL_1 和 TL_2 表示每个板的传声损失，它们都由式（19-15）给出。

以上所提到的双面墙的传声损失如图 19-10 所示。然而，实际的双面墙尺寸有限，且气腔形成了密闭的声场，因而使得传声损失偏离了理论值。图 19-11 给出了实际双面墙的设计图，它是根据理论和试验得到的。

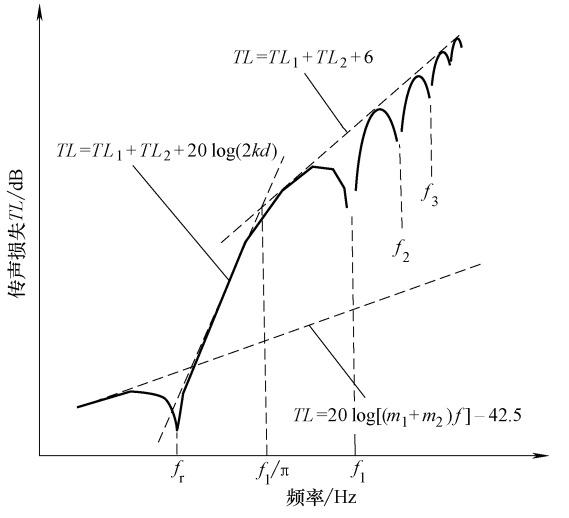


图 19-10　带气腔的双面墙传声损失

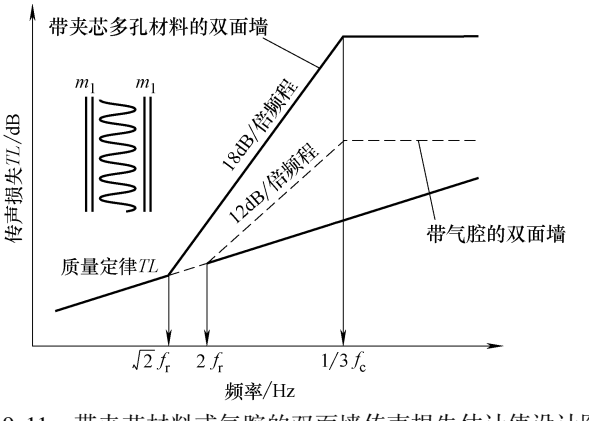


图 19-11　带夹芯材料或气腔的双面墙传声损失估计值设计图

19.1.4　带有声桥的复合墙的传播损失[5]

在先前介绍的理论中，多面板的每块板被认为结构上是独立的。然而，在实际的多

面板中，比如大楼中的隔板或者管道隔声护层，每个面板都是用所谓声桥的钢型材、双头螺栓等类似物连接而成，如图 19-12 所示。

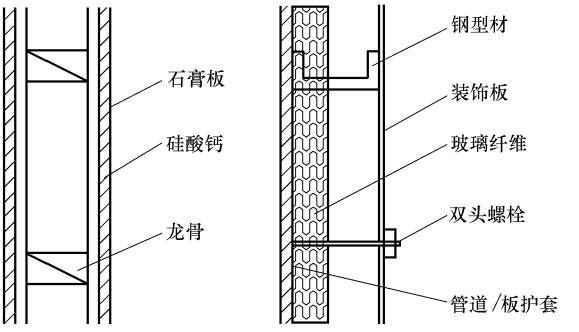


图 19-12　带声桥的实际双面墙案例

传播通过有声桥的双面墙的声波压力，等于气腔声波激励的一侧传播面振动辐射声压和声桥的机械激励的声压总和。

声压激励无限板中的、从面积 S 辐射出来的声学功率为

$$W_{\mathrm{P}}=\rho cSv_2^2 \tag{19-56}$$

式中，v_2^2是通过平板的空间振动速度均方值。

集中力或者是线分布力机械激励平板产生的辐射声功率为

$$W_{\mathrm{B}}=\rho c\chi v_2^2 (f\ll f_{\mathrm{c}}) \tag{19-57}$$

$$\chi=\begin{cases}\dfrac{8}{\pi^3}\lambda_{\mathrm{c}}^2 & \text{（集中力激励）}\\ \dfrac{2}{\pi}l\lambda_{\mathrm{c}} & \text{（线分布力激励）}\end{cases} \tag{19-58}$$

式中，v^2为激励点处平板振动速度均方值，$\lambda_{\mathrm{c}}=c/f_{\mathrm{c}}$是临界频率处弯曲波的波长；$l$ 是线分布力的长度。通过比较式（19-56）和式（19-57），注意到χ 是被集中力或者是线分布力机械激励无限板产生辐射声功率的有效面积。因为当$f<f_{\mathrm{c}}$时，自由弯曲波在无限板中传播只能辐射出很少的声音，所以声功率 W_{B}就是在激励点附近很小一块面积辐射的声功率。

根据上面给出的公式，可知从传播面辐射出来的总的声功率为

$$W_{\mathrm{T}}=W_{\mathrm{P}}+W_{\mathrm{B}}=\rho cSv_2^2\left[1+\frac{n\chi}{S}\left(\frac{v}{v_2}\right)^2\right] \tag{19-59}$$

式中，n 是作用在面积 S 上的激励力个数。那么，有声桥的双面墙的传声损失 TL_{T}为

$$TL_{\mathrm{T}}=10\log\left(\frac{W_1}{W_{\mathrm{T}}}\right)=10\log\left(\frac{W_1}{W_{\mathrm{P}}}\frac{W_{\mathrm{P}}}{W_{\mathrm{T}}}\right)=TL-TL_{\mathrm{B}} \tag{19-60}$$

式中，W_1是入射到双面墙上的声功率；TL 是没有声桥的双面墙的传声损失；TL_{B}是由于声桥产生的传声损失的减少，并且为

$$TL_{\mathrm{B}}=10\log\left(\frac{W_{\mathrm{T}}}{W_{\mathrm{P}}}\right)=10\log\left[1+\frac{n\chi}{S}\left(\frac{v}{v_2}\right)^2\right] \tag{19-61}$$

可以作如下假定：

① 入射侧面板的振动速度不受声桥影响。

② 在激励点（连接点）传递侧面板的振动速度和入射侧面板的速度 v_1 相同，因此可以得到下面的公式

$$\frac{v}{v_2}\approx\frac{v_1}{v_2}$$

有了这些假设，应用 19.1.3 节介绍的方法，得到 v/v_2 为

$$\frac{v}{v_2}\approx\frac{v_1}{v_2}=\frac{\omega^2 m_2 d}{\rho c^2}(f_r<f<f_1/\pi)=\frac{\omega m_2}{\rho c}(f>f_1/\pi) \tag{19-62}$$

运用式（19-60）和式（19-53），可以得到传声损失的增加量 ΔTL，它是基于双面墙总质量推导的质量定律的传声损失，公式如下所述：

1. 点连接

$$\Delta TL=TL-TL_B-20\log\left[\frac{\omega(m_1+m_2)}{2\rho c}\right]=20\log(ef_c)+20\log\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)+10\log\left(\frac{\pi^3}{8c^2}\right) \tag{19-63}$$

2. 线连接

$$\Delta TL=TL-TL_B-20\log\left[\frac{\omega(m_1+m_2)}{2\rho c}\right]=20\log(bf_c)+20\log\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)+10\log\left(\frac{\pi}{2c}\right) \tag{19-64}$$

式中，$e=\sqrt{S/n}$，是集中力之间的距离；$b=S/nl$，是线分布力之间的距离。

图 19-13 表示的是有声桥的双面墙的传声损失的实际有用的设计图，它是以图 19-11、式（19-63）和式（19-64）为基础得到的。

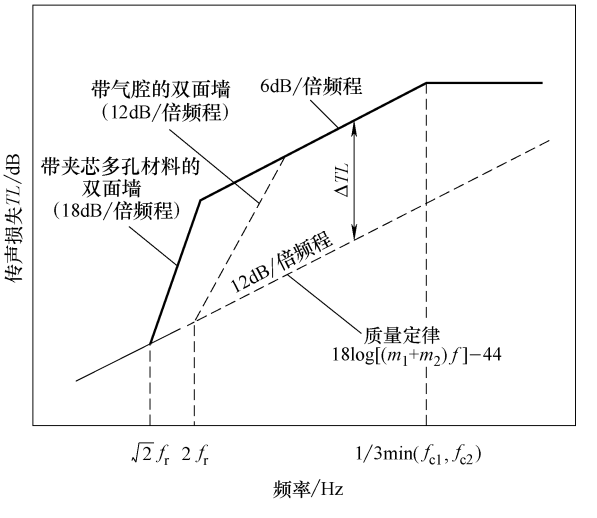


图 19-13 有声桥的双面墙的传声损失估计值的设计图

19.2 隔声的应用

19.2.1 隔声罩

隔声罩的性能是通过插入损失（*IL*）来表示的，*IL* 是隔声罩安装前后声功率的差。图 19-14 所示为一个声源和一维模型的隔声罩在不同频率下的插入损失。它被分为下面的四个区域：

① 区域Ⅰ（$f<f_r$）是由隔声罩板和气腔的刚度控制。

② 区域Ⅱ（$f\approx f_r$）是由隔声罩质量、刚度和气腔电容组成的振动系统的共振区域。

③ 区域Ⅲ（$f_r<f<c/2d$）是由隔声罩面板的质量来控制。

④ 区域Ⅳ（$f>c/2d$）是由扩散声场来控制，这个区域不能通过一维模型来表示。

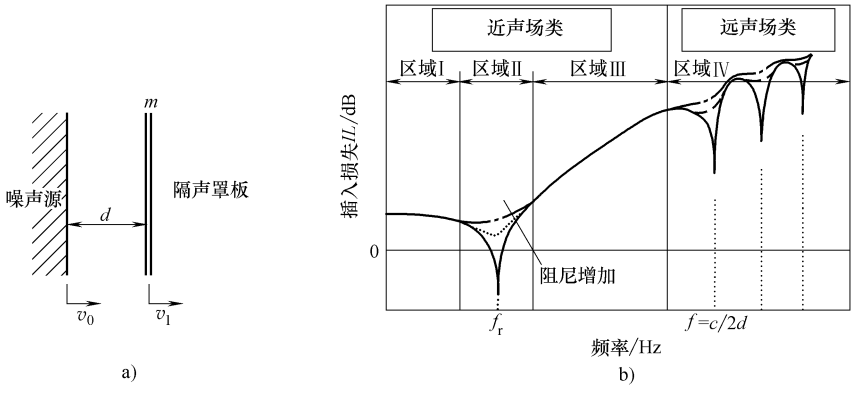


图 19-14　计算隔声罩插入损失特性的一维模型

a）一维模型　b）隔声罩插入损失

19.2.1.1 近声场类[4]

当噪声源和隔声罩之间的距离小于声源发射声波长一半时，插入损失对应区域Ⅰ和区域Ⅲ的特性，并且也可以用图 19-14a 所示的一维声学模型来表示。

考虑一个无限平面隔声罩板，它与平面波噪声源的距离为 d，如图 19-14a 所示。平面板的插入损失为

$$IL=10\log\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2=10\log\left[1-\frac{2\sin\theta(X\cos\theta-R\sin\theta)}{\rho c}+\frac{\sin^2\theta(X^2+R^2)}{\rho^2c^2}\right] \tag{19-65}$$

$$\theta=kd=\omega d/c$$

$$R=\eta\omega m$$

$$X=(\omega m-K/\omega)=\omega m[1-(\omega_{11}/\omega)^2]$$

$$\omega_{11}=\sqrt{K/m}$$

式中，m 和 K 分别是板单位面积的密度和等效刚度；η 是平板的损耗因子。如果隔声罩

是 $a \times b$ 的矩形平板，且在它的边上是简支，那么平板的等效刚度就由式（19-22）给出，并且 ω_{11} 是第一阶模态的固有（角）频率。

在式（19-65）中，右边括号中等于 0 或者 $IL = -\infty$ 的条件由下面频率来满足：

（1）$\theta \ll \pi$

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K+\rho c^2/d}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_{11}^2 + \frac{\rho c^2}{md}} \tag{19-66}$$

这就是由平板刚度、弹簧常数和平板的面密度决定的单自由度振动系统的固有频率，如图 19-15 所示。

（2）$\theta = n\pi (n = 1, 2, \cdots)$

$$f_n = \frac{nc}{2d} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{19-67}$$

这是气腔的共振频率。

式（19-65）给出 IL 的频率特性，如图 19-16 所示，其中垂直入射的传声损失是用虚线来表示的，用作参考。式（19-65）可近似表示为

（1）$f < f_r$ 时

$$IL \approx 10\log\left(1 + \frac{2Kd}{\rho c^2}\right) \tag{19-68}$$

（2）$f_r \leqslant f < f$ 时

$$IL \approx 20\log(mdf^2) + 20\log\left(\frac{4\pi^2}{\rho c^2}\right) = 20\log(mdf^2) - 71 \tag{19-69}$$

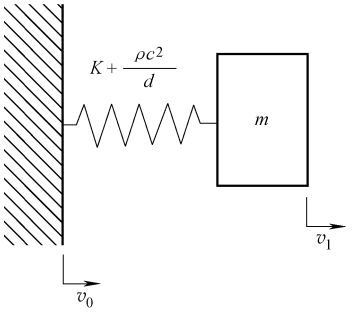


图 19-15　单自由度振动系统

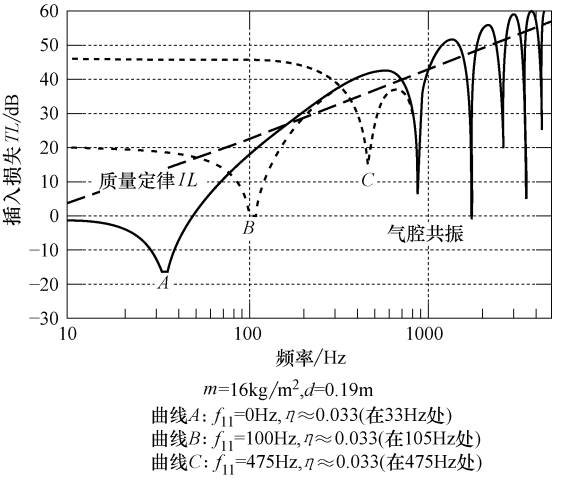


图 19-16　近声场隔声罩插入损失理论计算案例

19.2.1.2　远声场类（吸声类）隔声罩[1]

当噪声源和隔声罩之间的距离大于发射声波的波长一半时，插入损失就可以由区域Ⅳ的特征来表示，并且它可以用房间或大厅声学理论来进行分析。

考虑图 19-17 所示的隔声罩，其中有声功率级为 L_{W0}的噪声源。

根据房间声学的理论，隔声罩平板的内表面的平均声压级 L_{P0}可以通过直接和混响的声压之和来获得：

$$L_{P0}=L_{W0}+10\log\left(\frac{1}{S}+\frac{4}{R}\right)=L_{W0}-10\log S+10\log\left(1+\frac{4S}{R}\right) \tag{19-70}$$

$$R=\frac{\bar{\alpha}S}{(1-\bar{\alpha})} \tag{19-71}$$

式中，S 是隔声罩的内表面面积；$\bar{\alpha}$是隔声罩内表面的平均吸收系数。在式（19-70）中，右边的第一项和第二项表示的是直接声场的影响，第三项表示的是覆盖物引起的累积。

用 S_P表示隔声罩面积，刚 $S_O(=S-S_P)$表示隔声罩开口面积，并且假设隔声罩内的声场的扩散条件，那么从平板辐射的声压级和开口处的声功率级分别表示为

$$L_{WP}=L_{P0}-(TL+6)+10\log S_P$$

$$L_{W0}=L_{P0}-6+10\log S_O \tag{19-72}$$

式中，TL 是隔声罩平板在任意角入射下的传声损失。然后，隔声罩的插入损失为

$$IL=L_{W0}-10\log(10^{L_{WP}/10}+10^{L_{W0}/10}) \tag{19-73}$$

在设计声学隔声罩时，要特别注意以下几点：

① 累加增加了隔声罩中的声压级，也增加了隔声罩产生的声功率级。必须在隔声罩的内表面采用吸声材料来减少吸收系数，并降低累加。

② 通过 TL 指标，可知开口比隔声罩平板辐射更多的声功率，从式（19-72）中可以很清楚地看到这点，所以在下面给定的范围内，应使开口保持尽可能的小：

$$\frac{S_O}{S_P}\leqslant 10^{-TL/10}=\tau \tag{19-74}$$

这个公式表明来自开口的声功率比来自隔声罩平板的声功率要小。如果由于通风等要求使得式（19-74）不能满足，那么就必须把消声器安装在开孔处，如图 19-18 所示。

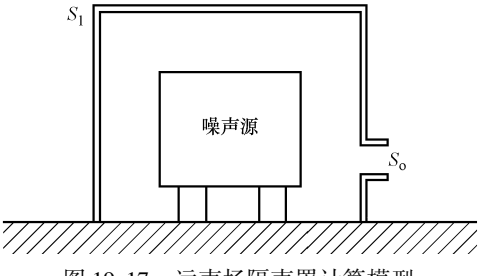


图 19-17　远声场隔声罩计算模型

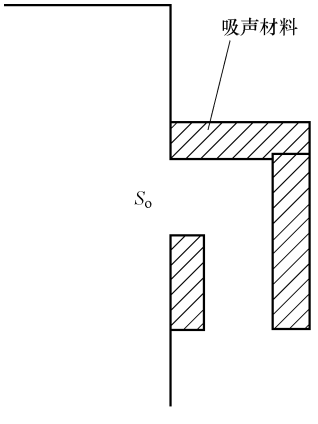


图 19-18　开口处设置消声器的案例

③ 结构噪声是由振动从机器（噪声源）的底部传递到隔声罩板引起的，它大大降低了隔声罩的插入损失。在这种情况下，应该提供一些噪声/振动抑制方法，例如：

- 把隔声罩的支撑结构放置在最低振动级点处，并且要避免机器的振动传播到隔声罩面板，所以需要使用隔振材料。
- 添加阻尼材料到隔声罩面板上，以减少面板的振动级。

19.2.2　隔声护层

在发电厂和化工厂，高压水或蒸汽管道、空气或气体流动的管道形成了主要噪声源。为了控制这些噪声源，通常运用隔声护层，它使用重而不可穿透的板或者使用带吸声材料的面板来盖住噪声源，如图 19-19 所示。

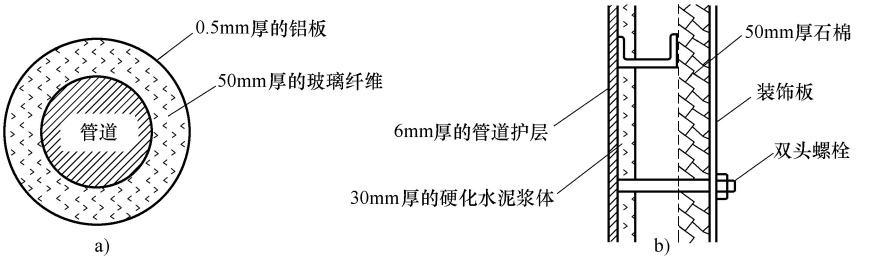


图 19-19　隔声护层的典型案例

a）管道外护层　b）管道护层

19.2.2.1　管道护层[2]

可近似地把圆柱形管道和管道护层看成一维模型，如图 19-20 所示。用一个自由度

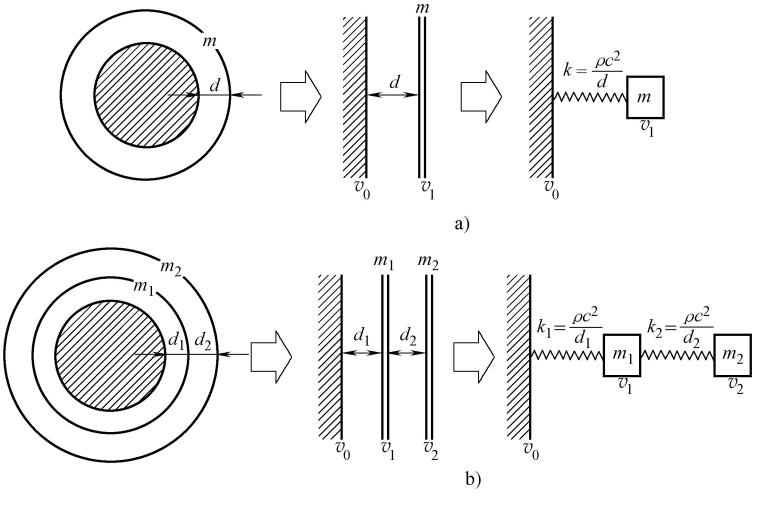


图 19-20　管道护层和计算模型的案例

a）一层护层　b）两层护层

近似表示的一层护层的插入损失，由之前提到过的式（19-69）给出，其中频率范围为 $f_r \leqslant f < f_1$。然而，直接把式（19-69）应用到实际护层中是不切合实际的，实际上护层的插入损失可以近似表示为

$$IL = a\log(mdf^2) + b$$

式中，a 和 b 是常数。

取 mdf^2 为横轴，并把从实验室测试和现场测试得到的插入损失作为纵轴，可以得到图 19-21。对图 19-21 的数据进行回归分析得到一层护层的插入损失为

$$IL = 11.7\log(mdf^2) - 43.3 \quad (5\times10^3 \leqslant mdf^2 \leqslant 10^8) \tag{19-75}$$

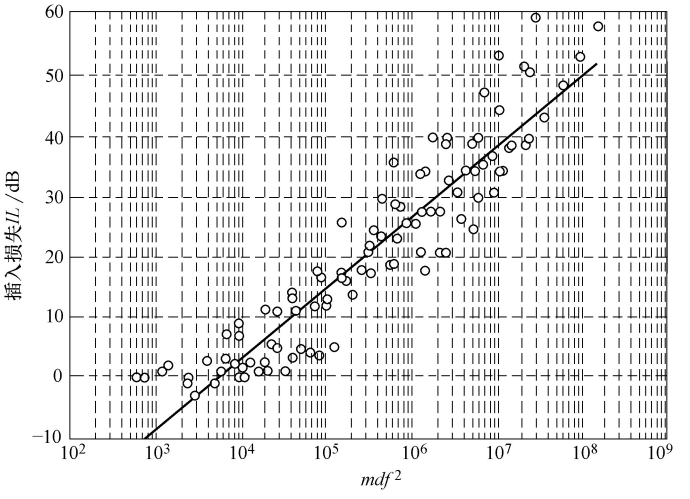


图 19-21　根据对管道一层护层实验和现场测试得到的插入损失测量值以及回归分析

运用同样的方法去计算双层护层，它近似到两个自由度的振动系统，由此得到图 19-22，并且插入损失为

$$IL = 6.9\log(m_1m_2d_1d_2f^4) - 40.3 \quad (10^6 \leqslant m_1m_2d_1d_2f^4 \leqslant 10^{15}) \tag{19-76}$$

式中，下标“1”和“2”分别表示第一层和第二层。

19.2.2.2　管道/风道护层[4]

根据需要，使用了多种多样的管道/风道护层，如图 19-19 所示。一种比较简单并且实际的方法就是通过吸声材料把一块薄平板放置在管壳上，如图 19-23 所示。在这种情况下，假定管壳的振动不会被放置的薄平板所影响，那么管道护层的插入损失就可以通过有声桥的双面墙的传声损失用到的方法来推导出来，其公式如下所述：

（1）点连接

$$IL = -10\log\left[\beta^2\frac{8}{\pi^3}n_p\frac{c^2}{f_c^2} + \left(\frac{f_r}{f}\right)^4\right] + 10\log\sigma \tag{19-77}$$

（2）线连接

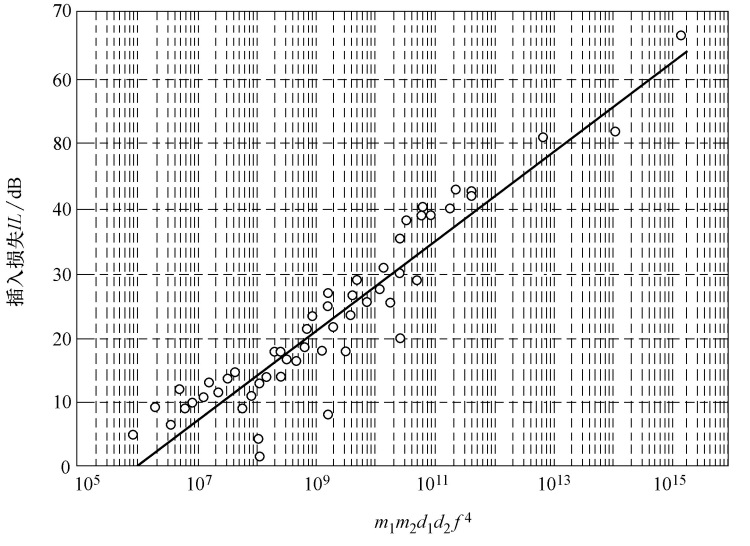


图 19-22 根据对管道两层护层实验和现场测试得到的插入损失测量值以及回归分析

$$IL = -10\log\left[0.64n_L\frac{c}{f_c}+\left(\frac{f_r}{f}\right)^4\right]+10\log\sigma \tag{19-78}$$

式中，β 为弹性支撑的隔振因子（$\beta=1$ 对应刚性支撑）；n_P 为单位面积的声桥数；n_L 为单位长度的螺栓数；f_c 为式（19-12）给出的薄板临界频率；f_r 为式（19-66）给出的共振频率；σ 为薄平板的声辐射效率。

在知道了临界频率 f_c 和共振频率 f_r 后，就可以从图 19-24 和图 19-25 中的图来获得插入损失，而不需要使用式（19-77）和式（19-78）。在图 19-24 和图 19-25 中，假定 $\sigma=1$。注意，从式（19-77）和式（19-78）中，为了获得比较高的插入损失，必须考

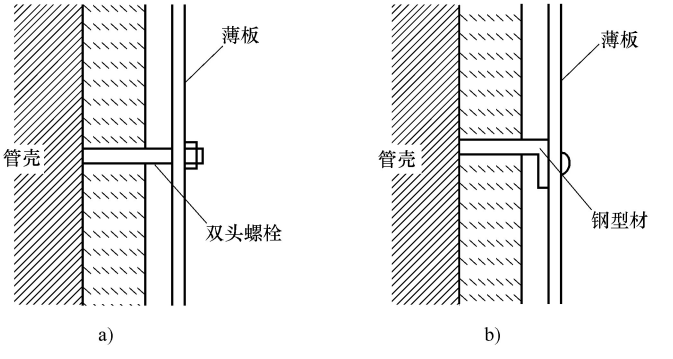


图 19-23 管道护层和薄板与管壳的连接形式

a）点连接 b）线连接

虑下面的两个措施：

① 让连接点之间或者螺栓之间的距离保持尽可能的大（减小 n_P 和 n_L）。

② 让气腔尽可能的大（减小 f_r）。

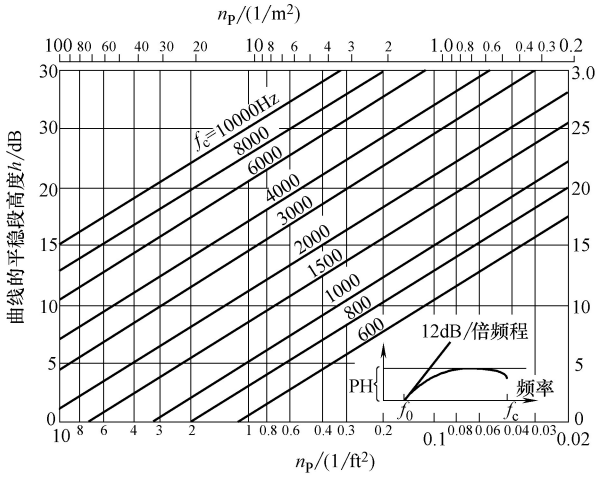


图 19-24　点连接曲线平稳段高度作为单位面积声桥数的函数[4]

（来源：Beranek，L. L. 1988. Noise and Vibration Control，INCE/USA.）

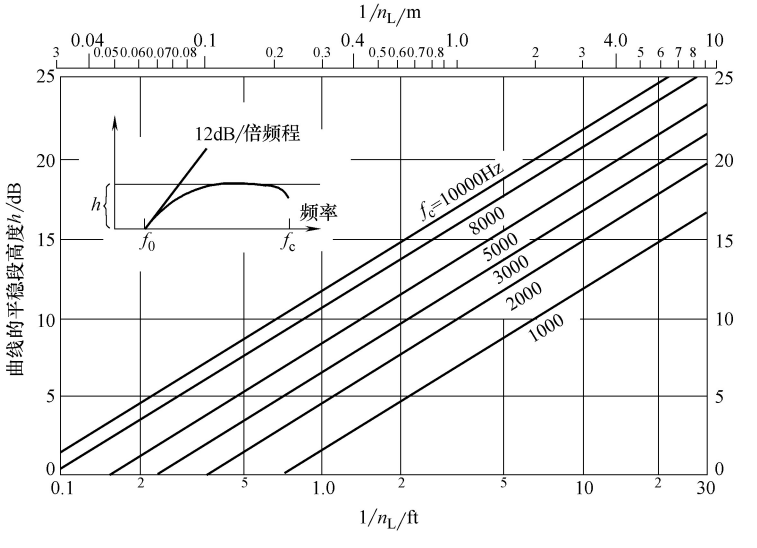


图 19-25　线连接曲线平稳段高度作为单位长度螺栓数的函数[4]

（来源：Beranek，L. L. 1988. Noise and Vibration Control，INCE/USA.）

参考文献

1. Shiraki, K., ed. 1987. *From Designing of Noise Reduction to Simulation* (in Japanese), Ouyou-gijutsu Shuppan, Chiyoda-ku, Tokyo.
2. Tokita, Y., ed. 2000. *Sound Environment and Control Technology, Vol. I, Basic Engineering* (in Japanese), Fuji-techno-system, Bunkyo-ku, Tokyo.
3. Okura, K. and Saito, Y., Transmission loss of multiple panels containing sound absorbing materials in a random incidence field, *Inter-noise*, 78, 637, 1978.
4. Beranek, L.L., ed. 1988. *Noise and Vibration Control*, INCE/USA, Ames, IA.
5. Sharp, B.H. 1973. A study of techniques to increase the sound insulation of building elements, Wyle Laboratory Report WR 73-5, El Segundo, CA.

20 统计能量分析

摘要

本章介绍了统计能量分析（SEA）应用于结构系统声学问题的基础。描述了由两个或者多个子系统组成的结构能量流动公式，给出了结构子系统和声学子系统的建模和分析步骤，并给出了必要的 SEA 参数的估计步骤。最后，通过一座二层楼的例子阐述了 SEA 在结构实际应用中的步骤。

20.1 概述

本章介绍了统计能量分析（SEA）方法的基本概念，并介绍了它在结构中的应用。设备和结构振动响应和辐射噪声的计算与分析技术，是随物体对象特性和频率范围而变化的。本章着重分析与宽频带、大规模结构有关的振动和噪声。当采用有限元方法进行有关给定振动模态的计算时，那么就要求有大量的计算了。特别的是，当必须在高频段计算，并且在这个频率带包含了许多阶模态，那么计算量就相当可观，一般还会降低计算精度。为了解决传统方法的薄弱点，在分析频率带上对所有模态重新统计平均分布这些能量就是很有必要了。对很宽频带的结构来说，这个方法允许将计算结果和试验结果进行比较，这就是 SEA 方法[1]。在这种分析方法发展的早期，它的目标就是当发动机喷射时预测人造卫星和火箭接受声波激励的振动响应，并预测飞机机身边界层噪声中的振动响应应力。它也变成了一个在宽频带内允许激振力是统计（随机的）扩散（分布的）的模型。这种技术考虑了扩散（分布）声场的激励能量，和代表声压、加速度与激励力的变量。因此，它可以应用到振动通过每个元素传播的固体声问题[2]和有很多障碍存在的气体声问题中[3]，甚至可以用于存在多个激励点的情况。

20.2 功率流方程

这里不用 SEA 方法去解决分析结构具体的特征模态，相反，可以把结构部件考虑成一组等效振动元素，并且把部件的振动状态评价为频率带和空间上的宏观统计平均值（运用描述能量的方法）。这里假定在给定的频率带内振动模态是均匀分布的，并且被激励到同一程度。

使用 SEA 方法，可以确定子系统之间的功率流关系，并且通过求解这些关系，可

以计算出存储在每个子系统中的能量，然后解释这些基本功率流[4]的方程式。

20.2.1 两子系统结构的功率流方程式

由两个子系统组成的结构功率流关系如图 20-1 所示。在典型条件下，子系统 1 和子系统 2 之间的功率流方程式可以表示为

$$\text{子系统 1：}\quad P_{i1}=P_{\mathrm{I1}}+P_{12} \tag{20-1}$$

$$\text{子系统 2：}\quad P_{i2}=P_{\mathrm{I2}}+P_{21} \tag{20-2}$$

式里，P_{i1}是从外面输入到子系统 1 的功率；P_{I1}是子系统 1 的内部功率损失；P_{12}是从子系统 1 传递到子系统 2 的功率。

内部功率损失 P_{I1}可以写成

$$P_{\mathrm{I1}}=\omega\eta_1 E_1 \tag{20-3}$$

式中，ω 是频带中心角频率；E_1是在子系统 1 中频率带宽为 $\Delta\omega$ 的能量；η_1是内部损失因子（ILF）。

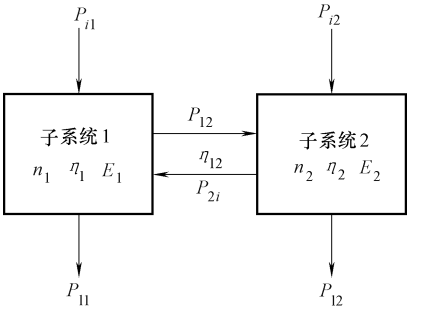


图 20-1 两个子系统之间的功率流关

子系统 1 的平均模态能量 E_{m1}和子系统 2 的平均模态能量 E_{m2}分别为

$$E_{\mathrm{m1}}=\frac{E_1}{N_1}$$

$$E_{\mathrm{m2}}=\frac{E_2}{N_2} \tag{20-4}$$

式中，N_1是在子系统 1 中的频率带宽为 $\Delta\omega$ 的模态数；N_2是在子系统 2 中的频率带宽为 $\Delta\omega$ 的模态数。

子系统 1 和 2 之间的传递功率 P_{12}可以表示为

$$P_{12}=-P_{21}=P'_{12}-P'_{21} \tag{20-5}$$

$$P'_{12}=\omega\eta_{12}E_1=\omega\eta_{12}N_1E_{\mathrm{m1}} \tag{20-6}$$

$$P'_{21}=\omega\eta_{21}E_2=\omega\eta_{21}N_2E_{\mathrm{m2}} \tag{20-7}$$

式中，η_{12}和 η_{21}分别是从子系统 1 到子系统 2，和从子系统 2 到子系统 1 的耦合损失因子（CLF）。它们满足关系式

$$\eta_{12}n_1=\eta_{21}n_2$$

因此，传递功率 P_{12}变成

$$P_{12}=\omega\eta_{12}N_1(E_{\mathrm{m1}}-E_{\mathrm{m2}})=\omega\eta_{12}N_1\left(\frac{E_1}{N_1}-\frac{E_2}{N_2}\right) \tag{20-8}$$

因而，功率流方程式（20-1）和式（20-2）可以重新表示为

$$P_{i1}=\omega\eta_1E_1+\omega\eta_{12}N_1\left(\frac{E_1}{N_1}-\frac{E_2}{N_2}\right) \tag{20-9}$$

$$P_{i2}=\omega\eta_2E_2+\omega\eta_{21}N_2\left(\frac{E_2}{N_2}-\frac{E_1}{N_1}\right) \tag{20-10}$$

如果给出了统计能量分析（SEA）的参数，即模态密度、内部损失因子（CLF）和输入功率，则每个子系统的能量状态就可以容易地计算出来。

20.2.2 多子系统结构的功率流方程式

通过扩充20.2.1所述的关系式，可以用同样的方法确定多子系统结构的功率流的关系。N个子系统结构的功率流方程式用如下的矩阵形式表示为

$$\omega\begin{bmatrix} (\eta_1+\sum_{i\neq 1}^{N}\eta_{1i})\eta_1 & -\eta_{12}\eta_1 & \cdots & -\eta_{1N}n_1 \\ -\eta_{21}\eta_2 & (\eta_2+\sum_{i\neq 2}^{N}\eta_{2i})\eta_2 & \cdots & -\eta_{2N}n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{N1}\eta_n & \cdots & \cdots & (\eta_N+\sum_{i\neq N}^{N-1}\eta_{Ni})\eta_N \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} E_1/n_1 \\ E_2/n_2 \\ \vdots \\ E_N/n_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{i1} \\ P_{i2} \\ \vdots \\ P_{iN} \end{bmatrix} \tag{20-11}$$

根据式（20.11），如果SEA参数以两个子系统结构一样的方式给出，那么每个子系统的能量方程式也就可以得到了。

子系统的平均能量是以下面的振动速度和声压来表示的：

$$E=m\langle v^2\rangle \tag{20-12}$$

$$E=\frac{m\langle p^2\rangle}{z_0^2} \tag{20-13}$$

式中，m是子系统的质量；$\langle v^2\rangle$是振动速度的均方值；$\langle p^2\rangle$是声压均方值；Z_0是空气比声阻抗。

因此，如果每个部件能量的状态都可以通过式（20-11）来确定的话，那么就可以用式（20-12）和式（20-13）来计算振动变量和声压。

20.3 统计能量分析（SEA）参数的估计

为了求解功率流方程式，确定统计能量分析参数，即模态密度、ILF、内部损失因子（CLF）和输入功率就很有必要。本节给出了计算统计能量分析参数的方法。

20.3.1 模态密度

20.3.1.1 结构子系统

模态密度是一个确定结构动力学特性的核心参数。频率带包含的模态数N（为了估计）是一个表示子系统之间能量传递容易程度的因子，该模态数是可以得到的。为了在给出的频率带中确定N，最重要的就是确定模态密度$n(f)$，也就是在频率带中N的

梯度。

结构子系统的模态密度可以通过运用下面的公式[4,5]来计算：

$$n(f)=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}f}=\frac{1}{f_0}=\frac{A}{2t}\sqrt{\frac{12\rho(1-\upsilon^2)}{E}} \tag{20-14}$$

式中，A 是横截面的面积；t 是结构子系统的厚度；ρ 是质量密度；υ 是泊松比；E 是杨氏模量；f_0是结构子系统的基本固有频率。

20.3.1.2 声学子系统

声学子系统的模态密度可以由下面的解析式来确定[6]：

$$n(f)=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}f}=\frac{4\pi V f^2}{c^3} \tag{20-15}$$

式中，c 是在声学子系统中的传播声速；V 是声学子系统的容积。

在低频带内声腔的模态密度是与两维空间类似的方式推导出来的。定义声腔的深度为 d，声腔中的驻波频率为 $f_{\mathrm{d}}=c/2d$。如果 $f<f_{\mathrm{d}}$，就可以认为模态密度是均匀分布的，并且估计值为

$$n(f)=\frac{2\pi S}{c^2}f \tag{20-16}$$

式中，S 是声腔面积。

如果 $f>f_{\mathrm{d}}$，那么模态密度就可以通过式（20-15）估计出来，这是因为从原理上说声腔在声学上是三维的。

20.3.2 内部损耗因子

20.3.2.1 结构子系统

当从外面输入子系统的功率转化成了子系统的动能时，子系统的内部损耗因子 η_1 就是损耗比。测量阻尼比的激励测试是用来估计结构子系统的内部损耗因子（ILF）的。有很多种估计方法来确定内部损耗因子。在统计能量分析方法中运用到的内部损耗因子，是通过同时测量输入能量和输出能量或者通过在给定的时间范围内测量衰减率估计得到的。这两种方法都需要相同的设置去完成激励测试，并且如果两种方法都进行的话，那么测量精度就可以提高。

用上面提到的能量测量方法，内部损耗因子的估计值可以表达为

$$\eta=\frac{\int_{f_1}^{f} Re(Y)F^2\mathrm{d}f}{\omega_0 m\langle\int_{f_1}^{f} v^2\mathrm{d}f\rangle} \tag{20-17}$$

式中，Y 表示在 f_1 到 f_2 之间在激励点处的复数导纳；F^2 表示输入振动力的功率谱；v^2 是响应速度的功率谱；< > 表示空间平均运算符。

20.3.2.2 声学子系统

声学子系统的内部损耗因子（ILF）由下式确定[7]：

$$\eta = \frac{cS\,\overline{\alpha}}{4V\omega} \tag{20-18}$$

式中，$\overline{\alpha}$是平均吸声系数；V 是声子系统的容积；S 是表面积。通过测量混响时间，就可以对吸声系数进行估计。

不管是低频带内声腔的内部损耗因子还是模态密度，它们都和二维空间上的参数推导相同。在$f<f_{\mathrm{d}}$时，其内部损失因子（ILF）的估计公式为

$$\eta = \frac{cS_{\mathrm{P}}\alpha_{\mathrm{P}}}{\pi\omega V_{\mathrm{c}}} \tag{20-19}$$

式中，α_{P}是声腔吸声系数；S_{P}是声腔外围面积；V_{c}是声腔容积。

对于$f>f_{\mathrm{d}}$，因为声腔可以看成是一个声学子系统，所以可以用式（20-18）来估计模态密度。

20.3.3 耦合损耗因子

20.3.3.1 结构子系统之间的损耗因子

当功率在两个子系统之间传递时，耦合损耗因子 η_{ij}给出的是损耗比[4]。两个平板之间的耦合损耗因子可以估计为

$$\eta_{ij} = \frac{c_{gi}L_{\mathrm{c}}\tau}{\pi\omega S_i} \tag{20-20}$$

式中，c_{gi}是弯曲波的群速度，L_{c}是耦合长度，S_i是表面面积，τ_{ij}是从子系统 i 到子系统 j 的能量传递因子。这个传递因子随耦合类型而变，如有 I-类型、L-类型或者是 T-类型，如图 20-2 所示。本节主要使用垂直入射下的能量传递效率，具体内容参见 Cremer 的文献[7]。

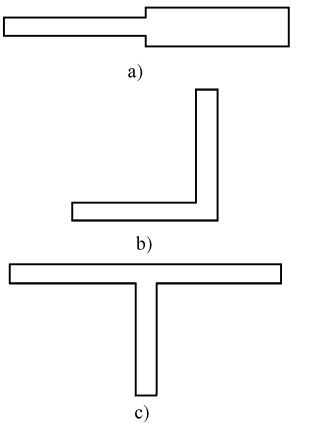


图 20-2 耦合类型
a）I 类型；b）L 类型；c）T 类型

20.3.3.2 在结构子系统和声学子系统之间的损耗因子

在结构子系统和声学子系统之间的耦合功率是基于传递处共振的功率流。结构子系统和声学子系统之间的耦合损耗因子（CLF）为

$$\eta_{ij} = \frac{Z_0 S_{\mathrm{c}}\sigma}{\omega M_i} \tag{20-21}$$

式中，Z_0是空气的声阻抗率或比声阻抗；S_{c}是耦合表面面积；σ 是声辐射效率；M_i是结构子系统质量。

20.3.3.3 在声学子系统和声腔之间的损耗因子

在声学子系统和声腔之间的耦合功率是建立在传递共振基础上的功率流。在声学子系统和声腔之间的耦合功率 CLF 为[8]

$$\eta_{\mathrm{sc}} = \frac{c_{\mathrm{s}}S_{\mathrm{cs}}\tau_{\mathrm{m}}}{4\omega V_{\mathrm{s}}} \tag{20-22}$$

式中，c_s是在声空间中的声速；V_s是声空间中的容积；τ_m是在任意入射条件下的传递因子，取决于流过隔板的质量；S_{cs}是耦合面积。

20.3.4 输入功率

20.3.4.1 振动输入功率

振动输入功率P_{iN}为

$$P_{iN} = \omega m_i \langle v_i^2 \rangle \tag{20-23}$$

式中，m_i是等效质量；$\langle v_i^2 \rangle$是振动速度的均方值；ω是中心角频率。

20.3.4.2 声学输入功率

声学输入功率P_s为

$$P_s = \frac{\langle p^2 \rangle S^2 n(f)}{4m} \sigma_{rad} \frac{c^2}{2\pi S f^2} \tag{20-24}$$

式中，$\langle p^2 \rangle$是输入声压均方值；S是部件表面面积；m是部件质量；$n(f)$是模态密度；并且σ_{rad}是声辐射因子[2]。

20.4 结构上的应用

本节例举了一个有较大分析精度的建模案例，并且讨论了统计能量分析方法在结构上的应用。

20.4.1 在拖拉机驾驶室噪声预测中的应用

图20-3表示了一个拖拉机驾驶室的模型。这个图显示了这个驾驶室由地板、门、天花板以及其他组件组成。图20-4显示了在这个驾驶室之内的功率流关系[9,10]。

从这个驾驶室得到的结果如图20-5所示。根据这个图，可以发现：在中频到高频段的计算值和测量值之间的偏差大约为2dB。

20.4.2 在建筑物噪声和振动预测中的应用

考虑一栋钢筋混凝土建造的两层实验室楼。这个建筑物的结构如图20-6所示。这个建筑物由一间动力驱动室、一间声学实验室、一间电脑室、一间测量室、一间设备室和其他一些房间构成。

我们采用I-类型、L-类型或者T-类型连接点建立结构子系统模型，并且把声学子系统作为一个元素来考虑，如图20-6所示。

在这种状态下建立的统计能量分析模型是由61种单元组成，并且有244个连接点。子系统1～17、子系统19～42是混凝土部件；子系统18、子系统43～48是石膏板部件；子系统49～55是房间部件；子系统56～61是声腔部件。比如，图20-7表示了在整栋建筑物中结构子系统之间的功率流关系，而图20-8表示的是在声学实验室中的功率流关系。这里，点画线、虚线和实线分别表示I-类、L-类和T-类型结合体。子系统53是

房间部件，并且从图 20-8 可以看出：它是由所有结构部件连接而成的。坐落在电脑室和测量室之间的石膏板被认为是一个隔板，因此，在子系统 49 和子系统 56 ~ 59（声腔部件）、子系统 50 和子系统 60 及 61（声腔部件）之间的连接是根据非谐振模态推导得到。

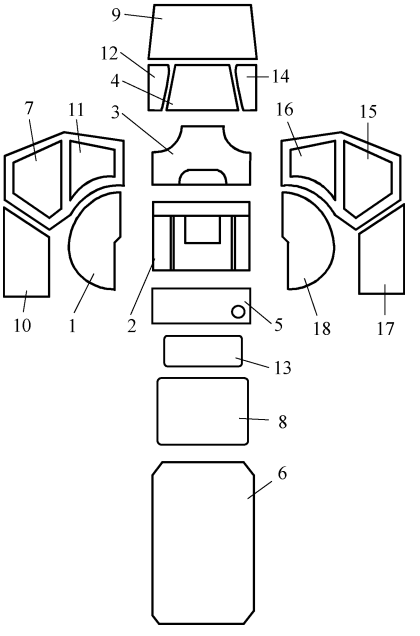


图 20-3　拖拉机驾驶室建模
（图中数字表示各零部件，
可在相关的参考文献中查阅）

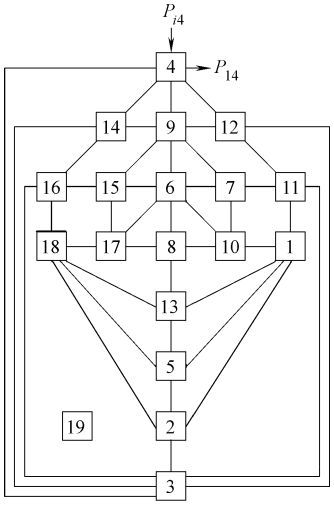


图 20-4　拖拉机驾驶室中的功率流
（图中数字表示各零部件，
可在相关的参考文献中查阅）

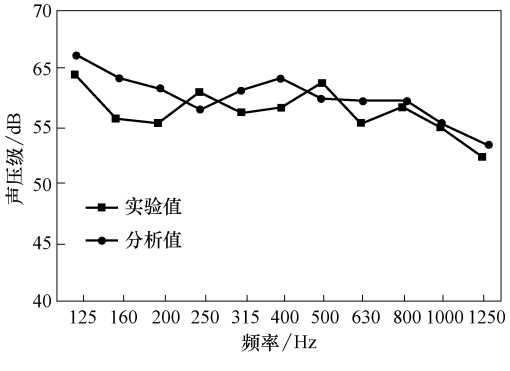


图 20-5　驾驶室声压级估计结果

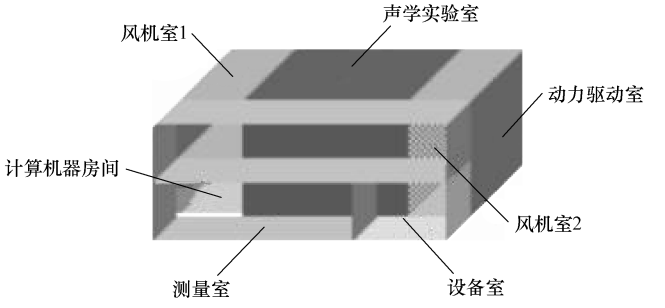


图 20-6 大楼构造

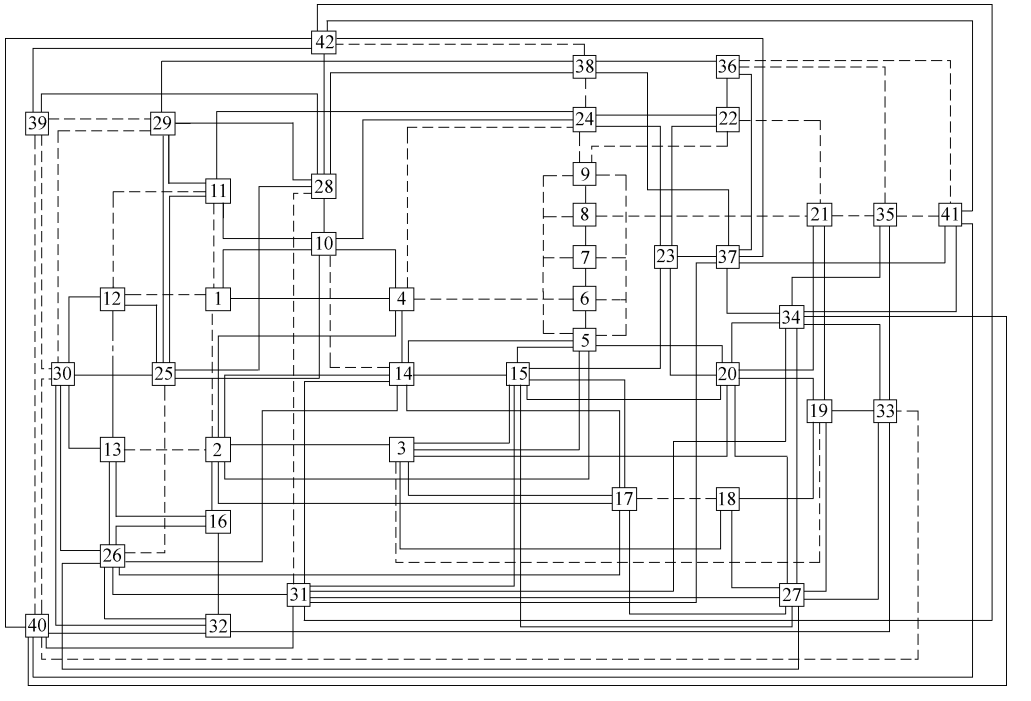


图 20-7 整栋大楼结构子系统之间的功率流关系

（图中数字表示各零部件，可在相关的参考文献中查阅）

一些其他房间的结果如图 20-9 所示。虽然在中频到高频段的计算值和测量值之间的偏差接近 4dB，但是由于这幢建筑物的结构很复杂，所以这个建筑物的计算精度要比驾驶室的计算精度差一些。

整个计算大约需要 10s，在个人计算机上这个工作量是非常小的。

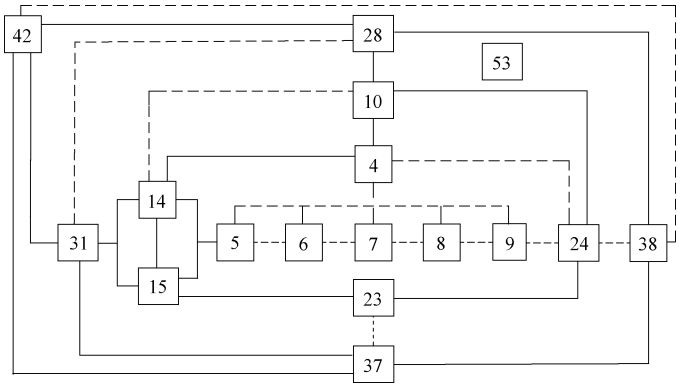


图 20-8　声学实验房间功率流的关系
（图中数字表示各零部件，可在相关的参考文献中查阅）

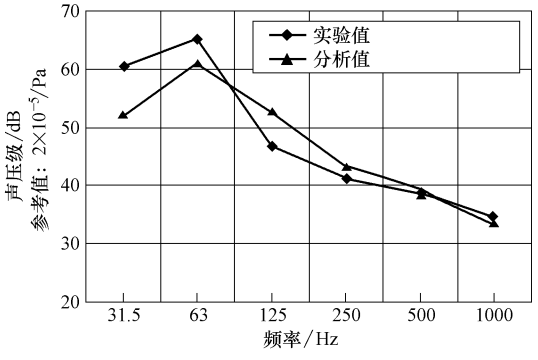


图 20-9　其他房间声压级估计值

参 考 文 献

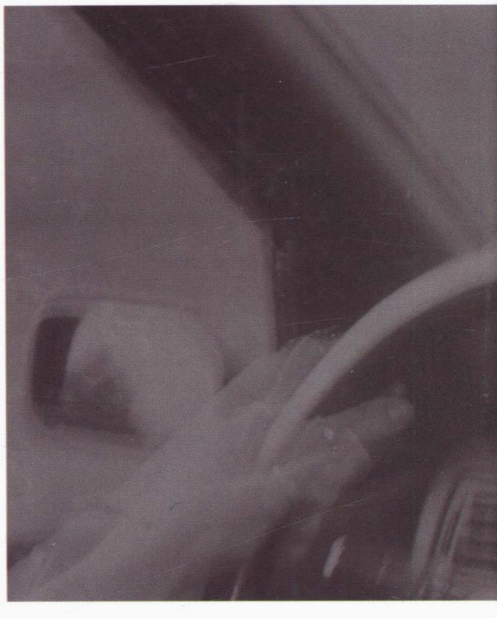
1. Lyon, R.H. 1975. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications*, MIT Press, Cambridge, MA.
2. Irie, Y., Solid propagation sound analysis by SEA, *Mitsubishi Heavy Ind. Tech. Rev.*, 21, 4, 571–578, 1984.
3. Crocker, M.J., Sound transmission using statistical energy method, *AIAA I.*, 15, 2, 75–83, 1977.
4. Irie, Y., Solid propagation sound analysis by SEA, *Nihon Onkyo Gakkai-shi*, 48, 6, 433–444, 1992.
5. Lyon, R.H. and Dejong, R.G. 1995. *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, Oxford.
6. Craik, R.J.M. 1996. *Sound Transmission Through the Buildings Using Statistical Energy Analysis*, Gower Press, England.
7. Cremer, L., Heckle, M., and Unger, E.E. 1973. *Structure Borne Sound*, Springer, New York, pp. 347–370.
8. *Mechanical Noise Handbook*, JSME, Japan Society of Mechanical Engineers, pp. 179–181, 1991 (in Japanese).

9. Koizumi, T., Tsujiuchi, N., Kubomoto, I., and Ishida, E., Estimation of the noise and vibration response in a tractor cabin using statistical energy analysis, *JSAE Paper*, 28, 4, 49–54, 1997.
10. Koizumi, T., Tujiuchi, N., Kubomoto, I., and Ishida, E., Estimation of the noise and vibration response in a tractor cabin using statistical energy analysis, *SAE Paper*, 1999-01-2821, 1999.
11. Koizumi, T., Tujiuchi, N., Tanaka, H., Okubo, M., and Shinomiya, M., Prediction of the vibration in building using statistical energy analysis, *IMAC Paper*, 7–13, 2002.



汽车先进技术译丛

发动机试验理论与实践
如何将汽车制成精品
汽油车近零排放技术
车辆动力学及控制
载货汽车技术
轻量化设计
汽车总线系统
制动技术手册
减振器手册
汽车底盘手册
汽车工程手册 （德国版）
汽车工程手册 （美国版）
汽油机直喷技术
轻量化
汽车轮胎研发
汽车轻量化
车辆操纵动力学
振动阻尼、控制和设计



地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

上架指导 交通运输 / 汽车技术
ISBN 978-7-111-41111-6
策划编辑◎徐魏 / 封面设计◎鞠杨

ISBN 978-7-111-41111-6
9 787111 411116 >
定价：148.00元