2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学（三）

名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题

难易匹配真题

符合命题趋势

不止是模拟，更接近实战

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（三）名师精选全真模拟冲刺题 10 套

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学三”考试的学生．书中包含了10套精心设计的模拟试题，题目难度稍高于考研真题．这些题目大部分为首次公开发布，非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习．本书的解答部分，不仅给出了详尽解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习．

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的教学人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（三）名师精选．全真模拟冲刺题10套/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015.4

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-48613-8

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第269304号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫

版式设计：霍永明　责任校对：胡艳萍

封面设计：路恩中　责任印制：刘　岚

北京京丰印刷厂印刷

2015年4月第2版·第1次印刷

184mm×260mm·12.75印张·307千字

0 001—3 000册

标准书号：ISBN 978-7-111-48613-8

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
010-88379203	金 书 网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

前　　言

深入地读完我们编写的2016全国硕士研究生入学统一考试备考用书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是为了把准备工作做得更充分，为了践行"战前多流汗，战时少流血"，应在考试前进行10场"实战演习"——认真、独立地做完10套模拟试题(各套模拟试题的难度稍高于考研真题)，作为最后的冲刺．

书中的10套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出，其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这10套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的语言指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点．当然，在"实战演习"时，不应一遇到困难就翻看详解，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进发．使用本书的实践证明：弄通模拟试题，不想拿高分都难．

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，并欢迎读者对本书提出宝贵意见，可发邮件到cqhshuxue@gmail.com，非常感谢!

北京邮电大学教授　陈启浩

目　　录

模拟试题(一)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $y=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$，则 $y^{(10)}=$

（A）$\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.　　（B）$\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

（C）$\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}$.　　（D）$\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

[　　]

（2）设函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\ln^2(1+t),\\ y=(\mathrm{e}^t-1)^2,\end{cases}$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 在 $t=0$ 处连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{t=0}$ 为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

[　　]

（3）定积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2x}\,\mathrm{d}x=$

（A）$\dfrac{3}{4}$.　　（B）$-\dfrac{1}{4}$.　　（C）$-\dfrac{3}{4}$.　　（D）$\dfrac{1}{4}$.

[　　]

（4）设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$，$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 是连续函数，则以下等式正确的是

（A）$\iint\limits_D[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=4\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$.

（B）$\iint\limits_D[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=4\iint\limits_{D_1}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$.

（C）$\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=2\iint\limits_{D_1}f(x)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$.

（D）$\iint\limits_D f(x^2)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=2\iint\limits_{D_1}f(x^2)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$.

[　　]

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*$ 等于

（A）$\boldsymbol{A}$.　　（B）$\boldsymbol{A}^*$.　　（C）$|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　（D）$|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.

[　　]

(6) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶正定矩阵，则下列选项中为正定矩阵的是

(A) $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$.　(B) $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$.　(C) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N\left(2\mu,\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$. 记$p_1=P(X\geqslant\mu-\sigma)$，$p_2=P\left(Y\leqslant 2\mu+\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$,则

(A) $p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$.　(B) $\dfrac{1}{2}<p_1<p_2$.

(C) $p_2<\dfrac{1}{2}<p_1$.　(D) $p_1=p_2>\dfrac{1}{2}$.

[　　]

(8) 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则统计量$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$的数学期望与方差分别为

(A) $\dfrac{1}{n}\sigma^2$，$\dfrac{2}{n}\sigma^4$.　(B) $\dfrac{1}{n}\sigma^2$，$\dfrac{4}{n}\sigma^4$.　(C) σ^2，$\dfrac{2}{n}\sigma^4$.　(D) σ^2，$\dfrac{4}{n}\sigma^4$.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-x)\arctan\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}$__________.

(10) 定积分$\displaystyle\int_0^1\arctan\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=$__________.

(11) 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\ln x}, & x\geqslant 1,\ -\infty<y<+\infty,\\ \ln(x^{\ln 2})+y^2-3, & x<1,\ -\infty<y<+\infty,\end{cases}$则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_____.

(12) 差分方程$2y_{t+1}+10y_t-5t=0$的通解为__________.

(13) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&4\\1&2&-1&1\\-3&2&2&1\end{pmatrix}$，则$r((\boldsymbol{A}^2)^*)=$__________.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$，则随机变量 $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)=$ ________.

三、解答题： 15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$．记 $g(t)=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\sqrt[3]{\sin t}f(x)\right]^{\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\ln(1+x)}}$，求 $g'(0)$．

(16)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 求级数 $\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2-\frac{1}{4}}{2^n\cdot(n+1)!}$ 的和，记为 a；

(Ⅱ) 求微分方程 $y'=\mathrm{e}^y-\dfrac{2}{x}$ 的满足 $y(1)=a$ 的解 $y=y(x)\,(x>0)$．

(17)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[0, 1]$上 3 阶可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=f'(1)=1$. 证明. 存在$\xi \in (0, 1)$，使得$f^{(3)}(\xi)=0$.

(18)(本题满分 10 分)

设二元函数$z=z(x, y)$由方程$2x^2+2y^2+z^2-8z+8=0$确定，求$z=z(x, y)$在$D=\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$上的最大值与最小值.

(19)(本题满分 10 分)

设二元连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(x,y)\cos x \mathrm{d}\sigma$,其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \sin x\}$,求 $f(x,y)$ 在 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$ 上的平均值.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, 求使矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解的常数 a, b, c, 并求该方程的所有解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&2\\1&2\end{pmatrix}$. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，使得二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在此正交变换下化为标准形，并求此标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求(Ⅰ) DX；(Ⅱ) $P\left(X^2+Y^2\leqslant 1\,\middle|\,Y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $Z=\ln X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，其中 μ，σ^2 是未知参数. 又设 Z_1，Z_2，…，Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本. 求 EX 的最大似然估计量.

模拟试题(二)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}, & -\pi<x<0,\\ x^2+x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 的可去间断点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(2) 设函数 $f(x)=x\ln(x+a)-\dfrac{1}{e}$ 仅有单调减少区间 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$，则常数 a 等于

(A) -2.　　(B) -1.　　(C) 0.　　(D) 1.

[　　]

(3) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=f'(0)=0$，

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du, & x\leqslant 0,\\ \int_{-x}^0\ln(1+f(x+t))\,dt, & x>0,\end{cases}$$

则 $F''(0)$ 为

(A) 1.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{3}$.　　(D) 0.

[　　]

(4) 设 D 是由曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线 $x=2$ 围成的平面图形，则二重积分 $\iint\limits_D(x+y)\,d\sigma$ 为

(A) $\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C) $3\sqrt{3}$.　　(D) 0.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 n 为奇数的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

[　　]

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)$ 为

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

[ ]

(7) 设二维连续型随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-\frac{1}{2}y}), & x>0, y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则以下结论不正确的是

(A) X 与 Y 相互独立.

(B) $EY=2$.

(C) X 在 $Y=y>0$ 条件下的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)=e^{-x}$.

(D) 关于 X 的边缘分布函数 $F_x(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$.

[ ]

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $X\sim N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $Z=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_2-4X_4)^2$ 的方差 $D(Z)$ 为

(A) 4.　　(B) 3.　　(C) 2.　　(D) 1.

[ ]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}$ ________.

(10) 函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ x\ln x, & x>1,\end{cases}\psi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & |x|\leqslant 1\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$则定积分 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\mathrm{d}x$ = ________.

(11) 设函数$f(u, v)$具有连续偏导数，且在点$(1, 0)$的充分小邻域内，

$$f(u, v)=1-u-v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2}).$$

记 $g(x, y)=f(e^y, x+y)$，则 $\mathrm{d}g(x, y)\big|_{(0,0)}=$ ________.

(12) 设$f(x, y)$是二元连续函数，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 在直角坐标系中先 x 后 y 的二次积分为________.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}^*\end{pmatrix}^{-1}$

________.

(14) 设随机变量 X, Y 的概率密度同为 $f(t)=\begin{cases}\frac{3}{8}t^2, & 0<t<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 已知事件 $A=\{X>a\}$, $B=\{Y>a\}$ 相互独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，则常数 $a=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文

字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}\right)\arctan\dfrac{1}{x}$.

(16)(本题满分 10 分)

求由直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$ 围成的平面图形分别绕直线 $y=1$ 和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积.

(17)(本题满分 10 分)

求 $a=1$ 与 $a=2$ 时微分方程 $y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$ 的通解.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：当 $|x|$ 充分小时，有 $0\leqslant\tan^2 x - x^2\leqslant x^4$；

(Ⅱ)设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\tan^2\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x, y)$ 是二重积分 $I = \iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 在直角坐标系中的被积函数，其中 $D=\left\{(r, \theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

(Ⅰ)求 $f(x, y)$ 的表达式与 I 的值；

(Ⅱ)记 $g(x, y)=f(x+y, \sqrt{2xy})$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$与向量组$(B)$：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$等价，求

(Ⅰ)常数a；

(Ⅱ)(A)由(B)的线性表示式.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$)，将二次$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$化为标准形，其中正交矩阵$\boldsymbol{Q}$的第 1 列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求

(Ⅰ)常数a及f的标准形；

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^*$能否正交相似对角化？如果能写出使$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$的正交矩阵$\boldsymbol{P}$及对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$；如果不能，说明理由.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases} Ax^2y, & (x, y)\in G=\{(x, y) \mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1\}, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

求常数 A 及方差 $D(2X+3Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases} 1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^2, & x>\alpha>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

记 $Z=X^2$, Z_1, Z_2, $\cdots$, Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本. 求未知参数 α 的最大似然估计量.

模拟试题(三)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上

(A) 处处可导.　　(B) 恰好有一个不可导点.

(C) 恰好有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

[　　]

(2) 记 $F(x)=\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\,\mathrm{d}t$，则 $F''(x)$为

(A) $4\sin4x$.　　(B) $-4\sin4x$.

(C) $4\cos4x$.　　(D) $-4\cos4x$.

[　　]

(3) 方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\tan^3x}\mathrm{d}x$ 的正根个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(4) 设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个邻域内具有2 阶连续偏导数，且$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$. 记$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则以下结论不正确的是

(A) 当$A>0$，$AC-B^2>0$时，$f(x_0,y_0)$是极小值.

(B) 当$C>0$，$AC-B^2>0$时，$f(x_0,y_0)$是极小值.

(C) 当$AC-B^2=0$时，$f(x_0,y_0)$不是极值.

(D) 当$AC-B^2<0$时，$f(x_0,y_0)$不是极值.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶可逆矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=2$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^*\\(3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的逆矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{A}\\3\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}\\\frac{1}{4}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{B}\\3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}3\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$.

[　　]

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 及 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则

(A) $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　(B) $t=6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

(C) $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$.　　(D) $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

[　　]

(7) 已知 10 件产品中有 4 件一等品，6 件二等品. 现从中任取两次，每次取一件，取后不放回. 已知其中至少有 1 件是一等品，则两件都是一等品的概率 p 为

(A) $\frac{1}{5}$.　　(B) $\frac{2}{5}$.　　(C) $\frac{3}{5}$.　　(D) $\frac{4}{5}$.

[　　]

(8) 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且同服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，即它们的概率密度同为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则对任意实数 x，下列结论中正确的为

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right)=\Phi(x)$.

[　　]

二、填空题： 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$ ＿＿＿＿＿.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿＿.

(11) 设 $z=f(e^x, x^2+y^2)$，其中二元函数 $f(u,v)$ 可微，且 $y=y(x)$ 是由方程 $e^x+\sin y=x$ 确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$ ＿＿＿＿＿.

(12) 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ (其中，D 是曲线 $y=x^2(\geqslant 0)$，直线 $x+y=2$ 以及 x 轴围成的平面图形) 在极坐标系下，先 r 后 θ 的二次积分为＿＿＿＿＿.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 4 阶矩阵，它们相似，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2, 1, 1, 2$，则行列式 $|\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_4|=$ ＿＿＿＿＿.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ Y 的概率分布为 $P(Y=0)=\frac{1}{3}$,

$P(Y=1)=\dfrac{2}{3}$，则 $E(X^3+2Y^2)=$__________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分 . 请将解答写在答题纸指定位置上 . 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤 .

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 在点 $u=1$ 处可导，$f'(u)=1$. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\ln(1+x^2)+e^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}.$$

(16)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + y = 5e^{2x} + 2\sin x$ 的通解.

(17)(本题满分 10 分)

设数列$\{a_n\}$由递推式 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2a_n + \dfrac{1}{a_n^2}\right)(n = 1, 2, \cdots)$确定，求

(Ⅰ)极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$(记为 a)；

(Ⅱ)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n} x^n$ 的收敛域.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0<f(x)<1$，以及 $f'(x)\neq 1(0<x<1)$，则存唯一的 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

(19)(本题满分 10 分)

设二元函数
$$f(x,y)=\begin{cases} x\ln x, & x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & 1<x+y\leqslant 2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \end{cases}$$
求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-2x_2+x_3=2, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \end{cases}$有两个不同的解，且 a 为系数矩阵的秩，求其通解及向量 $\boldsymbol{\xi}=(a, b, c)^{\mathrm{T}}$ 关于向量组 $\boldsymbol{\eta}_1=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$的线性表示式.

(21)(本题满分 11 分)

已知$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3(c\geqslant 2)$与 $g(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+x_3^2$ 中有且仅有一个是正定二次型，求常数 c，及由可逆线性变换将正定二次型化为的规范形，用正交变换将非正定二次型化为的标准形(需分别求出可逆线性变换与正交变换).

(22)(本题满分 11 分)

设有随机变量 X，Y，其中 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 且在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度为 $f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 求 $D(X)$ 及 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $Z=XY$，其中随机变量 X，Y 相互独立，且 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}(\lambda>0)$，$Y$ 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

，又设 z_1，z_2，…，z_n 是来自 Z 的一个简单随机样本的观察值，求未知参数 λ 的最大似然估计值.

模拟试题(四)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=0$，$g'(1)=-1$．记

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$$

则 $f'(1)$ 为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) -1.　　(D) 不存在.

[　　]

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}$ 的极大值与极小值分别为

(A) 1，-1.　　(B) -1，1.　　(C) 不存在，-1.　　(D) 1，不存在.

[　　]

(3) 设二元函数 $\varphi(x,y)=\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}u\int_0^u \dfrac{1}{y^2}f\left(\dfrac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$（其中 f 是连续函数），则 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ 为

(A) $\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.　　(B) $\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

(C) $\dfrac{1}{x^4}f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.　　(D) $\dfrac{1}{x^4}f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

[　　]

(4) 设曲线 $y=y(x)$ 在点 $M(0,1)$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$，且 $y(x)$ 满足微分方程 $yy''+(y')^2=0$，则 $y(x)$ 为

(A) $\sqrt{1+x}$ $(x\geqslant -1)$.　　(B) $\sqrt{1+x}$ $(x\geqslant 0)$.

(C) $y^2=x+1$ $(x\geqslant -1)$.　　(D) $y^2=x+1$ $(x\geqslant 0)$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则线性方程组

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有无穷多解.　　(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解.

(C) $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.　　(D) $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

[　　]

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同且相似的是

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

[　　]

(7) 设随机变量 X 服从指数分布，它的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则随机变量 $Y=\max\left\{X,\ X^2,\ \frac{1}{2}\right\}$ 的分布函数

(A) 是连续的.　　(B) 只有一个间断点.

(C) 只有两个间断点.　　(D) 多于两个间断点.

[　　]

(8) 设 X_1, X_2, …, X_8 是来自总体 $X\sim N(0,\ \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则统计量 $\dfrac{(X_1+X_2+X_5+X_6)^2}{(X_3+X_4-X_7-X_8)^2}$ 服从

(A) $F(4,\ 2)$.　　(B) $F(4,\ 4)$.　　(C) $F(1,\ 1)$.　　(D) $F(2,\ 4)$.

[　　]

二、填空题： 9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为__________.

(10) 由拉格朗日中值定理知，对任意 $x\in(0,\ 1)$，对应地存在唯一的 $\xi(x)\in(0,\ x)$，使得 $\mathrm{acrsin}x=\dfrac{x}{\sqrt{1-\xi^2(x)}}$，则极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\xi(x)}{x}=$__________.

(11) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^{\pi}\mathrm{e}^{2f(x)}\sin x\mathrm{d}x=$__________.

(12) 设二元函数 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\ \dfrac{x}{y}\right)$，其中 $\varphi(u,\ v)$ 具有 2 阶偏导数，且满足 $\varphi''_{uv}+$

$\frac{1}{y}\varphi''_{vv}=0$，则 $z''_{xy}=$ __________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且其列向量组线性无关；$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，则 $r(\boldsymbol{B}^*)=$ __________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $D(X+Y^2)=$ __________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中函数 $f(x)=|x+1|+2x$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(t)=\begin{cases}2t^2+\sin t, & t<0,\\ y(t), & t\geqslant 0,\end{cases}$ 其中 $y=y(t)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=\mathrm{e}^{-t}$ 满足 $y(0)=0$ 的解. 求 $f''(t)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\sin x\cdot f(x)$, 以及 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. 求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值.

(18)(本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在闭区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant \frac{1}{2}, y\geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

(19)(本题满分 10 分)

设二元函数 $u=u(x, y)$ 具有 2 阶连续偏导数，且满足 $u''_{xx}=u''_{yy}$，$u(x, 2x)=x$，$u'_x(x, 2x)=x^2$. 又设 D 是由半圆 $x^2+z^2=1(z\geqslant 0)$，曲线 $z=u''_{xx}(x, 2x)$，$z=u''_{xy}(x, 2x)$ 围成的平面图形，求 D 的面积.

(20)(本题满分 11 分)

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma}=(0,\ 0,\ 8)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$b=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，求线性方程组 $2b^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+b^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$，求使二次型 $f_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$)都化为标准形的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，并写出它们的标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -2<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求

(Ⅰ) 随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度 $\varphi(y)$；

(Ⅱ) 求 $E(|Y-X^4|)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，其中 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $\theta>0$. 求当 n 无限增加时，未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 所近似服从的分布.

模拟试题(五)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $f(x)$ 可导，

(A) 若 $f(x)$ 只有一个零点，则 $f'(x)$ 至少有两个零点.

(B) 若 $f'(x)$ 只有一个零点，则 $f(x)$ 至少有两个零点.

(C) 若 $f(x)$ 没有零点，则 $f'(x)$ 至少有一个零点.

(D) 若 $f'(x)$ 没有零点，则 $f(x)$ 至多有一个零点.

[　　]

(2) 对于定积分 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\mathrm{d}x, I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x$ 有

(A) $I_1<I_2$.　　(B) $I_1<I_3$.　　(C) $I_3<I_2$.　　(D) $I_3<1$.

[　　]

(3) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则

(A) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$.

(B) $f''_{xy}(0,0)>f''_{yx}(0,0)$.

(C) $f''_{xy}(0,0)<f''_{yx}(0,0)$.

(D) $f''_{xy}(0,0)$ 与 $f''_{yx}(0,0)$ 中至少有一个不存在.

[　　]

(4) 设二元函数 $f(x,y)$ 连续，记二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^1 f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 对应的二重积分的积分区域为 D，则 D 的边界上与直线 $y=x-1$ 平行的切线方程为

(A) $y=x-\dfrac{3}{4}$.　　(B) $y=x+\dfrac{3}{4}$.　　(C) $y=x-\dfrac{1}{2}$.　　(D) $y=x+\dfrac{1}{2}$.

[　　]

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-4,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,4,t+2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-8,2,t)^{\mathrm{T}}$ 有以下结论：

①$t=2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. ②$t=2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

③$t=3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. ④$t=3$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

则正确结论为

(A) ①③.　　(B) ②③.　　(C) ①④.　　(D) ②④.

[　　]

(6) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&1&-b-1\\0&0&0\end{pmatrix}$都可相似对角化，则

(A) $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$.　　(B) $a=b=\frac{1}{2}$.

(C) $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$.　　(D) $a=b=-\frac{1}{2}$.

[　　]

(7) 设连续型随机变量 X，Y 满足 $P(X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\frac{4}{7}$，则 $P(\max\{X,\ Y\}\cdot X\geqslant 0)$为

(A) $\frac{6}{7}$.　　(B) $\frac{4}{7}$.　　(C) $\frac{3}{7}$.　　(D) $\frac{2}{7}$.

[　　]

(8) 设总体 $X\sim N(0,\ \sigma^2)$，X_1，X_2，…，X_9 是来自 X 的简单随机样本，它的均值记为 $\overline{X}$，则使得 $P(1<\overline{X}<3)$为最大的 σ 值是

(A) $\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$.　　(B) $\frac{4}{\sqrt{\ln 3}}$.　　(C) $\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$.　　(D) $\frac{8}{\sqrt{\ln 3}}$.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}+x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)$的非铅直渐近线方程为________.

(10) 设函数 $f(x)=(\sin x^3)^3+\ln\cos x$，则 $f^{(4)}(0)=$________.

(11) 定积分 $\int_{-1}^{1}(|x|e^{-x}+\sin x^3+\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=$________.

(12) 设二重积分 $\iint\limits_D(x+4y+xy)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{8}$（其中，$D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant ax\}$，$a>0$），则常数 $a=$________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关列向量组，已知

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为________.

(14) 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件放入乙箱后，从乙箱中任取 3 件，则其中的次品数的

平均值为__________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$满足$e^x f(x)+2e^{\pi-x}f(\pi-x)=3\sin x$，求$f(x)(x>0)$的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(u, v)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微，且 $f(1, 1)=1$，$f_u'(1, 1)=2$，$f_v'(1, 1)=3$，以及 $\varphi(x)=f(x, f(x, x))$ 是单调函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\right|_{x=1}$（其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数）.

(18)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n\cdot(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数为 $s(x)$，求反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}s^2(x)\,\mathrm{d}x$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 在 $[1,+\infty)$ 上具有 2 阶连续偏导数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=1$. 又设函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 求

(Ⅰ) $f(u)$ 的表达式；

(Ⅱ) 二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)}{\ln(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$ 与 $D_2=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$ 的公共部分.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&0&a-3\end{pmatrix}$ 有零特征值，且存在矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&3\\3&4&8\\b+1&c-2&-3\end{pmatrix}$，使得矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，求常数 a，b，c 及该矩阵方程的所有解.

(21)(本题满分 11 分)

设向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$线性表示，但表示式不是唯一的.

(Ⅰ)求常数 a 及线性表示式的一般形式；

(Ⅱ)对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$及上述算得 a，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，并求此标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

记 $Z=2X-Y$，求 DZ 和 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 $Z=X^2+Y$，其中 $X\sim N(0,\sigma^2)$，Y 的概率分布为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

.

又设 Z_1，Z_2，…，Z_n 是来自总体 Z 的简单随机样本，求未知参数 σ^2 的矩估计量.

模拟试题(六)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

[　　]

(2) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\mathrm{d}x, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x + \cos^4 x)\mathrm{d}x, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x - \cos^7 x)\mathrm{d}x$，则它们的大小次序为

(A) $M<N<P$.　　(B) $N<M<P$.　　(C) $P<M<N$.　　(D) $P<N<M$.

[　　]

(3) 收敛半径 $R=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非必要又非充分条件.

[　　]

(4) 微分方程 $y''+y=2\sin x$ 应有的特解形式为

(A) $a\cos x + b\sin x$.　　(B) $x(a\cos x + b\sin x)$.

(C) $ax\cos x$.　　(D) $bx\sin x$.

[　　]

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，且存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则

(A) $\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\frac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(B) $\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\frac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.

(C) $\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(D) $\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.

[　　]

(6) 设 n 维向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m (m \leqslant n)$，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$，则下列命题不正确的是

(A) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩.

(B) 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(C) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩.

(D) 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等秩时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Y=X^2$ 和二维随机变量(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)$，则 $F(1,4)$等于

(A) $\dfrac{1}{4}$.　(B) $\dfrac{1}{2}$.　(C) $\dfrac{3}{4}$.　(D) 1.

[　　]

(8) 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则统计量 $Y=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2$ 的数学期望为

(A) $\dfrac{4}{n}\sigma^4$.　(B) $\dfrac{2}{n}\sigma^4$.

(C) $\dfrac{1+n}{n}\sigma^4$.　(D) $\dfrac{2+n}{n}\sigma^4$.　[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 连续，则常数 $a=$__________.

(10) 设二元函数 $f(u,v)$可微，则 $\dfrac{\partial}{\partial x}f\left(\mathrm{e}^{xy},\cos\dfrac{1}{x}\right)=$__________.

(11) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\dfrac{1}{2^n}\right]$的和为__________.

(12) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p+p\ln p$(其中 p 是价格)，且$R(1)=1$，则 $R(p)=$__________.

(13) 设 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^*=$__________.

(14) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件，又记 X 为服从参数为 $P(A)$ 的 0 - 1 分布的随机变量，则 $E(X^2)=$ ________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx$.

(16)(本题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^x$，且 $f_n(1)=\frac{e}{n!}$，记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，求 $s(x)$ 的表达式并画出函数 $y=s(x)$ 的简图．

(17)(本题满分 10 分)

求二元函数 $f(x,y)=2x^2+y^2-2x^2y^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+2y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & (x,y)\in D_1, \\ 1-x-y, & (x,y)\in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1, D_2 是 $\triangle OAB$ 被曲线 $xy+x+y=1$ 划分成的两部分(见图 6-18),求二重积分 $\iint\limits_{\triangle OAB} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

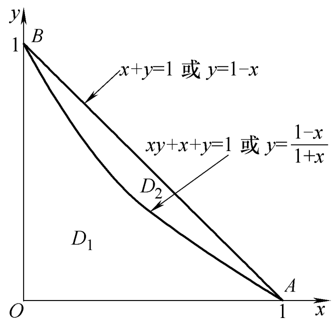


图 6-18

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内 2 阶可导，且$f'_+(a)>0$，$f(b)=0$. 此外存在$c\in(a, b)$，使得$f(c)=0$，$f'(c)<0$. 证明：存在$\xi\in(a, b)$，使得$f''(\xi)=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(b, 3, 5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3, 4, b)^{\mathrm{T}}$线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，求常数$a$，$b$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$)在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$,且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3y - xy^3), & |x| < 1, \ |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅰ)求随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(Ⅱ)求随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是未知参数，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本的观察值，求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

模拟试题(七)

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数$f(x)=(x-2)|x(x-2)|$，则

(A) $f(x)$在点$x=0$，2处都不可导．

(B) $f(x)$在点$x=0$，2处都可导．

(C) $f(x)$在点$x=0$处可导，而在点$x=2$处不可导．

(D) $f(x)$在点$x=0$处不可导，而在点$x=2$处可导．

[　　]

(2) 下列等式中不正确的是

(A) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$.　　(B) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{2n}\right)^2$.

(C) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$.　　(D) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[　　]

(3) 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$则

(A) $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续．

(B) $f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个偏导数都为零．

(C) $f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个偏导数存在但都不为零．

(D) $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微．

[　　]

(4) 设$\{a_n\}$是单调减少收敛于零的正项数列，则当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散时，下列结论正确的是

(A) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$发散．

(B) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$发散，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$收敛．

(C) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛．

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

[　　]

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性相关, 则

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 不可由 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.　　(B) $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.　　(D) $\boldsymbol{\delta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵且有以下命题:

① $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值;

② $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;

③ $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵;

④ $\boldsymbol{A}$ 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n-n_i$,

则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有两类, 它们是

(A) ①②.　　(B) ②③.　　(C) ②④.　　(D) ①④.

[　　]

(7) 下列命题不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上服从均匀分布, 则 X 与 Y 相互独立.

(B) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y)=\begin{cases} ab\mathrm{e}^{-(ax+by)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}\text{(其中 } a, b \text{ 都是正数)},$$

则 X 与 Y 相互独立.

(C) 设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ 上服从均匀分布(其中 R 是正数), 则 X 与 Y 相互独立.

(D) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自同一总体的简单随机样本, 则随机变量 $X=f_1(X_1, X_2)$ 与 $Y=f_2(X_3, X_4)$ (其中 f_1, f_2 都是连续函数) 相互独立.

[　　]

(8) 设随机变量 $t \sim t(n)$, 对 $\alpha \in (0, 1)$, $t_\alpha(n)$ 为满足 $P(t>t_\alpha(n))=\alpha$ 的实数, 则满足 $P(|t| \leqslant b)=\alpha$ 的 b 等于

(A) $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$.　　(B) $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.　　(C) $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$.　　(D) $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)$.

[　　]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $y=y(x)$ 由微分方程 $x^2y'+y+x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ 及 $y(1)=0$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 的非

铅直渐近线方程为________.

(10) 设 a 是常数，则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x=$________.

(11) 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且

$$f'_x(0,0)=1,\quad f'_y(0,0)=-1,$$

则极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}=$________.

(12) 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}+\frac{1}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的零点个数为________.

(13) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，记它的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，则行列式 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$________.

(14) 设 X 是离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

又设 Y 是连续型随机变量，其概率密度为 $\varphi(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $a=P(X=1)$，则概率 $P(Y\geqslant a)=$________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$，分别求 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 和 V_y.

(17)(本题满分 10 分)

计算二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$.

(18)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}+\sin 2x\cos x$ 的通解.

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

(20)(本题满分 11 分)

设方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解$(1,\ 2,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$和$(1,\ -2,\ 4,\ 0)^{\mathrm{T}}$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4)$的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}$ 都是 4 维列向量，求方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解，其中矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$.

(21)(本题满分 11 分)

设$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2b & 0\\ 0 & a & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 求二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$(其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵)的矩阵 $\boldsymbol{B}$，并计算 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=0$，1 时 a，b 的值及可逆线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵)，它将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$化为规范形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

(Ⅰ)求关于 X 与 Y 的边缘概率密度;

(Ⅱ)求概率 $P(Y \geqslant EX)$ 和条件概率 $P(X>2 \mid Y<4)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$.

(Ⅰ)试用总体 X 的简单随机样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}$.

(Ⅱ)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X(其未知参数 θ 为(Ⅰ)中确定的 $\hat{\theta}$)的简单随机样本,则由中心极限定理知,当 n 充分大时取值为 2 的样本个数 Y 近似地服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$,求它的两个参数 μ, σ^2.

模拟试题(八)

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 函数$f(x)=x|(e^x-1)(x-1)|$的不可导点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(2) 设 $F(x)=\int_0^x \max\{e^{-t},e^t\}dt$，则

(A) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ 1-e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}e^{-x}-1, & x<0,\\ 1-e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

[　　]

(3) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-a)^n$ 在 $x>0$ 时发散，在点 $x=0$ 处收敛，则

(A) $a=1$.　　(B) $a=-1$.

(C) $-1\leqslant a<1$.　　(D) $-1<a\leqslant 1$.

[　　]

(4) 设 $y_1=e^x-e^{-x}\sin x$，$y_2=e^x+e^{-x}\cos x$ 是2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$的两个解，则$f(x)$为

(A) e^{5x}.　　(B) e^{3x}.　　(C) e^x.　　(D) e^{-x}.

[　　]

(5) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实矩阵，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，则方程组①$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，③$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以及④$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 中仍以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 为基础解系的是

(A) ①②.　　(B) ②④.　　(C) ③④.　　(D) ①③.

[　　]

(6) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4$ 的最小特征值为

(A) -1.　　(B) -2.　　(C) 1.　　(D) 2.

[　　]

(7) 袋内有 7 个球，其中 4 个红球，3 个白球．现不放回地取球，每次取 1 个．记

$A=\{$第二次取球才取到白球$\}$，$B=\{$第二次取球取到的是白球$\}$，

则它们的概率为

(A) $P(A)=P(B)=\frac{4}{7}$.　　(B) $P(A)=\frac{2}{7}$，$P(B)=\frac{3}{7}$.

(C) $P(A)=P(B)=\frac{3}{7}$.　　(D) $P(A)=P(B)=\frac{2}{7}$.

[　　]

(8) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，$X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，记其均值为 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，方差为 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $E(\overline{X}+S^2)$ 为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}}-2, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$ __________．

(10) 设函数 $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$，则 $f^{(5)}(0)=$ __________．

(11) 设二元函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\sin(xy)+xz=0$ 确定，且 $xz+1\neq 0$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ __________．

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，其对价格 P 的弹性 $\varepsilon_P=0.2$，则当需求量为 100 000件时，价格增加 1 元会使产品收益增加__________元．

(13) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 2 阶与 4 阶矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=1$，$r(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，即它们的概率密度为 $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 则 $P(\max\{X,Y\}\leqslant 1)=$ __________．

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^2}(1-\cos x), & -\frac{\pi}{2}<x<0,\\ 1, & x=0,\\ \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, & 0<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{cases}$ 的极值．

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y)=x^2+y^2$ 在圆域 $D=\{(x, y) \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2\}$ 上的最大值与最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设 $\alpha=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \tan^2 \dfrac{x}{2}}{1-(1+x)^{\sin^3 x}}$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} \sin^{n+1} \alpha$ 的和.

(19)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & (x,y)\in D_1, \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}, & (x,y)\in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1，D_2 是 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ 被圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 划分成的两部分，如图 8-19 所示．求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

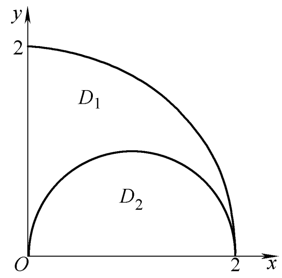


图　8-19

(20)(本题满分 11 分)

已知线性方程组(A)：$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6, \\ -x_1-2x_2+ax_3=-3 \end{cases}$ 有无穷多解.

(Ⅰ)求常数 $a(a\neq 0)$ 的值；

(Ⅱ)对上述算得的 a 值，求方程组(A)与(B)：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1+\lambda x_2=1 \end{cases}$ 有公共解时的 λ 值及公共解．

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵，其满足

$$\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

且二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^3$，求 $\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{A}^*$.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(U, V)的概率密度为

$$f(u,v)=\begin{cases}1, & 0<u<1, 0<v<2u, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设 X 与 Y 都是离散型随机变量，其中 X 只取 -1，0，1 三个值，Y 只取 -1，1 两个值，且 $EX=0.2$，$EY=0.4$，$P(X=-1, Y=1)=P(X=1, Y=-1)=P(X=0, Y=1)=\frac{1}{3}P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)$. 求

(Ⅰ)(X, Y)的概率分布；

(Ⅱ)$\operatorname{Cov}(X, Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}, & 0<x<\theta, y>\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数. 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 和它的方差 $D(\hat{\theta})$.

模拟试题(九)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填写在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$，则 $y^{(n)}$ 为

(A) $(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^n}$.　　(B) $(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$.

(C) $(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{(x+1)^{n+1}}$.　　(D) $(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$.

[　　]

(2) 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的三个 2 阶偏导数 $f''_{xx}(x,y)$，$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 存在，则必有

(A) $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.　　(B) $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微．

(C) $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续．　　(D) $f'_x(x,y_0)$ 在点 x_0 处可微．

[　　]

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\ (-1<\alpha<0)$

(A) 绝对收敛．　　(B) 条件收敛．

(C) 发散．　　(D) 收敛或发散与 α 取值有关．

[　　]

(4) 设 y_1，y_2 是非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3}$，$\mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{1}{3}$，$\mu=\dfrac{2}{3}$.

[　　]

(5) 设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{X}$ 是 $n\times l$ 未知矩阵)，则该方程有无穷多解的充分必要条件为

(A) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$.　　(B) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$.

(C) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$.　　(D) $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件为

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

(B) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(C) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征值相同．

(D) 分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形.

[　　]

(7) 设 X，Y 是随机变量，其中 $X \sim N(1, 1)$，概率密度为 $f_1(x)$，Y 的概率密度为 $f_2(x)=\begin{cases} e^{-(x-1)}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x<1. \end{cases}$ 记 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x<0, \\ bf_2(x), & x \geqslant 0, \end{cases}$ 则当 $f(x)$ 是概率密度时，a，b 应满足

(A) $a+\frac{1}{2}b=1$.　　(B) $\frac{1}{2}a+b=1$.

(C) $a+\frac{1}{2}b=0$.　　(D) $\frac{1}{2}a+b=0$.

[　　]

(8) 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，其中 X 服从参数 λ 的指数分布. 记样本均值为 $\overline{X}$，方差为 S^2，则当 $(4-a)S^2-2a\overline{X}^2$ 为 $\frac{1}{\lambda^2}$ 的无偏估计量时，常数 a 为

(A) 3.　　(B) $\frac{3n}{3n+1}$.　　(C) $\frac{3n}{3n+2}$.　　(D) $\frac{n}{n+1}$.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+e^{nx}}+(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}\right]=$ ____________.

(10) $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}dx=$ ____________.

(11) 设二元函数 $f(u, v)$ 可微，则 $\frac{\partial}{\partial x}f(e^{xy}, \sin x^2)=$ ____________.

(12) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^{2n}$ 的收敛域为____________.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 及 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，它们满足 $r(\boldsymbol{B})=2$，$r(\boldsymbol{AB})=1$，则 $\lambda=$ ____________.

(14) 设 A，B，C 是相互独立事件，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=P(C)=0.5$，则概率 $P(A-C \mid AB \cup C)=$ ____________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $y=\varphi(\psi(x))$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ \sin x, & x>0, \end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases} x^2+x, & x \leqslant 0, \\ xe^x, & x>0, \end{cases}$ 求 $\varphi'(\psi(x))\big|_{x=0}$ 与 $[\varphi(\psi(x))]'\big|_{x=0}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知二元连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x,y) = y + \int_0^x f(x-t,y)\,\mathrm{d}t$,求二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x} f(x,y^2)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线 $x=y^2$ 和直线 $x=1$ 围成的区域.

(17)(本题满分 10 分)

某厂家生产的一种产品同时在 A,B 两个市场销售,每件产品售价分别为 p_1 和 p_2,需求函数分别为 $q_1=3-0.5p_1$ 和 $q_2=2-3p_2$,总成本函数为 $C=5+2\left(q_1+\frac{41}{12}q_2\right)$. 如果 A 市场的价格对 B 市场的价格弹性为 2,且 $p_2=1$ 时,$p_1=\frac{3}{16}$. 试问:厂家如何确定两个市场的售价,能使其获得的总利润最大?

(18)(本题满分 10 分)

设$f(x)$是[0，1]上非负、单调减少的连续函数，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x > \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(其中 0 < a < b < 1).$$

(19)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n+1}$,求

(Ⅰ) 该幂级数的和函数 $s(x)$及其定义域;

(Ⅱ) 方程 $s(x)=\frac{1}{2}$的实根个数.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量组. 已知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

问：a 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化?

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵)经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)化为标准形 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 又设 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$(其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{\alpha}=(1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$). 求

(Ⅰ) $\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{A}$；

(Ⅱ) 可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$(其中 $\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵)，它将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 是连续型的，它的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0; \end{cases}$ 随机变量 Y 是离散型的，它的概率分布为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅰ) 当 X 与 Y 相互独立时，求 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$；

(Ⅱ) 求 $\mathrm{Cov}(X, X^2)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0, 1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$，S^2 分别是它的均值与方差，求

(Ⅰ) $E(\overline{X}^2S^4)$；

(Ⅱ) $D(\overline{X}^2)$.

模拟试题（十）

一、选择题：1 ~8 小题，每小题4 分，共32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$，则当$x>1$时，$f(x)$

（A）单调减少且大于零．

（B）单调减少且小于零．

（C）单调增加且大于零．

（D）单调增加且小于零．

[　　]

（2）设二元函数$z=z(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且$z(x,0)=x^2$，$z(0,y)=y$，则$z(x,y)$为

（A）$\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2+y$.

（B）$\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2-x^2+y$.

（C）$\dfrac{1}{2}x^2y-\dfrac{1}{2}xy^2+x^2$.

（D）$\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2$.

[　　]

（3）设$\varphi(x)$是$[0,1]$上的正值连续函数，a，b为常数，则当区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$时，$\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma=$

（A）πa.　（B）πb.　（C）$\pi(a+b)$.　（D）$\dfrac{\pi}{2}(a+b)$.

[　　]

（4）设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，则

（A）如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$中至少有一收敛．

（B）如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$中至少有一发散．

（C）如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可推得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛．

（D）如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\infty$，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散可推得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散．

[　　]

（5）设$\boldsymbol{A}$是n阶实矩阵，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有解的

（A）必要而非充分条件．

（B）充分而非必要条件．

（C）充分必要条件．

（D）既非充分又非必要条件．

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵．如果 $(1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ 的标准形应形如

(A) $a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$.　　(B) $b_1y_1^2+b_2y_2^2$.

(C) $c_1y_1^2$.　　(D) $d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2+d_4y_4^2$.

(其中 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，d_1，d_2，d_3，d_4 都是非零常数).

[　　]

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都在 $(0, a)$ 上服从均匀分布，则随机变量 $Z=\max\{X, Y\}$ 的概率密度为

(A) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{2z}{a^2}, & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　(B) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{z}{a}\right), & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(C) $f(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{z}{a}\right)^2, & 0<z<a,\\ 1, & z\geqslant a.\end{cases}$　　(D) $f(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ 1-\left(1-\dfrac{z}{a}\right)^2, & 0<z<a,\\ 1, & z\geqslant a.\end{cases}$

[　　]

(8) 设 $X\sim N(a, \sigma^2)$，$Y\sim N(b, \sigma^2)$，且相互独立．现分别从总体 X 和 Y 中各抽取容量为 9 和 11 的简单随机样本，记它们的方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2，并记 $S_{12}^2=\dfrac{1}{2}(S_X^2+S_Y^2)$，$S_{XY}^2=\dfrac{1}{18}(8S_X^2+10S_Y^2)$，则上述四个统计量 S_X^2，S_Y^2，S_{12}^2 和 S_{XY}^2 中方差最小者为

(A) S_X^2.　　(B) S_Y^2.　　(C) S_{12}^2.　　(D) S_{XY}^2.

[　　]

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 已知 $f(x)$ 是连续函数，且满足

$$\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t=f(x)-\mathrm{e}^{5x},$$

则 $f''(0)=$________.

(10) 设二元可微函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $\int_y^z \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+xy+yz=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$________.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

(12) 设 2 阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 有特解 $y_1=\mathrm{e}^x\cos x$，$y_2=\mathrm{e}^x\sin x$，则 2 阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=\cos x$ 的通解为________.

(13) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n|=$________.

(14) 设存在常数 a，$b(b\neq 0)$，使得 $P(Y=a+bX)=1$，则随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho=$________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上有连续的导数，且满足

$$y(x) = 1 + x + 2\int_0^x (x-t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t,$$

求 $y^{(n)}(x)$.

(16)(本题满分 10 分)

设二元函数 $f(x,\ y)=\begin{cases} x+2x^2y, & 0\leqslant x\leqslant a,\ |y|\leqslant a, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

求二重积分 $I(a) = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2 \geqslant ax\ (a>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $a_0=1,a_1=-2,a_2=\dfrac{7}{2},a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n(n\geqslant 2)$,求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)(1-\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导且满足 $(1-x)f'(x)>2f(x)$ 时，(Ⅰ)中的 ξ 是唯一的.

(19)(本题满分 10 分)

某厂制造某种电器，固定成本为 400 万元，每生产一件产品成本增加 0. 8 万元，总收益 R(单元：万元)是月产量 x(单位：件)的函数

$$R(x)=\begin{cases}30x-\frac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 900, & x>60,\end{cases}$$

并且总纳税金 T(单位：万元)是 x 的函数

$$T(x)=\begin{cases}0.2x, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 900\cdot 1\%+\frac{1}{20}x, & x>60.\end{cases}$$

求该厂月产量 x 为多大时总利润最大，并求最大总利润.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 4 维列向量组，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. 已知方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ -\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4$$

有无穷多解.

(Ⅰ) 求常数 a 的值；

(Ⅱ) 对(Ⅰ)中求得的 a 值，计算方程组的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$可相似对角化.

(Ⅰ) 求常数 a 的值;

(Ⅱ) 对(Ⅰ)中求得的 a 值，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵)，将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $Z=\min\{X,\ Y\}$，求 Z^2 的数学期望 $E(Z^2)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 为未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为来自 X 的一个简单随机样本．求

(Ⅰ) θ 的矩估计量;

(Ⅱ) θ 的最大似然估计量．

模拟试题(一)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	D	A	D	B	A	D	C

(1) 由于 $y=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right),$$

所以，$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left[(-1)^{10}\frac{10!}{(x-1)^{11}}+(-1)^{10}\frac{10!}{(x+1)^{11}}-2(-1)^{10}\frac{10!}{x^{11}}\right]$

$$=\frac{10!}{2(x-1)^{11}}+\frac{10!}{2(x+1)^{11}}-\frac{10!}{x^{11}}.$$ 因此选（C).

附注 应记住公式对：对于 $a\neq0$,

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(2) 由于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t-1)}{\frac{2}{1+t}\ln(1+t)}=\frac{\mathrm{e}^t(1+t)(\mathrm{e}^t-1)}{\ln(1+t)}$，并且由题设知

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t(1+t)(\mathrm{e}^t-1)}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}=1,$$

所以，$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{t=0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\mathrm{e}^t(1+t)(\mathrm{e}^t-1)}{\ln(1+t)}-1}{t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^t(1+t)(\mathrm{e}^t-1)-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{[\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t-\ln(1+t)]+\mathrm{e}^tt(\mathrm{e}^t-1)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t-\ln(1+t)}{t^2}+1\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0}\frac{2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t-\frac{1}{1+t}}{2t}+1$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2(\mathrm{e}^{2t}-1)-(\mathrm{e}^t-1)-\left(\frac{1}{1+t}-1\right)}{2t}+1=3.$$

因此选(D).

附注 由于在点 $x=0$ 的某个邻域内$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^t(1+t)(\mathrm{e}^t-1)}{\ln(1+t)}, & t\neq0,\\ 1, & t=0\end{cases}$是分段函数，所以用

导数定义计算$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\bigg|_{t=0}$.

(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,|\cos x|\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x dx$

$= \frac{1}{2}\sin^2 x\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin^2 x\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3}{4}$. 因此选(A).

附注 题解中应注意的是：在$\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$上，$\sqrt{1-\sin^2 x}\neq\cos x$，而应$\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$.

(4) 由于D关于y轴对称，而$f(x^2)$在对称点处的值彼此相等，所以$\iint\limits_D f(x^2)d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x^2)d\sigma$. 因此选(D).

附注 在计算二重积分时，应充分利用积分区域的对称性，适当地化简二重积分.

(5) 对于$n>2$有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^*)^* &= (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^* = |\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^* = |\boldsymbol{A}|^{n-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\\ &= |\boldsymbol{A}|^{n-1}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

因此选(B).

附注 当$\boldsymbol{A}$不可逆时，本题结论仍成立. 这是因为，当$\boldsymbol{A}$不可逆，即$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 另一方面，当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，或0，即$r(\boldsymbol{A}^*)<n-1$. 从而$r((\boldsymbol{A}^*)^*)=0$,由此得到$(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{O}$.

故仍有$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}|\boldsymbol{A}|$.

(6)由$\boldsymbol{A}$是正定矩阵知$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，故$\boldsymbol{A}^*$也是实矩阵，并且，由$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$得$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=\boldsymbol{A}^*$，所以$\boldsymbol{A}^*$也是对称的，从而$\boldsymbol{A}^*$也是实对称矩阵. 此外由$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$全为正的知，$\boldsymbol{A}^*$的特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}$，$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}$，…，$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}$也全为正的. 因此$\boldsymbol{A}^*$是正定矩阵. 同样可得$\boldsymbol{B}^*$是正定矩阵.

于是，对于任意$\boldsymbol{x}$(n维非零列向量)，有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}>0$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}>0$，由此可知$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{x}>0$,即$\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$是正定矩阵，因此选(A).

附注 应记住以下结论：

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶正定矩阵，则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$都是正定矩阵，但$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$等未必是正定矩阵.

(7) 由题设知$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0, 1)$，$\frac{Y-2\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0, 1)$，所以

$$p_1 = P(X\geqslant\mu-\sigma) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geqslant -1\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right) = \Phi(1) > \frac{1}{2},$$

$$p_2 = P\left(Y\leqslant 2\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{Y-2\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\leqslant 1\right) = \Phi(1),$$ (其中$\Phi(x)$是标准正态分布函

数)

所以 $p_2=p_2>\frac{1}{2}$. 因此选(D).

附注　由 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$ 知 $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 0\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$，所以有 $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right)>\frac{1}{2}$.

(8) 由于 $Y=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$,

其中由 X_1, X_2, …, Y_n 相互独立，且 $\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,\ 1)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 知，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，所以

$$EY=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2,\qquad DY=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

因此选(C).

附注　应记住以下结论：

设 ξ_1, ξ_2, …, ξ_n 相互独立且都服从 $N(0,\ 1)$ 的随机变量，则 $\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sim\chi^2(n)$，且 $E\eta=n, D\eta=2n$.

二、题空题

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)\arctan\frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)\arctan\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}$,

其中，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$，$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}=0$. 所以，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)\arctan\frac{1}{x}}{\ln(1+x^2)}=-\frac{1}{6}\times 0=0.$$

附注　由 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，$\left|\arctan\frac{1}{x}\right|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}=0$. 类似地有 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x\frac{1}{x}=0$.

(10) $\int_0^1\arctan\frac{1-x}{1+x}dx=\int_0^1(\arctan 1-\arctan)dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\arctan x dx$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$

附注　应记住初等数学公式：

$$\arctan\frac{a+x}{1-ax}=\arctan a+\arctan x,$$

$$\arctan\frac{a-x}{1+ay}=\arctan a-\arctan x.$$

(11) 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{z(x,\ 2)-z(1,\ 2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\dfrac{2}{x}\right)^{\ln x}-1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{e}^{\ln x(\ln2-\ln x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\ln x}{x-1}\cdot(\ln2-\ln x)\right]=\ln2\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\ln2,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{z(x,\ 2)-z(1,\ 2)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{[\ln(x^{\ln2})+1]-1}{x-1}=\ln2\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{x-1}=\ln2,$$

所以$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\ln2.$

附注 由于$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\ 2)}=\left.\dfrac{\mathrm{d}z(x,\ 2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$，而 $z(x,\ 2)$是分段点为 $x=1$ 的分段函数，所以按定义计算$\left.\dfrac{\mathrm{d}z(x,\ 2)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

(12) 所给差分方程可改写成

$$y_{t+1}+5y_x=\frac{5}{2}t. \tag{1}$$

式(1)对应的齐次线性差分方程的通解为 $y_c(t)=c(-5)^t$. 此外，式(1)有特解 $y_t^*=at+b$. 将它代入式(1)得 $a=\dfrac{5}{12}$，$b=-\dfrac{5}{72}$，所以 $y_t^*=\dfrac{5}{12}\left(t-\dfrac{1}{6}\right)$.

因此式(1)，即所给的差分方程的通解为

$$y_t=c(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)(t=1,\ 2,\ \cdots,\ c\text{ 是任意常数}).$$

附注 常系数线性差分方程 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$的通解可按以下步骤计算

(Ⅰ) 算出对应的齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=0$ 通解 $y_c(t)$，

(Ⅱ) 计算所给差分方程 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$的一个特解 y_t^*，则所求的通解为 $y_t=y_c(t)+y_t^*$.

(13) 由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&4\\1&2&-1&1\\-3&2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&-2\\0&0&-2&4\\1&2&-1&1\\-3&2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&-5&-1\\-14&4&10&2\\-4&0&0&6\\-1&6&-7&17\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}7&-2&-5&-1\\0&0&0&0\\4&0&0&6\\-1&6&-7&17\end{pmatrix},$$

所以 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}^2)=3$，从而 $r((\boldsymbol{A}^2)^*)=1$

附注 本题是利用以下公式(应记住)计算的：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(14) $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$，其中，

$y\leqslant 0$ 时，$P(X^2\leqslant y)=0$；

$y>0$ 时，$P(x^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=P(0\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$

$$=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}x\mathrm{d}x, & 0<y\leqslant 1,\\ \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{y}}(2-2)\mathrm{d}x, & 1<y\leqslant 4,\\ \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x, & y>4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0<y\leqslant 1,\\ -1+2\sqrt{y}-\frac{1}{2}y, & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$$

所以 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}y, & 0<y\leqslant 1,\\ -1+2\sqrt{y}-\frac{1}{2}y, & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$

附注　$F_y(y)$也可以按以下方法计算.

记 $g(x)=x^2$，则 $g(x)$在$\{x\mid f(x)\neq 0\}=(0,2)$内单调增加，记它的反函数为 $x=h(y)$，则 $h(y)=\sqrt{y}$，$h'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}(0<y<4)$. 所以

Y的概率密度$f_Y(y)=\begin{cases}f(h(y))\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & 0<y<4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y\leqslant 1,\\ (2-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} & 1<y<4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y\leqslant 1,\\ \frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{2}, & 1<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \int_0^y\frac{1}{2}\mathrm{d}u, & 0<y\leqslant 1,\\ \int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}u+\int_1^y\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u, & 1<y\leqslant 4,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\mathrm{d}u, & y>4\end{cases}$

$$=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}y, & 0<y\leqslant 1,\\ -1+2\sqrt{y}-\dfrac{1}{2}y, & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$$

三、解答题

(15) 由于 $g(t)=\lim\limits_{x\to 0}[1+\sqrt[3]{\sin t}f(x)]^{\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2}\cdot\ln[1+\sqrt[3]{\sin t}f(x)]}{\ln(1+x)}}$,

其中 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2}\cdot\ln[1+\sqrt[3]{\sin t}f(x)]}{\ln(1+x)}=\sqrt[3]{t^2\sin t}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\sqrt[3]{t^2\sin t}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt[3]{t^2\sin t}f'(0)=\sqrt[3]{t^2\sin t}.$$

所以，$g(t)=e^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}$. 因此

$$g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2\sin t}}{t}=1.$$

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 由于 $f(x)$ 仅在点 $x=0$ 处可导，所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 必须按导数定义计算.

(Ⅱ) $g'(0)$ 也可以按以下方法计算：

由于 $t\neq 0$ 时，$g'(t)=e^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}\left(\dfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\sin^{\frac{1}{3}}t+\dfrac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}\sin^{-\frac{2}{3}}t\cos t\right)$,

且 $$\lim_{x\to 0}g'(t)=\lim_{t\to 0}e^{\sqrt[3]{t^2\sin t}}\cdot\lim_{t\to 0}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\frac{2}{3}}\cos t\right]=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1,$$

所以，$g'(0)=\lim\limits_{t\to 0}g'(t)=1.$

(16) (Ⅰ) $$a=\frac{3}{2}-e^{\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)-(n+1)+\frac{3}{4}}{2^n\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{3}{2}-e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+$$

$$\frac{3}{4}\cdot 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{3}{2}-e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}(e^{\frac{1}{2}}-1)=0.$$

(Ⅱ) 所给微分方程可以改写成

$$e^{-y}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}e^{-y}=1,\ 即\ \frac{de^{-y}}{dx}-\frac{2}{x}e^{-y}=-1,$$

所以
$$e^{-y}=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(C+\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx\right)=x^2\left(C-\int\frac{1}{x^2}dx\right)$$
$$=x^2\left(C+\frac{1}{x}\right)=Cx^2+x. \tag{1}$$

将 $y(1)=a=0$ 代入式(1)得 $C=0$，所以 $e^{-y}=x$，从而
$$y=y(x)=-\ln x(x>0).$$

附注　题解中有两点值得注意：

(Ⅰ)利用公式 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n(-\infty<x<+\infty)$ 计算题中所给级数之和.

(Ⅱ)将所给微分方程改写成
$$e^{-y}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}e^{-y}=1，即\frac{de^{-y}}{dx}-\frac{2}{x}e^{-y}=-1,$$
得到以 e^{-y} 为未知函数的线性微分方程，由此算出 $y=y(x)$.

(17) 记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $F(0)=F(1)(=0)$，所以由罗尔定理知，存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$. 于是由 $F'(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上可导，且 $F'(0)=F'(\eta)$，所以由罗尔定理知，存在 $\eta_1\in(0,\eta)$，使得 $F''(\eta_1)=0$. 同样可知，存在 $\eta_2\in(\eta,1)$，使得 $F''(\eta_2)=0$.

由此可知，$F''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上满足罗尔定理条件，因此存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$，使得 $F^{(3)}(\xi)=0$，即 $f^{(3)}(\xi)=\xi$.

附注　罗尔定理的高阶导数形式有各种叙述，例如，

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 2 阶可导，且 $f(a)=f(c)=f(b)$(其中 $c\in(a,b)$)，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 3 阶可导，且 $f(a)=f(x_1)=f(x_2)=f(b)$(其中 $a<x_1<x_2<b$)，或 $f'(a)=f'(\eta)=f'(b)$(其中 $\eta\in(a,b)$)，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(3)}(\xi)=0$.

(18) 所给方程两边对 x 求偏导数得
$$2x+z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0，即\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{4-z}.$$

同样可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{4-z}$. 由于方程组 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2x}{4-z}=0,\\ \frac{2y}{4-z}=0\end{cases}$ 在 D 内部无解，所以 $z=z(x,y)$ 在 D 内无可能极值点.

D 有边界Ⅰ：$y=0(0\leqslant x\leqslant 1)$，Ⅱ：$x=0(0\leqslant y\leqslant 1)$ 以及Ⅲ：$x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$.

在Ⅰ上，所给方程式为 $2x^2+z^2-8z+8=0$，即
$$z=4\pm\sqrt{8-2x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$
它有最大值 $4+2\sqrt{2}$，最小值 $4-2\sqrt{2}$. 同样可以算出 z 在Ⅱ上有最大值 $4+2\sqrt{2}$，最小值 $4-2\sqrt{2}$.

在Ⅲ上，所给方程成为
$$2x^2+2(1-x^2)+z^2-8z+8=0,$$

即
$$z=4\pm\sqrt{7-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1).$$

它有最大值 $4+\sqrt{7}$，最小值 $4-\sqrt{7}$.

综上所述，$z=z(x,\ y)$ 在 D 上的
$$最大值=\max\{4+2\sqrt{2},\ 4+\sqrt{7}\}=4+2\sqrt{2},$$
$$最小值=\min\{4-2\sqrt{2},\ 4-\sqrt{7}\}=4-2\sqrt{2}.$$

附注 在 D 上 $z\neq 4$(这是因为 $z=4$ 时，所给方程成为 $x^2+y^2=4$，这在 D 上是不可能的)，所以 $z=z(x,\ y)$ 在 D 的内部的可能极值点仅来自方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 的解. 因此当它在 D 内无解时，$z=z(x,\ y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

(19) 记 $A=\iint\limits_D f(x,y)\cos x\mathrm{d}\sigma$，则
$$f(x,\ y)=xy+A. \tag{1}$$

从而
$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D f(x,y)\cos x\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D (xy+A)\cos x\mathrm{d}x.\\
&=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(xy+A)\mathrm{d}y=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}x\sin^2x+A\sin x\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\pi\frac{1}{4}x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x+2A\\
&=\frac{1}{4}\int_0^\pi x\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+2A\\
&=\frac{1}{4}\left[x\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x\right]+2A\\
&=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^\pi+2A=\frac{\pi^2}{8}+2A,\end{aligned}$$

即 $A=\dfrac{\pi^2}{8}+2A$. 所以 $A=-\dfrac{\pi^2}{8}$. 将它代入式(1)得 $f(x,\ y)=xy-\dfrac{\pi^2}{8}$. 因此
$$f(x,y)\ 在\ D_1\ 上的平均值\ B=\frac{1}{D_1\ 的面积}\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中，D_1 的面积 $=\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_{D_1}\left(xy-\frac{\pi^2}{8}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\left(xy-\frac{\pi^2}{8}\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5-\frac{\pi^2}{8}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi^2}{24}.\end{aligned}$$

因此 $B=\dfrac{\dfrac{2-\pi^2}{24}}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2-\pi^2}{8}$.

附注　函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的平均值为 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 是连续函数.

二元函数 $f(x,\ y)$ 在 D 上的平均值为 $\dfrac{1}{D\text{的面积}}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中, $f(x,\ y)$ 是连续函数, D 是平面区域, 它的面积不为零.

(20) 使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解, 必须

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B}).$$

由于 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&2&2&0&4&-2\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&-1&-1&a-1&b-4&c\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right),$$

所以, 使式(1)成立的 $a,\ b,\ c$ 满足 $\begin{cases}a-1=0,\\b-2=0,\\c-1=0,\end{cases}$ 即 $a=1,\ b=2,\ c=1$.

当 $a=1,\ b=2,\ c=1$ 时, 所给的矩阵方程与

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\tag{2}$$

同解. 记 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$, 则式(1)等价于以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\tag{5}$$

式(3)的通解为 $(x_{11}, x_{21}, x_{31})^T = C_1(-1, -1, 1)^T + (1, 0, 0)^T = (-C_1+1, -C_1, C_1)^T$,

式(4)的通解为 $(x_{12}, x_{22}, x_{32})^T = C_2(-1, -1, 1)^T + (2, 2, 0)^T = (-C_2+2, -C_2+2, C_2)^T$,

式(5)的通解为 $(x_{13}, x_{23}, x_{33})^T = C_3(-1, -1, 1)^T + (1, -1, 0)^T = (-C_3+1, -C_3-1, C_3)^T$.

所以,式(2),即所给矩阵方程的所有解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-C_1+1&-C_2+2&-C_3+1\\-C_1&-C_2+2&-C_3-1\\C_1&C_2&C_3\end{pmatrix}\ (\text{其中 } C_1, C_2, C_3 \text{ 为任意常数}).$$

附注 (Ⅰ)设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$,$m\times l$ 矩阵),则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \text{ 有解的充分必要条件为 } r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}).$$

特别,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$;$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$.

(Ⅱ)当矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解时,可按以下方法求解:

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆(此时 $m=n$),则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$;

如果 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,则如题解中那样,将 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 表示成若干个线性方程组,然后逐一计算各个方程组的通解,即可得到 $\boldsymbol{X}$.

(21) 由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&2\\1&2\end{pmatrix}$得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1,2,它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1, 0, -1)^T$,$\boldsymbol{\xi}_2=(1, 1, 1)^T$. 由于 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 还有特征值0,设它对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(a, b, c)^T$,则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\xi}_3$ 满足

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_1)=0,\\(\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_2)=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}a\quad\ \ -c=0,\\a+b+c=0.\end{cases}$$

取它的基础解系数 $\boldsymbol{\xi}_3$,即 $\boldsymbol{\xi}_3=(1, -2, 1)^T$.

显然,$\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$ 是正交向量组,现将它们单位化:

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$（正交矩阵），则正交变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $-y_1^2+2y_2^2$.

附注　应熟练掌握用正交变换或可逆线性变换(即配平方方法)将二次型化为标准形的方法.

(22) 记 (X,Y) 关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\leqslant y\leqslant 2.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ) 由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1x\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=\frac{13}{18}$ 得

$$DX=E(x^2)-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\,\mathrm{d}x-\left(\frac{13}{18}\right)^2$$

$$=\int_0^1x^2\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{13}{18}\right)^2=\frac{17}{30}-\left(\frac{13}{18}\right)^2=\frac{73}{1620}.$$

(Ⅱ) $$P\left(X^2+Y^2\leqslant 1\mid Y\geqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X^2+Y^2\leqslant 1,Y\geqslant\frac{1}{2}\right)}{P\left(Y\geqslant\frac{1}{2}\right)},\tag{1}$$

其中 $P(X^2+Y^2\leqslant 1,Y\geqslant \frac{1}{2})=\iint\limits_D\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}\sigma\left(D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant \frac{1}{2}\right\}\right)$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left((x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{6}x(1-x^2)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\frac{3}{128}-\frac{\sqrt{3}}{16}\xlongequal{令 x=\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{3}{128}-\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{5\sqrt{3}}{64}+\frac{3}{128},\tag{2}$$

$$P\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_y(y)\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y\right)\mathrm{d}y=\frac{13}{16}.\tag{3}$$

将式(2)，式(3)代入式(1)得

$$P\left(x^2+y^2\leqslant 1\;\middle|\;y\geqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{24}-\frac{5\sqrt{3}}{64}+\frac{3}{128}}{\frac{13}{16}}=\frac{2\pi}{39}-\frac{5\sqrt{3}}{52}+\frac{3}{104}.$$

附注 题解中需注意的是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

而不是$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y(0\leqslant x\leqslant 1)$. 对$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 也有同样的说法.

(23) 设 Z 的简单随机样本 Z_1，Z_2，…，Z_n 的观察值为 z_1，z_2，…，z_n，则似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n(z_i-\mu)^2},$$

取对数得

$$\ln L=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(z_i-\mu)^2.$$

所以有

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(z_i-\mu),$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n(z_i-\mu)^2.$$

由最大似然估计法，令$\begin{cases}\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=0,\\ \frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=0.\end{cases}$解此方程组得$\mu=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n z_i\xlongequal{记}\bar{z},\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(z_i-\bar{z})^2$,

所以 μ,σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xlongequal{\text{记}} \bar{Z},\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2.$$

由于 $EX = E(\mathrm{e}^Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^z \sigma \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z$

$$\xlongequal{\text{令 } t = \frac{z-\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\sigma t - \frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

所以,由最大似然估计量的不变性得 EX 的最大似然估计量为

$$\hat{EX} = \mathrm{e}^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} = \mathrm{e}^{\bar{Z}+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2}.$$

附注　(Ⅰ)应记住,设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本,则

μ 的矩估计量 $=$ μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xlongequal{\text{记}} \bar{X}$,

σ^2 的矩估计量 $=$ μ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

(Ⅱ)最大似然估计量的不变性是:

设 θ 是未知参数,θ 的函数 $u = u(\theta)$ 有单值反函数,则当 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计量时,$\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计量.

模拟试题(二)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	C	D	B	C	D	C	A

(1) 在$(-\pi,\ 0)$内$f(x)$仅有间断点$x=-\dfrac{\pi}{2}$. 由于

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1-\dfrac{\pi}{8}\right)}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{\cos x}=-\frac{2}{\ln\left(1-\dfrac{\pi}{8}\right)},$$

所以$x=-\dfrac{\pi}{2}$是$f(x)$的可去间断点.

在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内$f(x)$无间断点. 此外，由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}=\frac{1}{e-1}\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{\dfrac{1}{4}x}$$

$$=\frac{8}{e-1}\neq0=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

所以$x=0$不是$f(x)$的可去间断点.

由此可知，$f(x)$的可去间断点个数为1. 因此选(B).

附注 寻找分段函数的间断点，除各个分段区间内的间断点外，还应通过考虑函数在分段点处的连续性，确定它是否为间断点.

(2) $a=-2,\ -1$时，$f(x)$在$\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$上无定义，所以选项(A)，(B)应排除. 当$a=0$时，$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{e}$，且由

$$f'(x)=\ln x+1\begin{cases}<0, & 0<x<\dfrac{1}{e},\\ =0, & x=\dfrac{1}{e},\\ >0, & x>\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

知，$f(x)$的单调减少区间仅为$\left(0, \frac{1}{e}\right]$. 因此选(C).

附注　本题是对选项逐一检验，直到得到正确的选项为止. 这是求解单项选择题的常用方法之一.

(3) 当 $x<0$ 时，$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du=\int_0^x f(t)dt$.

当 $x>0$ 时，由 $F(x)=\int_{-x}^0 \ln(1+f(x+t))dt \xlongequal{令 u=x+t} \int_0^x \ln(1+f(u))du$

得　$F'(x)=\ln(1+f(x))$. 此外，由

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}F'(x)=\lim_{x\to0^-}\int_0^x f(t)dt=0,$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to0^+}F'(x)=\lim_{x\to0^-}\ln(1+f(u))=\ln(1+f(0))=0$$

知 $F'(0)=0$. 所以由

$$F''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0,$$

$$F''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+f(x))}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$$

得 $F''(0)=0$. 因此选 (D).

附注　题解中 $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}F'(x)$与 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F'(x)$是根据以下结论：

设函数 $\varphi(x)$在点 $x=0$ 处连续，在$(-\delta, 0)(\delta>0)$内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi'(x)$存在，则 $\varphi'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\varphi'(x)$；

设函数 $\psi(x)$在点 $x=0$ 处连续，在$(0, \delta)(\delta>0)$内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\psi(x)$存在，则 $\psi'_{+1}(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\psi'(x)$.

第二个结论是2009年考研真题，第一个结论的证明与第二个相似. 因此上述这些结论都可作为定理用于解题.

(4) $\iint\limits_D(x+y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}2xd\sigma$ (由于 D 关于 x 轴对称，y 在对称点处的值互为相反数，x 在对称点处的值彼此相等. D_1 是 D 的第一象限部分)

$$=\int_1^2dx\int_0^{\sqrt{x^2-1}}2xdy=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$$

$$=\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=2\sqrt{3}.$$ 因此选(B).

附注 计算二重积分应充分利用积分区域的对称性：当 D 具有某种对称性时，

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 在对称点处的值互为相反数,}\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & \text{当 } f(x,y) \text{ 在对称点处的值彼此相等,}\end{cases}$$

其中 D_1 是 D 按这种对称性划分成的两部分之一.

(5) 由 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(-\boldsymbol{A})^*=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$ 知，n 为奇数时，有 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$. 即 A^* 是对称矩阵. 反之，当 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵，即 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$ 时，由以上计算得 $(-1)^{n-1}=1$，即 n 为奇数.

所以 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 n 为奇数的充分必要条件，因此选(C).

附注 对于 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n-1$. 因此 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$ 或 $n-1$.

(6) 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以存在 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}.$$

于是，$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{P})=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

所以 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)=3$.

同样有 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3|=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=0\text{，但 } \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3 \text{ 的 2 阶子式}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)=2$.

从而 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=5$. 因此选(D).

附注 本题也可按以下方法计算：

$$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3)=r\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3\end{array}\right),$$

其中 $$\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}\\ \hdashline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=5$.

（7）由关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$关于 Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$知 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ $(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$，所以 X 与 Y 相互独立，从而

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此可知选项（C）不正确. 因此选（C）.

附注　题解中，实际上已给出选项（A），（D）都正确. 选项（B）也是正确的，这是因为关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$所以 $EY=2$.

（8）由题设知，X_1，X_2，X_3，X_4 相互独立，因此

$$E(X_1-2X_2)=0,\quad D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=20,$$
$$E(3X_3-4X_4)=0,\quad D(3X_3-4X_4)=9D(X_3)+16D(X_4)=100.$$

于是 $\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1-2X_2)\sim N(0,1)$，$\frac{1}{\sqrt{100}}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)$，且它们相互独立，所以，$\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2)$. 从而 $D(Z)=4$. 因此选（A）.

附注　设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n),\text{且 } EY=n,DY=2n;$$
$$Z=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1),\text{且 } EZ=n-1,DY=2(n-1),$$

其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

二、填空题

（9）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$，

其中，$|(-1)^n\sin n|<1(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=e^0=1.$$

附注 设 $\alpha(x)$ 是有界函数，$\beta(x)$ 是某个极限过程中的无穷小，则在这个极限过程中有

$$\lim\alpha(x)\beta(x)=0.$$

(10) 由于 $x\in[-1,1]$ 时，$\psi(x)=(x-1)^2$，显然 $x\in[-1,0)$ 时，$\psi(x)>1$；$x\in[0,1]$ 时，$\psi(x)\leqslant1$，所以

$$\varphi(\psi(x))=\begin{cases}\psi(x)\ln\psi(x), & x\in[-1,0),\\ 1-\psi(x), & x\in[0,1]\end{cases}=\begin{cases}(1-x)^2\ln(1-x)^2, & x\in[-1,0),\\ 1-(x-1)^2, & x\in[0,1].\end{cases}$$

于是 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))dx=\int_{-1}^{0}(1-x)^2\ln(1-x)^2dx+\int_0^1[1-(x-1)^2]dx$，其中

$$\int_{-1}^{0}(1-x)^2\ln(1-x)^2dx=-\frac{2}{3}\left[(1-x)^3\ln(1-x)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}(1-x)^2dx\right]=\frac{16}{3}\ln2-\frac{14}{9},$$

$$\int_0^1[1-(x-1)^2]dx=1-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$

所以 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))dx=\left(\dfrac{16}{3}\ln2-\dfrac{14}{9}\right)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}\ln2-\dfrac{8}{9}.$

附注 平时应练习分段函数的复合运算.

(11) 由题设 $f(u,v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2})=-(u-1)-2(v-0)+o(\sqrt{(u-1)^2+(v-0)^2})$ 知

$$f(1,0)=0,\ f_u'(1,0)=-1,\ f_v'(1,0)=-2.$$

记 $u=e^y$，$v=x+y$，则 $g(x,y)=f(u,v)$，且

$$g_x'(x,y)=f_v'(u,v),\ g_y'(x,y)=f_u'(u,v)e^y+f_v'(u,v).$$

所以 $dg(x,y)|_{(0,0)}=g_x'(0,0)dx+g_y'(0,0)dy=f_v'(1,0)dx+[f_u'(1,0)+f_v'(1,0)]dy$ $=-2dx-3dy$.

附注 本题获解的关键是由 $f(u,v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+(v-0)^2})$ 得到 $f_u'(1,0)=-1$，$f_v'(1,0)=-2$.

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中

$$D=\left\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

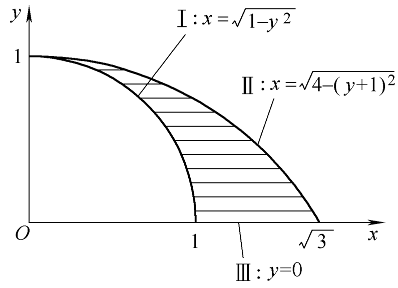
它是由曲线Ⅰ：$r=1\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，Ⅱ：$r=-\sin\theta_1+\sqrt{3+\sin^2\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及Ⅲ：$\theta=0$ 围成.

显然Ⅰ的方程为 $x=\sqrt{1-y^2}(0\leqslant y\leqslant 1)$. 由于Ⅱ的方程可改写成

$r^2=-r\sin\theta+\sqrt{3r^2+r^2\sin^2\theta}$，即 $x^2+y^2+y=\sqrt{3x^2+4y^2}$，或者，$x^2+y^2+2y-y=\sqrt{3x^2+4y^2}$，两边平方后得

$(x^2+y^2+2y)^2-(2y+3)(x^2+y^2+2y)+3\cdot 2y=0$，即 $(x^2+y^2)(x^2+y^2+2y-3)=0$.

由此得到Ⅱ的方程为 $x^2+y^2+2y=3$，即 $x=\sqrt{4-(y+1)^2}(0\leqslant y\leqslant 1)$. Ⅲ的方程为 $y=0$. 于是 D 如图答 2-12 阴影部分所示，所以有



图答　2-12

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y^2}^{\sqrt{4-(y+1)^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

上式右边即为所求的先 x 后 y 的二次积分.

附注　对某个二次积分 I，要改变它的积分次序或积分坐标系，总是先写出与 I 相对应的二重积分(实际上，只要写出它的积分区域即可)，然后再将这个二重积分转化为所要求的二次积分.

(13) $$\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ B & C^*\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(A^{-1})^{-1} & O\\ -(C^*)^{-1}B(A^{-1})^{-1} & (C^*)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A & O\\ -\frac{1}{|C|}CBA & \frac{1}{|C|}C\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:c}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\ \hdashline -\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

附注　这里利用了分块矩阵的求逆公式：

设 A，D 都是可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix}A & O\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}\\ O & D^{-1}\end{pmatrix}.$$

(14) 由题设知 $P(A)=P(B)$，于是由 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ 得

$$2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4}，即\ P(A)=\frac{1}{2}\left(舍去了\ P(A)=\frac{3}{2}\right)\tag{1}$$

由此可知 $0<a<2$ (这是因为，如果 $a\leqslant 0$，则 $P(A)=1$，这与 $P(A)=\frac{1}{2}$ 矛盾；如果 $a\geqslant 2$，

则 $P(A)=0$，这也与 $P(A)=\frac{1}{2}$矛盾$\Big)$. 于是由式(1)得

$$\frac{1}{2}=P(A)=\int_a^2\frac{3}{8}t^2\mathrm{d}t=1-\frac{1}{8}a^3,\text{即 } a=\sqrt[3]{4}.$$

附注 根据题设推出 $P(A)=P(B)$以及 $0<a<2$ 是本题获解的关键.

三、解答题

(15) 由于 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x-|x|}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}-1\right)=\frac{2+0}{1+0}-1-1=0$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin-|x|}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}-1\right)=\frac{0+0}{0+1}+1-1=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x-|x|}{|x|}\right)=0$. 此外 $\left|\arctan\frac{1}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$，因此

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x-|x|}{|x|}\right)\arctan\frac{1}{2}=0.$$

附注 由于 $\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x-|x|}{|x|}$ 是以 $x=0$ 为分段点的分段函数，所以计算 $x\to0$ 的极限时，应从计算左、右极限入手. 在计算时还应注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

(16) 记 D 绕直线 $y=1$ 旋转一周而成的旋转体体积为 V，则

$$\begin{aligned}V&=\pi\left[\int_0^1(1-x^2)^2\mathrm{d}x-\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\int_0^1(x^4-3x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

记 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积为 V_y，则

$$\begin{aligned}V_y&=2\pi\left(\int_0^1x\cdot x\mathrm{d}x-\int_0^1x\cdot x^2\mathrm{d}x\right)\\&=2\pi\int_0^1(x^2-x^3)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

附注 应记住以下公式：

设平面图形 $D_1=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\leqslant k\}$ 绕直线 $y=k$ 旋转一周而成的旋转体体积

$$V_k=\pi\left\{\int_a^b[k-f_1(x)]^2\mathrm{d}x-\int_a^b[k-f_2(x)]^2\mathrm{d}x\right\}.$$

设平面图形 $D_2=\{(x,y)\mid c\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$ 绕直线 $x=c$ 旋转一周而成的旋转体体积

$$V_c=2\pi\left[\int_a^b(x-c)f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b(x-c)f_1(x)\mathrm{d}x\right].$$

(17) 所给微分方程 $y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$ (1)

对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\cos ax + C_2\sin ax(\text{其中，}C_1\text{，}C_2\text{ 是任意常数}).$$

当 $a=1$ 时，式(1)有特解

$$y^* = x(A_1\sin x + B_1\cos x) + (A_2\sin x + B_2\cos 2x).$$

将它代入 $a=1$ 时的式(1)得

$$2A_1\cos x - 2B_1\sin x - 3A_2\sin 2x - 3B_2\cos 2x = \sin x + 2\cos 2x.$$

由此得到 $A_1=0$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$A_2=0$，$B_2=-\frac{2}{3}$. 故

$$y^* = -\frac{1}{2}x\cos x - \frac{2}{3}\cos 2x.$$

因此，当 $a=1$ 时，式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{2}{3}\cos 2x.$$

当 $a=2$ 时，式(1)有特解

$$y^* = A_1\sin x + B_1\cos x + x(A_2\cos x + B_2\sin 2x).$$

将它代入 $a=2$ 时的式(1)得

$$3A_1\sin x + 3B_1\cos x - 4A_2\sin 2x + 4B_2\cos 2x = \sin x + 2\cos 2x.$$

由此得到 $A_1=\frac{1}{3}$，$B_1=0$，$A_2=0$，$B_2=\frac{1}{2}$. 故

$$y^* = \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

因此，当 $a=2$ 时，式(1)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

附注 设有 2 阶线线微方程

$$y'' + ay' + by = e^{\alpha x}(a_1\cos\beta x + b_1\sin\beta x) \qquad (*)$$

(其中 a，b，a，b，α，β 都是常数)，则式(*)有特解

$$y^* = x^k e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

其中 $k=\begin{cases}0, & \text{当 }\alpha+i\beta\text{ 是方程 }\lambda^2+a\lambda+b=0\text{ 的 0 重根,}\\ 1, & \text{当 }\alpha+i\beta\text{ 是方程 }\lambda^2+a\lambda+b=0\text{ 的 1 重根,}\end{cases}$ 常数 A，B 可由 y^* 代入式(*)确定.

(18)(Ⅰ) 由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x + x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{2}{3},$$

所以，在点 $x=0$ 的充分小去心邻域内有

$$0 < \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} < 1.$$

由此证得，当 $|x|$ 充分小时，$x^2 \leqslant \tan^2 x \leqslant x^2 + x^4$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，当 n 充分大时，

$$\frac{1}{n+k}=\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2\leqslant\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^4=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{(n+k)^2},$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right]=\ln2+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\ln2+0\cdot\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln2,$$

所以，由数列极限存在准则 Ⅰ 知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\ln2.$

附注 数列极限存在准则有两个：

准则Ⅰ 设有数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$，如果它们满足

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots),$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$

准则Ⅱ 设数列$\{x_n\}$单调不减有上界，或单调不增有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

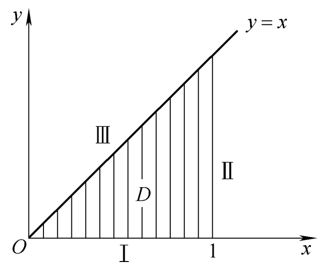
(19)(Ⅰ)由于$\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma,$$

所以，$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2+y^2}$，此外，

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}=$$

$\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$如图答 2-19 阴影部分所示，所以



图答 2-19

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令x=\sin t}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos2t+\frac{1}{8}\cos4t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

(Ⅱ) 由于 $g(x,y)=f(x+y,\sqrt{2xy})=\sqrt{2xy}\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{2(xy-x^3y-xy^3)}$，所以 $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{y-3x^2y-y^3}{\sqrt{2}\sqrt{xy-x^3y-xy^3}}$，从而

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=\frac{(1-3x^2-3y^2)\sqrt{xy-x^3y-xy^3}-\dfrac{(y-3x^2y-y^3)(x-x^3-3xy^2)}{2\sqrt{xy-x^3y-xy^3}}}{\sqrt{2}(xy-x^3y-xy^3)}$$

$$=\frac{xy-4x^3y-4xy^3+3x^5y+2x^3y^3+3xy^5}{2\sqrt{2}(xy-x^3y-xy^3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{x-4x^3-4xy^2+3x^5+2x^3y^2+3xy^4}{2\sqrt{2}\sqrt{y}(x-x^3-xy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

附注　如题解中那样，在直角坐标系中计算二重积分 I，比直接在极坐标系中计算 I 简捷得多.

(20)(Ⅰ) 由(A)与(B)等价知，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 由于

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&1&4\end{vmatrix}\neq 0，即\ r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3，$$

所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，即 $0\neq|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=a-5$. 由此得到 $a\neq5$.

(Ⅱ) 当 $a\neq5$ 时，由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&-1&-1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&2&-1&-1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\dfrac{2a-14}{a-5}&\dfrac{-a+7}{a-5}&-1\\0&1&0&\dfrac{-a+3}{a-5}&\dfrac{a-4}{a-5}&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$$

知,(A)由(B)的线性表示式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{2a-14}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{-a+3}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2+\dfrac{2}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3,\\\boldsymbol{\alpha}_2=\dfrac{-a+7}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{a-4}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2-\dfrac{1}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3,\\\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2.\end{cases}\tag{1}$$

附注 将初等行变换后的矩阵$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\dfrac{2a-14}{a-5}&\dfrac{-a+7}{a-5}&-1\\0&1&0&\dfrac{-a+3}{a-5}&\dfrac{a-4}{a-5}&2\\0&0&1&\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}&0\end{array}\right)$的列向量由左至右顺序记为$\boldsymbol{\beta}_1'$,$\boldsymbol{\beta}_2'$,$\boldsymbol{\beta}_3'$;$\boldsymbol{\alpha}_1'$,$\boldsymbol{\alpha}_2'$,$\boldsymbol{\alpha}_3'$,容易看到

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1'=\dfrac{2a-14}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1'+\dfrac{-a+3}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2'+\dfrac{2}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3',\\\boldsymbol{\alpha}_2'=\dfrac{-a+7}{a-5}\boldsymbol{\beta}_1'+\dfrac{a-4}{a-5}\boldsymbol{\beta}_2'-\dfrac{1}{a-5}\boldsymbol{\beta}_3',\\\boldsymbol{\alpha}_3'=-\boldsymbol{\beta}_1'+2\boldsymbol{\beta}_2'.\end{cases}\tag{2}$$

由于“初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系”(记住这一结论),因此由式(2)直接得到式(1),即(A)由(B)的线性表示式.

附注 (A)由(B)的线性表示式也可以用以下方法计算:

记 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,

则 由$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}$得

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2-\dfrac{2}{a-5}&-1+\dfrac{4}{a-5}&-\dfrac{2}{a-5}\\-1-\dfrac{1}{a-5}&1+\dfrac{2}{a-5}&-\dfrac{1}{a-5}\\\dfrac{1}{a-5}&-\dfrac{2}{a-5}&\dfrac{1}{a-5}\end{pmatrix}.$$

于是　$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2-\dfrac{2}{a-5} & -1+\dfrac{4}{a-5} & -\dfrac{2}{a-5}\\ -1-\dfrac{1}{a-5} & 1+\dfrac{2}{a-5} & -\dfrac{1}{a-5}\\ \dfrac{1}{a-5} & -\dfrac{2}{a-5} & \dfrac{1}{a-5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}\dfrac{2a-14}{a-5} & \dfrac{-a+7}{a-5} & -1\\ \dfrac{-a+3}{a-5} & \dfrac{a-4}{a-5} & 2\\ \dfrac{2}{a-5} & -\dfrac{1}{a-5} & 0\end{pmatrix},$$

它即为式(1).

(21)(Ⅰ)由于$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的一个特征向量，记它对应的特征值为$\lambda_1$，则有

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & -4\\ 1 & \lambda_1-3 & -a\\ -4 & -a & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=0,\text{ 即}\begin{cases}\lambda_1-2=0,\\ 1+2(\lambda_1-3)-a=0,\\ -4-2a+\lambda_1=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $\lambda_1=2$，$a=-1$

将 $a=-1$ 代入 $\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -4\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ \lambda-3 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -4\\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1\\ 0 & 0 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

它的根除 $\lambda_1=2$ 外，还有 $\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$，所以，$f(x_1, x_2, x_3)$的标准形为 $2y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

(Ⅱ)由于 $\boldsymbol{A}^*$ 是实对称矩阵，所以它能正交对角化为对角形矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$. 由于 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\mu_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-20$，$\mu_2=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-8$，$\mu_3=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=10$，所以

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-20 & & \\ & -8 & \\ & & 10\end{pmatrix}.$$

下面计算使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

由题设知，$\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda_2=5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(u_1,\ u_2,\ u_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\xi}_2$ 满足

$$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=0. \tag{1}$$

由于 $\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&-9&-9\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，式(1)与 $\begin{cases}u_2+u_3=0,\\u_1+u_2=0\end{cases}$ 同解，它的基础解系为$(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，故取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(v_1,\ v_2,\ v_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知,

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_1)=0,\\(\boldsymbol{\xi}_3,\ \boldsymbol{\xi}_2)=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}v_1+2v_2+v_3=0,\\v_1-v_2+v_3=0,\end{cases}$$

它的基础解系为$(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，故取 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

显然，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 是正交向量组. 现将它的单位化得

$$\boldsymbol{\xi}_1^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\ \frac{2}{\sqrt6},\ \frac{1}{\sqrt6}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\ -\frac{1}{\sqrt3},\ \frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3^0=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1^0,\ \boldsymbol{\xi}_2^0,\ \boldsymbol{\xi}_3^0)$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求的正交矩阵.

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，且有特征值 λ 及与之对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\mu=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$. 所以当 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵)为对角矩阵时，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 也是对角矩阵，且对角线上的元素都是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

(22) 由 $\displaystyle\iint\limits_{xOy\text{平面}}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=1$，即$\displaystyle\iint\limits_{G}Ax^2y\,\mathrm{d}\sigma=1$ 得

$$A=\frac{1}{\displaystyle\iint\limits_{G}x^2y\,\mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}x^2y\,\mathrm{d}y}=\frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2(1-x^4)\,\mathrm{d}x}=\frac{21}{4},$$

所以，$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & (x,\ y)\in G,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$D(2X+3Y)=E[(2X+3Y)^2]-[E(2X+3Y)]^2,$$

其中 $\displaystyle E[(2X+3Y)^2]=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(2x+3y)^2f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_G (2x+3y)^2 \cdot \frac{21}{4}x^2 y \mathrm{d}\sigma = \frac{21}{4}\iint_G (4x^4 y + 12x^3y^2 + 9x^2y^3)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{21}{4}\cdot 2\iint_{G_1}(4x^4y+9x^2y^3)\mathrm{d}\sigma$$ （由于 G 关于 y 轴对称，$4x^4y+9x^2y^3$ 在对称点处的值彼此相等，而 $12x^3y^2$ 的值互为相反数，D_1 是 D 的第一象限部分）

$$= \frac{21}{2}\int_0^1 \left(2x^4y^2 + \frac{9}{4}x^2y^4\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{21}{2}\int_0^1\left(\frac{9}{4}x^2 + 2x^4 - 2x^8 - \frac{9}{4}x^{10}\right)\mathrm{d}x = \frac{2506}{165},$$

$$E(2X+3Y) = \iint_{xOy\text{平面}}(2x+3y)f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_G (2x+3y)\cdot\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{21}{2}\iint_{G_1}3x^2y^2\mathrm{d}\sigma = \frac{21}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 3x^2y^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{21}{2}\int_0^1(x^2-x^8)\mathrm{d}x = \frac{7}{3}.$$

于是，$D(2X+3Y) = \dfrac{2506}{165} - \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{4921}{477}$.

附注 应记住随机变量 X 的方差计算公式：

$$DX = E(X^2) - (EX)^2.$$

（23）由于 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $z=x^2$，则它在 $f(x)\neq 0$ 的区间 $(\alpha, +\infty)$ 上单调增加，反函数 $x=h(z)=\sqrt{z}\,(z>\alpha^2)$，于是 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} f(h(z))\,|h'(y)|, & z>\alpha^2,\\ 0, \text{其他}\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{\alpha^2}{z^2}, & z>\alpha^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记样本观察值为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$（由于现在是计算最大似然估计量，可认为它们都大于 α^2），故有似然函数为

$$L(\alpha^2) = \frac{\alpha^2}{z_1^2}\cdot\frac{\alpha^2}{z_2^2}\cdots\frac{\alpha^2}{z_3^2} = \frac{(\alpha^2)^n}{z_1^2z_2^2\cdots z_n^2}.$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}L(\alpha^2)}{\mathrm{d}\alpha^2} = \dfrac{n(\alpha^2)^{n-1}}{z_1^2z_2^2\cdots z_n^2} > 0$，所以 α^2 的最大似然估计值为 $\min\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$. 从而 α^2 的最大似然计量为 $\widehat{\alpha^2} = \min\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}$.

由最大似然值估计量的不变性得 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\widehat{\alpha^2}} = \sqrt{\min\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}}.$$

附注 本题也可计算如下：

由于 X 的概率密度 $f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且 X 有简单随机样本观察值 $\sqrt{z_1}$，$\sqrt{z_2}$，…，$\sqrt{z_n}$（它们都大于 α），所以有似然函数

$$L(\alpha)=\frac{2\alpha^2}{z_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{2\alpha^2}{z_2^{\frac{3}{2}}}\cdots\frac{2\alpha^2}{z_n^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^n}{(z_1z_2\cdots z_n)^{\frac{3}{2}}}\alpha^{2n}\left(\sqrt{z_1}>\alpha,\ \sqrt{z_2}>\alpha,\ \cdots,\ \sqrt{z_n}>\alpha\right)$$

于是由 $\dfrac{\mathrm{d}L(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\dfrac{2^n\cdot 2n}{(z_1z_2\cdots z_n)^{\frac{3}{2}}}\alpha^{2n-1}>0$ 知，α 的最大似然估计值为 $\min\{\sqrt{z_1},\ \sqrt{z_2},\ \cdots,\ \sqrt{z_n}\}=\sqrt{\min\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n\}}$. 所以 α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}=\sqrt{\min\{Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_n\}}$.

模拟试题(三)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	B	C	C	B	C	A	A

(1) 当$|x|\leqslant 1$时，由$1\leqslant \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leqslant \sqrt[n]{2}(n=1,2,\cdots)$知，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当$|x|>1$时，$f(x)=|x|^3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left|\dfrac{1}{x}\right|^{3n}}=|x|^3$，

所以
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3 & |x|>1.\end{cases}$$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$上可导，但由
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$
知，$f(x)$在点$x=1$处不可导. 此外，由$f(x)$是偶函数知$f(x)$在点$x=-1$处也不可导.
因此选（C）.

附注 由于$f(x)$是由数列极限确定的，所以要讨论它的可导性，首先要通过数列极限计算，确定$f(x)$的解析表达式.

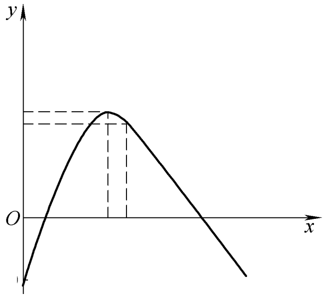
(2) 由于$F(x)=\displaystyle\int_0^{2x}\cos^2(2x-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=2x-t} \int_0^{2x}\cos^2 u\,\mathrm{d}u$,所以
$$F'(x)=2\cos^2 2x,\ F''(x)=-4\sin 4x.$$
因此选（B）.

附注 要计算$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{\varphi(x)}f(t,x)\,\mathrm{d}t$时,首先应将被积函数中的$x$移到积分号外,或移到积分限中去.

(3) 记$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x$，则由
$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\begin{cases}>0, & 0<x<\mathrm{e},\\ =0, & x=\mathrm{e},\\ <0, & x>\mathrm{e},\end{cases}$$
知$f(x)$的最大值$f(\mathrm{e})=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^3 x}\mathrm{d}x>0$,以及$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以方程$f(x)=0$,即方程$\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^3 x}\mathrm{d}x$的正根个数为2. 因此选(C)

附注 由于曲线 $y=f(x)$ 的概图如图答3-3所示，所以方程 $f(x)=0$ 有两个正根.

(4) 由于当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 可能是极值，也可能不是极值，所以选项(C)不正确. 因此选(C)



图答 3-3

附注 (C)的不正确性可用下列例子以明之：

设 $f_1(x,y)=x^3+y^3$，记 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$f_x'(x_0,y_0)=f_y'=(x_0,y_0)=0,$$

且 $AC-B^2=0$. 此时，$f(x_0,y_0)=0$ 不是 $f(x,y)$ 的极值.

设 $f_2(x,y)=x^4+y^4$，记 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0,$$

且 $AC-B^2=0$. 此时，$f(x_0,y_0)=0$ 是 $f(x,y)$ 的极值.

(5) 由于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^* \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & |2\boldsymbol{A}|(2\boldsymbol{A})^{-1} \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 8(2\boldsymbol{A})^{-1} \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$,

所以，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{A})^* \\ (3\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & ((3\boldsymbol{B})^{-1})^{-1} \\ (8(2\boldsymbol{A})^{-1})^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B} \\ \frac{1}{4}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 因此选(B)

附注 题解中应用了以下公式(应记住)：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n\geqslant 2)$，$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ (k 是常数).

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 m，n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

(6) 由题设知 $r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$. 由于当 $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{Q})=2$，所以此时 $r(\boldsymbol{P})\leqslant 1$. 此外，由 $\boldsymbol{P}$ 是非零矩阵知，$r(\boldsymbol{P})\geqslant 1$. 从而 $r(\boldsymbol{P})=1$. 因此选(C).

附注 本题也可按以下方法计算.

当 $t\neq 6$ 时，$r(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})=2$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中包含 $3-2=1$ 个线性无关的解向量. 从而由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$ 知，非零矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 的线性无关列向量个数为1，即得 $r(\boldsymbol{P})=r(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})=1$.

(7) 记 $A_1=\{$第一次取到的是一等品$\}$,

$A_2=\{$第二次取到的是一等品$\}$,

则 $p=P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=\dfrac{P(A_1A_2(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}$，其中

$$P(A_1A_2(A_1\cup A_2))=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15},$$

$$P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=1-\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{2}{3},$$

所以 $p=\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{5}$ 因此选(A).

附注　题解中的 $P(A_1\cup A_2)$ 也可按加法公式计算：

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)$$
$$=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{3}.$$

显然，它没有题解中的计算简捷.

(8) 由于 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{\lambda},D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n\lambda^2}$,所以由列维 — 林德柏格中心极限定理得

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}}\leqslant x\right)=\Phi(x).$$

因此选(A).

附注　列维—林德伯格中心极限定理是：

设 X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立同分布的随机变量序列，它们的数学期望都为 μ，方差都为 σ^2，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x),$$

其中，$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

二、填空题

(9) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)},$$

其中，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$

$$=\ln2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln2-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=2\ln-1.$$

所以　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}=e^{2\ln2-1}=\frac{4}{e}.$

附注　$\ln(1+x)$ 是[0,1]上的连续函数,而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$ 是它的一个积分和式，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

(10) 记 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x$，则 $f(x)=x+2A$,于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x + 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x,$$

即 $$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x + 2A.\ 所以$$

$$A = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\sin x = -\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\right) = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

于是 $f(x) = x + 2 - \pi$，从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x + 2 - \pi)\mathrm{d}x = \frac{5}{2} - \pi.$$

附注 本题获解的关键，是注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\mathrm{d}x$ 是常数 A.

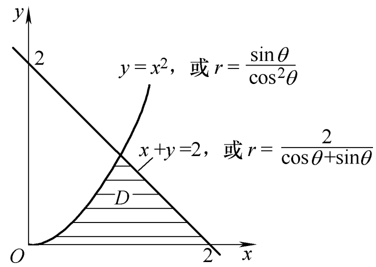
（11）由 $\mathrm{e}^x + \sin y = x$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-\mathrm{e}^x}{\cos y}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f_u'\mathrm{e}^x + f_v'\left(2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \mathrm{e}^x f_u' + \frac{2(x\cos y + y - y\mathrm{e}^x)}{\cos y}f_v'.$$

附注 计算 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 时，要注意 y 是 x 的函数，而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可由方程 $\mathrm{e}^x + \sin y = x$ 两边对 x 求导得到.

（12）D 如图答 3-12 阴影部分所示. 它的极坐表示为 $D = \left\{(r,\ \theta)\ \middle|\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \leqslant r \leqslant \frac{2}{\cos\theta + \sin\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$，所以，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的先 r 后 θ 的二次积分为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$



图答 3-12

附注 顺便写出所给二重积分的先 y 后 x 与先 x 后 y 的二次积分：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y\text{（先 }y\text{ 后 }x\text{ 的二次积分）}$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x\text{（先 }x\text{ 后 }y\text{ 的二次积分）}.$$

（13）由于 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 -2，-1，1，2，从而 $\boldsymbol{B}^*$ 有特征值

$$\frac{|\boldsymbol{B}|}{-2} = -2,\ \frac{|\boldsymbol{B}|}{-1} = -4,\ \frac{|\boldsymbol{B}|}{1} = 4,\ \frac{|\boldsymbol{B}|}{2} = 2，由此可知\ \boldsymbol{B}^* \sim \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

所以 $$|\boldsymbol{B}^* - \boldsymbol{E}_4| = \left|\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & -4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right| = 45.$$

附注　题解有两点值得注意：

（Ⅰ）设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，有特征值 λ，则 $\boldsymbol{A}^*$ 对应有特征值$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是相似的 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}_n|$.

（14）由于 $E(X^3+2Y^2)=E(X^3)+2E(Y^2)$，其中

$$\begin{aligned}E(X^3)&=\int_{\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^3\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}\\&=-\left(x^3\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}-\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\right)=\frac{3}{2}E(X^2)\\&=\frac{3}{2}[DX+(EX)^2]=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

$$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

所以，$E(X^3+2Y^2)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{17}{12}$.

附注　在 $E(X^3)$ 的计算中，对于 $\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ 不必再作积分计算，这是因为它可按 $\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=E(X^2)=DX+(EX)^2$，直接得到.

三、解答题

（15）$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x)-f(1)}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1))-f(1)}{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}\cdot\frac{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}{\frac{1}{2}x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1))-f(1)}{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}$$

其中 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1))-f(1)}{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}$$

$$\xlongequal{\text{令 }u=\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}\lim_{n\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=f'(1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}1+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\ln(1+x^2)+\mathrm{e}^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}=1\times 2\times\dfrac{3}{2}=3$.

附注　由于 $f(u)$ 仅在点 $u=1$ 处可导，因此对所给极限不能直接应用洛必达法则计算，而只能利用导数定义计算.

（16）所给微分方程　　$y''+y=5\mathrm{e}^{2x}+2\sin x$　　(1)

对应的齐次微分方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

式(1)有特解 $y^*=Ae^{2x}+x(B_1\cos x+B_2\sin x)$,
将它代入式(1)得

$$5Ae^{2x}-2B_1\sin x+2B_2\cos x=5e^{2x}+2\sin x.$$

由此得到 $A=1$, $B_1=-1$, $B_2=0$. 所以 $y^*=e^{2x}-x\cos x$. 从而式(1)的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}-x\cos x$.

附注 应熟练掌握常系数线性微分方程的解法.

(17)(Ⅰ)显然$\{a_n\}$是正项数列,且由

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)=\frac{1}{3}\left(a_n+a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{a_n\cdot a_n\cdot\frac{1}{a_n^2}}=1\ (n=1,2,\cdots)$$

知,$\{a_n\}$有下界. 此外,

由 $$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{1}{a_n^2}\right)-a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n^2}-a_n\right)\leqslant 0\quad(n=1,2,\cdots)$$

知,$\{a_n\}$单调不增. 从而由数列极限存在准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,记为 a. 对递推式两边取极限得 $a=\frac{1}{3}\left(2a+\frac{1}{a^2}\right)$,所以 $a=1$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(Ⅱ)由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{a_n}{2^n}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$,所以所给幂级数的收敛半径 $R=2$.

当 $x=2$, -2,所给幂级数分别成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, 显然它们的通项极限都不为零,所以所给幂级数在点 $x=2$, -2 处都是发散的,故收敛域为$(-1,1)$.

附注 计算幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域步骤如下:

(Ⅰ)计算$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛半径,记为 R.

(Ⅱ)当 $R=+\infty$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域为$(-\infty,+\infty)$;当 $R=0$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 收敛域为$\{0\}$;当 R 为正数时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域为$(-R,R)$ 与其收敛端点之并集.

(18)作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$在$[0,1]$上连续,且 $F(0)F(1)=f(0)[f(1)-1]<0$,所以由零点定理知,存在$\xi\in(0,1)$,使得$F(\xi)=0$,即

$$f(\xi)=\xi.\tag{1}$$

下面用反证法证明式(1)的 ξ 的唯一性. 设另有 $\eta\in(0,1)$,使得$f(\eta)=\eta$,不妨设 $\eta<\xi$,则

$$f(\xi)-f(\eta)=\xi-\eta.$$

由拉格朗日中值定理知,存在 $\theta\in(\eta,\xi)\subset(0,1)$,使得

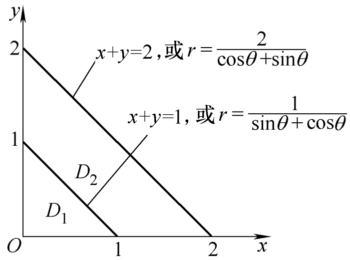
$$f'(\theta)(\xi-\eta)=\xi-\eta,\ 即 f'(\theta)=1.$$

这与题设 $f'(x)\neq 1(x\in(0,\ 1))$ 矛盾. 因此满足式(1)的 ξ 是唯一的.

附注　唯一性问题，往往用反证法证明. 本题就是如此.

(19) 用直线 $x+y=1$ 将 D 划分成 D_1 与 D_2 两部分(如图答 3-19)，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}x\ln x\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$



图答　3-19

其中 $$\iint\limits_{D_1}x\ln d\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\ln x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(x-x^2)\ln x\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$=\left[\ln x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}x^3\right)\Bigg|_0^1=-\frac{5}{36},$$

$$\iint\limits_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma\xlongequal{极坐标}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{r^3}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta=1.$$

所以, $$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma=-\frac{5}{36}+1=\frac{31}{36}.$$

附注　D_1 与 D_2 都是角域的一部分,但是 $\iint\limits_{D_1}x\ln x\mathrm{d}\sigma$ 按直角坐标计算，而 $\iint\limits_{D_2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$ 按极坐标计算，这主要是由于后者的被积函数是 x^2+y^2 的函数.

(20) 由于 $$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&2\\a&b&c&0\end{array}\right)\xrightarrow[(以下同)]{初等行变换}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&-3&3&1\\0&b-a&c+2a&-a\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&1&-1&-\frac{1}{3}\\0&b-a&c+2a&-a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{4}{3}\\0&1&-1&-\frac{1}{3}\\0&0&a+b+c&-\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b\end{array}\right),$$

所以由题设知, $\begin{cases}a+b+c=0,\\-\frac{4}{3}a+\frac{1}{3}b=0,\\a=2\end{cases}$ 即 $a=2,\ b=8,\ c=-10.$ 此时所给方程组与(Ⅱ)

$\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = \dfrac{4}{3}, \\ \quad x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 同解. (Ⅱ)的导出组的基础解系为 $C(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 此外(Ⅱ)有特解 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, 所以(Ⅰ)的通解为

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = C(1, 1, 1)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)^{\mathrm{T}} \quad (\text{其中 } C \text{ 是任意常数}),$$

对上述算得的 a, b, c 知, $\boldsymbol{\xi} = (2, 8, -10)^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 关于向量组 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 的线性表示式为

$$\boldsymbol{\xi} = y_1\boldsymbol{\eta}_1 + y_2\boldsymbol{\eta}_2 + y_3\boldsymbol{\eta}_3 = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} (\text{其中矩阵}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)\text{可逆}),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

所以,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

因此所求的线性表示为

$$\boldsymbol{\xi} = 26\boldsymbol{\eta}_1 + 16\boldsymbol{\eta}_2 - 8\boldsymbol{\eta}_3.$$

附注 由所给方程组有两个不同解可得, 这个方程组对应的齐次线性方程有非零解, 所以系数矩阵的秩≤2, 此外由系数矩阵本身可知, 其秩≥2. 因此系数矩阵的秩 = 2. 从而有

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -\dfrac{4}{3}a + \dfrac{1}{2}b = 0, \\ a \quad\quad\quad = 2. \end{cases}$$

(21) 由于 $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 + x_3^2$ 在 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = \quad \sqrt{3}x_2, \\ y_3 = \quad\quad x_3, \end{cases}$ 即可逆线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2, \\ x_2 = \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2, \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$ 下成为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 所以 $g(x_1, x_2, x_3)$ 是正定二次型, 它在上述可逆线性变换

下化成的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

由于 $f(x_1, x_2, x_2)$ 是非正定二次型，所以，它的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&c\end{pmatrix}$$

的顺序主子式不全为正，故有 $c\leqslant 2$. 从而由题设 $c\geqslant 2$ 得 $c=2$. 于是 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

由于 $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)-2(\lambda-1)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$，所以 A 的特征值 $\lambda=0, 1, 3$

设 A 的对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\xi=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则它满足

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}，即\begin{cases}a_1\qquad+a_3=0,\\ \qquad a_2+a_3=0.\end{cases}$$

可取它的基础解系数为 ξ，即 $\xi=(-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$

设 A 的对应 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\eta=(b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$，则它满足

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}，即\begin{cases}\qquad\qquad b_3=0,\\ b_1+b_2+b_3=0,\end{cases}$$

可取它的基础解系为 η，即 $\eta=(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$

设 A 的对应 $\lambda=3$ 的特征量为 $\zeta=(c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 A 是实对称矩阵知

$$\begin{cases}(\zeta, \xi)=0,\\ (\xi, \eta)=0,\end{cases}即\begin{cases}-c_1-c_2+c_3=0,\\ \quad c_1-c_2\qquad=0,\end{cases}$$

可取它的基础解系为 ζ，即 $\zeta=(1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

显然，ξ，η，ζ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\xi^0=\frac{\xi}{\|\xi\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta^0=\frac{\eta}{\|\eta\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\zeta^0=\frac{\zeta}{\|\zeta\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}^0,\ \boldsymbol{\eta}^0,\ \boldsymbol{\zeta}^0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$(正交矩阵)，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$（其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{z}=(z_1,\ z_2,\ z_3)^{\mathrm{T}}$）将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 化为标准形 $z_2^2+3z_3^3$.

附注 由于 $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(x_1,\ x_2,\ x_3)$（$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵）为正定二次型的充分必要条件是它的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都大于零．故当题中 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 不是正定二次型时，它的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&c\end{pmatrix}$ 的顺序主子式 1，$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}|=c-2$ 不全大于零，于是有 $c\leqslant 2$.

（22）由于 $f(x,\ y)=\begin{cases}f_Y(y)f_{X|Y}(x|y), & f_Y(y)>0,\ f_{X|Y}(x|y)>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$$=\begin{cases}5y^4\cdot\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<y<1,\ 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

所以，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 15x^2y\,\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{15}{2}(x^2-x^4), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

于是由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\frac{15}{2}(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{8}$ 得

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\,\mathrm{d}x-\left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot\frac{15}{2}(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x-\frac{25}{64}=\frac{3}{7}-\frac{25}{64}=\frac{17}{448}.$$

此外，由 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 5y^5\,\mathrm{d}y=\frac{5}{6}$ 得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$$

$$=\iint\limits_{xOy平面}xyf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma-\frac{5}{8}\times\frac{5}{6}$$

$$=\iint\limits_{\Delta}xy\cdot 15x^2y\,\mathrm{d}\sigma-\frac{25}{48}\quad（其中\ \Delta=\{(x,y)\mid 0<x<y<1\}）$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 15x^3y^2\,\mathrm{d}y-\frac{25}{48}=\frac{15}{28}-\frac{25}{48}=\frac{5}{336}$$

附注　当已知$f_Y(y)$, $f_{X|Y}(x|y)$时，可按以下公式计算$f(x,y)$：

$$f(x,y)=\begin{cases}f_Y(y)f_{X|Y}(x|y), & f_Y(y)>0,\ f_{X|Y}(x|y)>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

同样当已知$f_X(x)$, $f_{Y|X}$时，可按以下公式计算$f(x,y)$：

$$f(x,y)=\begin{cases}f_X(x)f_{Y|X}(y|x), & f_X(x)>0,\ f_{Y|X}(y|x)>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(23) 记Z的分布函数为$F(z)$，则

$$\begin{aligned}F(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(Y=-1)P(X\geqslant -z\mid Y=-1)+P(Y=1)P(X\leqslant z\mid Y=1)\\&=\frac{1}{2}P(X\geqslant -z)+\frac{1}{2}P(X\leqslant z)(\text{利用 }X\text{ 与 }Y\text{ 相互独立})\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-z}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx+\dfrac{1}{2}\int_0^z\lambda e^{-\lambda x}dx, & z>0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以，Z的概率密度为

$$f(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\lambda e^{\lambda z}, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z}, & z>0\end{cases}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|}\ (-\infty<z<+\infty).$$

由此得到似然函数

$$\begin{aligned}L(\lambda)&=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z_1|}\cdot\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z_2|}\cdots\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z_n|}\\&=\frac{1}{2^n}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|},\end{aligned}$$

即　$$\ln L(\lambda)=\ln\frac{1}{2^n}+n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}|z_i|.$$

上式两边对λ求导得

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}|z_i|,$$

于是由$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$得$\lambda$的最大似然估计值为$\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|}$.

附注　应熟练掌握参数点估计的两种方法：矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(四)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	C	A	C	A	C	B	B	C

(1) $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)\sin\dfrac{\pi}{2x}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-1.$$

因此选(C)

附注 计算分段函数在分段点处的导数，总是从导数定义出发.

(2) 由于

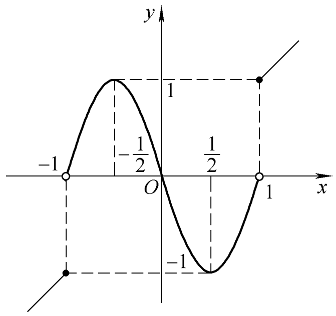
$|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=-\sin\pi x$;

$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=x$;

$x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=1$;

$x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-(x^2-1)\sin\pi x}{x^n+x^2-1}=-1$,

所以，$y=f(x)=\begin{cases}-\sin\pi x, & |x|<1,\\ x, & |x|\geqslant1\end{cases}$ 的图形如图答 4-2 所示，由图可知，$f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$，极小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$. 因此选(A)



图答 4-2

附注 画图得到正确选项，是解选择题常用的方法之一.

(3) 由于 $\varphi(x,y)=\displaystyle\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{y^2}f\left(\frac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{v}{y}}\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{y}\mathrm{d}u\int_0^{\frac{u}{y}}f(t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } z=\frac{u}{y}}\int_0^{\frac{y}{x^2}}\mathrm{d}z\int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t,$$

从而 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x^4}f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$. 因此选(C).

附注　要对 $\int_0^{\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{y^2}f\left(\frac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$ 关 y 求偏导数，应首先把被积函数 $\int_0^u\frac{1}{y^2}f\left(\frac{v}{y}\right)\mathrm{d}v$ 中的 y 移到外层积分限或移出外层积分号. 本题题解就是如比处理的.

(4) 由题设知 $y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$.

对于选项(A)的 $y=\sqrt{1+x}$，显然它有 $y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$，且满足 $yy''+(y')^2=0$，并且 $y=\sqrt{1+x}$的定义域为$[-1,+\infty)$. 因此选(A).

附注　$y=\sqrt{1+x}\ (x\geqslant-1)$也可直接计算得到，具体如下：

$yy''+(y')^2=(yy')'$，所以由所给微分方程得 $yy'=C_1$，将 $y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$代入得 $C_1=\frac{1}{2}$. 从而 $yy'=\frac{1}{2}$，即$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}=1$. 所以 $y^2=x+C_2$，将 $y(0)=1$ 代入得 $C_2=1$. 因此，$y^2=x+1$，即 $y=\sqrt{1+x}$(舍去了不合题意的 $y=-\sqrt{1+x}$). 由于 $\sqrt{1+x}$的定义域为$[-1,+\infty)$. 所以所求的 $y=y(z)$为 $y=\sqrt{1+x}\,(x\geqslant-1)$.

(5) 由于选项(C)与(D)有且仅有一个是正确的，因此只要考虑这两个选项即可. 由 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})\leqslant n<n+1$ 知，$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 因此选(C).

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则

$r(\boldsymbol{A})=n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充分必要条件；

$r(\boldsymbol{A})<n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件.

(6) $\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1，1，2. 由 $\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda-1&-2\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$ 知，选项(A)的矩阵$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$有特征值 $\lambda=3$，-1(二重)，它与 $\boldsymbol{A}$ 有不同的特征值，故不与 $\boldsymbol{A}$ 相似，从而不能选(A).

对选项(B)的矩阵$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$，由$\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\lambda-\frac{3}{2}\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$知，它有特征值 -1，1，2，即与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，所以这个实对称矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 相似且合同. 因此选(B).

附注　(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件有以下两类：

(ⅰ)存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$；

(ⅱ)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，或者 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值(n_i 重以 n_i 个计算).

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有以下三类：

(ⅰ) 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$；

(ⅱ) 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$(其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$)有相同的规范形，或者二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$ 有相同的正惯性指数，也有相同的负惯性指数.

(ⅲ) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值(n_i 重的以 n_i 个计算)，

(7) 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\left(\max\left\{X, X^2, \frac{1}{2}\right\}\leqslant y\right)$$

$$=P\left(X\leqslant y, X^2\leqslant y, \frac{1}{2}\leqslant y\right)$$

$$=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{2},\\ P(X\leqslant y, -\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}), & y\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{2},\\ P\left(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant y\right), & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ P\left(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right), & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{2},\\ \displaystyle\int_0^y 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x, & \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{y}} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x, & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<\dfrac{1}{2},\\ 1-\mathrm{e}^{-2y}, & \dfrac{1}{2}\leqslant y<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{y}}, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

所以，Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 只有一个间断点 $y=\frac{1}{2}$. 因此选(B).

附注 由于$\sqrt{y}=\begin{cases}>y, & \dfrac{1}{2}\leqslant y<1,\\ \leqslant y, & y\geqslant 1,\end{cases}$

所以 $P\left(X\leqslant y, -\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right)=\begin{cases}P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant y), & \dfrac{1}{2}\leqslant y<1,\\ P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}), & y\geqslant 1.\end{cases}$

(8) 记 $U=X_1+X_2+X_5+X_6$，$V=X_3+X_4-X_7-X_8$，则 $U\sim N(0, 4\sigma^2)$，$V\sim N(0, 4\sigma^2)$，所以，$\frac{U}{2\sigma}$，$\frac{V}{2\sigma}$相互独立，且都服从 $N(0, 1)$. 由此得到

$$\frac{(X_1+X_2+X_5+X_6)^2}{(X_3+X_4-X_7-X_8)^2}=\frac{\frac{U^2}{4\sigma^2}}{\frac{V^2}{4\sigma^2}}\sim F(1,\ 1).$$ 因此选(C).

附注 $F(n_1,\ n_2)$分布定义如下：

设 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则$\frac{X}{Y}\sim F(n_1,\ n_2)$.

二、填空题

(9) 由 $2=\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f(x)+1}{x}}{\frac{x-\sin x}{x^3}}$知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

所以，$f(0)=-1$，$f'(0)=\frac{1}{3}$. 因此所求的切线方程为

$$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-0),\ \text{即}\ y=\frac{1}{3}x-1.$$

附注 设$f(x)$在点 x_0 处连续，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-k}{x-x_0}=A$($A$，$k$ 是常数)，则$f(x_0)=k$，$f'(x_0)=A$.

(10) 由 $\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\xi^2(x)}}$得 $\xi(x)=\frac{\sqrt{\arcsin^2x-x^2}}{\arcsin x}$，所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\arcsin^2x-x^2}}{x\arcsin x}\overset{\text{令 }t=\arcsin x}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t^2-\sin^2t}}{t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t+\sin t}{t}}\cdot\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t-\sin t}{t^3}},$$

其中，$\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t+\sin t}{t}}=\sqrt{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t+\sin t}{t}}=\sqrt{2}$,

$$\lim_{t\to0^+}\sqrt{\frac{t-\sin t}{t^3}}=\sqrt{\lim_{t\to0^+}\frac{t-\sin t}{t^3}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\sqrt{\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{3t^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

所以，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\xi(x)}{x}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

附注 只有对 $x\in(0,\ 1)$，存在唯一的 ξ 时，ξ 才是 x 的函数，才可以写成 $\xi(x)$. 下面证明上述的 ξ 是唯一的.

对函数 $\arcsin t$ 在$[0,\ x]$($x\in(0,\ 1)$)上应用拉格朗日中值定理，如果在$(0,\ x)$内存在两个 ξ_1，ξ_2，使得

$$\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\xi_1^2}},\quad \arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-\xi_2^2}}$$

则 $\xi_1=\xi_2$. 由此证明了唯一性.

(11) $$\begin{aligned}\int_{-1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\,dx &= \int_{-1}^{1}e^{2f(x)}\sin x\,dx+\int_{1}^{\pi}e^{2f(x)}\sin x\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}e^{\cos x}\sin x\,dx+\int_{1}^{\pi}x^2\sin x\,dx=-\int_{1}^{\pi}x^2\,d\cos x\\ &= -\left(x^2\cos x\Big|_1^{\pi}-\int_1^{\pi}2x\cos x\,dx\right)\\ &= \pi^2+\cos 1+\int_1^{\pi}2x\,d\sin x\\ &= \pi^2+\cos 1+\left(2x\sin x\Big|_1^{\pi}-2\int_1^{\pi}\sin x\,dx\right)\\ &= \pi^2-\cos 1-2\sin 1-2.\end{aligned}$$

附注 由于 $e^{\cos x}\sin x$ 是奇函数，所以题解中 $\int_{-1}^{1}e^{\cos x}\sin x\,dx=0$.

(12) 由于 $z_x'=\cos(xy)\cdot y+\varphi_u'+\varphi_v'\cdot\frac{1}{y}$，所以

$$\begin{aligned}z_{xy}''&=-\sin(xy)\cdot xy+\cos(xy)+\varphi_{uv}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi_{vv}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y}+\varphi_v'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\\ &= -xy\sin(xy)+\cos(xy)-\frac{x}{y^2}\left(\varphi_{uv}''+\frac{1}{y}\varphi_{vv}''\right)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'\\ &= -xy\sin(xy)+\cos(xy)-\frac{1}{y^2}\varphi_v'.\end{aligned}$$

附注 要熟练掌握二元复合函数的1、2阶偏导数的计算.

(13) 由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$，即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{B})$. (1)

此外，由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 及 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$ 得 $r(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})$. (2)

所以 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$. 从而 $r(\boldsymbol{B}^*)=n$.

附注 题解中利用了关于矩阵秩的以下结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}.$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1 & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0 & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(14) 由题设知，X 与 Y 相互独立，从而 X 与 Y^2 相互独立，且 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 所以 $D(X+Y^2)=DX+D(Y^2)$，其中

$$DX=1,\ EY=\frac{1}{2},\ DY=\frac{1}{4},\ E(Y^2)=DY+(EY)^2=\frac{1}{2},\text{ 并且}$$

$$
\begin{aligned}
D(Y^2) &= E(Y^4) - [E(Y^2)]^2 = \int_0^{+\infty} y^4 \cdot 2e^{-2y}dy - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= -\int_0^{+\infty} y^4 de^{-2y} - \frac{1}{4} \\
&= -\left(y^4 e^{-2y}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} y^3 \cdot 4e^{-2y}dy\right) - \frac{1}{4} \\
&= -2\int_0^{+\infty} y^3 de^{-2y} - \frac{1}{4} \\
&= -2\left(y^3 e^{-2y}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 3y^2 \cdot e^{-2y}dy\right) - \frac{1}{4} \\
&= 3\int_0^{+\infty} y^2 \cdot 2e^{-2y}dy - \frac{1}{4} = 3E(Y^2) - \frac{1}{4} \\
&= 3 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

因此，$D(X+Y^2)=1+\dfrac{5}{4}=\dfrac{9}{4}$.

附注　记住：服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布的随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0 & \text{其他},\end{cases}$ $EX=\dfrac{1}{\lambda}$，$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$，$E(X^2)=\dfrac{2}{\lambda^2}$.

三、解答题

(15) 由于$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant -1, \\ 3x+1, & x>-1\end{cases}$，所以

$$\int f(x)dx = \int_{-1}^{x} f(t)dt + C,$$

其中，$\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt = \begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{x}(t-1)dt, & x\leqslant -1, \\ \displaystyle\int_{-1}^{x}(3t+1)dt, & x>-1,\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}, & x\leqslant -1, \\ \dfrac{3}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{2}, & x>-1.\end{cases}$

因此 $\displaystyle\int f(x)dx = \begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} + C, & x\leqslant -1, \\ \dfrac{3}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{2} + C, & x>-1.\end{cases}$

附注　分段函数$f(x)$的不定积分，应用以下公式计算是比较快捷的：

$$\int f(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C,$$

其中 x_0 是$f(x)$是最靠左边的分段点.

(16) 由于 $y(t) = e^{-\int 2dt}\left(C + \int e^{-t} \cdot e^{\int 2dt}dt\right) = Ce^{-2t} + e^{-t}$.

将 $y(0)=0$ 代入上式得 $C=-1$. 所以 $y(t)=-e^{-2t}+e^{-t}(t\geqslant 0)$.

当 $t<0$ 时，$f'(t)=(2t^2+\sin t)'=4t+\cos t$,

当 $t>0$ 时，$f'(t)=y'(t)=(-e^{2t}+e^{-t})'=2e^{-2t}-e^{-t}$.

由于 $\lim\limits_{t\to0^-}f'(t)=1$，$\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=1$，所以 $f'(0)=1$. 因此

$$f'(t)=\begin{cases}4t+\cos t, & t<0,\\ 2e^{-2t}-e^{-t}, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

由此可得，$t<0$ 时，$f''(t)=4-\sin t$；$t>0$ 时，$f''(t)=-4e^{-2t}+e^{-t}$. 由于 $\lim\limits_{t\to0^-}f''(t)=4$，$\lim\limits_{t\to0^+}f''(t)=-3$，所以 $f''(0)$ 不存在，因此

$$f''(t)=\begin{cases}4-\sin t, & t<0,\\ -4e^{-2t}+e^{-t}, & t>0.\end{cases}$$

附注 $f'(0)=1$ 与 $f''(0)$ 不存在也可证明如下：

由于 $f(t)=\begin{cases}2t^2+\sin t, & t<0,\\ -e^{-2t}+e^{-t}, & t\geqslant 0,\end{cases}$ 所以

$$f'_-(0)=\lim_{t\to0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0^-}\frac{2t^2+\sin t}{t}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{-e^{-2t}+e^{-t}}{t}=1,$$

从而 $f'(0)=1$.

由于 $f'(t)=\begin{cases}4t+\cos t, & t<0,\\ 2e^{-2t}-e^{-t}, & t\geqslant 0,\end{cases}$ 所以

$$f''_-(0)=\lim_{t\to0^-}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{4t+\cos t-1}{t}=4,$$

$$f''_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(t)-f'(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2e^{-2t}-e^{-t}-1}{t}=-3.$$

从而 $f''(0)$ 不存在.

(17) 令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\,dt=\sin x\cdot f(x)$ 成为

$$\int_0^x f(u)\,du=\sin x\cdot f(x). \tag{1}$$

式(1)的两边对 x 求导得

$$f(x)=\sin x\cdot f'(x)+\cos x\cdot f(x),$$

即 $f'(x)+\dfrac{\cos x-1}{\sin x}f(x)=0$(齐次线性微分方程)，所以

$$f(x)=Ce^{-\int\frac{\cos x-1}{\sin x}dx}=Ce^{\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx}=Ce^{-2\ln\cos\frac{x}{2}},$$

即 $f(x)=\dfrac{C}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$. 将 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ 代入得 $C=1$. 所以 $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$. 从而，$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{12}{\pi}\tan\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}(3-\sqrt{3}).$$

附注　如果计算 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值，则不需算出 $f(x)$ 的表达式. 这是因为在式(1)中令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得

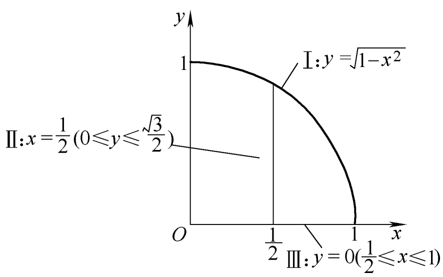
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\sin\frac{\pi}{2}\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

所以，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}.$$

(18) 由于 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x(1-y^2)$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y(2-x^2)$，所以方程组 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x(1-y^2)=0,\\ 2y(2-x^2)=0\end{cases}$ 在 D 的内部无可能极值点.

D 有边界 Ⅰ：$y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$，Ⅱ：$x=\frac{1}{2}\left(0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，Ⅲ：$y=0\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$，如图答 4-18 所示.



图答　4-18

在Ⅰ上，$f(x,y)$ 成为

$$g_1(x)=2-2x^2+x^4\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right).$$

由于 $g_1'(x)=4x(x^2-1)<0$，所以 $g_1(x)$ 在Ⅰ上的最大值 $g_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{16}$，最小值 $g_1(1)=1$.

在Ⅱ上，$f(x,y)$ 成为 $g_2(y)=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}y^2\left(0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 所以 $g_2(y)$ 在Ⅱ上的最大值 $g_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{23}{8}$，最小值 $g_2(0)=\frac{1}{4}$.

在Ⅲ上，$f(x,y)$ 成为 $g_3(x)=x^2\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$，所以 $g_3(x)$ 在Ⅲ上的最大值 $g_3(1)=1$，最小值 $g_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

综上所述，$f(x,y)$在 D 上的最大值 $=\max\left\{\frac{25}{16},\frac{23}{8},1\right\}=\frac{23}{8}$，最小值 $=\min\left\{1,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$.

附注　有界闭区域 D 上的二元连续函数 $f(x,y)$ 的最值，可按以下步骤计算：

（Ⅰ）计算 $f(x,y)$ 在 D 内部的可能极值点，记为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)；

（Ⅱ）计算 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值与最小值（分别记为 M_1，m_1）则 $f(x_1,y_1)$，$f(x_2,y_2)$，…，$f(x_n,y_n)$，M_1，m_1 中的最大者（最小者）为 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值（最小值）.

（19）$u(x,2x)=x$ 两边对 x 求导得

$$u_x'=u_x(x,2x)+2u_y'(x,2x)=1,$$

再对 x 求导得 $[u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)]+2[u_{yx}''(x,2x)+2u_{yy}''(x,2x)]=0$. 利用 $u_{xx}''=u_{yy}''$，$u_{xy}''=u_{yx}''$ 化简后得

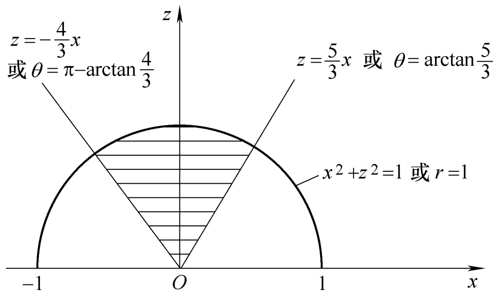
$$5u_{xx}''(x,2x)+4u_{xy}''(x,2x)=0. \tag{1}$$

$u_x'(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导得

$$u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)=2x. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $u_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x$，$u_{xy}''(x,2x)=\frac{5}{3}x$. 于是 D 如图答 4-19 的阴影部分所示，所以 D 的面积为

$$\iint_D d\sigma=\int_{\arctan\frac{5}{3}}^{\pi-\arctan\frac{4}{3}}d\theta\int_0^1 r\,dr$$
$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}-\arctan\frac{5}{3}\right).$$



图答　4-19

附注　本题获解的关键是利用题设从 $u(x,2x)=x$，$u_x'(x,2x)=x^2$ 中算出 $u_{xx}''(x,2x)$ 与 $u_{xy}''(x,2x)$ 的表达式.

（20）由于 $b=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，$b^4=16$，

$$2b^2\boldsymbol{A}^2=2\cdot2^2(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=8\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=16\boldsymbol{A}=16\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^3\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=8\boldsymbol{A},$$

所以，所给的方程组成为

$$(8\boldsymbol{A}-16\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}，即(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

或
$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

由于
$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

所以，式(1)与方程组
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

同解. 式(2)的导出组的通解为 $C(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，此外式(2)有特解 $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，所以，式(2)，即式(1)的通解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = C(1, 2, 1)^{\mathrm{T}} + \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$(其中，$C$ 是任意常数).

附注 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 是一个常数，记为 c；$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶矩阵，记为 $\boldsymbol{A}$，则 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 1$，且对正整数 k，有
$$\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = c^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

(21) 由于
$$|\lambda \boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -4 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ \lambda-3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -4 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda+4)[(\lambda-3)^2 - (\lambda-1)]$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$
所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda = 2, 5, -4$.

设对应 $\lambda = 2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{a}$ 满足
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

由于
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以，式(1)与方程组$\begin{cases} a_2-2a_3=0, \\ a_1 \quad - \; a_3=0 \end{cases}$同解，故可取$\boldsymbol{a}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{a}=(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应$\lambda=5$的特征向量为$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{b}$满足

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

由于
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以式(2)与方程组$\begin{cases} \quad\; b_2+b_3=0, \\ b_1+b_2 \quad\;\; =0 \end{cases}$同解，故可取$\boldsymbol{b}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{b}=(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应$\lambda=-4$的特征向量为$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$，则由$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵知，$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$都正交，所以有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})=0, \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})=0, \end{cases}\text{即}\begin{cases} c_1+2c_2+c_3=0, \\ c_1-c_2+c_3=0. \end{cases}\text{由于它与}\begin{cases} \quad c_2 \qquad =0, \\ c_1 \quad +c_3=0. \end{cases}$$

同解，故可取$\boldsymbol{c}$为它的基础解系，即$\boldsymbol{c}=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

显然$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\zeta}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$(正交矩阵)，则$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$，于是在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下，$f(x_1, x_2, x_3)=2y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$(标准形).

由
$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q} &= -40\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q}(\,|\boldsymbol{A}|=2\times5\times(-4)=-40) \\ &= -40(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^{-1}=-40(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^{-1} \\ &= -40\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -20 & & \\ & -8 & \\ & & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

知，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，

$$f_2(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-20 & & \\ & -8 & \\ & & 10\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=-20y_1^2-8y_2^2+10y_3^2(\text{标准形}).$$

附注　由题解可知，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实对称矩阵，则当正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$)化为标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$(其 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值)时，必将二次型 $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\cdots+\mu_ny_n^2$(其中 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值).

(22)(Ⅰ)记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y).$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$P(X^2\leqslant y)=0$；

当 $0<y\leqslant 1$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{y}$；

当 $1<y\leqslant 4$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{1}\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(1+\sqrt{y})$；

当 $y>4$ 时，$P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-2}^{1}\frac{1}{3}\mathrm{d}y=1$，

所以，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{2}{3}\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{y}), & 1<y\leqslant 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$ 由此得到

$$\varphi(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y\leqslant 1,\\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) $E(|Y-X^4|)=E(|X^2-X^4|)=E(X^2|1-X^2|)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|1-x^2|f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}x^2|1-x^2|\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}x^2(x^2-1)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_{-2}^{-1}+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\bigg|_{-1}^{1}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{58}{15}+\frac{4}{15}\right)=\frac{62}{45}.$$

附注　$\varphi(y)$ 也可以按以下方法计算：

由于 $y=x^2$ 在 $f(x)\neq 0$ 的区间 $(-2,0]$ 与 $(0,1)$ 上都是单调的，且 $y=x^2$ 在 $(-2,0)$ 内的反函数 $x=h_1(y)=-\sqrt{y}(0<y\leqslant 4)$，在 $(0,1)$ 内的反函数 $x=h_2(y)=\sqrt{y}(0<y\leqslant 1)$，所以

$$\varphi(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}|h_1'(y)|, & 0<y\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}+\begin{cases}\dfrac{1}{3}|h_2'(y)|, & 0<y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(23) 设所给的简单随机样本的观察值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 为了计算 θ 的最大似然估计量，可认为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 全为正的. 故似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_1}{\theta}}\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_2}{\theta}}\cdots\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_n}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},$$

即 $\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$. 于是由

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，从而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

由于 $EX=\theta$，$DX=\theta^2$，所以由

$$P(\hat{\theta}\leqslant y)=P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant y\right)=P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}\leqslant\frac{y-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}\right)$$

$$\approx\int_{-\infty}^{\frac{y-\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}}}\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ (\text{其中},y\text{ 是任意实数})$$

由此可知 $\hat{\theta}$ 近似 $N\left(\theta,\dfrac{\theta^2}{n}\right)$.

附注　设 Y 是随机变量，如果对于任意实数 y 有 $P(Y\leqslant y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，则 $Y\sim N(a,\sigma^2)$；如果对任意实数 y 有 $P(Y\leqslant y)\approx\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，则 $Y\overset{\text{近似}}{\sim}N(a,\sigma^2)$.

模拟试题(五)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	D	B	C	A	C	A	A	C

(1) 设$f(x)=x$，则$f(x)$只有一个零点，但$f'(x)$没有零点．表明选项(A)不正确.

设$f(x)=x^2$，则$f'(x)$只有一个零点，$f(x)$也只有一个零点，表明选项(B)不正确.

设$f(x)=e^x$ 则$f(x)$没有零点，$f'(x)$也没有零点．表明选项(C)不正确.

因此选(D).

附注　(D)的结论可用反证法证明其正确，具体如下：

设$f(x)$至少有两个零点，设其中两个为x_1，$x_2(x_1<x_2)$则由罗尔定理知，存在$\xi\in(x_1, x_2)$，使得$f'(\xi)=0$，这与$f'(x)$没有零点相矛盾．从而$f(x)$至多有一个零点.

(2) 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上，$\sin(\sin x)\leqslant\sin x$(仅在点$x=0$处取等号)，$\cos(\sin x)\geqslant\cos x$(仅在点$x=0$处取等号)，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1.$$

故有$I_1<I_3$．因此选(B).

附注　选项(A)是不正确的，这是由于

$$\begin{aligned}I_1-I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\cos t)-\sin(\sin t)]\mathrm{d}t\\&\qquad\left(\text{其中 }x=\frac{\pi}{2}-t\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\sin x)-\sin(\cos x)]\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin(\cos x)-\sin(\sin x)]\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

所以,$I_1=I_2$.

由此也证明选项(C)是不正确的.

(3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f'_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

并且 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，

所以，$f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\frac{-y^5}{y^4}}{y}=-1$，

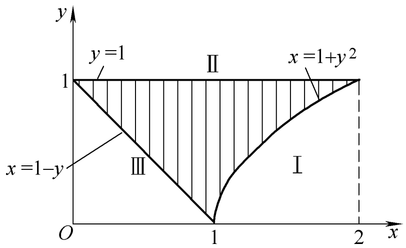
$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^5}{x}}{x}=1.$$

故$f''_{xy}(0,0)<f''_{yx}(0,0)$. 因此选（C）.

附注 在已算出$f'_x(x,y)$时，可按以下方法快捷算出$f'_y(x,y)$（这是因为当$f(y,x)=-f(x,y)$时，$f'_y(x,y)=-f'_x(y,x)$）：

$$f'_y(x,y)=-f'_x(y,x)=-\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{x与y互换}=\frac{x^5-4x^2y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

（4）$D=\{(x,y)\mid 1-y\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant1\}+\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant2,\ \sqrt{x-1}\leqslant y\leqslant1\}$，如图答 5-4 的阴影部分所示.



图答 5-4

D的边界由Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三部分组成. 显然Ⅱ，Ⅲ上的任一点的切线都为它们自己，从而不能与直线$y=x-1$平行.

设$(x_0,y_0)(x_0=1+y_0^2,\ 0<y_0<1)$是Ⅰ上的一点，则此点的切线斜率的倒数为$2y_0$，于是由题设得$\dfrac{1}{2y_0}=1$，即$y_0=\dfrac{1}{2}\left(对应地有\ x_0=\dfrac{5}{4}\right)$. 从而所求的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=x-\frac{5}{4},\ 即\ y=x-\frac{3}{4}.$$

因此选(A).

附注 要计算Ⅰ上的与直线$y=x-1$平行的切线方程，应先确定切点的坐标.

（5）由于$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\2&-4&5&-8\\3&1&4&2\\3&1&t+2&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&4&-5&8\\0&4&t-7&t+6\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-2&-1&-4\\4&-5&8\\4&t-7&t+6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&2&4\\0&-7&0\\0&t-9&t-2\end{vmatrix}=14(t-2),$$

所以，$t=2$时，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=0$，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关；$t=3$时，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|\neq0$，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关. 由此可知，结论①④正确，因此选（C）.

附注 确定n个n维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的线性相关性的好方法是计算行列式$D=$

$|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)|$. 如果 $D=0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；如果 $D\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(6) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda-1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1$(二重)，$\lambda=-1$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，所以 $r(1\cdot\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})=3-2=1$，即

$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\text{，从而 } -a=b. \tag{1}$$

用 $-b-1$ 代替 b，$\boldsymbol{A}$ 就成为 $\boldsymbol{B}$，所以由 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化得

$$-a=-b-1. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$. 因此选 (A).

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有较多种表述，其中常用的有：

设 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化充分必要条件有

$$r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n-n_i(i=1, 2, \cdots, s).$$

(7) 由$P(X\geqslant 0, Y\geqslant 0)=\dfrac{3}{7}$，$P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\dfrac{4}{7}$得

$$P(X\geqslant 0, Y<0)=P(X\geqslant 0)-P(X\geqslant 0, Y\geqslant 0)=\frac{1}{7},$$

$$P(X<0, Y\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)-P(X<0, Y\geqslant 0)=\frac{1}{7},$$

$$P(X<0, Y<0)=1-P(X\geqslant 0, Y\geqslant 0)-P(X\geqslant 0, Y<0)-P(X<0, Y\geqslant 0)=\frac{2}{7},$$

所以
$$\begin{aligned} P(\max\{X, Y\} X\geqslant 0) &= P(\max\{X, Y\}\geqslant 0, X\geqslant 0)+P(\max\{X, Y\}\leqslant 0, X\leqslant 0) \\ &= P(X\geqslant 0)P(\max\{X, Y\}\geqslant 0 \mid X\geqslant 0)+P(X\leqslant 0, Y\leqslant 0, X\leqslant 0) \\ &= P(X\geqslant 0)+P(X\leqslant 0, Y\leqslant 0)=\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}. \end{aligned}$$
因此本题选 (A).

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 由于 X, Y 是连续型随机变量，所以 $P(X\leqslant 0, Y\leqslant 0)=P(X<0, Y<0)$.

(Ⅱ) 由于 $X\geqslant 0$ 时，必有 $\max\{X, Y\}\geqslant 0$，所以 $P(\max\{X, Y\}\geqslant 0 \mid X\geqslant 0)=1$.

(8) 由题设知 $\overline{X}\sim N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{9}\right)$，所以

$$P(1<\overline{X}<3)=P\left(\frac{3}{\sigma}<\frac{\overline{X}-0}{\frac{\sigma}{3}}<\frac{9}{\sigma}\right)=\int_{\frac{3}{\sigma}}^{\frac{9}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}A \xlongequal{\text{记}} f(\sigma).$$

由于$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{81}{2\sigma^2}}\left(-\frac{9}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2\sigma^2}}\left(-\frac{3}{\sigma^2}\right)$

$$=-\frac{3}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2\sigma^2}}(3\mathrm{e}^{-\frac{36}{\sigma^2}}-1)\begin{cases}>0, & 0<\sigma<\frac{6}{\sqrt{\ln 3}},\\ =0, & \sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}},\\ <0, & \sigma>\frac{6}{\sqrt{\ln 3}},\end{cases}$$

所以，使得$P(1<\overline{X}<2)$为最大的$\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$. 因此选(C).

附注 应记住以下结论：

设X_1，X_2，…，X_n是来自总体X的简单随机样本，记$\mu=EX$，$\sigma^2=DX$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$（样本均值），则

$$E\overline{X}=\mu,\ D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

于是，当$X\sim N(\mu,\sigma^2)$时，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

二、填空题

(9) 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}+x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1+1=2$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-2x)&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}+x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1})-2x\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]+\lim_{x\to\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]\\&=2+\lim_{x\to\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]\\&\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}2+\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}2+\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\end{aligned}$$

所以，所给出曲线的非铅直渐近线方程为$y=2x+\frac{5}{2}$.

附注 对于曲线$y=f(x)$，如果极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$存在为$a$，极限$\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)$存在为$b$，则该曲线的非铅直渐近线方程为$y=ax+b$.

(10) 由于$(\sin x^3)^3$是奇函数，所以它在点$x=0$处的4阶导数为0.

由于
$$(\ln\cos x)'=-\tan x,\ (\ln\cos x)''=(-\tan x)'=-\sec^2 x,$$
$$(\ln\cos x)^{(3)}=(-\sec^2 x)'=-2\sec^2 x\tan x,$$

所以，$(\ln\cos x)^{(4)}\Big|_{x=0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln\cos x)^{(3)}-(\ln\cos x)^{(3)}\Big|_{x=0}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sec^2 x\tan x}{x}=-2.$

从而
$$f^{(4)}(0)=0+(-2)=-2.$$

附注　设$f(x)$在点$x=0$处任意阶可导，则

当$f(x)$是奇函数时，$f^{(2k)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$；

当$f(x)$是偶函数时，$f^{(2k+1)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$.

(11) $\int_{-1}^{1}(|x|e^{-x}+\sin x^3+\sqrt{(1-x^2)})dx=\int_{-1}^{1}|x|e^{-x}dx+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

$$=\int_{-1}^{0}-xe^{-x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-x}dx+\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{0}xde^{-x}-\int_{0}^{1}xde^{-x}+\frac{\pi}{2}$$

$$=\left(xe^{-x}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{-x}dx\right)-\left(xe^{-x}\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{-x}dx\right)+\frac{\pi}{2}=2-\frac{2}{e}+\frac{\pi}{2}.$$

附注　利用定积分几何意义，有
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\text{上半单位圆的面积}=\frac{\pi}{2}.$$

(12) 由于$\iint\limits_D(x+4y+xy)d\sigma=\iint\limits_D xd\sigma+\iint\limits_D(4y+xy)d\sigma$

$$=2\iint\limits_{D_1}xd\sigma$$

(由于D关于x轴对称,而$4y+xy$在对称点处的值互为相反数,所以$\iint\limits_D(4y+xy)d\sigma=0$;$x$在对称点处的值彼此相等,所以$\iint\limits_D xd\sigma=2\iint\limits_{D_1}xd\sigma$,$D_1$是$D$的第一象限部分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r\cos\theta\cdot rdr=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\right]^2d\theta$$

$$=\frac{1}{6}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos4\theta d\theta\right)=\frac{\pi}{8}a^3.$$

所以，由题设得$\frac{\pi}{8}a^3=\frac{\pi}{8}$，即$a=1$.

附注　计算二重积分时，首先应利用积分区域的对称性，化简二重积分，然再进行计算.

(13) 由题设得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且式(1)可以表示为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{记}{=\!=} \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的最大特征值为 2，从而 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为 2.

附注 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果它们相似，则

(Ⅰ) $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

(Ⅱ) $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

(Ⅲ) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

(Ⅳ) $\boldsymbol{A}^* \sim \boldsymbol{B}^*$.

(Ⅴ) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{B}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$.

(14) 记 X = 乙箱中的次品数，

Y = 从乙箱中取出的次品数，

则 $P(Y=1) = P(X=1)P(Y=1 \mid X=1) + P(X=2)P(Y=1 \mid X=2) + P(X=3)P(Y=1 \mid X=3)$

$$= \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} \cdot \frac{C_1^1 C_5^2}{C_6^3} + \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} \cdot \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} + \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} \cdot \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{207}{400},$$

$P(Y=2) = P(X=2)(Y=2 \mid X=2) + P(X=3)P(Y=2 \mid X=3)$

$$= \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} \cdot \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} + \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} \cdot \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{45}{400},$$

$$P(Y=3) = P(X=3)P(Y=3 \mid X=3) = \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} \cdot \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{400}.$$

所以，所求的平均值 $= EY = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3)$

$$= \frac{207}{400} + \frac{90}{400} + \frac{3}{400} = \frac{3}{4}.$$

附注 由于 Y 可能取的值为 0，1，2，3，所以

$$EY = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3)$$

但是，在具体计算时，$P(Y=0)$ 是不必算出的.

三、解答题

(15) 由于 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln\left(\cos x + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x)}{x^2}}$，

其中，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x+\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-\sin x+\dfrac{1}{2}}{\cos x+\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{2(1+x)}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+x)\left(-\sin x+\dfrac{1}{2}\right)-\cos x-\dfrac{x}{2}}{4x(1+x)\left(\cos x+\dfrac{x}{2}\right)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+x)\sin x+(1-\cos x)+\dfrac{x}{2}}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+x)\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\left(-2+0+\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{3}{8}}$.

附注 计算 0^0，1^∞，∞^0 型未定式极限 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ 时，总是先将函数指数化，即 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. 然后计算 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)$ $\left(\text{它是 } 0\cdot\infty \text{ 型未定式极限可转换或}\dfrac{0}{0}\text{或}\dfrac{\infty}{\infty}\text{型未定式极限进行计算}\right)$，记此极限为 A，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\begin{cases}0, & A=-\infty,\\ e^A, & A\text{ 是实数},\\ +\infty, & A=+\infty.\end{cases}$$

(16) 在所给等式

$$e^x f(x)+2e^{\pi-x}f(\pi-x)=3\sin x \tag{1}$$

中令 $x=\pi-t$ 得

$$e^{\pi-t}f(\pi-t)+2e^t f(t)=3\sin t,$$

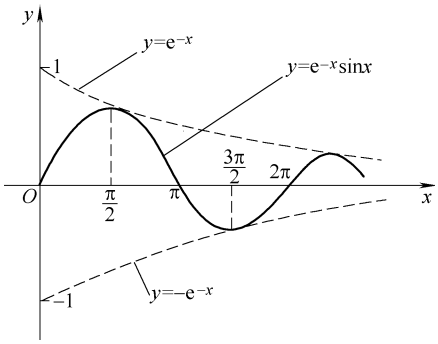
即

$$2e^{\pi-x}f(\pi-x)+4e^x f(x)=6\sin x. \tag{2}$$

式(1)-式(2)得

$$e^x f(x)=\sin x,\text{ 即 } f(x)=e^{-x}\sin x.$$

由于 $y=f(x)\ (x>0)$ 的概图如图答 5-16 所示，所以，由图可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极大值为 $f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-2n\pi-\frac{\pi}{2}}\ (n=0,1,2,\cdots)$，极小值为 $f\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-2n\pi+\frac{\pi}{2}}\ (n=1,2,\cdots)$.



图答 5-16

附注 画出函数的概图后，往往可以利用函数极值定义，得到该函数的极值. 这比用导数方法计算函数极值快捷.

(17) 由 $\varphi(x)$ 单调知，它的反函数 $\varphi^{-1}(x)$ 存

在，于是由 $\varphi(x)$ 可导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \varphi^{-1}(\varphi(x))\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

$$= x[f_u'(x,f(x,x)) + f_v'(x,f(x,x))(f_u'(x,x) + f_v'(x,x))],$$

从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(x)}\varphi^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{x=1} = f_u'(1,1) + f_v'(1,1)[f_u'(1,1) + f_v'(1,1)]$

$$= f_u'(1,\ 1) + f_v'(1,\ 1)(2+3) = 2+3(2+3) = 17.$$

附注 题解中应注意的是：$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

(18) 由于

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\ (-\infty < x < +\infty),$$

所以 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}s^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}2\sin^2\frac{x}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}(1-\cos\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}x, \tag{1}$$

其中，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$，此外由

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -\left(\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\mathrm{d}x\right)$$

$$= 1 + \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\sin\sqrt{2}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$= 1 + \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{-x}\sin\sqrt{2}x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}x\right)$$

$$= 1 - 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}x$$

得 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. 将以上计算代入式(1) 得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}s^2(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

附注 应记住 $\sin x$，$\cos x$ 的麦克劳林展开式.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\ (-\infty < x < +\infty).$$

本题就是按此公式快捷算得所给幂级数的和函数 $s(x)$.

(19)(Ⅰ) 令 $u = x^2 + y^2$，则 $z = uf(u)$. 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(u) + 2xuf'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(u)+8x^2f'(u)+2uf'(u)+4x^2uf''(u).$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(u)+8y^2f'(u)+2uf'(u)+4y^2uf'(u).$$

从而，由$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0,$$

即$[u^2f'(u)+uf(u)]'=0$. 由此得到

$$u^2f'(u)+uf(u)=C_1 \tag{1}$$

将$f(1)=0$，$f'(1)=1$ 代入式(1)得 $C_1=1$，所以式(1)成为

$$u^2f'(u)+uf(u)=1，即 f'(u)+\frac{1}{u}f(u)=\frac{1}{u^2}(线性微分方程).$$

它的通解为$f(u)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u}\left(C_2+\int\frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u}\right)$

$$=\frac{1}{u}\left(C_2+\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u\right)=\frac{C_2}{u}+\frac{\ln u}{u}. \tag{2}$$

将$f(1)=0$ 代入式(2)得 $C_2=0$. 所以$f(u)=\frac{\ln u}{u}(u\geqslant 1)$

(Ⅱ) D 如图答 5-19 的阴影部分所示，所以，

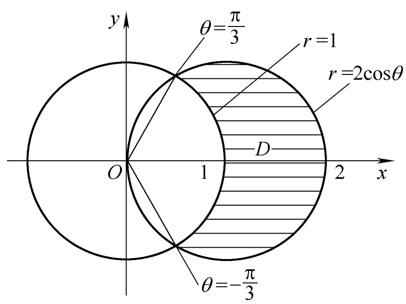
$$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)}{\ln(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)}{\ln(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma \quad (D_1 是 D 的第一象限部分)$$

$$\xlongequal{极坐标}2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\frac{f(r^2)}{\ln r^2}\cdot r\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\theta-1)\mathrm{d}\theta=(4\sin\theta-2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi.$$

附注　由于 D 是角域的一部分，而且被积函数是 x^2+y^2 的函数，所以题解中用极坐标计算所给的二重积分.



图答　5-19

(20) 由 $\boldsymbol{A}$ 有零特征值知

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&5\\-1&0&a-3\end{vmatrix}=a-1=0，即 a=1.$$

要使矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，必须 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$. 于是由

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8\\ -1 & 0 & -2 & b+1 & c-2 & -3\end{array}\right)(\text{已将 } a=1 \text{ 代入})$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & b+3 & c & 0\end{array}\right)$$

知$\begin{cases}b+3=0,\\ c=0,\end{cases}$即 $b=-3$，$c=0$.

设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$，并将 $a=1$，$b=-3$，$c=0$ 代入，则矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \text{ 与} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{1}$$

同解，而式(1)即为以下三个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}. \tag{4}$$

显然，式(2)的通解为 $C_1(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(2,-1,0)^{\mathrm{T}}=(2C_1+2,C_1-1,-C_1)^{\mathrm{T}}$，

式(3)的通解为 $C_2(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(2,0,0)^{\mathrm{T}}=(2C_2+2,C_2,-C_2)^{\mathrm{T}}$，

式(4)的通解为 $C_3(2,1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,2,0)^{\mathrm{T}}=(2C_3+3,C_3+2,-C_3)^{\mathrm{T}}$，

所以，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2C_1+2 & 2C_1+2 & 2C_3+3\\ C_1-1 & C_2 & C_3+2\\ -C_1 & -C_2 & -C_3\end{pmatrix}$(其中，$C_1$，$C_2$，$C_3$ 是任意常数).

附注 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解法见模拟试题(二)(20)的解答.

(21)(Ⅰ)由于$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$，所以，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$ 的解为 $a=1$，-2.

当 $a=1$ 时，由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)$

知，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a=-2$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

知，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 设表示式为 $\boldsymbol{\beta}=x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}.\tag{1}$$

由以上的初等行变换知，该方程组与 $\begin{cases}x\quad -z=1,\\ \quad y-z=0\end{cases}$ 同解. 它对应的齐次线性方程组的通解为 $C(1,1,1)^{\mathrm T}$，且有特解 $(1,0,0)^{\mathrm T}$. 所以式(1)的通解为 $(x,y,z)^{\mathrm T}=C(1,1,1)^{\mathrm T}+(1,0,0)^{\mathrm T}=(C+1,C,C)^{\mathrm T}$. 从而对所求的 $a=-2$，线性表示式的一般形式为 $\boldsymbol{\beta}=(C+1)\boldsymbol{\alpha}_1+C\boldsymbol{\alpha}_2+C\boldsymbol{\alpha}_3$（其中 C 是任意常数）.

（Ⅱ）由于 $a=-2$ 时，

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\\lambda&\lambda+2&-1\\\lambda&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&2\\0&\lambda+3&-3\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0,3,-3$.

设对应 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm T}$，则 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}.\tag{1}$$

由于 $\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以式(1)与方程组 $\begin{cases}a_1\quad -a_3=0,\\ \quad a_2-a_3=0\end{cases}$ 同解，故 $\boldsymbol{a}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)^{\mathrm T}$.

设对应 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm T}$，则 $\boldsymbol{b}$ 满足

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}.\tag{2}$$

由于 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&9&0\\-1&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以

式(2)与方程组$\begin{cases} b_1 \quad +b_3=0, \\ \quad b_2 \quad =0 \end{cases}$同解，故 $\boldsymbol{b}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都正交，所以有$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1 \quad -c_3=0, \end{cases}$故 $\boldsymbol{c}$ 可取它的基础解系，即 $\boldsymbol{c}=(1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是正交向量组，现将它们单位化得

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\zeta}=\frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{\sqrt{6}}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$（正交矩阵），则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$化为标准形 $3y_2^2-3y_3^2$.

附注 由于当 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|\neq 0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示. 因此题解从 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)|=0$ 入手.

(22) 由 $EZ=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(2x-y)f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Delta}(2x-y)\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}\sigma$

（其中 $\Delta=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<2x\}$）

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2x}(2x-y)\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{2}x\cdot\left[-\frac{1}{2}(2x-y)^2\right]\Bigg|_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 3x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$$

得 $DZ=E(Z^2)-(EZ)^2$

$$=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(2x-y)^2f(x,y)\mathrm{d}\sigma-\frac{9}{16}=\iint\limits_{\Delta}(2x-y)^2\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}\sigma-\frac{9}{16}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2x}(2x-y)^2\cdot\frac{3}{2}x\mathrm{d}y-\frac{9}{16}=\int_0^1\frac{3}{2}x\cdot\left[-\frac{1}{3}(2x-y)^3\right]\Bigg|_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x-\frac{9}{16}$$

$$=\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x-\frac{9}{16}=\frac{19}{80}.$$

由 $Z=2X-Y$ 得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\frac{1}{|-1|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x,\ 2x-z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,\ 0<2x-z<2x,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,\quad 0<z<2x,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0<z<2,\quad \dfrac{z}{2}<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{z}{2}}^{1}\frac{3}{2}x\mathrm{d}x, & 0<z<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{1}{4}z^2\right), & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

附注　记住以下公式：

设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为$f(x,\ y)$，则随机变量 $Z=aX+bY+c$($a,\ b,\ c$ 是常数)的概率密度可按以下公式计算：

当 $a\neq0$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-by-c}{a},y\right)\frac{1}{|a|}\mathrm{d}y$，

当 $b\neq0$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,\frac{z-ax-c}{b}\right)\frac{1}{|b|}\mathrm{d}x$.

(23) 由于 $EZ=E(X^2)+EY$，

其中，$E(X^2)=DX+(EX)^2=\sigma^2$，$EY=\dfrac{1}{3}$. 所以 $EZ=\sigma^2+\dfrac{1}{3}$. 因此由矩估计法令 $EZ=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Z_i\overset{记}{=\!=}\overline{Z}$. 从而 σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\sigma}^2=\overline{Z}-\frac{1}{3}.$$

附注　顺便在 X 与 Y 相互独立的条件下计算 Z 的分布函数 $F_Z(z)$：记 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$. 于是

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(X^2+Y\leqslant z)\\&=P(Y=-1)P(X^2+Y\leqslant z\mid Y=-1)+P(Y=1)P(X^2+Y\leqslant z\mid Y=1)\\&=\frac{1}{3}P(X^2\leqslant z+1)+\frac{2}{3}P(X^2\leqslant z-1)\ (利用\ X^2\ 与\ Y\ 相互独立)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{3}P(-\sqrt{z+1}\leqslant X\leqslant \sqrt{z+1}), & -1<z\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}P(-\sqrt{z+1}\leqslant X\leqslant \sqrt{z+1})+\dfrac{2}{3}P(-\sqrt{z-1}\leqslant X\leqslant \sqrt{z-1}), & z>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{3}[F(\sqrt{z+1})-F(-\sqrt{z+1})], & -1<z\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}[F(\sqrt{z+1})-F(-\sqrt{z+1})]+\dfrac{2}{3}[F(\sqrt{z-1})-F(-\sqrt{z-1})], & z>1.\end{cases}$$

模拟试题(六)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	C	B	B	A	B	C	D

(1) 显然 $x=0$，1 都是方程的实根．记 $f(x)=2^x-x^2-1$，则 $f(x)$ 连续，且 $f(2)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$,所以由零点定理(推广形式)知方程 $f(x)=0$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上有实根，记为 x_0.

如果 $f(x)=0$ 还有不同实根 x_1，不妨设 $x_1>x_0$，则由 $f(x)$ 3 阶可导，且 $f(0)=f(1)=f(x_0)=f(x_1)$ 及罗尔定理(高阶导数形式)知，存在 $\xi\in(0,\ x_1)$，使得

$$f^{(3)}(\xi)=0. \tag{1}$$

另一方面，计算 $f(x)$ 的 3 阶导数得

$$f^{(3)}(\xi)=2^{\xi}(\ln 2)^3\neq 0. \tag{2}$$

由式(1)与式(2)矛盾知，方程 $f(x)=0$，即 $2^x-x^2-1=0$ 除 0，1，x_0 外，别无其他实根．因此选(C).

附注 (Ⅰ) 零点定理的一种推广形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上连续，且 $f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$，则存在 $\xi\in(a,\ +\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

(Ⅱ) 罗尔定理的一种高阶导数形式

设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内 3 阶可导，且存在 x_1，$x_2\in(a,\ b)$ (其中 $x_1<x_2$)，使得 $f(a)=f(x_1)=f(x_2)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f^{(3)}(\xi)=0$.

(2) 利用对称区间上定积分性质可得

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2x\mathrm{d}x=0\ (\text{由于被积函数是奇函数}),$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x>0\left(\begin{array}{l}\text{由于 }\sin^3x\text{ 是奇函数,}\cos^4x\text{ 是偶函数，在}\\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\text{上 }\cos^4x\geqslant 0\text{,且仅在点 }x=\frac{\pi}{2}\text{ 处取等号}\end{array}\right),$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^7x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7x\mathrm{d}x<0\left(\begin{array}{l}\text{由于 }x^2\sin^3x\text{ 是奇函数,}\cos^7x\text{ 是偶函数,在}\\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\text{上 }\cos^7x\geqslant 0\text{,且仅在点 }x=\frac{\pi}{2}\text{ 处取}\\ \text{等号}\end{array}\right),$$

所以,$P<M<N$. 因此选(C).

附注 应记住对称区间上定积分的性质：设 $f(x)$ 在 $[-a,\ a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x) \text{ 是偶函数}, \\ 0, & f(x) \text{ 是奇函数}. \end{cases}$$

此外,当$f(x)$ 是非奇非偶函数时,有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x.$$

(3) 当$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1时, 它在点$x=-1$处可能是条件收敛$\left(\text{如}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}x^n\right)$, 也可能不是条件收敛$\left(\text{如}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \text{ 或}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}x^n\right)$, 但当$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛时, 它的收敛半径必为1. 于是收敛半径为1是$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点$x=-1$处条件收敛的必要而非充分条件, 因此选(B).

附注 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,当其收敛半径为$R$(正数)时,必在$(-R,R)$内绝对收敛,但在端点 $x=-R,R$ 处可能收敛(条件收敛或绝对收敛),也可能发散,应视$\{a_n\}$ 而定.

(4) 由于所给的微分方程右端函数

$$2\sin x = \mathrm{e}^{\alpha x}(0 \cdot \cos\beta x + 2 \cdot \sin\beta x)\text{(其中 }\alpha=0,\ \beta=1\text{)},$$

而 $\alpha+\beta\mathrm{i}=\mathrm{i}$ 是对应的齐次线性微分方程 $y''+y=0$ 的特征方程之根, 所以 $y''+y=2\sin x$ 应有的特解形式为 $x(a\cos x+b\sin x)$. 因此选(B).

附注 对于常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$$

(式中 $P_l(x)$, $Q_m(x)$分别是 l 与 m 次多项式)应有如下形式的特解:

$$y^* = x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[R_n^{(1)}(x)\cos\beta x+R_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$$

(式中 $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$都是 n 次多项式, $n=\max\{l, m\}$, $k=0$, 1, 视 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是否为 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根而定).

(5) 当$\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\lambda\neq0$, 且$\boldsymbol{A}^{-1}$有特征值$\dfrac{1}{\lambda}$及对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 从而 $\boldsymbol{B}^{-1}$有特征值$\dfrac{1}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 因此选(A).

附注 设$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 有特征值 λ 及对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$($\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵)有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 此外, 当$\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{A}^*$分别有特征值$\dfrac{1}{\lambda}$与$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$以及对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$.

(6) 由于当(Ⅰ)与(Ⅱ)等价时, (Ⅰ)与(Ⅱ)等秩; 当$\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$ 等价时, $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$ 等秩, 反之也对. 所以选项(A)、(C)、(D)都正确。因此选(B).

附注 当(Ⅰ)与(Ⅱ)等秩时, 未必等价. 例如, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. 显然 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$, 但是$\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示, 即$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 不等价.

由本题可知, 题中的(Ⅰ)、(Ⅱ)等价与$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价是有区别的, 应注意这一点.

(7) $F(1,4)=P(X\leqslant 1,Y\leqslant 4)=P(X\leqslant 1,X^2\leqslant 4)=P(-2\leqslant X\leqslant 1)$

$$=\int_{-2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

因此选(C).

附注 顺便计算 X 的分布函数 $G(x)=P(X\leqslant x)$:

当 $x\leqslant -1$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$;

当 $-1<x\leqslant 0$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x+1)$;

当 $0<x\leqslant 2$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x$;

当 $x>2$ 时,$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1.$

所以,$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ \frac{1}{2}(x+1), & -1<x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right), & 0<x\leqslant 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

(8) 由于 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,所以

$$E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2\right]=\frac{\sigma^4}{n^2}E(Y^2)=\frac{\sigma^4}{n^2}[DY+(EY)^2]$$

$$=\frac{\sigma^4}{n^2}(2n+n^2)=\frac{2+n}{n}\sigma^4.$$

因此选(D).

附注 应记住以下结论:

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n).$$

此外, 设 $X\sim\chi^2(n)$, 则 $EX=n$, $DX=2n$.

二、填空题

(9) 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续知

$$a=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{x}},\tag{1}$$

其中, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{\mathrm{e}^x+\sin x}=2.$ (2)

将式(2)代入式(1)得 $a=\mathrm{e}^2$.

附注 计算 0^0，1^∞，∞^0 型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 时，应首先将函数指数化，即 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. 于是

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=\begin{cases}e^A, & \lim g(x)\ln f(x)=A(\text{常数}),\\ 0, & \lim g(x)\ln f(x)=-\infty,\\ +\infty, & \lim g(x)\ln f(x)=+\infty.\end{cases}$$

(10) $\dfrac{\partial}{\partial x}f\left(e^{xy},\cos\dfrac{1}{x}\right)=f'_u\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}e^{xy}+f'_v\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\cos\dfrac{1}{x}=ye^{xy}f'_u+\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}f'_v.$

附注 计算多元复合函数的偏导数时，应先画出该函数与自变量之间的复合关系图，例如本题的关系图为

$$z=f\left(e^{xy},\ \cos\frac{1}{x}\right)\begin{array}{l} u\begin{array}{l} x\\ y\end{array}\\ v-x\end{array}$$

然后按关系图计算有关的偏导数.

(11) 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\ \left(\text{由于}(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}=(-1)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

所以，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+(-1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\frac{1}{2^n}\right]=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$

附注 应记住 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. 顺便计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-1=2\ln(1+x)\Big|_{x=1}-1$$

$$=2\ln 2-1.$$

(12) 由题设知

$$\frac{p}{R}\frac{dR}{dp}=1+p+p\ln p\quad \text{即}\quad \frac{d\ln R}{dp}=\frac{1+p+p\ln p}{p}=\frac{1}{p}+1+\ln p,$$

所以，

$$\ln R(p)-\ln R(1)=\int_1^p\left(\frac{1}{t}+1+\ln t\right)dt$$

$$=(\ln t+t\ln t)\Big|_1^p=\ln p+p\ln p=\ln p^{1+p}.$$

将 $R(1)=1$ 代入上式得

$$R(p)=p^{1+p}.$$

附注　由于 $R(p)$ 是 p 的单调增加函数，所以 $R(p)$ 的弹性为 $\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$.

(13) 由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，以及

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}=1,$$

所以　$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\\\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&2&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

附注　如果记住以下公式，将快捷地算出 $\boldsymbol{A}^*$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\\|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

(14) 由于 $P(A)=\mathrm{C}_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$，则 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-3p^2(1-p)^2$	$3p^2(1-p)^2$

所以，$E(X^2)=1^2\cdot 3p^2(1-p)^2=3p^2(1-p)^2$.

附注　服从参数为 λ 的 0－1 分布的随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-\lambda$	λ

$(0<\lambda<1)$

由此可算出 X 的数字特征，例如

$$EX=E(X^2)=\lambda,\ DX=\lambda(1-\lambda).$$

三、解答题

(15) $$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\cdot\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot\mathrm{e}^x-\left[\int\frac{1}{1+\cos x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x - \left(\int \frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx + \int e^x d\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x - \left(\int \frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx + \frac{e^x}{1+\cos x} - \int \frac{1}{1+\cos x}\cdot e^x dx\right)$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x + C.$$

附注 当$\int f(x)dx$不易计算时,有时可采用以下方法计算,即将不定积分$\int f(x)dx$改写成两个不定积分之和:

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

并且对其中一个,例如对$\int f_1(x)dx$施行分部积分法消去$\int f_2(x)dx$. 本题的$\int e^x\cdot\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$就是如此计算的.

(16) 由于$f_n(x)$满足

$$f_n'(x) - f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^x,$$

所以,
$$f_n(x) = e^{\int dx}\left[C + \int \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^x\cdot e^{\int -dx}dx\right] = e^x\left(C + \frac{1}{n!}x^n\right).$$

将$f_n(1) = \frac{e}{n!}$代入上式得 $C = 0$,所以$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n e^x(n = 1,2,\cdots)$. 从而 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) = e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x(e^x-1)(-\infty < x < +\infty)$.

由 $$s(x) = e^x(e^x-1)\begin{cases}<0, & x<0,\\ =0, & x=0,\\ >0, & x>0,\end{cases}$$

知函数$y = s(x)$有唯一零点$x = 0$,在$(-\infty,0)$上$s(x) < 0$,在$(0,+\infty)$上$s(x) > 0$.

由 $$s'(x) = 2e^x\left(e^x - \frac{1}{2}\right)\begin{cases}<0, & x<-\ln 2,\\ =0, & x=-\ln 2,\\ >0, & x>-\ln 2,\end{cases}$$

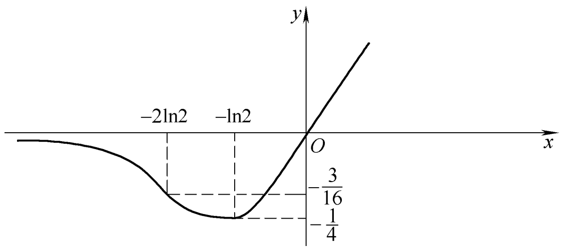
知函数$y=s(x)$在$(-\infty, -\ln2]$上单调减少,在$[-\ln2, +\infty)$上单调增加,$s(-\ln2) = -\frac{1}{4}$是极小值,无极大值.

由 $$s''(x) = 4e^x\left(e^x - \frac{1}{4}\right)\begin{cases}<0, & x<-2\ln 2,\\ =0, & x=-2\ln 2,\\ >0, & x>-2\ln 2,\end{cases}$$

知曲线 $y = s(x)$在$(-\infty, -2\ln2]$上是凸的,在$[-2\ln2, +\infty)$上是凹的,

$\left(-2\ln2,\ -\dfrac{3}{16}\right)$是拐点.

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(e^x-1)=0$ 知曲线 $y=s(x)$ 有水平渐近线 $y=0$. 所以 $y=s(x)$ 的图形如图答 6-16 所示.



图答　6-16

附注　作函数 $y=f(x)$ 的简图时，应确定 $y=f(x)$ 取正值与负值的区间(零点)，单调增加与单调减少区间(极值)，曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间(拐点)以及渐近线. 本题一一计算了这些要素后，作出了简图.

(17) 由 $f'_x=4x-4xy^2$，$f'_y=2y-4x^2y$ 知方程组 $\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x(1-y^2)=0,\\ 2y(1-2x^2)=0\end{cases}$ 在 D 的内部无解，即 $f(x,y)$ 在 D 的内部无可能极值点.

D 的边界由 C_1：$x^2+2y^2=1(y\geqslant0)$ 与 C_2：$y=0(-1\leqslant x\leqslant1)$ 组成.

$f(x,y)\Big|_{C_1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x^2+x^4\xlongequal{\text{记}}\varphi(x)(-1\leqslant x\leqslant1)$，且 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值$\dfrac{1}{2}$，在 $x=-1$ 或 1 处取最大值 2，即 $f(x,y)$ 在 C_1 上的最小值为$\dfrac{1}{2}$，最大值为 2.

$f(x,y)\Big|_{C_2}=2x^2(-1\leqslant x\leqslant1)$，在点 $x=0$ 处取到最小值 0，在点 $x=-1$，1 处取到最大值 2，即 $f(x,y)$ 在 C_2 上的最小值为 0，最大值为 2.

因此，$f(x,y)$ 在 D 上的最小值为 0，最大值为 2.

附注　设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上必有最小值与最大值，它们可按以下步骤计算：

(Ⅰ) 计算 $f(x,y)$ 在 D 的内部的所有可能极值点，记为

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \cdots,\ (x_n,y_n);$$

(Ⅱ) 计算 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最小值和最大值，记为 m_1 与 M_1；

(Ⅲ) 比较 $f(x_1,y_1)$，$f(x_2,y_2)$，$\cdots$，$f(x_n,y_n)$，m_1，M_1，其中最小者(最大者)即为 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值(最大值).

(18) $\displaystyle\iint\limits_{\triangle OAB}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(1-x-y)\mathrm{d}\sigma$，

其中，$D_1=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1-x}{1+x}\right\}$；$D_2=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqslant x\leqslant1,\ \dfrac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant1-x\right\}$.

于是 $\displaystyle\iint\limits_{\triangle OAB}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}xy\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=0}^{y=\frac{1-x}{1+x}}-\frac{1}{2}(1-x-y)^2\Big|_{y=\frac{1-x}{1+x}}^{y=1-x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } t=1+x} \frac{1}{2}\int_1^2\left(-\frac{4}{t}+8-5t+t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{17}{12}-2\ln 2.$$

附注 计算分块函数的二重积分，必须根据函数的分块将积分区域分成若干小块，并逐一计算各小块上的二重积分后相加，即得所求的二重积分.

(19) c 将 $[a, b]$ 分成两个小区间 $[a, c]$ 与 $[c, b]$.

由于 $f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以存在 $x_1\in(a, c)$，使得 $f(x_1)>f(a)$. 由于 $f'(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$，所以存在 $x_2\in(x_1, c)$，使得 $f(x_2)>f(c)$. 因此 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上的最大值在 (a, c) 内取到. 于是由费马引理知存在 $\eta_1\in(a, c)$，使得 $f'(\eta_1)=0$.

此外，由 $f(c)=f(b)$ 知 $f(x)$ 在 $[c, b]$ 上满足罗尔定理条件，所以存在 $\eta_2\in(c, b)$，使得 $f'(\eta_2)=0$.

由题设及以上证明知，$f'(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上满足罗尔定理条件，所以存在 $\xi\in(\eta_1, \eta_2)\subset(a, b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

附注 当函数 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上有连续导数，且 $f_+'(a)\cdot f_-'(c)<0$，则容易知道，存在 $\xi\in(a, c)$，使得 $f'(\xi)=0$. 但是，从本题的证明可知，“当 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上可导(未必有连续导数)，且 $f_+'(a)\cdot f_-'(c)<0$，则存在 $\xi\in(a, c)$，使得 $f'(\xi)=0$，”记住这个结论，有助于快速解题.

(20) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$$

无解，从而

$$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) > r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3).$$

由于 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\1&2&4&0&1&3\\1&3&b&a&1&5\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\text{(以下同)}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\0&1&1&-1&1&3-b\\0&2&b-3&a-1&1&5-b\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&b\\0&1&1&-1&1&3-b\\0&0&b-5&a+1&-1&b-1\end{array}\right).$$

所以，$b=5$ 时，$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=3>2=r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$，即此时 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以矩阵方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$$

有解，从而

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$

将 $b=5$ 代入得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4\\ a & a+1 & a+6 & 1 & 3 & 5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{（以下同）}]{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 6-5a & 1-a & 3-a & 5-3a\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2-5a & -a & 1-a & 1-3a\end{array}\right).$$

所以，$a\neq\dfrac{2}{5}$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ $(=3)$，即此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

附注 题解中有两点值得注意：

（Ⅰ）矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}),$$

而无解的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A}).$$

（Ⅱ）设有两个 n 维向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，(B)：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，则向量组(A)可由向量组(B)线性表示，且表示式是唯一的充分必要条件是矩阵方程

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r) \tag{1}$$

有唯一解；向量组(A)可由向量组(B)线性表示，但表示式不唯一的充分必要条件是矩阵方程(1)有无穷多解；向量组(A)不可由向量组(B)线性表示的充分必要条件是矩阵方程(1)无解.

(21) 由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，所以，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，且对应 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，即

$$a_1+a_3=0.$$

它的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，它们可取为 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将其单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为

$$\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-1,\ \mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1,\ \mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1,$$

它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)$（正交矩阵），则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

附注 题解中有两点值得注意：

（Ⅰ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}$.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆实对称矩阵，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使它正交相似对角化，则 $\boldsymbol{Q}$ 也使 $\boldsymbol{A}^*$ 正交相似对角化.

(22)（Ⅰ）关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\,\mathrm{d}y, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$（即 X 在 $(-1,1)$ 内服从均匀分布）.

记 Z 的分布函数为 $F(z)$，则 $F(z)=P(Z\leqslant z)$.

当 $z<0$ 时，$P(Z\leqslant z)=P(X^2\leqslant z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$P(Z\leqslant z)=P(X^2\leqslant z)=P(-\sqrt{z}\leqslant X\leqslant\sqrt{z})=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{z}$；

当 $z\geqslant 1$ 时，$P(Z\leqslant z)=P(X^2\leqslant z)=P(-\sqrt{z}\leqslant X\leqslant\sqrt{z})=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=1$，

所以，$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \sqrt{z}, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \sqrt{z}, & 0<z<1,\\ 1, & z\geqslant 1,\end{cases}$ 从而

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{z}}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅱ）$E(X-Y)^2=E(X^2)+E(Y^2)-2E(XY)$，

其中 $E(X^2)=D(X^2)+(EX)^2=\dfrac{1}{12}\times 2^2+0=\dfrac{1}{3}$. 同样可得 $E(Y^2)=\dfrac{1}{3}$. 此外，

$$E(XY)=\iint\limits_{xOy\text{平面}}xyf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}xy\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\left(\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}xy\mathrm{d}\sigma-2\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}x^4y^2\mathrm{d}\sigma\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(0-2\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{1}\right)=-\frac{2}{15},$$

所以，$E(X-Y)^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-2\cdot\left(-\dfrac{2}{15}\right)=\dfrac{14}{15}$.

附注　$E(X-Y)^2$ 也可按公式直接计算：

$$E(X-Y)^2=\iint\limits_{xOy\text{平面}}(x-y)^2f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\substack{|x|<1\\|y|<1}}(x-y)^2\cdot\frac{1}{4}(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x-y)^2(1-x^3y-xy^3)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+2x^4y^2+2x^2y^4-2xy-2x^3y^3-x^5y-xy^5)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}(x^2+y^2+2x^4y^2+2x^2y^4)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^4+\frac{7}{5}x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^4+\frac{7}{5}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{14}{15}.$$

(23) 由于 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$, 所以由矩估计法令

$$EX = \bar{x}\left(=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

得 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{x}$, 即 $\theta=\frac{\bar{x}^2}{(1-\bar{x})^2}$. 所以 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1=\frac{\bar{x}^2}{(1-\bar{x})^2}$.

似然函数 $L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 的最大值只能当 $0<x_1$, x_2, $\cdots$, $x_n<1$ 时取到，所以取

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sqrt{\theta}x_1^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\sqrt{\theta}x_2^{\sqrt{\theta}-1}\cdot\cdots\cdot\sqrt{\theta}x_n^{\sqrt{\theta}-1} \\ &= \theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}(0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1). \end{aligned}$$

取对数得

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta}-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n).$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\ln(x_1x_2\cdots x_n)$ 知 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$ 的解为

$$\theta = \frac{n^2}{\ln^2(x_1x_2\cdots x_n)},$$

所以，θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_2=\frac{n^2}{\ln^2(x_1x_2\cdots x_n)}$.

附注 应熟练掌握总体未知参数的两种点估计法：矩估计法与最大似然估计法.

模拟试题(七)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	D	D	C	D	B	C	C	C

(1) 由于$f(x)=|x|\cdot(x-2)|x-2|$，所以$f(x)$在点$x=0$处不可导，在点$x=2$处可导，因此选(D).

附注 应记住以下结论：

函数$|x-a|$在点$x=a$处不可导，而函数$(x-a)|x-a|$在点$x=a$处可导.

(2) 由于x^2在$[0,1]$上连续，选项(A)，(B)，(C)的右边都是x^2在$[0,1]$的积分和式的极限，它们都等于$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，即选项(A)，(B)，(C)都正确. 因此选(D).

附注 也可通过直接计算，确认选项(D)不正确：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\sum_{i=1}^{n}(9i^2-6i+1)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{27n^3}\left[\frac{9}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{6}{2}n(n+1)+n\right]\\&=\frac{1}{9}\neq\frac{1}{3}=\int_0^1x^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{x^2}}{x}=1$，

同样，$f_y'(0,0)=1$. 因此选(C).

附注 $f(x,y)$在点$(0,0)$连续但不可微，证明如下：

由于 $$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}|x+y|$$
$$\leqslant2|x+y|\to0\ ((x,y)\to(0,0)),$$
所以，$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

由于 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿}y=x}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿}y=x}}\frac{\frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}x}{|x|}\text{不存在},$$
所以，$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微.

(4) 由$\{a_n\}$是单调减少收敛于零的正项数列知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，所以对它两项两项地加括号所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$$

收敛. 因此选(D).

附注 本题获解的关键是，按莱布尼茨定理确定 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 此外应记住以下的收敛级数性质：

设 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，则对它任意加括号所得级数仍收敛. 但反之未必正确，即当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 任意加括号后所得的级数收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 未必收敛.

(5) 由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关知 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\delta}$ 线性相关知 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，即 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示. 因此选(B).

附注 关于向量组的线性相关性的以下结论应记住：

(Ⅰ) 设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$.

如果(A)线性无关，则它的任一部分组也线性无关；

如果(A)的任一部分组线性相关，则(A)线性相关.

(Ⅱ) 设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$.

如果(A)线性相关，则至少存在一个向量可由其余向量线性表示；如果(A)线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式是唯一的.

(6) ②④都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件，而①③都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分而非必要条件. 因此选(C).

附注 应记住以下的结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则"$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量"，或"A 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n-n_i$"，都是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件，而"$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值"，或"$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵"，则是 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分而非必要条件.

(7) 对于选项(C)，(X, Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 它关于 X 与 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}\mathrm{d}y, & -R\leqslant x\leqslant R,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & -R\leqslant x\leqslant R,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & -R\leqslant y\leqslant R,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然，$f_X(x)f_Y(y)=f(x, y)$ 不是几乎处处成立的，所以 X 与 Y 不相互独立. 因此选(C).

附注　应记住选项(A)，(B)，(D)的结论.

(8) 由于随机变量 t 的概率密度曲线关于纵轴对称，所以由

$\alpha = P(|t| \leqslant b) = 1 - P(|t| > b) = 1 - P(t > b) - P(t < -b) = 1 - 2P(t > b)$

得　$P(t > b) = \dfrac{1-\alpha}{2}$. 从而由 $t_\alpha(n)$ 的定义得 $b = t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$. 因此选(C).

附注　应当记住：

当 $X \sim N(0,1)$ 时，满足 $P(|X| \leqslant b) = \alpha$ 的 $b = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$(其中 u_α 为满足 $P(X > u_\alpha) = \alpha$ 的实数)；

当 $X \sim t(n)$ 时，满足 $P(|X| \leqslant b) = \alpha$ 的 $b = t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$(其中 $t_\alpha(n)$ 为满足 $P(X > t_\alpha(n)) = \alpha$ 的实数).

二、填空题

(9) 所给微分方程 $x^2y' + y + x^2e^{\frac{1}{x}} = 0$ 可以改写成

$$y' + \frac{1}{x^2}y = -e^{\frac{1}{x}},$$

它的通解为　$y(x) = e^{-\int\frac{1}{x^2}dx}\left(C + \int -e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\int\frac{1}{x^2}dx}dx\right) = e^{\frac{1}{x}}(C - x)$.

将 $y(1) = 0$ 代入得 $C = 1$. 所以 $y(x) = e^{\frac{1}{x}}(1-x)$. 从而由

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-x}{x}\right) = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - ax) = \lim_{x\to\infty}[e^{\frac{1}{x}}(1-x) + x]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) = 1 - 1 = 0$$

得曲线 $y = y(x)$ 的非铅直渐近线方程 $y = -x$.

附注　计算曲线 $y = f(x)$ 的非铅直渐近线方程时，总是要先计算

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax].$$

如果这两个极限中至少有一个不存在，则计算

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - a_1x];$$

$$a_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ 和 } b_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - a_2x].$$

(10) 由于在 $[0, +\infty)$ 上

$$0 < \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} < \frac{1}{1+x^2},$$

且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}dx$ 是收敛的反常积分，从而有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}dx \xlongequal{\text{令 } x = \frac{1}{t}} \int_0^{+\infty}\frac{t^a}{(1+t^a)(1+t^2)}dt = \int_0^{+\infty}\frac{x^a}{(1+x^a)(1+x^2)}dx,$$

即 $$2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{x^a}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

所以，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

附注 对收敛的反常积分，可以与定积分那样施行变量代换法与分部积分法.

(11) 由于 $$\lim_{t\to0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}$$
$$=2\lim_{t\to0}\frac{f(2t,0)-f(0,0)}{2t}+\lim_{t\to0}\left[\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right]-2\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t},\tag{1}$$

其中，$\lim_{t\to0}\frac{f(2t,0)-f(0,0)}{2t}=f_x'(0,0)=1$,

$$\lim_{t\to0}\left[\frac{f(0,\sin t)-f(0,0)}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{t}\right]=f_y'(0,0)\cdot1=-1,$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f_x'(0,0)t+f_y'(0,0)t+o(|t|)}{t}$$
$$=f_x'(0,0)+f_y'(0,0)=0.$$

将它们代入式(1)得

$$\lim_{t\to0}\frac{f(2t,0)+f(0,\sin t)-2f(t,t)}{t}=2\times1+(-1)-2\times0=1.$$

附注 由于$f(x,y)$仅在点$(0,0)$处可微，所以需用偏导数与全微分的定义计算本题的极限.

由于$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，所以有
$$f(x,y)-f(0,0)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$
特别当$x=y=t$时，上式成为
$$f(t,t)-f(0,0)=[f_x'(0,0)+f_y'(0,0)]t+o(|t|).$$
计算$\lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}$时就利用了上式.

(12) 由于$f'(x)=\mathrm{e}^{x+1}(x+1)\begin{cases}<0, & x<-1,\\=0, & x=-1,\\>0, & x>-1,\end{cases}$所以$f(x)$有最小值$f(-1)=-\frac{1}{2}$,

此外，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\mathrm{e}^{x+1}+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{2}=\mathrm{e}\times0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{x+1}+\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

所以，由零点定理(推广形式)及 $f(x)$ 的单调性(即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调减少，在 $(-1, +\infty)$ 上单调增加)知，$f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 上各仅有一个零点，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数为 2.

附注　当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有零点；当函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续、单调，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有且仅有一个零点.

上述的区间换为无穷区间，结论仍成立.

(13) 由 $|\boldsymbol{A}|=2$ 得

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*=2(\boldsymbol{A}^{-1})^2-3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2\cdot 2(\boldsymbol{E}_3-3\boldsymbol{A}),$$

所以，$\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=|\boldsymbol{A}^{-1}|^2\cdot 8|\boldsymbol{E}_3-3\boldsymbol{A}|$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 8\begin{vmatrix}-2&-3&0\\0&-2&-3\\-3&-3&-5\end{vmatrix}=-58.$$

附注　计算矩阵的行列式时，以下结论是常用的：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,\quad |k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|(k\text{ 是常数}),$$
$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n>1).$$

当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

(14) 由于 $a=P(X=1)=F(1)-F(1^-)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，所以

$$P(Y\geqslant a)=P\left(Y\geqslant\frac{1}{4}\right)=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

附注　由于 $F(x)$ 有间断点 $x=0, 1, 2$，所以 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	$F(0)-F(0^-)$	$F(1)-F(1^-)$	$F(2)-F(2^-)$

即

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

三、解答题

(15) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)}{\ln(1+x^2)}}$，　(1)

其中，$x\to 0$ 时

$$\sin x\ln(\mathrm{e}^x+\sin x)=\sin x\ln[1+(\mathrm{e}^x-1+\sin x)]\sim x(\mathrm{e}^x-1+\sin x),$$
$$\ln(1+x^2)\sim x^2.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(e^x+\sin x)}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x-1+\sin x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=2.$

将它代入式(1)得

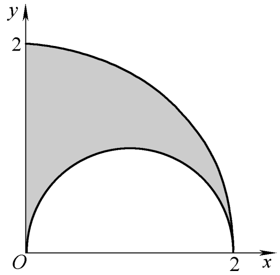
$$\lim_{x\to0}(e^x+\sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}=e^2.$$

附注 本题题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 计算 0^0，1^∞，∞^0 型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 时，应先指数化，即 $\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$.

(Ⅱ) 计算$\dfrac{0}{0}$型未定式极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$时，应先进行化简，其中$f(x)$，$g(x)$分别用它们的等价无穷小代替是化简的重要手段之一.

(16) D 如图答 7-16 的阴影部分所示，所以



图答 7-16

$$V_x=\pi\int_0^2[(\sqrt{4-x^2})^2-(\sqrt{2x-x^2})^2]dx$$

$$=\pi\int_0^2(4-2x)dx=4\pi.$$

$$V_y=2\pi\int_0^2x(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2x-x^2})dx$$

$$=2\pi\left(\int_0^2x\sqrt{4-x^2}dx-\int_0^2x\sqrt{2x-x^2}dx\right),$$

其中 $\displaystyle\int_0^2x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{8}{3},$

$$\int_0^2x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^2x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

$$\xlongequal{t=x-1}\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

于是，$V_y=2\pi\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{16}{3}\pi+\pi^2.$

附注 应记住以下公式：

设$f_1(x)$，$f_2(x)$都是连续函数，且$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$，设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)\}$，则

D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_x=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx,$$

D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积

$$V_y=2\pi\int_a^bx[f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

(17) 记$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant1,y\leqslant x\leqslant1\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant1\}$，

$$D_2=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,1\leqslant r\leqslant\sqrt{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\arccos\frac{1}{r}\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{1}{\cos\theta}\leqslant r\leqslant\sqrt{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

则 D_1 与 D_2 如图 7-17 所示，于是由

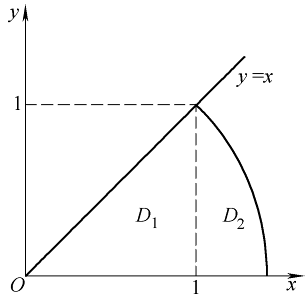


图　7-17

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\sin x\mathrm{d}x=1-\cos 1,$$

$$\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}}r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D_2}\sin^2\theta\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}}r\sin^2\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\tan^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\tan\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$$

得到

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}}r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=(1-\cos 1)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}-\cos 1+\frac{\pi}{4}.$$

附注　对 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，只有改变积分次序才能算出其值，但是，对于 $\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}}r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，不改变积分次序，同样可以算出其值. 具体如下：

$$\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{1}{r}}r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}r(\theta-\sin\theta\cos\theta)\Bigg|_0^{\theta=\arccos\frac{1}{r}}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}r\left(\arccos\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}\right)\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{r}=\cos t}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t(t-\cos t\sin t)\sec t\tan t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\tan t\mathrm{d}\tan t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2t\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}t\mathrm{d}\tan^2t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2t\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\tan^2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2t\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2t-1)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{3}{4}(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}.$$

显然，现在的计算比题解中的计算复杂得多.

(18) 所给微分方程可以改写成

$$y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 3x. \tag{1}$$

式(1)的齐次线性微分方程

$$y''+2y'+y=0 \tag{2}$$

的特征方程之根为二重根 -1，所以式(2)的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

此外，式(1)有特解

$$y^*=Ax^2\mathrm{e}^{-x}+(A_1\cos x+B_1\sin x)+(A_2\cos 3x+B_2\sin 3x). \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)得

$$A=\frac{1}{2},\ A_1=-\frac{1}{4},\ B_1=0,\ A_2=-\frac{3}{100},\ B_2=-\frac{1}{25},$$

从而有
$$y^*=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{100}\cos 3x-\frac{1}{25}\sin 3x.$$

因此，所给方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=Y+y^*\\&=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{100}\cos 3x-\frac{1}{25}\sin 3x.\end{aligned}$$

附注 题解中有两点值得注意：

(Ⅰ) 由于式(2)的特征方程的根为 $r=-1$(二重)，所以它的通解为$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$.

(Ⅱ) 由于式(1)的右边有 $\mathrm{e}^{\lambda x}=\mathrm{e}^{-x}$的项，这里的 $\lambda=-1$ 是式(2)的特征方程之二重根，所以式(1)的特解中有 $Ax^2\mathrm{e}^{-x}$的项.

(19) 记 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}}=x^2.$$

所以，所给幂级数的收敛区间为$\{x\mid x^2<1\}=(-1,1)$. 当 $x=-1$，1 时，幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)},$$

它是收敛的，所以所给幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

对 $x\in[-1,1]$得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}&=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n-1}\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n(2n-1)}t^{2n-1}\right]'\mathrm{d}t=x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}t^{2n-2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= x\int_0^x \frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(t^2)^n \mathrm{d}t = x\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -x\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,\frac{1}{t} = -x\left[\frac{\ln(1+t^2)}{t}\Bigg|_0^x - \int_0^x \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\right]$$

$$= -\ln(1+x^2) + 2x\arctan x .$$

所以所给幂级数的和函数

$$s(x) = -\ln(1+x^2) + 2x\arctan x\ (x \in [-1,1]).$$

附注　题解中以下两点值得注意：

(Ⅰ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(t^2)^n = \ln(1+t^2)(-1 \leqslant t \leqslant 1)$是按公式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n(-1 < x \leqslant 1)$$

得到的.

(Ⅱ) 由于 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = 1$, 所以 $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ 是定积分而不是反常积分.

(20) 由题设知$(1, 2, 2, 1)^{\mathrm{T}}-(1, -2, 4, 0)^{\mathrm{T}}=(0, 4, -2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，所以有

$$4\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0},\ 即\ \boldsymbol{\alpha}_4=-4\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

由题设$(1, -2, 4, 0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,$$

于是方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

成为

$$(\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{1}$$

由 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$的秩为 3 知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，由此得到式(1)的系数矩阵的秩为 3，于是对应的齐次方程组的解$(2, 2, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ 即为这个齐次方程组的基础解系. 此外式(1)有特解$(0, 2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. 所以，式(1)，即方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{y}=C(2, 2, 1, -1)^{\mathrm{T}}+(0, 2, 1, 0)^{\mathrm{T}}(C\ 为任意常数).$$

附注　要记住：齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知列向量)的基础解系中所包含的线性无关的解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$.

(21) 由于

$$f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = x_1^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+x_3^2$$

$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

由题设知

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}-1 & -b & -1\\ -b & -a & -1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0(\text{因为 }\boldsymbol{B}\text{ 有特征值 }\lambda=0),\\ \begin{vmatrix}0 & -b & -1\\ -b & 1-a & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0(\text{因为 }\boldsymbol{B}\text{ 有特征值 }\lambda=1),\end{cases}$$

即$\begin{cases}-2b+1+b^2=0,\\ -2b-(1-a)=0.\end{cases}$解此方程组得 $a=3$，$b=1$.

于是，$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2.$

记$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\ y_2=\sqrt{2}x_2,\\ y_3=x_3,\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -1\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，则

$$f(x_1, x_2, x_3)=y_1^2+y_2^2(\text{规范形}).$$

附注 题解中的以下两点值得注意：

（Ⅰ）$f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵，所以它不是二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵，只有写成 $f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵）时，$\boldsymbol{B}$ 才是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵.

（Ⅱ）计算 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$）下的规范形，总是对 $f(x_1, x_2, x_3)$ 施行配平方方法.

(22)（Ⅰ）关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅱ）由于 $EX=1$，所以

$$P(Y\geqslant EX)=P(Y\geqslant 1)=\int_1^{+\infty}f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=$$

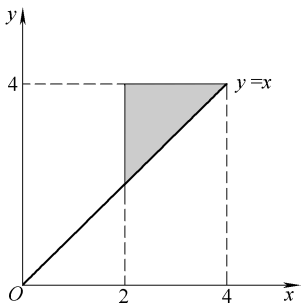
$$-\int_1^{+\infty}y\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}=-y\mathrm{e}^{-y}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

由于
$$P(X>2\mid Y<4)=\frac{P(X>2,Y<4)}{P(Y<4)},$$

其中，$P(X>2,Y<4)=\displaystyle\iint\limits_{\substack{x>2\\ y<4}}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$=\displaystyle\iint\limits_{\triangle}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\sigma$（其中 △ 是如图答 7-22 阴影部分所示的三角形）

$$= \int_2^4 dx \int_x^4 e^{-y} dy = \frac{1}{e^2} - \frac{3}{e^4}.$$



图答 7-22

附注 关于 $f_X(x)$ 的以下计算是错误的：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}(x > 0).$$

这一点应注意，关于 $f_Y(y)$ 的计算也有同样说法.

(23)(Ⅰ)由于 $EX = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot \theta^2 + 3 \cdot (1-2\theta) = 3 - 4\theta$,

并且，样本值的平均值 $\bar{x} = \frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$,

所以，由矩估计法，令 $EX = \bar{x}$，即 $3 - 4\theta = 2$ 得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$.

(Ⅱ)由题设知 $Y \sim B(n, \hat{\theta}^2) = B\left(n, \frac{1}{16}\right)$. 当 n 充分大时，由中心极限定理(具体是棣莫弗-拉普拉斯定理)得

$$P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{Y - \frac{n}{16}}{\sqrt{n \times \frac{1}{16} \times \frac{15}{16}}} \leqslant \frac{y - \frac{n}{16}}{\frac{\sqrt{15n}}{16}}\right)$$

$$\overset{\text{近似}}{\sim} \int_{-\infty}^{\frac{y-\frac{n}{16}}{\sqrt{15n}/16}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

因此，所求的参数为 $\mu = \frac{n}{16}$, $\sigma^2 = \frac{15n}{16^2}$.

附注 计算关于随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的概率问题时，总是引入标准化随机变量 $X^0 = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $X^0 \sim N(0, 1)$(标准正态分布). 于是 X 的分布函数

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{(其中 } \Phi(u) \text{ 是标准正态分布函数)},$$

即
$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

由此可知,当 $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 时,$X \sim N(a, b^2)$. 本题中的参数就是如此得到的.

模拟试题(八)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	B	A	B	A	B	B	B	B

(1) $f(x)=x|e^x-1|\cdot|x-1|$ 的可能不可导点为 $x=0$，1.

由在点 $x=0$ 的某个去心邻域内,

$$f(x)=-x|x|\cdot\left|\frac{e^x-1}{x}\right|(x-1)=-x|x|\cdot\frac{e^x-1}{x}(x-1)$$

知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[-|x|\cdot\dfrac{e^x-1}{x}(x-1)\right]=0$，所以$f(x)$在点 $x=0$ 处可导.

由于在点 $x=1$ 的某个邻域内，$f(x)=x(e^x-1)|x-1|$，而

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[x(e^x-1)\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}\right]$不存在，所以$f(x)$在点 $x=1$ 处不可导.

因此本题选(B).

附注 应记住函数$|x-x_0|$在点 x_0 处不可导，但函数$(x-x_0)|x-x_0|$在点 x_0 处可导.

(2) 由于 $\max\{e^{-t},\ e^t\}=\begin{cases}e^{-t}, & t<0,\\ e^t, & t\geqslant0.\end{cases}$所以

$$F(x)=\int_0^x\max\{e^{-t},e^t\}\,dt=\begin{cases}\int_0^x e^{-t}dt, & x<0,\\ \int_0^x e^t dt, & x\geqslant0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-x}, & x<0,\\ e^x-1, & x\geqslant0.\end{cases}$$ 因此选(A).

附注 同样可以计算 $\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}\,dt$, 具体如下:

由于 $\min\{e^{-t},\ e^t\}=\begin{cases}e^t, & t\leqslant0,\\ e^{-t}, & t>0,\end{cases}$所以

$$\int_{-\infty}^x\min\{e^{-t},e^t\}\,dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^x e^t dt, & x\leqslant0,\\ \int_{-\infty}^0 e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt, & x>0\end{cases}=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0,\\ 2-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

(3) 由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n(-1<x\leqslant 1)$ 知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-a)^n$ 的收敛域为 $a-1<x\leqslant a+1$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-a)^n$ 在点 $x=a+1$ 处收敛，而 $x>a+1$ 发散. 所以由题设得 $a+1=0$，即 $a=-1$. 因此选(B).

附注　记住 $\ln(1+x)$，$\ln(1-x)$ 的麦克劳林展开式，即

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\quad(-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\quad(-1\leqslant x<1),$$

对计算幂级数的收敛域与和函数等是十分有用的.

(4) 容易看到 $y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的特解，从而

$$p=-[(-1+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})]=2,\ q=(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})=2.$$

此外，由题设知 e^x 是 $y''+py'+qy=f(x)$，即 $y''+2y'+2y=f(x)$ 的特解，所以

$$f(x)=(\mathrm{e}^x)''+2(\mathrm{e}^x)'+2\mathrm{e}^x=5\mathrm{e}^x.$$

因此选(A).

由于微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 有解 $y_2=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\cos x$，其中，$\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的特解，所以由线性微分方程解的构造知，e^x 是 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解.

(5) 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，所以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即②正确.

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 都有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，所以 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即④正确. 因此选(B).

附注　$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 未必是 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，例如 $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 $(0,1)^{\mathrm{T}}$，但它不是 $\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以(A)与(D)都不能选.

$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 也未必是 $\boldsymbol{B}^*$ 的基础解系，例如 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，但它不是 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 这是因为 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$ 的秩 $1<3-1$，所以 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*$ 的秩为 0. 从而 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 无基础解系. 因此(C)不能选.

(6) 由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4$

$$=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&4&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

所以，$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-4&0\\-1&\lambda&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0$ 有解 $\lambda=-2,2,3$，从而 A 的最小特征值为 -2,因此选(B).

附注 题解中，由于注意到$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$都是初等矩阵，它们的三次方与四次方分别左乘、右乘于$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$表明，对 B 施行三次“交换第一、二行”的初等变换后，再施行四次“交换第二、三列”的初等变换，所以很快获解.

(7) 记 $C_i=\{$第 i 次取球取到的是白球$\}(i=1,2)$，则

$$A=\overline{C}_1C_2,\ B=\overline{C}_1C_2\cup C_1C_2,$$

所以，$P(A)=P(\overline{C}_1C_2)=P(\overline{C}_1)P(C_2\mid\overline{C}_1)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$，

$$P(B)=P(\overline{C}_1C_2)+P(C_1C_2)=P(\overline{C}_1C_2)+P(C_1)P(C_2\mid C_1)=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{7}.$$

因此选(B).

附注 本题有两点值得注意：

(Ⅰ) A 与 B 这两个随机事件是有区别的.

(Ⅱ) 随机事件$\{$第 i 次取球取到的是白球$\}(i=1,2,3)$的概率是相等的，都为$\frac{3}{7}$.

(8) $E(\overline{X}+S^2)=E(\overline{X})+E(S^2)=EX+DX,$ (1)

其中 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=0$(由于 $xf(x)$ 是奇函数)，

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$$

$=E(T^2)$(其中 T 是服从参数为 1 的指数分布,即它的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t>0,\\0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

$=D(T)+(ET)^2=1+1=2.$

将它们代入式(1) 得 $E(\overline{X}+S^2)=0+2=2$. 因此选(B).

附注 应记住以下结论：

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，其平均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则

$$E(\overline{X})=EX,E(S^2)=DX.$$

二、填空题

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}-\dfrac{1}{3}$

$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2(1+x)}-\dfrac{1}{3}=0.$

由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$a=\lim_{x\to0}\left[e^{\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}}-2\right]=e^0-2=-1.$$

附注　本题题解的关键是先计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^3}$.

(10) 由于 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$，所以

$$f^{(5)}(x)=\frac{1}{3}\left[(-1)^5\frac{5!}{(x-1)^6}-(-1)^5\frac{5!}{(x+2)^6}\right]=\frac{5!}{3}\left[\frac{1}{(x+2)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right].$$

从而 $f^{(5)}(0)=\dfrac{5!}{3}\left(\dfrac{1}{2^6}-1\right)=-\dfrac{315}{8}.$

附注　$f^{(5)}(0)$ 也可以利用麦克劳林公式计算：

由于 $f(x)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}\right)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{1-x}\right)$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\cdots-\left(\frac{x}{2}\right)^5+o(x^5)\right]+\left[1+x+\cdots+x^5+o(x^5)\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}-1\right)x^5+o(x^5),$$

所以，$f^{(5)}(0)=5!\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^6}-1\right)=-\dfrac{315}{8}.$

(11) 方程两边对 x 求偏导数得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\cos(xy)\cdot y+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

所以，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yz\cos(xy)+z^2}{1+xz}.$

附注　如果要同时计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，则从对方程两边求全微分入手，具体如下：

$$\frac{1}{z}dz+\cos(xy)(ydx+xdy)+zdx+xdz=0,$$

即
$$dz=-\frac{yz\cos(xy)+z^2}{1+xz}dx-\frac{xz\cos(xy)}{1+xz}dy,$$
所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\cos(xy)+z^2}{1+xz},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz\cos(xy)}{1+xz}$.

(12) 由于$\frac{P}{Q(P)}\frac{dQ(P)}{dP}=\varepsilon_p=0.2$，所以由增益函数 $R(P)=PQ(P)$得
$$\begin{aligned}\left.\frac{dR(P)}{dP}\right|_{Q=100\,000}&=\left[Q(P)+P\frac{dQ(P)}{dP}\right]_{Q=100\,000}\\&=\left\{Q(P)+Q(P)\left[\frac{P}{Q(P)}\frac{dQ(P)}{dP}\right]\right\}_{Q=100\,000}\\&=100\,000+100\,000\times0.2=120\,000,\end{aligned}$$
即当需求量为 100 000 件时，价格每增加 1 元会使产品收益增加 120 000 元.

附注 要记住函数弹性的定义，并理解它在经济学上的意义.

(13) 由于 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{B}^*)$, (1)

其中，由 $r(\boldsymbol{A})=1$，即 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的阶数 -1 知 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$；由 $r(\boldsymbol{B})=2$，即 $r(\boldsymbol{B})<\boldsymbol{B}$ 的阶数 -1 知 $r(\boldsymbol{B}^*)=0$. 将它们代入式(1)得
$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=1+0=1.$$

附注 应记住以下公式：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵，则
$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n,&r(\boldsymbol{A})=n,\\1,&r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0,&r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(14) $P(\max\{X,Y\}\leqslant1)=P(X\leqslant1,Y\leqslant1)$
$$=P(X\leqslant1)P(Y\leqslant1)=\left(\int_{-\infty}^1f(t)dt\right)^2=\left(\int_0^1e^{-t}dt\right)^2=(1-e^{-1})^2.$$

附注 应记住以下公式：

设随机变量 X、Y 相互独立，它们的分布函数分别为 $F_X(x)$与 $F_Y(y)$，则

$Z_1=\max\{X,Y\}$的分布函数 $F_{Z_1}(z)=F_X(z)F_Y(z)$；

$Z_2=\min\{X,Y\}$的分布函数 $F_{Z_2}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$.

三、解答题

(15) $\int\frac{1}{\sin x\cos x\sqrt{\sin^4x+\cos^4x}}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}}dx$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{\csc^2 2x-\frac{1}{2}}}\frac{d2x}{\sin^2 2x}=-\int\frac{1}{\sqrt{\cot^2 2x+\frac{1}{2}}}d\cot 2x$$

附注 可考虑类似的不定积分 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$，解答如下：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x) - \\ &\quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}(\sin x+\cos x) \\ &= \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C.\end{aligned}$$

（16）由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2}{x^2}(1-\cos x)=1$，及

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0^+}\cos x^2 = 1$$

知 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ 内连续.

由于 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，

$$f'(x)=2\cdot\frac{x\sin x-2(1-\cos x)}{x^3}=2\sin x\cdot\frac{x-2\tan\frac{x}{2}}{x^3}>0,$$

$0<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，

$$f'(x)=\frac{x\cos x^2-\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{\int_0^x(\cos t^2-2t^2\sin t^2-\cos t^2)\mathrm{d}t}{x^2}<0,$$

因此 $f(x)\left(-\frac{\pi}{2}<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ 仅有极大值 $f(0)=1$，无极小值，

（17）由 $f'_x=2x$，$f'_y=2y$ 知方程组 $\begin{cases}f'_x=0,\\ f'_y=0\end{cases}$ 在 D 的内部无解，即 $f(x,y)$ 在 D 的内部无可能极值点. 下面计算 $f(x,y)$ 在 D 的边界 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 上的最值.

记 $F(x,y)=x^2+y^2+\lambda[(x-1)^2+(y-1)^2-2]$，则

$$F'_x=2x+2\lambda(x-1),\qquad F'_y=2y+2\lambda(y-1).$$

于是，由拉格朗日乘数法令

$$\begin{cases}F'_x=0,\\ F'_y=0,\\ (x-1)^2+(y-1)^2=2,\end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases}(1+\lambda)x-\lambda=0,\\ (1+\lambda)y-\lambda=0,\\ (x-1)^2+(y-1)^2=2,\end{cases}$$

解此方程组得 $x=y=0$，$x=y=2$. 由于

$$f(0,0)=0,\ f(2,2)=8,$$

所以，$f(x,y)$ 在 C 上的最小值，即在 D 上的最小值为 $f(0,0)=0$，在 C 上的最大值，即在 D 上的最大值为 $f(2,2)=8$.

附注　二元连续函数在闭区域上的最值计算方法见模拟试题(一)(18)解答中的附注.

(18) 由于 $x\to 0$ 时

$$x^2\tan^2\frac{x}{2}\sim\frac{1}{4}x^4,$$

$$1-(1+x)^{\sin^3 x}=-\left[e^{\sin^3 x\ln(1+x)}-1\right]\sim-\sin^3 x\ln(1+x)\sim-x^4,$$

所以，$\alpha=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\tan^2\frac{x}{2}}{1-(1+x)^{\sin^3 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}x^4}{-x^4}=-\dfrac{1}{4}.$

考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$. 由于

$$\lim_{n\to 0}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1,$$

所以上述幂级数的收敛半径为 1，从而收敛区间为 $(-1,1)$，记其和函数为 $s(x)$，则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)(-1<x<1),$$

所以，
$$\begin{aligned}s(x)&=s(0)-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t=-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t\\&=-\left[t\ln(1-t)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{-t}{1-t}\mathrm{d}t\right]\\&=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)(-1<x<1),\end{aligned}$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)(-1<x<1).$$

从而
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sin^{n+1}\alpha&=\left[-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)\right]\Big|_{x=\sin\alpha=-\sin\frac{1}{4}}\\&=\sin\frac{1}{4}\cdot\ln\left(1+\sin\frac{1}{4}\right)-\sin\frac{1}{4}+\ln\left(1+\sin\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

附注 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的和函数 $s(x)$ 也可以用以下方法计算：在 $(-1,1)$ 内有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}x^m=-x\ln(1-x)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}x^m+x\\&=-x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x.\end{aligned}$$

(19)
$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\frac{2y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\sigma,\tag{1}$$

其中，
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma&=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}xy\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},\end{aligned}\tag{2}$$

$$\iint\limits_{D_2}\frac{2y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\sigma\overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{2r\sin\theta}{r^2+1}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r - \arctan r)\Big|_0^{2\cos\theta} \cdot \sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta\cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\arctan(2\cos\theta) \cdot \sin\theta d\theta$$

$$= 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(2\cos\theta) \cdot d2\cos\theta$$

$$= 2 + [\arctan(2\cos\theta) \cdot 2\cos\theta]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{1 + 4\cos^2\theta} d2\cos\theta$$

$$= 2 - 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + 4\cos^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5. \tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \frac{4}{3} + 2 - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{10}{3} - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5.$$

附注 $\iint_D f(x,y) d\sigma$ 也可计算如下:

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} d\sigma,$$

$$= \iint_D xy d\sigma + \iint_{D_2} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} - xy\right) d\sigma, \tag{4}$$

其中, $\iint_D xy d\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta\cos\theta \cdot r dr$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta\cos\theta d\theta = 2\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2, \tag{5}$$

$$\iint_{D_2} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} - xy\right) d\sigma \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \left(\frac{2r\sin\theta}{r^2 + 1} - r^2\sin\theta\cos\theta\right) r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(r - \arctan r)\Big|_0^{2\cos\theta} \sin\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^5\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta\cos\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\arctan(2\cos\theta)\sin\theta d\theta - \frac{2}{3}$$

$$= 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(2\cos\theta) d2\cos\theta - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3} + \arctan(2\cos\theta) 2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{1 + 4\cos^2\theta} d2\cos\theta$$

$$= \frac{4}{3} - 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 4\cos^2\theta} d(1 + 4\cos^2\theta)$$

$$= \frac{4}{3} - 2\arctan 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + 4\cos^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5. \tag{6}$$

将式(5)、式(6)代入式(4)得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{10}{3} - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln 5.$$

(20)(Ⅰ)方程组(A)的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & a+4 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & -7 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

由于方程组(A)有无穷多解，所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) < 3$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是方程组(A)的系数矩阵)，从而有 $a+1=0$，即 $a=-1$.

(Ⅱ)当 $a=-1$ 时，方程组(A)与(B)组成的方程组为

$$(\mathrm{C})\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 1. \end{cases}$$

对方程组(C)的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}$ 施行初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & \lambda & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 7-3\lambda \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{7}-3\lambda \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{21}-\lambda \end{array}\right).$$

由此可知，方程(A)与(B)有公共解，即方程组(C)有解时，$r(\boldsymbol{C}) = r(\overline{\boldsymbol{C}})$(其中 $\boldsymbol{C}$ 是方

程组(C)的系数矩阵)，因此所求的 $\lambda=\frac{43}{21}$，并且此时的公共解 $x_1=-\frac{18}{7}$，$x_2=3$，$x_3=-\frac{3}{7}$.

附注　设方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$(其中 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 分别是 $m_1\times n$ 与 $m_2\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，分别是 m_1 维与 m_2 维列向量)，则这两个方程组有公共解的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2\end{cases}$$

有解.

(21) 由 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵知，$\boldsymbol{A}^*$ 也是 3 阶实对称矩阵. 由题设知 $\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\mu_1=-1$，$\mu_3=1$，且它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-1$，因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值除 $\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=-1$，$\mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1$ 外，还有 $\mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1$，记它对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，则它分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，于是有

$$\begin{cases}a_1\quad -a_3=0,\\ a_1\quad +a_3=0,\end{cases}$$

其基础解系为$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，故可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的对应 λ_i 的特征向量即为 $\boldsymbol{A}^*$ 的对应 μ_i 的特征向量$(i=1,2,3)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 对应 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$.

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$(正交矩阵)，则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2,$$

且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix},$$

所以，
$$A^* = Q\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

附注 题解中有以下三点值得注意：

（Ⅰ）当用正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵）将二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵）化为标准形
$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$
时，λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 必都为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，从而
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}\boldsymbol{A},\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |\boldsymbol{A}|.$$

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 $\mu = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的对应 μ 的特征向量.

（Ⅲ）$\boldsymbol{A}^*$ 也可计算如下：

由于 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，所以
$$A = Q\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

因此，由 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义可得 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)由于(U, V)关于 U 的边缘概率密度为

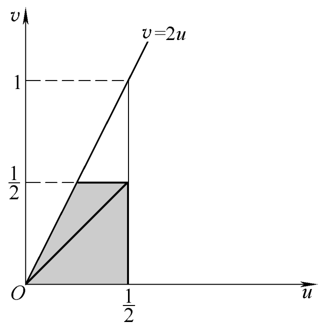
$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^{2u}\mathrm{d}v, 0<u<1,\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}2u, 0<u<1,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

所以，
$$P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(U\leqslant\frac{1}{2},\ V\leqslant\frac{1}{2}\right)}{P\left(U\leqslant\frac{1}{2}\right)}, \tag{1}$$

其中，$P\left(U\leqslant\frac{1}{2}, V\leqslant\frac{1}{2}\right)=\iint\limits_{\substack{u\leqslant\frac{1}{2}\\ v\leqslant\frac{1}{2}}}f(u,v)\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_{\Delta}\mathrm{d}\sigma$(其中 Δ 如图答 8-22 的带阴影梯形所示)

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$,



图答　8-22

$$P\left(U\leqslant\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_U(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{1}{2}}2u\mathrm{d}u=\frac{1}{4}.$$

将它们代入式(1)得

$$\frac{1}{3}P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=0.25.$$

于是，$P(X=-1, Y=1)=P(X=1, Y=-1)=P(X=0, Y=1)=0.25$.

记(X, Y)的概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	p_1	0.25
0	p_2	0.25
1	0.25	p_3

则$\begin{cases}p_1+p_2+p_3+0.75=1,\\(-1)\cdot(p_1+0.25)+0\cdot(p_2+0.25)+1\cdot(0.25+p_3)=0.2,\\(-1)\cdot(p_1+p_2+0.25)+1\cdot(0.25+0.25+p_3)=0.4,\end{cases}$

即$\begin{cases}p_1+p_2+p_3=0.25,\\-p_1+p_3=0.2,\\-p_1-p_2+p_3=0.15.\end{cases}$解此方程组得 $p_1=0$，$p_2=0.05$，$p_3=0.2$.

因此，(X, Y)的概率分布为

X \ Y	−1	1
−1	0	0.25
0	0.05	0.25
1	0.25	0.2

（Ⅱ）$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-EX\cdot EY$，

其中，$E(XY)=(-1)\times(-1)\times 0+(-1)\times 1\times 0.25+0\times(-1)\times 0.05+0\times 1\times 0.25+1\times(-1)\times 0.25+1\times 1\times 0.2$

$=-0.3$，

所以，$\mathrm{Cov}(X, Y)=-0.3-0.2\times 0.4=-0.38$.

附注 本题是连续型随机变量与离散型随机变量结合的综合题，需计算许多量值，因此对题目审视后应确定计算各个量值的先后顺序：

先计算 $P\left(V\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,U\leqslant\frac{1}{2}\right)$，为此需先算出关于 U 的边缘概率密度 $f_U(u)$；然后确定(X, Y)的概率分布表，将已知的概率填入，对未知的概率用 p_1，p_2，p_3 等表示，并利用已知条件逐一确定这些未知概率；最后根据(X, Y)的概率分布算出 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

（23）由于关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{\theta}^{+\infty}\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\mathrm{d}y, & 0<x<\theta,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，$\int_{\theta}^{+\infty}\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\mathrm{d}y=-\frac{3}{\theta^3}x^2\mathrm{e}^{-(y-\theta)}\Big|_{y=\theta}^{y=+\infty}=\frac{3}{\theta^3}x^2$，所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{\theta^3}x^2, & 0<x<\theta,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{3}{\theta^3}x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\theta$，所以由矩估计法，令 $EX=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\overset{\text{记}}{=\!=}\overline{X}$，

即$\frac{3}{4}\theta=\overline{X}$. 由此得到 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{4}{3}\overline{X}$.

于是，$D(\hat{\theta})=D\left(\frac{4}{3}\overline{X}\right)=\frac{16}{9}D\overline{X}=\frac{16}{9n}DX$

$$= \frac{16}{9n}[E(X^2) - (EX)^2] = \frac{16}{9n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x - \frac{9}{16}\theta^2\right]$$

$$= \frac{16}{9n}\int_0^{\theta} \frac{3}{\theta^3}x^4\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\theta^2 = \frac{16}{15n}\theta^2 - \frac{1}{n}\theta^2 = \frac{1}{15n}\theta^2.$$

附注　要记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X(具有数学期望与方差)的简单随机样本，则它的均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 与方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 满足 $E(\overline{X}) = EX$，$D(\overline{X}) = \frac{1}{n}DX$，$E(S^2) = D(X)$.

模拟试题(九)解答

一、选择题

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	D	D	B	A	B	D	B	C

(1)
$$y^{(n)}=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]^{(n)}=-\left[\left(\frac{1}{x+1}\right)'\right]^{(n)}=-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n+1)}$$
$$=-(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}=(-1)^n\frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.$$

所以选(D).

附注 应记住公式

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!\ a^n}{(ax+b)^{n+1}}\quad(a\neq0).$$

(2) 由于$f''_{xx}(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'_x(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$，所以由$f''_{xy}(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处存在知，$f'_x(x,y_0)$在点$x_0$处可微．因此选(D).

附注 当题中所给的三个2阶偏导数在点(x_0,y_0)处连续时，选项(A)，(B)，(C)都正确，但仅假定这三个2阶偏导数在点(x_0,y_0)处存在，未必能推出这三个选项正确．

(3) 记$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$，则$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且$\{a_n\}$单调减少并且收敛于零，所以所给级数收敛．但是由于$-1<\alpha<0$时，由$a_n>\dfrac{1}{\sqrt2}\int_0^{\frac1n}x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt2(\alpha+1)}\left(\dfrac1n\right)^{\alpha+1}(n=1,2,\cdots)$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac1n\right)^{\alpha+1}$发散，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\int_0^{\frac1n}\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，从而所给级数条件收敛．因此选(B).

附注 由莱布尼茨定理判定交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$(其中$\{a_n\}$是正项数列)为收敛时，其可能是绝对收敛，也可能是条件收敛．为了确定它们，必须考虑正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性．

(4) 欲使$\lambda y_1+\mu y_2$是$y'+p(x)y=q(x)$的解，必须

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

即$\lambda[y'_1+p(x)y_1]+\mu[y'_2+p(x)y_2]=q(x)$．由此得到

$$(\lambda+\mu)q(x)=q(x)(\text{这里利用}y_1,y_2\text{是}y'+p(x)y=q(x)\text{的两个特解}),$$

即

$$\lambda+\mu=1(\text{由于 } q(x) \text{ 不恒为零}). \tag{1}$$

此外，欲使 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，与上同样可得

$$\lambda-\mu=0. \tag{2}$$

由式(1)，式(2)得 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$. 因此选(A).

附注　应记住一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解公式：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

其中，不定积分都表示被积函数的一个原函数.

(5) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解的充分必要条件为

$$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n.$$

因此选(B).

附注　应记住：对矩阵方程 $\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{B}$ 来说，$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n$，$r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})<n$，以及 $r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})>r(\boldsymbol{A})$ 分别是该矩阵方程有唯一解，有无穷多解，以及无解的充分必要条件.

(6) 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形. 因此选(D).

附注　(Ⅰ) 选项(A)是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的必要条件而不是充分条件，而选项(B)，(C)既不是必要条件，也不是充分条件.

(Ⅱ) 两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件有两种：

(ⅰ) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的正、负特征值个数分别相等(当某个特征值有 k 重时，按 k 个计算)；

(ⅱ) 以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵的二次型有相同的规范形.

(7) 由于 $f(x)$ 是概率密度，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$,即

$$a\int_{-\infty}^{1}f_1(x)dx+b\int_{1}^{+\infty}f_2(x)dx=1. \tag{1}$$

由 $f_1(x)$ 是 $X\sim N(1,1)$ 的概率密度知，$\int_{-\infty}^{1}f_1(x)dx=\frac{1}{2}$. 由 $f_2(x)$ 是 Y 的概率密度知 $\int_{1}^{+\infty}f_2(x)dx=1$. 将它们代入式(1)得 $\frac{1}{2}a+b=1$. 因此选(B).

附注　题解中利用了以下结论：

(Ⅰ) 设 $X\sim N(a,\sigma^2)$，则它的概率密度 $f(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ)设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-a)}, & x\geqslant a,\\ 0, & x<a\end{cases}(\lambda>0)$，则

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=1.$$

(8) 由于 $EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$，所以，当 $(4-a)S^2-2a\overline{X}^2$ 为 $\frac{1}{\lambda^2}$ 的无偏估计量时，a 必须

满足

$$E[(4-a)S^2-2a\overline{X}^2]=\frac{1}{\lambda^2}, \tag{1}$$

其中，$E[(4-a)S^2-2a\overline{X}^2]=(4-a)E(S^2)-2aE(\overline{X}^2)$

$$\begin{aligned}&=(4-a)D(X)-2a[D(\overline{X})+(E\overline{X})^2]\\&=(4-a)\frac{1}{\lambda^2}-2a\left[\frac{1}{n}D(X)+(EX)^2\right]\\&=(4-a)\frac{1}{\lambda^2}-2a\left(\frac{1}{n\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得

$$(4-a)\frac{1}{\lambda^2}-2a\left(\frac{1}{n\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{1}{\lambda^2}，\text{即 } a=\frac{3n}{3n+2}.$$

因此选(C).

附注 要记住以下的结论.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$ 是来自总体 X(数学期望 EX 与方差 DX 都存在)的简单随机样本，记其均值为$\overline{X}$，方差为 S^2，即 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则

$$E(\overline{X})=EX，D(\overline{X})=\frac{1}{n}DX，E(S^2)=DX.$$

二、填空题

(9)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ 0, & x>0.\end{cases} \tag{1}$$

此外，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})}{\frac{1}{\sqrt{2+n}}}}$,

其中，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})}{\dfrac{1}{\sqrt{2+n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{2+n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$,

所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}=e^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

于是由式(1)，式(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+e^{nx}}+(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}\right]=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{2}}, & x<0,\\ \frac{1}{2}+e^{\frac{1}{2}}, & x=0,\\ e^{\frac{1}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

附注 由于极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{nx}}$与 x 取值有关，所以应分 $x<0$，$x=0$ 以及 $x>0$ 三种情况计算

这个极限.

(10) $$\int\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}-\int\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t=-\arcsin\frac{t}{2}+C$$

$$=-\arcsin\frac{1}{2x}+C.$$

附注　本题是无理函数积分，也可以令 $2x=\sec t$ 进行计算：

$$\int\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{1}{2}\sec t\tan t}\cdot\frac{1}{2}\sec t\tan t\mathrm{d}t$$

$$=\int\mathrm{d}t=t+C=\arccos\frac{1}{2x}+C.$$

(11) $$\frac{\partial}{\partial x}f(\mathrm{e}^{xy},\ \sin x^2)=f_u'\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{xy}+f_v'\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x^2=y\mathrm{e}^{xy}\cdot f_u'+2x\cos x^2\cdot f_v'.$$

附注　计算多元复合函数的偏导数时，应先画出该函数与自变量之间的复合关系图，例如本题的关系图为

$$z=f(\mathrm{e}^{xy},\ \sin x^2)=f(u,\ v)\left\langle\begin{array}{l}u\left\langle\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right.\\ v\text{—}x\end{array}\right.$$

(12) 记 $u_n(x)=\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^{2n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}}x^{2n+2}}{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^{2n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n+1)}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}(n+2)}\right]x^2=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\cdot1\cdot x^2=x^2,$$

所以，所给幂级数的收敛区间为 $\{x\mid x^2<1\}=(-1,\ 1)$.

当 $x=-1$，1 时，所给幂级数成为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{1}{n}}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right]=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ 发散. 从而所给幂级数的收敛域为 $(-1,\ 1)$.

附注　所给幂级数是缺项幂级数. 对于缺项幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域可按以下步骤计算：

(Ⅰ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$，设其值为 $R(x)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛区间为 $\{x\mid R(x)<1\}\xlongequal{\text{记}}$

$(-a,a)$.

(Ⅱ) 确定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 $x=-a,a$ 处的收敛性,即判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(-a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 的收敛性,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $(-a,a)$ 及收敛的点 $x=-a$ 或 $x=a$ 之并集.

(13) 由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-3\leqslant r(\boldsymbol{AB})$ 得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$, 所以

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&\lambda&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&\lambda&3\\0&2&2\end{vmatrix}=2(\lambda-3)=0.$$

因此 $\lambda=3$.

附注 应记住关于矩阵秩的以下两个不等式:

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}).$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times l$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}.$$

(14) $P(A-C\mid AB\cup C)=\dfrac{P((A-C)(AB\cup C))}{P(AB\cup C)}$,

其中,
$$\begin{aligned}&P((A-C)(AB\cup C))=P(A\overline{C}(AB\cup C))\\&=P(AB\overline{C})=P(A)P(B)(1-P(C))=0.1,\\&P(AB\cup C)=P(AB)+P(C)-P(ABC)\\&=P(A)P(B)+P(C)-P(A)P(B)P(C)=0.6.\end{aligned}$$

所以 $P(A-C\mid AB\cup C)=\dfrac{0.1}{0.6}=\dfrac{1}{6}$.

附注 对于比较复杂的随机事件概率, 总是利用简单随机事件概率和概率计算公式计算, 概率计算公式主要有:

设 A, B 都是事件, 则

$$P(\overline{A})=1-P(A);\ (\text{逆概公式})$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),\ (\text{加法公式})$$

特别当 A, B 互不相容时, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

$$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A), & P(A)>0,\\ P(B)P(A\mid B), & P(B)>0.\end{cases}(\text{乘法公式})$$

设 A_1, A_2, …, A_n 是一个完全事件组, 则当 $P(A_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$时, 对任意随机事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i),(\text{全概率公式})$$

三、解答题

(15) 由于 $\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}=\varphi'(\psi(0))=\varphi'(0)$,

且
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$
所以，
$$\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}=\varphi'(0)=1.$$
$$[\varphi(\psi(x))]'\Big|_{x=0}=\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}\cdot\psi'(x)\Big|_{x=0}$$
$$=\psi'(0)\text{（这里利用以上的计算结果 }\varphi'(\psi(x))\Big|_{x=0}=1\text{）}.$$

由于
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^x}{x}=1,$$
所以，
$$[\varphi(\psi(x))]'\Big|_{x=0}=\psi'(0)=1.$$

附注　题解中，以下两点值得注意：

（Ⅰ）$\varphi(x)$与$\psi(x)$都是分段函数，但现在仅计算在点$x=0$处的复合函数的导数，所以不必写出复合函数的具体表达式.

（Ⅱ）$\varphi'(\psi(x))$与$[\varphi(\psi(x))]'$是两个不同的概念，应予以区分.

（16）由于$\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u$（其中$u=x-t$），所以所给等式成为
$$f(x,y)=y+\int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u.$$
由此可得$f(0,y)=y$，$f'_x(x,y)=f(x,y)$，所以$f(x,y)=ye^x$. 于是
$$\iint_D\sqrt{x}f(x,y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{x}\cdot y^2e^x\mathrm{d}\sigma$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\sqrt{x}e^x\cdot y^2\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}e^x\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^1x^2e^x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1x^2\mathrm{d}e^x=\frac{2}{3}\left(x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1xe^x\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{2e}{3}-\frac{4}{3}\int_0^1x\mathrm{d}e^x=\frac{2e}{3}-\frac{4}{3}\left(xe^x\Big|_0^1-\int_0^1e^x\mathrm{d}x\right)$$
$$=-\frac{2e}{3}+\frac{4}{3}(e-1)=\frac{2e}{3}-\frac{4}{3}.$$

附注　我们多次求解过方程$y(x)=\int_0^x g(x,y(t))\mathrm{d}t+h(x)$（其中，$g$，$h$都是已知的连续函数），题中所给的
$$f(x,y)=y+\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t$$
也是同种类型的方程（但其中的未知函数是二元函数$f(x,y)$），因此可用同样的方法求解，

只需用求偏导数代替求导数即可 .

(17) 由题设“A 市场的价格对 B 市场的价格弹性为 2”得

$$\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}p_2}=2,\ \text{即}\ p_1=kp_2^2.$$

将 $p_1\Big|_{p_2=1}=\frac{3}{16}$代入上式得 $k=\frac{3}{16}$，所以 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0.$

总利润函数为

$$\begin{aligned}L(p_1,\ p_2)&=q_1p_1+q_2p_2-C\\&=(3-0.5p_1)p_1+(2-3p_2)p_2-5-2\left[3-0.5p_1+\frac{41}{12}(2-3p_2)\right]\\&=-0.5p_1^2+4p_1-3p_2^2+\frac{45}{2}p_2-\frac{74}{3}.\end{aligned}$$

于是本题即为在约束条件 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$ 下，计算 $L(p_1,\ p_2)$的最大值问题，故采用拉格朗日乘数法 .

作拉格朗日函数

$$\begin{aligned}F(p_1,\ p_2)&=L(p_1,\ p_2)+\lambda\left(p_1-\frac{3}{16}p_2^2\right)\\&=-0.5p_1^2+4p_1-3p_2^2+\frac{45}{2}p_2-\frac{74}{3}+\lambda\left(p_1-\frac{3}{16}p_2^2\right),\end{aligned}$$

且令$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial p_1}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial p_2}=0,\\ p_1-\dfrac{3}{16}p_2^2=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-p_1+4+\lambda=0, & (1)\\ -6p_2+\dfrac{45}{2}-\dfrac{3}{8}\lambda p_2=0, & (2)\\ p_1-\dfrac{3}{16}p_2^2=0. & (3)\end{cases}$

由式(1)，式(3)得 $\lambda=p_1-4=\frac{3}{16}p_2^2-4$，代入式(2)得

$$-6p_2+\frac{45}{2}-\frac{3}{8}\left(\frac{3}{16}p_2^2-4\right)p_2=0,$$

即 $p_2^3+64p_2-320=0$，或$(p_2-4)(p_2^2+4p_2+80)=0$，所以 $p_2=4$，代入式(3)得 $p_1=3.$

由以上计算，$L(p_1,\ p_2)$在约束条件 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$ 下有唯一的可能极值点，而根据问题的实际意义知，在约束条件 $p_1-\frac{3}{16}p_2^2=0$ 下，$L(p_1,\ p_2)$必有最大值 . 因此，A 市场产品售价为 3，B 市场产品售价为 4 时，总利润最大 .

附注 (Ⅰ)要弄清一个变量 y 对另一个变量 x 的弹性 ε 的概念：

$$\varepsilon=\frac{x}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

(Ⅱ)要熟练掌握计算多元函数条件极值的拉格朗日乘数法.

(18) 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{b}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在$[0,b]$上连续,在$(0,b)$内可导,且

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)-\frac{1}{b}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{x}{b}f(x)\\&=\frac{b-x}{b}f(x)-\frac{1}{b}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{2x}{b}f(x)\\&=\frac{1}{b}\int_x^b[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t+\frac{2x}{b}f(x)>0\end{aligned}$$

(由于$f(u)$单调减少,所以$f(x)-f(t)\geqslant 0$,且仅在$t=x$处取等号,所以$\int_x^b[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t>0$,此外$\frac{2x}{b}f(x)\geqslant 0$),即函数$F(x)$在$[0,b]$上单调增加,所以

$$F(a)>F(0)=0,即\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ (0<a<b<1).$$

附注 以下是证明定积分不等式的常用方法:

将某个定积分的上限及与此上限相同的字母都换成x,转化为函数不等式,然后用导数方法证明这个函数不等式,由此推得所给的定积分不等式.

(19)(Ⅰ)由于 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\ (x\in(-1,1]))$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x^2)^n=x\ln(1+x^2),$$

且其成立范围为$[-1,1]$.

由此可知,和函数$s(x)=x\ln(1+x^2)$,它的定义域为$[-1,1]$.

(Ⅱ)记$F(x)=s(x)-\frac{1}{2}$,则$F(x)$在$[-1,1]$上连续,在$(-1,1)$内可导且

$$F'(x)=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}>0,$$

此外,$F(-1)=-\ln2-\frac{1}{2}<0$,$F(1)=\ln2-\frac{1}{2}>0$,所以方程$F(x)=0$,即$s(x)=\frac{1}{2}$在$[-1,1]$有且仅有一个实根.

附注 题解中有以下两点值得注意:

(Ⅰ)题中利用公式 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\ (-1<x\leqslant 1)$ 计算幂级数的和函数,并确定和函数的定义域,十分快捷.

(Ⅱ)当函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)f(b)<0$,则方程$f(x)=0$在(a,b)内至少有一个实根;

当函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内单调,且$f(a)f(b)<0$时,方程$f(x)=0$在(a,b)内有且只有一个实根.

(20)(Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$，即

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记}} \boldsymbol{B}.$$

由 $f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{B}|$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -a & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -(1+\lambda) & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -a & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -a & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -(1+a) & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)[\lambda^2 - \lambda - (1+a)]$$

知，方程 $f(\lambda)=0$ 不可能有三重根．这是因为，如有三重根，则

$$(\lambda+1)[\lambda^2-\lambda-(1+a)] = (\lambda+1)^3,$$

但 $\lambda^2-\lambda-(1+a) = (\lambda+1)^2$ 是不可能的．所以只需考虑方程 $f(\lambda)=0$ 有二重根的情形：

(1) $\lambda=-1$ 是方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根，则 $\lambda=-1$ 必是 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 的根，由此推出 $a=1$．于是

$r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$的秩 $=1=3-2$(即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=-1$ 重数之差)，

所以此时 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化，由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化．

(2) $\lambda=-1$ 不是方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根，则 $\lambda^2-\lambda-(1+a)=0$ 有二重根．由此推出 $a=-\dfrac{5}{4}$．此时方程 $f(\lambda)=0$ 的二重根为 $\lambda=\dfrac{1}{2}$．于是

$r(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$的秩 $=2\neq 3-2$(即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数与 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 重数之差)，

所以此时 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以此时 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化．

综上所述，$a=-\dfrac{5}{4}$时，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化．

附注　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件有下列两种：

(Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量;

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i(即特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$ 的根)都满足 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=n-n_i$(其中 n_i 是 λ_i 的重数).

本题的求解，就是从利用(Ⅱ)入手的.

(21)(Ⅰ)由题设知，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，从而与 λ_1 对应的 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 $\mu_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=1$，所以由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 知 $\mu_1=1$ 对应的 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. 由此可知 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ b_2,\ b_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交，即

$$b_1+b_2-b_3=0.$$

故可取 $\boldsymbol{\beta}$ 为这个方程的基础解系，即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 正交化:

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\eta}_2)}{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2)}\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}},$$

将 η_1,η_2,η_3 单位化:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\eta}_3}{\|\boldsymbol{\eta}_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

它们是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量，于是所求的正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

由于

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix},$$

所以，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，

令$\begin{cases}z_1=\sqrt{2}y_1,\\ z_2=y_2,\\ z_3=y_3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1,\\ y_2=z_2,\\ y_3=z_3,\end{cases}$ 或 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$，则

$$2y_1^2-y_2^2-y_3^2=z_1^2-z_2^2-z_3^2\text{(规范形)}.$$

从而，$f(x_1,\ x_2,\ x_3)$在可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$$

下，化为规范形，即

$$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2.$$

附注 (Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，有特征值 λ 及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$及对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

(Ⅱ) 要熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法及由正交变换与标准形计算二次型矩阵的方法.

(22) (Ⅰ) 由于 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)$，

其中，$P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)$

$$=P(Y=-1)P(XY\leqslant z\mid Y=-1)+P(Y=0)P(XY\leqslant z\mid Y=0)+$$
$$P(Y=1)P(XY\leqslant z\mid Y=1)$$

$$= \frac{1}{3}[P(X \geqslant -z) + P(0 \leqslant z) + P(X \leqslant z)]\text{(利用 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-z}^{+\infty} e^{-x}dx, & z < 0, \\ \dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx + 1 + \int_0^z e^{-x}dx\right), & z \geqslant 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^z, & z < 0, \\ 1 - \dfrac{1}{3}e^{-z}, & z \geqslant 0. \end{cases}$$

所以，$F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^z, & z<0, \\ 1 - \dfrac{1}{3}e^{-z}, & z\geqslant 0. \end{cases}$

（Ⅱ）$\mathrm{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - EX \cdot E(X^2)$,

其中，$EX=1$，$E(X^2) = D(X) + (EX)^2 = 1 + 1^2 = 2$,

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^3 de^{-x}$$

$$= -\left(x^3 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx\right) = 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$$

$$= 3\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = 3E(X^2).$$

所以，$\mathrm{Cov}(X, X^2) = 3E(X^2) - E(X^2) = 2E(X^2) = 4.$

附注　由于 $Z=XY$ 是连续型随机变量与离散型随机变量之积，所以要计算它的分布函数应从定义出发，即从计算概率

$$P(Z \leqslant z) = P(XY \leqslant z)$$

入手.

(23)（Ⅰ）由于 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，所以 $\overline{X}^2$ 与 S^4 相互独立，因此

$$E(\overline{X}^2 S^4) = E(\overline{X}^2)E(S^4), \tag{1}$$

其中，由 $E(\overline{X}) = EX = 0$，$D(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}D(X) = \dfrac{1}{n}$ 得

$$E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + (E\overline{X})^2 = \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

此外，$E(S^2) = D(X) = 1$，且由 $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ 知 $D(S^2) = \dfrac{1}{(n-1)^2}D((n-1)S^2)$

$= \dfrac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \dfrac{2}{n-1}$，所以

$$E(S^4) = D(S^2) + [E(S^2)]^2 = \frac{2}{n-1} + 1^2 = \frac{n+1}{n-1}. \tag{3}$$

将式(2)，式(3)代入式(1)得

$$E(\overline{X}^2 S^4) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{n+1}{n(n-1)}.$$

(Ⅱ) $D(\overline{X}^2)=E(\overline{X}^4)-[E(\overline{X}^2)]^2=E(\overline{X}^4)-\dfrac{1}{n^2}$, (4)

其中，由于$\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，所以

$$E(\overline{X}^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{n}}}e^{-\frac{t^2}{2\cdot\frac{1}{n}}}dt\xlongequal{\text{令 } u=\frac{t}{\sqrt{1/n}}}\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$=-\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^3de^{-\frac{u^2}{2}}=-\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^3e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-3\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)$$
$$=\frac{3}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{3}{n^2}E(U^2)(\text{其中 } U\sim N(0,1))$$
$$=\frac{3}{n^2}[DU+(EU)^2]=\frac{3}{n^2}. \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)得

$$D(\overline{X}^2)=\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{2}{n^2}.$$

附注 应记住以下结论：

设X_1，X_2，…，X_n是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则$X\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，并且

$$E(\overline{X})=\mu,\ D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S^2)=\sigma^2,\ D(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

模拟试题(十)解答

一、选择题

答案	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	A	D	B	C	A	A	D

(1) 由$f(x)$在点$x=1$处连续及$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$知$f(1)=f'(1)=0$. 于是，由$f''(x)>0$知$f'(x)>f'(1)=0(x>1)$，且$f(x)>f(1)=0(x>1)$. 从而，当$x>1$时，$f(x)$单调增加且大于零．因此选(C).

附注 应记住以下结论：

设函数$f(x)$在点x_0处连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$，则

$$f(x_0)=0, f'(x_0)=A.$$

(2) 对$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$两边关于$y$积分得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x), \tag{1}$$

特别有

$$z'_x(x,0)=\varphi(x). \tag{2}$$

对$z(x, 0)=x^2$两边关于x求导得

$$z'_x(x,0)=2x. \tag{3}$$

于是，由式(2)，式(3)得$\varphi(x)=2x$，将它代入式(1)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+2x.$$

从而，上式两边关于x积分得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2+\psi(y), \tag{4}$$

特别有$z(0, y)=\psi(y)$，故由题设$z(0, y)=y$得$\psi(y)=y$. 将它代入式(4)得$z(x, y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x^2+y$. 因此选(A).

附注 在不定积分中，对$f(x)$的原函数$F(x)$有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \quad (\text{其中} C \text{是任意常数}).$$

对$g(x, y)$关于x的原函数$G_1(x, y)$有

$$\int g(x,y)\mathrm{d}x=G_1(x,y)+\varphi(y)(\text{其中}\varphi(y)\text{是} y \text{的任意函数}).$$

同样，对$g(x, y)$关于y的原函数$G_2(x, y)$有

$$\int g(x,y)\mathrm{d}y=G_2(x,y)+\psi(x)(\text{其中}\psi(x)\text{是} x \text{的任意函数}).$$

(3) 由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，所以

$$\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}x, \tag{1}$$

即

$$2\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D (a+b)\mathrm{d}\sigma=\pi(a+b),$$

所以 $\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}(a+b)$. 因此本题选(D).

附注 式(1)证明如下：

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，函数 $\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}$ 在对称点 (x, y) 与 (y, x) 处的值互为相反数，所以

$$\iint\limits_D \left[\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\right]\mathrm{d}\sigma=0,$$

从而

$$\iint\limits_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 考虑选项(B). 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=0,$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$ 矛盾，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中至少有一发散. 因此选(B).

附注 可用例子说明选项(A)、(C)及(D)都不能选.

设 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，所以(A)不能选.

设 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，所以(C)不能选.

设 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以(D)不能选.

(5) 显然，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}_0$ 可使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{x}_0$ 也是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 反之，设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解 $\boldsymbol{\xi}$，则

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}, 即(\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\xi})=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{A\xi}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，$\boldsymbol{\xi}$ 是实向量知 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数. 于是由式(1)得

$$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=0, 从而 b_1=b_2=\cdots=b_n=0, 即 \boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}.$$

由此可知，$\boldsymbol{\xi}$ 也是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

因此选(C).

附注　题解中，证明了以下结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，由此也推得 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

这结论可推广为：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵，则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

(6) 由题 $r(\boldsymbol{A}^*)=4-3=1$，从而 $r(\boldsymbol{A})=4-1=3$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有且仅有三个不为零. 由此推得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准形应形如 $a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2$($a_1$，$a_2$，$a_3$ 全不为零). 因此选(A).

附注　题解中利用了以下两个结论：

(Ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, r(\boldsymbol{A})=n,\\1, r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可正交相似对角化，且对角矩阵的对角线上元素都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(7) 记 X 的分布函数为 $G(x)$，则

$$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{a}, & 0<x<a,\\ 1, & x\geqslant a,\end{cases}$$

记 Z 的分布函数为 $F(z)$，则

$$\begin{aligned}F(z)&=P(Z\leqslant z)=P(\max\{X,Y\}\leqslant z)\\&=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)\\&=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)(\text{由于 }X\text{ 与 }Y\text{ 相互独立})\\&=G^2(z)(\text{由于 }X\text{ 与 }Y\text{ 有相同的分布函数 }G(z))\\&=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{z}{a}\right)^2, & 0<z<a,\\ 1, & z\geqslant a.\end{cases}\end{aligned}$$

所以 Z 的概率密度

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2z}{a^2}, & 0<z<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此选(A).

附注　顺便指出，选项(B)，(D)分别是随机变量 $\min\{X, Y\}$ 的概率密度与分布函数.

(8) 由于 $\dfrac{8}{\sigma^2}S_X^2\sim\chi^2(8)$，$\dfrac{10}{\sigma^2}S_Y^2\sim\chi^2(10)$，所以

$$D(S_X^2)=\frac{\sigma^4}{8^2}D\left(\frac{8}{\sigma^2}S_X^2\right)=\frac{\sigma^4}{64}\times2\times8=\frac{1}{4}\sigma^4,$$

$$D(S_Y^2) = \frac{\sigma^4}{10^2}D\left(\frac{10}{\sigma^2}S_Y^2\right) = \frac{\sigma^4}{10^2}\times 2\times 10 = \frac{1}{5}\sigma^4,$$

并且
$$D(S_{12}^2) = \frac{1}{4}[D(S_X^2) + D(S_Y^2)] = \frac{9}{80}\sigma^4,$$

$$D(S_{XY}^2) = \frac{1}{18^2}[64D(S_X^2) + 100D(S_Y^2)] = \frac{1}{9}\sigma^4.$$

所以，四个统计量中方差最小者为 S_{XY}^2，因此选(D).

附注 记住以下结论：

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ E(S^2) = \sigma^2,\ D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

二、填空题

(9) 由 $\int_0^x[5f(t)-2]\mathrm{d}t = f(x)-\mathrm{e}^{5x}$ 得

$$f(0) = 1,\ 5f(x)-2 = f'(x)-5\mathrm{e}^{5x}\text{ 以及 }f'(0) = 8,$$

所以有
$$\frac{f'(x)-8}{x} = \frac{5[f(x)-f(0)]+5(\mathrm{e}^{5x}-1)}{x}.$$

令 $x\to 0$，由上式得

$$f''(0) = 5f'(0)+5\times 5 = 65.$$

附注 本题也可解答如下：由于

$$5f(x)-2 = f'(x)-5\mathrm{e}^{5x},\text{即 }y'-5y = -2+5\mathrm{e}^{5x}(\text{其中 }y = f(x)),$$

所以，
$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{5x}\left[C+\int(-2+5\mathrm{e}^{5x})\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \mathrm{e}^{5x}\left[C+\int(-2\mathrm{e}^{-5x}+5)\mathrm{d}x\right] \\ &= \mathrm{e}^{5x}\left(C+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5x}+5x\right). \end{aligned}$$

将 $y\big|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C=\frac{3}{5}$，所以

$$y = \mathrm{e}^{5x}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5x}+5x\right) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}+\frac{2}{5}+5x\mathrm{e}^{5x},$$

$$y' = 8\mathrm{e}^{5x}+25x\mathrm{e}^{5x},$$

$$y'' = 65\mathrm{e}^{5x}+125x\mathrm{e}^{5x}.$$

由此得到 $f''(0)=y''\big|_{x=0}=65$.

(10) 显然，$x=y=0$ 时，所给方程成为 $\int_0^z \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 0$，从而 $z(0,0)=0$. 此外，所给方程两边对 x 求偏导数得

$$\mathrm{e}^{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+y+y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\text{ 即}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{\mathrm{e}^{z^2}+y},\text{ 且}\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = 0.$$

从而 $$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left.\left(\frac{\partial z(0,\ y)}{\partial x}\right)\right|_{y=0} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial z(0,\ y)}{\partial x} - \frac{\partial z(0,\ 0)}{\partial x}}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y}{\mathrm{e}^{z^2(0,y)}+y} - 0}{y} = -\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{z^2(0,y)}+y} = -\frac{1}{1+0} = -1.$$

附注 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$也可以由$\frac{\partial z}{\partial x}$对 y 求偏导数算出$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，然后将 $x=y=0$ 代入计算得到．但题解中由$\frac{\partial z}{\partial x}$按定义计算$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$更加快捷些．

(11) 由于$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}$，

$$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}>\frac{1}{n^2+2n}(1+2+\cdots+n)$$
$$=\frac{n+1}{2(n+2)}\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

并且，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$，所以由数列极限存在准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

附注 这里的数列极限存在准则是：

设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$以及$\{z_n\}$满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=A,$$

则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$

(12) 由于 y_1 与 y_2 是 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的特解，所以其通解为 $Y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 此外，$y''+py'+qy=0$ 对应的特征方程有根 $1+\mathrm{i}$ 与 $1-\mathrm{i}$，从而

$$p=-[(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})]=-2,\ q=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2.$$

由于 $y''+py'+qy=\cos x$，即 $y''-2y'+2y=\cos x$ 应有特解

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

将它代入这个非齐次线性微分方程得

$$(A-2B)\cos x+(2A+B)\sin x=\cos x,$$

于是有$\begin{cases}A-2B=1,\\2A+B=0,\end{cases}$即 $A=\frac{1}{5}$，$B=-\frac{2}{5}$，因此 $y^*=\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$. 从而这个非齐次线性微分方程的通解为

$$y=Y+y^*=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x.$$

附注 本题获解的关键是，由 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的特解确定其通解及方程中的系数 p，q 的值．它们都是按 2 阶常系数齐次线性微分方程的解的性质得到的．

(13) 由 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，此外对 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$ 的两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，所以由 $|\boldsymbol{A}|<0$ 得 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$,
所以, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{A}|\,|(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}|$, 即

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n|=0.$$

附注 题中的 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵. 正交矩阵有以下性质:

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(Ⅰ) $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1;

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅲ) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与列向量组都是正交单位向量组;

(Ⅳ) $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*$ 都是正交矩阵;

(Ⅴ) $\boldsymbol{AB}$ 是正交矩阵.

(14) 由于存在常数 a, $b(b\neq0)$, 使得 $P(Y=a+bX)=1$. 所以

$$\rho=\begin{cases}1, & b>0,\\ -1, & b<0,\end{cases}\ \text{即}\ \rho=\frac{b}{|b|}.$$

附注 关于随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ 的性质:

(Ⅰ) $|\rho|\leqslant1$;

(Ⅱ) $|\rho|=1$ 的充分必要条件是, 存在常数 a, $b(b\neq0)$, 使得

$$P(Y=a+bX)=1,$$

且当 $b>0$ 时 $\rho=1$, $b<0$ 时 $\rho=-1$.

三、解答题

(15) $y(0)=1$, 此处,

由 $y(x)=1+x+2x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$y'=1+2\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t=1+y^2-y^2(0)=y^2,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right)=-1$, 从而 $\frac{1}{y}=-x+C$. 将 $y(0)=1$ 代入得 $C=1$. 因此 $y=\frac{1}{1-x}$. 从而 $y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

附注 对 $\int_0^x(x-t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t$ 求导时, 必须首先将被积函数中的 x 移到积分号之外, 故将它改写成

$$x\int_0^x y(t)y'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x ty(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

(16) 由于
$$\begin{aligned}I(a)&=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_{D_1+D_2}(x+2x^2y)\mathrm{d}\sigma\ (D_1+D_2,\text{如图答 10-16 阴影部分所示})\\&=2\iint_{D_1}x\mathrm{d}\sigma \qquad (1)\end{aligned}$$

(这是由于 D_1 与 D_2 关于 x 轴对称, 在对称点处 x 的值彼此相等, 而 $2x^2y$ 的值互为相反数, 故

$$\iint\limits_{D_1+D_2} x\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}\sigma, \iint\limits_{D_1+D_2} 2x^2y\mathrm{d}\sigma = 0),$$

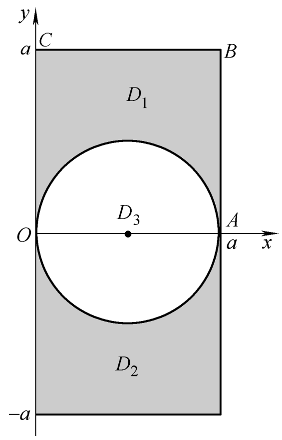
所以，$I(a) = 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_{\sqrt{ax-x^2}}^a x\mathrm{d}y = 2\int_0^a x(a - \sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^a ax\mathrm{d}x - 2\int_0^a x\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= a^3 - 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(t+\frac{a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\mathrm{d}t\left(\text{其中 } t = x - \frac{a}{2}\right)$$

$$= a^3 - a\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\mathrm{d}t = a^3 - a\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\pi}{8}\right)a^3.$$



图答　10-16

附注　$\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}\sigma$ 也可计算如下：

$$\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{S} x\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_3} x\mathrm{d}\sigma,$$

其中，S 是正方形 $OABC = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a\right\}$，

$D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax-x^2}\} = \left\{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant a\cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. 所以

$$\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}\sigma = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a x\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}\right)a^3.$$

(17) 由于 $a_n = -\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n-1} = (-1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)a_{n-2}$

$$= \cdots = (-1)^{n-2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdots\frac{4}{3}a_2$$

$$= (-1)^{n-2}\frac{7}{6}(n+1) = (-1)^n\frac{7}{6}(n+1)\ (n=3, 4, \cdots),$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

由于 $x = -1, 1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n$ 分别成为

$$\frac{13}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{7}{6}(n+1) \text{ 与 } \frac{5}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1),$$

它们都是发散的，因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$. 对任意 $x \in (-1,1)$ 有

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n$$
$$=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=3}^{\infty}(-x)^{n+1}$$
$$=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4}{1+x}\right)$$
$$=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{7}{6(x+1)^2}.$$

附注 计算幂级数的和函数 $s(x)$ 时，应先算出该幂级数的收敛域，即确定 $s(x)$ 的定义域.

(18)(Ⅰ)作辅助函数

$$F(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

显然它在 $[0,1]$ 上可导,且 $F(0)=F(1)(=0)$,所以由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $f(\xi)(1-\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

(Ⅱ) 记 $G(x)=f(x)(1-x)-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t$. 由(Ⅰ)的证明知方程 $G(x)=0$ 在 $(0,1)$ 有实根 ξ,此外,由题设得

$$G'(x)=f'(x)(1-x)-2f(x)>0(x\in(0,1)),$$

即函数 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加,所以方程 $G(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内的实根是唯一的,即(Ⅰ)中的 ξ 是唯一的.

附注 (Ⅰ)的证明中,辅助函数 $F(x)$ 是按以下方法得到的:

首先将欲证等式中的 ξ 改为 x 得

$$f(x)(1-x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\text{即}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)=0,$$

所以所作辅助函数为 $F(x)=(1-x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(19) 总成本函数 $C(x)=0.8x+400$,所以总利润函数为

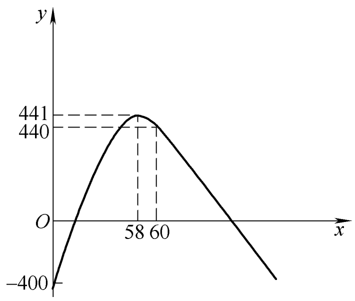
$$L(x)=R(x)-C(x)-T(x)$$
$$=\begin{cases}29x-\frac{1}{4}x^2-400, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 491-0.85x, & x>60.\end{cases}$$

显然 $L(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且

$$L'(x)=\begin{cases}29-\frac{1}{2}x, & 0<x<60,\\ -0.85, & x>60,\end{cases}$$

所以 $L(x)$ 的最大值,在 $[0,+\infty)$ 上的唯一极值点 $x=58$ 处取到,值为 $L(58)=441$. 于是当该厂月产量 $x=58$ 件时,总利润 $L(x)$ 最大,其值为 441 万元.

附注　$y=L(x)$ 的图形如图答 10-19 所示.



图答　10-19

(20)(Ⅰ)由于所给方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

于是,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关得,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&a\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

对式(1)的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\-1&1&a&1\\0&1&1&2\end{array}\right)$$

施行初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&a-1&2\\0&1&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&0&a-2&0\\0&1&1&2\end{array}\right). \tag{2}$$

所以，当所给方程组有无穷多解时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$(其中，$\boldsymbol{A}$ 是式(1)的系数矩阵)，于是由式(2)知 $a-2=0$，即 $a=2$.

(Ⅱ)当 $a=2$ 时，式(1)，即所给方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1\quad -x_3=1,\\ \quad x_2+x_3=2\end{cases} \tag{3}$$

同解，它对应的导出组通解为 $C(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm T}$，且式(3)有特解 $(1,\ 2,\ 0)^{\mathrm T}$. 所以，式(3)，即所给方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=C(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm T}+(1,\ 2,\ 0)^{\mathrm T}(C\text{ 是任意常数}).$$

附注　本题获解的关键是，根据 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，将所给的方程组化简为同解方程组(1).

(21)(Ⅰ)由

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-6)^2$$

知，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=-2$，6(二重)，所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时，必有

$$r(6\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})=3-2=1, \tag{1}$$

其中，$6\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&0\\0&-a&0\end{pmatrix}$.

因此满足式(1)的 $a=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化时，$a=0$.

(Ⅱ) $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，所以

$$f(x_1, x_2, x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2+6x_3^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$(实对称矩阵)，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-5&0\\-5&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-6)(\lambda-7),$$

所以，$\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=-3, 6, 7$.

设对应 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-5&-5&0\\-5&-5&0\\0&0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，即\begin{cases}a_1+a_2=0,\\a_3=0.\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\alpha}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\alpha}=(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$\begin{pmatrix}4&-5&0\\-5&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，即\begin{cases}4b_1-5b_2=0,\\-5b_1+4b_2=0.\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\beta}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\beta}=(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

设对应 $\lambda=7$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}=(c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都正交，即

$$\begin{cases}-c_1+c_2=0,\\c_3=0.\end{cases}$$

于是取 $\boldsymbol{\gamma}$ 为它的基础解系，即 $\boldsymbol{\gamma}=(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为正交向量组，现将它们单位化：

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\beta}=(0, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$(正交矩阵)，则所求的正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

它将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 $-3y_1^2+6y_2^2+7y_3^2$.

附注 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形，首先要将该二次型表示成 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵），这是本题获解的关键．此外应熟练掌握用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$（其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵）为标准形的方法．

(22) $$\begin{aligned}E(Z^2) &= \iint\limits_{xOy\text{平面}}(\min\{x,y\})^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{0<x<y}(\min\{x,y\})^2 x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\sigma\\
&= \iint\limits_{0<x<y} x^2\cdot x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^y x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}y^4\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}y^4\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}\\
&= -\frac{1}{4}\left(y^4\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty}y^3\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{+\infty}y^3\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = -\int_0^{+\infty}y^3\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}\\
&= -\left(y^3\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty} - 3\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right) = 3\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\\
&= 3E(T^2)\left(\text{其中,随机变量 } T \text{ 的概率密度为 } \varphi(t) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, t>0,\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}\right)\\
&= 3[DT+(ET)^2] = 3(1+1^2) = 6.\end{aligned}$$

附注 由于在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<y\}$ 上，$(\min\{x,y\})^2=x^2$，所以，用定义计算数学期望 $E(Z^2)$．这里顺便计算 EZ 与 DZ：

$$\begin{aligned}EZ &= \iint\limits_{xOy\text{平面}}\min\{x,y\}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{0<x<y}\min\{x,y\}x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\sigma\\
&= \iint\limits_{0<x<y}x\cdot x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}y^3\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}y^3\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}\\
&= -\frac{1}{3}\left(y^3\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty} - 3\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\\
&= \int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = E(T^2) = DT+(ET)^2 = 1+1^2 = 2.\end{aligned}$$

$DZ = E(Z^2)-(EZ)^2 = 6-2^2 = 2.$

(23)(Ⅰ)X 的数学期望

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot(1+\theta)x^{\theta}\cdot\mathrm{d}x = \frac{1+\theta}{2+\theta}.$$

根据矩估计法，令

$$EX = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \text{即}\frac{1+\theta}{2+\theta} = \overline{X}.$$

解此方程得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(Ⅱ)记 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由于计算最大似然估计量，所以可以认为 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$. 于是有似然函数

$$L(\theta) = (1+\theta)x_1^{\theta}\cdot(1+\theta)x_2^{\theta}\cdot\cdots\cdot(1+\theta)x_n^{\theta},$$

$$= (1+\theta)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta}.$$

取对数 $\ln L(\theta) = n\ln(1+\theta) + \theta\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$,则由

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0$$

得
$$\theta = -\frac{n}{\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)} - 1 (0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 1).$$

所以,θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\ln(X_1 X_2 \cdots X_n)} - 1 (0 < X_1, X_2, \cdots, X_n < 1)$.

附注 应熟练掌握总体未知参数点估计的两种方法:矩估计法与最大似然估计法.