# 大 学 数 学

## （经管类）

## （第 2 版）

刘金冷　主　编

李玉芳　副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书是包括微积分、矩阵与线性方程组、概率论与数理统计基本知识及其应用的大学数学（经管类）教材，另配套一册作业题、自测题，并编入了部分著名数学家、学者的史话.

本书是为成人专科院校、高职院校成人专科班、普通高校成教院成人专科班经管类专业的教师和学生编写的. 编写的原则是“服务专业，注重基础，突出应用，力求简明，与专科学生水平相适应”。本书也适合各类高职、高专院校经管类专业学生和从事经济、管理工作的管理人员学习和参考.



**图书在版编目（CIP）数据**

大学数学. 经管类 / 刘金冷主编. —2 版. —北京：电子工业出版社，2010.2
ISBN 978-7-121-08066-1

I. 大…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 211144 号

策划编辑：施玉新
责任编辑：李　蕊
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：12.25　字数：310.4 千字
印　　次：2010 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：19.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换. 若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888.

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn.

服务热线：（010）88258888.

# 编 委 会

# 第 2 版前言

本教材自 2007 年至今，已在天津市各成人高等学校大专班、普通高校成人教育学院专科班、职业院校成人专科班使用两年．经天津市教委主管部门研究决定，对教材中的不妥之处进行了修订，再版后继续供上述各类成人专科班的经管类专业数学课教学使用．参加修订工作的教师有天津海运职业学院刘金冷教授，天津市河东区职工大学李玉芳副教授，天津现代职业技术学院王玲芝副教授，天津市南开区职工大学张光羽副教授，天津渤海职业技术学院陶印修副教授，刘金冷教授主审．他们针对两年的教学实践，根据各自的研究、探讨，认真审读了教材内容，共同研究确定了修改意见．同时，适应天津市教委职教中心对成人专科数学课的微积分内容实行全市统一考试、阅卷的要求，重新调整了相应章节的练习题、作业题、自测题，并校核了对应的参考答案．可以肯定，第 2 版的教材、作业册将更便于广大任课教师的教学工作，也将更利于学生学好数学课，掌握必需的数学知识．

在此，也向参加教材修订征求意见会及提供教材修改意见的各位教师表示诚挚的谢意．

编者

2009 年 11 月

# 前 言

近年来，成人高等教育发展迅速，取得了丰硕成果，为世人所瞩目. 成人高等教育中的数学教育，在各个专业课程体系架构中，起到了十分重要的基础作用和进一步提高逻辑思维能力、分析能力的作用. 目前，成人高等教育，无论是其培养目标，还是专业设置及专业课程体系设计，都逐步向职业教育方向发展. 这就要求数学教育和教学要适应这一新的变化，教材必须摆脱沿袭本科制教材版本模式的编写思路。当前，急需陈述简明、内容模块化，并与各类职业技术教育要求相适应的教材. 另外，在成人高等职业教育中受教育对象普遍年轻化，并且绝大多数学生不是高中毕业生，而是中职学校毕业生，学生的数学基础知识水平明显偏低，这些都是数学教材编写中必须面对的现实. 教材内容应从实际出发，易于学生学习、理解和掌握，有利于在其他学科的学习中去运用. 基于以上认识，本书的编写原则确定为“服务专业，注重基础，突出应用，力求简明，与专科学生水平相适应.”

本书是按天津市教委成人教育与培训处组织审定的《编写纲要》的要求，在中国教育应用数学学会天津分会的支持下，组织了天津市新华职工大学、天津市河东区职工大学、天津市财贸管理干部学院、天津海运职业学院、天津机电职业技术学院、天津城市职业学院、天津市教委职业与技术教育中心的部分教师进行编写的.

本书具有以下特点：

（1）按模块化结构设计本书内容，以满足不同专业对数学不同内容的需求进行教学选择；

（2）在引入重要概念、定理前，以“引例”的方式导入，并概括其应用的基本思路；

（3）以评注方式对重要概念、重要定理、常用的运算方法进行总结，加深理解，指出应注意的要点；

（4）各章之前，编入了与教材内容相关的著名数学家、学者的史话，以及数学文化的内容；

（5）本书配有单独一本《作业册》，与教材同步使用，并采用撕页方式装订，便于学生和教师使用.

第 1、3 章由王坤龙副教授编写，第 2、4、5 章由吴坚副教授编写，第 6、7 章由张艺萍副教授编写，第 8~10 章由李玉芳副教授编写. 刘金冷教授和张振国教授统审全书.

本书的编写还得到了天津市教委成人教育与培训处张庆生处长、天津市教委职业与技术教育中心孟志咸主任、天津市职业教育与成人教育学会李全奎秘书长、天津市河东区职工大学王发田校长、天津城市职业学院杨学俊顾问等领导的热心支持和指导，在此一并表示感谢.

鉴于编者水平有限，书中难免错漏之处，敬请读者不吝赐教.

编者

2006 年 11 月

# 目　录

# 数学史话 1

### 什么是数学？

公元前 4 世纪的希腊哲学家亚里士多德将数学定义为“**数学是量的科学**”.

19 世纪恩格斯论述数学本质时说“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系”. 根据恩格斯的论述，数学可以定义为“**数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学**”.

20 世纪 50 年代，前苏联一批有影响的数学家试图修正前面的恩格斯的定义来概括现代数学的发展特征：“**现代数学就是各种量之间的可能的，一般说各种变化着的量的关系和相互联系的数学**”.

20 世纪 80 年代，一批美国学者，将数学简单地定义为关于“模式”的科学：“**[数学]这个领域已被称做模式的科学，其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性**”.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

### 数学的特征是什么？

第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结构的确定性，最后是它的应用的极端广泛.

摘自《数学——它的内容、方法和意义》А.Д. 亚历山大洛夫等

### 数学与社会进步

数学从萌芽之日起，就表现出解决因人类实际需要而提出的各种问题的功效.商业、航海、历法计算，桥梁、寺庙、宫殿的建造，武器与工事的设计等，数学往往能对所有这些问题作出令人满意的解决. 数学在现代社会生活中的直接应用更是大量的和经常的.数学对人类物质文明的影响，最突出的是反映在它与能从根本上改变人类物质生活方式的产业革命的关系上.人类历史上先后共有三次重大的产业革命，这三次产业革命的主体技术都与数学的新理论、新方法的应用有直接或间接的关系.

数学对于人类精神文明的影响同样也很深刻.数学本身就是一种精神，一种探索精神，这种精神的两个要素，即对理性（真理）与完美的追求，千百年来对人们的思维方式、教育方式以及世界观、艺术观等的影响是不容否定的.数学对人类精神文明的意义，也突出地反映在它与历次重大思想革命的关系上. 由于其不可抗拒的逻辑说服力和无可争辩的计算精确性，数学往往成为解放思想的决定武器.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

**函数概念的起源**

在自然界中各种物体和各种现象是有机的、相互关联的、彼此依赖的、稳固不变的最简单关系，很早就有人加以研究了. 关于这种关系的知识逐渐积累起来，形成为物理的定律. 在多数的场合，这指出了在数量上描述某些现象的几个不同的量是紧密地相互关联的，一个量完全决定于其他的量. 例如，矩形的两边的长短就使它的面积完全确定，已给的气体的体积在温度固定时决定于它的压力，已给的金属杆的伸长度决定于它的温度，等等. 类似的规律性就正是函数概念的起源.

摘自《数学——它的内容、方法和意义》.［苏］A. Д. 亚历山大洛夫等

**函数概念的深化**

18 世纪微积分发展的一个历史性转折，是将函数放到了中心的地位，而以往数学家们都以曲线作为微积分的主要对象. 这一转折首先也应归功于欧拉，欧拉在《无限小分析论》中明确宣布："数学分析是关于函数的科学"，微积分被看做是建立在微分基础上的函数理论.

函数概念在 17 世纪已经引入，牛顿《原理》中提出的"生成量"就是雏形的函数概念. 莱布尼茨首先使用了"函数"（function）这一术语. 他把函数看作是"像曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长度、垂线长度等所有与曲线上的点有关的量". 最先将函数概念公式化的是约翰·伯努利. 欧拉则将伯努利的思想进一步解析化，他在《无限小分析论》中将函数定义为：

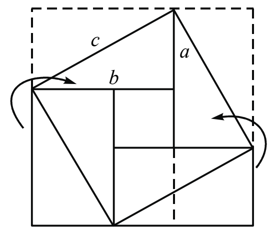
**"变量的函数是一个由该变量与一些常数以任何方式组成的解析表达式."**

欧拉的函数定义在 18 世纪后期占据了统治地位. 在这一定义的基础上，函数概念本身大大丰富了.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

**《周髀算经》**

在现在的中国古代数学著作中，《周髀算经》是最早的一部.




《周髀算经》作者不详，成书年代据考应不晚于公元前 2 世纪西汉时期，但书中涉及的数学、天文知识，有的可以追溯到西周（公元前 11 世纪—前 8 世纪）. 这部著作实际是从数学上讨论"盖天说"宇宙模型，反映了中国古代数学与天文学的密切联系. 从数学上看《周髀算经》主要的成就是分数运算、勾股定理及其在天文测量中的应用，其中勾股定理的论述最为突出.

《周髀算经》主要是以文字形式叙述了勾股算法. 中国数学史上最先完成勾股定理证明的数学家，是公元 3 世纪三国时期的赵爽. 赵爽注《周髀算经》，作"勾股圆方图"，其中的"弦图"，相当于运用面积的出入相补证明了勾股定理. 如图，考虑以一直角三角形的勾和股为边的两个正方形的合并图形，其面积应为 $a^2+b^2$. 如果将这合并图形所含的两个三角形移补到图中所示的位置，将得到一个以三角形之弦为边的正方形，其面积应为 $c^2$，因此 $a^2+b^2=c^2$.

赵爽在"勾股圆方图"说中还类似地证明了勾股定理的许多推论，此外他还给出了一张"日高图"，是用面积出入相补的方法去证明《周髀算经》中的日高公式.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

# 第 1 章　函数、极限与连续

函数是微积分的主要研究对象. 本章对函数的概念及性质作进一步复习及补充，将介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性.

## 1.1　函数

### 1.1.1　函数的概念

1．函数

**引例 1**　天津市内某住宅电话的每月使用费用为 $y$ 元，按月租费 25 元及每分钟 0.16 元计算. 设使用时间为 $x$ 分钟，则 $y=25+0.16x$ . $y$ 与 $x$ 是两个相互依存（依赖）的变量.

**引例 2**　在本市内投寄信件，每封信件不超过 20 克时，应付邮费 0.60 元；超过 20 克而不超过 40 克时，应付邮费 1.20 元；依次类推，对质量不超过 60 克的信件，邮费 $y$（单位：元）与每封信件的质量 $x$（单位：克）之间的关系可用式子表示为：

$$y=\begin{cases}0.60, & 0<x\leqslant 20;\\ 1.20, & 20<x\leqslant 40;\\ 1.80, & 40<x\leqslant 60.\end{cases}$$

显然，这里的 $x$ 与 $y$ 也是两个相互依赖的变量.

通常在某种变化过程中，总能找到两个或两个以上相互依赖同时又相互制约的变量，这些变量的变化遵循着某种规律，使得变量间形成某种对应关系.

**定义 1.1**　设 $x$ 、$y$ 是两个变量，$D$ 是非空实数集. 如果对变量 $x$ 在 $D$ 中的每一个值，按照一定的对应规则 $f$ ，变量 $y$ 总有确定的数值与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作

$$y=f(x)$$

式中，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，$f$ 表示 $x$ 与 $y$ 之间的**对应规则**（也叫**函数关系**）.

集合 $D$ 称为函数的**定义域**，相应的 $y$ 值的集合称为函数的**值域**.

当自变量 $x$ 在定义域内取某确定值 $x_0$ 时，因变量 $y$ 按照函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 $y_0$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**函数值**，记作

$$y_0=f(x_0) \text{ 或 } y_0=y\big|_{x=x_0}$$

**例 1**　设函数 $f(x)=2x-3$ ，求 $f(1)$ ，$f(-x)$ ，$f(x+1)$ .

**解**

$$f(1)=2\times 1-3=-1$$

$$f(-x)=2(-x)-3=-2x-3$$

$$f(x+1)=2(x+1)-3=2x-1$$

### 2．函数定义域的确定

由函数的定义可知，函数的定义域是自变量 $x$ 的取值范围．如果函数关系用表达式 $f(x)$ 表示，则函数的定义域是使表达式 $f(x)$ 有意义的 $x$ 值的集合．实际应用问题的函数的定义域还要考虑到问题的实际意义．

确定函数定义域时，一般考虑以下几点：

（1）分式的分母不为零；

（2）偶次根式下的式子非负；

（3）对数函数的真数大于零．

**例 2**　求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=x^2-2x+\dfrac{1}{x}$

（2）$f(x)=\sqrt{x^2-9}$

（3）$f(x)=\lg(4x-3)$

（4）$f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg\dfrac{1}{x-1}$

**解**　（1）因为在 $\dfrac{1}{x}$ 中 $x$ 不能为零，所以定义域为 $x\neq 0$，即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．

（2）因为在偶次根式中，被开方式必须大于或等于零，所以有 $x^2-9\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3$，即定义域为 $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$．

（3）因为 $f(x)$ 为对数函数，所以 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，即定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$．

（4）因为在偶次根式中，被开方式必须大于或等于零；对数函数的真数大于零；分母不为零．所以，为了使函数有意义，自变量 $x$ 必须同时满足以下条件：

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \dfrac{1}{x-1}>0\\ x-1\neq 0\end{cases}，即\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>1\\ x\neq 1\end{cases}$$

解不等式组得 $1<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $(1,2]$．

如果对于任意的 $x\in D$，与之对应的 $y$ 值只有一个，这种函数称为**单值函数**；否则，称为**多值函数**．例如，$y=2x$ 是单值函数；而由 $x^2+y^2=1$ 可推出两个分支函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$．本书中如果没有特殊说明，所讨论的函数均为单值函数．

### 3．函数的表示方法

函数的对应规则是连接 $x$ 与 $y$ 的纽带，依据函数对应规则的不同，函数有不同的表示方法．

当对应规则用表格给出时，对应的函数表示方法称为**表格法**；当对应规则用图形给出时，对应的函数表示方法称为**图像法**；当对应规则用解析式给出时，对应的函数表示方法称为**解析法**．

表格法是用列表的方法来表示函数关系，例如水文监测站统计了某河流 20 年内平均月流量 $V$，如表 1-1 所示．

表 1-1

| $x$ | 月　份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 平均月流量 $V$（亿立方米） | 0.32 | 0.29 | 0.47 | 0.64 | 0.33 | 0.77 | 4.1 | 4.2 | 3.7 | 1.9 | 0.9 | 0.72 |

这是用表格表示的函数，当自变量 $x$ 取 1～12 之间任意一个整数时，从表格里可得出 $y$ 的一个对应值.

当用解析法表示函数时，经常会遇到下面的几种情况.

（1）当函数 $y$ 由含有自变量 $x$ 的一个解析式表达时，这种函数称为**显函数**，记作 $y=f(x)$. 例如，$y=2x^2+1$，$y=\sin x$.

设某产品的全部固定成本为 $a$，单位产品的变动成本为 $b$，$x$ 为产量，$y$ 为总成本，则 $y=ax+b$.

（2）当函数的对应规则由方程 $F(x,y)=0$ 所确定时，这种函数称为**隐函数**. 例如，$\mathrm{e}^{xy}-y=0$，$2xy+\ln y=0$.

（3）当自变量 $x$ 在定义域 $D$ 的不同范围内取值时，因变量 $y$ 与之对应的规则不同，此时函数的对应规则是由几个不同的解析式来表达，这种函数称为**分段表示的函数**，也称为**分段函数**.

例如，某网通公司规定用户上网的收费办法为：上网时间不超过 68 小时，月收费 50 元；超过 68 小时部分，按每小时 4 元加收. 因此每月上网费 $y$ 与用户当月上网时间 $t$（小时）的关系可用下列函数表示：

$$y=\begin{cases}50, & t\leqslant 68;\\ 50+4(t-68), & t>68.\end{cases}$$

**注意**

分段函数是一个函数，分段函数的定义域为各段自变量取值集合的并集.

### 4．函数的两个要素

定义域和对应规则称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同且对应规则相同，那么这两个函数为同一个函数.

**例 3**　下列函数中为同一函数的是哪些？

（1）$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

（2）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$

（3）$f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

（4）$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$

**解**　（1）$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，由于对应规则不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于它们的定义域不同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

（3）因为 $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ 且 $x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

（4）因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，函数 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，所以 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 不是同一个函数. 如果将 $f(x)$ 限制在 $(0,+\infty)$ 内，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就是同一个函数.

**5．反函数**

**定义 1.2**　设 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $M$，如果对于 $M$ 中的每一个 $y$ 值，在 $D$ 中有唯一确定的 $x$ 值与之对应，则 $x$ 是定义在 $M$ 上的以 $y$ 为自变量的函数，称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y), y\in M$ .

习惯上，总用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示因变量，因此，通常将 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x), x\in M$ .

例如，函数 $y=x^3\quad x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}\quad x\in(-\infty,+\infty)$；函数 $y=\tan x\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数为 $y=\arctan x\quad x\in(-\infty,+\infty)$ .

## 1.1.2　函数的特性

**1．单调性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上有定义，对于 $(a,b)$ 内任意两点 $x_1$、$x_2$，当 $x_1<x_2$ 时：

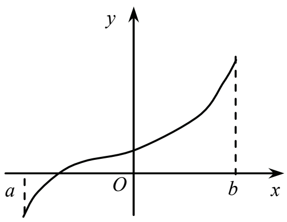



图 1-1

（1）如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 上是单调增加的，区间 $(a,b)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间**（如图 1-1 所示）. 单调增加函数的图像随自变量在 $(a,b)$ 内的增大而自左向右上升，即自变量越大，对应的函数值越大.

（2）如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 上是单调减少的，区间 $(a,b)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调减少区间**（如图 1-2 所示）. 单调减少函数的图像随自变量在 $(a,b)$ 内的增大而自左向右下降，即自变量越大，对应的函数值越小.

在区间 $(a,b)$ 上的单调增加函数与单调减少函数，统称为 $(a,b)$ 上的**单调函数**.

**注意**

函数 $y=f(x)$ 的单调性与区间有关. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的；但是，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

**2．奇偶性**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，即对于任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$ .

（1）如果恒有 $f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 称为**偶函数**，其图像关于 $y$ 轴对称（如图 1-3 所示）.

（2）如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 称为**奇函数**，其图像关于原点对称（如图 1-4 所示）.

**例 4**　讨论下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；（2）$f(x)=x^3+1$；（3）$f(x)=x^2\sin x$ .

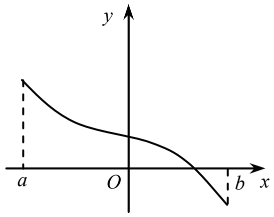



图 1-2

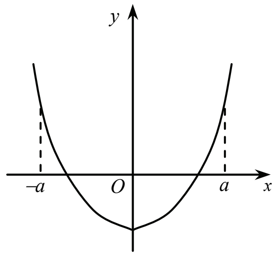



图 1-3

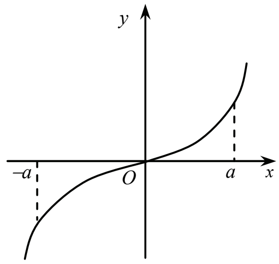



图 1-4

**解**　显然这三个函数的定义域均为$(-\infty,+\infty)$.

（1）因为$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$，所以$f(x)=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$为偶函数.

（2）因为$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$，它既不等于$f(x)$，也不等于$-f(x)$，所以，$f(x)=x^3+1$既不是偶函数，也不是奇函数.

（3）因为$f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$，所以，$f(x)=x^2\sin x$为奇函数.

### 3．有界性

设函数$y=f(x)$在区间$(a,b)$内有定义. 如果存在正数$M$，使得对区间$(a,b)$内每一个$x$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，此时函数图像夹在直线$y=\pm M$之间，则$y=f(x)$称为在区间$(a,b)$上的**有界函数**（如图 1-5 所示）；若这样的$M$不存在，则$y=f(x)$称为在区间$(a,b)$上的**无界函数**.

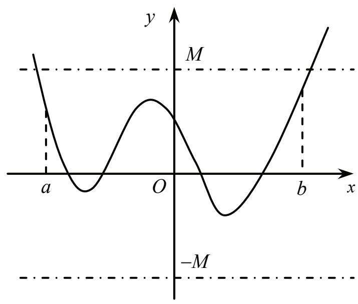



图 1-5

**注意**

函数$y=f(x)$是否有界与自变量取值范围有关. 例如，$y=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内为有界函数，而在$(0,+\infty)$内是无界函数. 因此，在讨论函数的有界性时，必须指明讨论的区间.

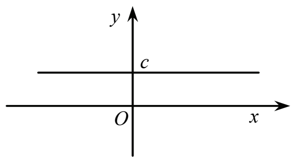
### 4．周期性

设函数$y=f(x)$的定义域为$D$，如果存在常数$T>0$，使得对于任意的$x\in D$，恒有$x\pm T\in D$，并且满足$f(x+T)=f(x)$，则函数$y=f(x)$称为以$T$为周期的**周期函数**.

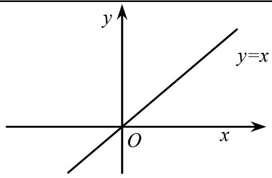
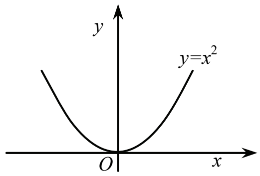
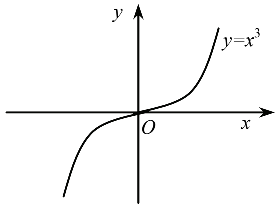
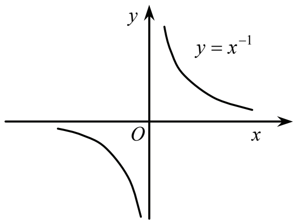
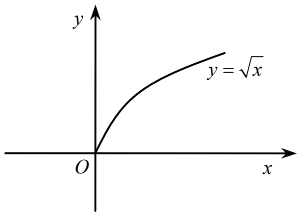
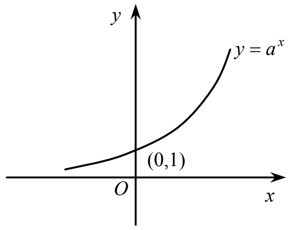
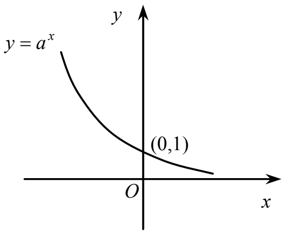
## 1.1.3　基本初等函数

**定义1.3**　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 各基本初等函数的定义域、图形及性质如表 1-2 所示.

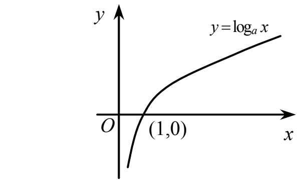
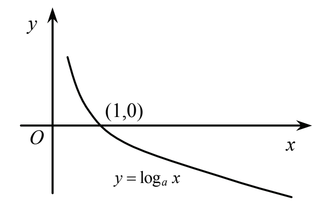
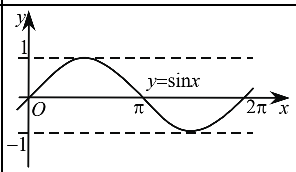
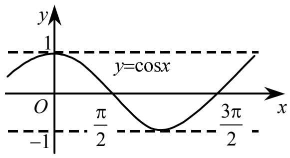
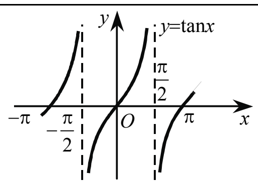
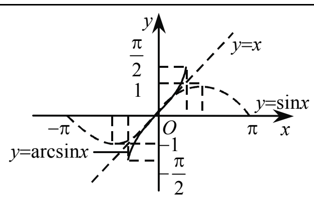
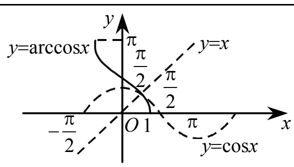
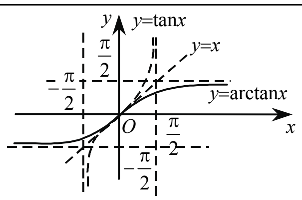
表 1-2

| | 函　数 | 定　义　域 | 图　形 | 性　质 |
|---|---|---|---|---|
| 常数函数 | $y=c$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | |

续表

| | 函　数 | 定 义 域 | 图　形 | 性　质 |
|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | $y=x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数<br>增函数 |
| 幂函数 | $y=x^2$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 偶函数<br>$(-\infty,0)$ 内减函数<br>$(0,+\infty)$ 内增函数 |
| | $y=x^3$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数<br>增函数 |
| | $y=x^{-1}$ | $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |  | 奇函数<br>$(-\infty,0)$ 内减函数<br>$(0,+\infty)$ 内减函数 |
| | $y=\sqrt{x}$ | $[0,+\infty)$ |  | 增函数 |
| 指数函数 | $y=a^x$<br>（ $a>1$ ） | $(-\infty,+\infty)$ |  | 增函数 |
| | $y=a^x$<br>（ $0<a<1$ ） | $(-\infty,+\infty)$ |  | 减函数 |

续表

| | 函　　数 | 定 义 域 | 图　　形 | 性　　质 |
|---|---|---|---|---|
| 对数函数 | $y=\log_a x$（$a>1$） | $(0,+\infty)$ |  | 增函数 |
| 对数函数 | $y=\log_a x$（$0<a<1$） | $(0,+\infty)$ |  | 减函数 |
| 三角函数 | $y=\sin x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数<br>周期函数 |
| | $y=\cos x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 偶函数<br>周期函数 |
| | $y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ |  | 奇函数<br>周期函数 |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$ | $[-1,1]$ |  | 奇函数<br>增函数 |
| | $y=\arccos x$ | $[-1,1]$ |  | 减函数 |
| | $y=\arctan x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数<br>增函数 |

### 1.1.4　复合函数

函数 $y=\sin x^2$ 不是基本初等函数，它是由基本初等函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 通过中间变量 $u$，使得 $y$ 是 $x$ 的函数，函数 $y=\sin x^2$ 称为**复合函数**.

**定义 1.4**　设函数 $y=f(u)$ 是 $u$ 的函数，$u=g(x)$ 是 $x$ 的函数，如果由 $x$ 所确定的 $u$ 使得 $y$ 有意义，则把 $y=f[g(x)]$ 称为 $x$ 的**复合函数**. 其中 $x$ 称为**自变量**，$u$ 称为**中间变量**，$f$ 称为**外层函数**，$g$ 称为**内层函数**.

由定义不难得知函数的复合是有条件的，可以是多重的.

（1）函数的复合是有条件的.

例如，设函数 $y=\lg u$，$u=-2-x^2$，因为对于内层函数 $u=-2-x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 $x$ 值，对应的 $u$ 值都小于 0，从而使得外层函数 $y=\lg u$ 无意义，因此，形式上的复合函数 $y=\lg(-2-x^2)$ 是没有意义的.

事实上，两个函数可以进行复合的条件是，内层函数的值域与外层函数的定义域的交集必须是非空集合. 要注意，内层函数的定义域与复合函数的定义域不一定是相同的.

（2）函数的复合可以是多重复合.

**例 5**　设函数 $y=\sqrt{u}$、$u=\ln v$、$v=1+\sin x$，试将 $y$ 写成 $x$ 的函数.

**解**　$y=\sqrt{u}=\sqrt{\ln v}=\sqrt{\ln(1+\sin x)}$

此函数由三层函数复合而成.

外层　$y=\sqrt{u}$ ——幂函数；

中层　$u=\ln v$ ——对数函数；

内层　$v=1+\sin x$ ——三角函数与常数的加法运算.

由上例可见，一个比较复杂的函数，可以看作是由几个简单函数复合而成的. 这里所说的简单函数一般指基本初等函数或基本初等函数与常数的四则运算所构成的函数.

正确地分析函数的复合过程十分重要，必须掌握要领，分清层次，“由外向内”逐层复合.

**例 6**　指出下列函数的复合过程.

（1）$y=\sqrt{5+2x}$；（2）$y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$；（3）$y=\ln\cos^2 x$.

**解**　（1）函数 $y=\sqrt{5+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$、$u=5+2x$ 复合而成的.

（2）函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$、$u=-x^2-1$ 复合而成的.

（3）函数 $y=\ln\cos^2 x$ 是由 $y=\ln u$、$u=v^2$、$v=\cos x$ 复合而成的.

### 1.1.5　初等函数

**定义 1.5**　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的函数，称为**初等函数**. 初等函数都可以用一个式子来表示.

由定义可知，分段函数一般不是初等函数，但有些特殊的分段函数，例如

$$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

因为它可以写成 $y=\sqrt{x^2}$ 的形式，所以它是初等函数；而函数 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 不是初等函数.

这里有必要介绍在经济预测分析中常用的几类初等函数：

（1）幂函数　$y = cx^b$

（2）指数函数　$y = \mathrm{c}\mathrm{e}^{bx}$，$y = c\mathrm{e}^{\frac{b}{x}}$

（3）对数函数　$y = a + b\ln x$

（4）双曲函数　$\frac{1}{y} = a + b\frac{1}{x}$

（5）$S$ 型曲线函数　$y = \frac{1}{a + b\mathrm{e}^{-x}}$

（6）二次函数　$y = a + bx + cx^2$

（7）简单修正指数曲线函数　$y = k + ab^x$

（8）龚伯兹曲线函数　$y = ka^{b^x}$

（9）逻辑斯蒂曲线函数　$y = \frac{k}{1 + b\mathrm{e}^{-ax}}$

上述各函数表达式中，$a$、$b$、$c$、$k$ 均为参数.

这些函数的引入将使函数图像多样化，以适用于描述不同类型的经济活动（现象）的需要. 关于它们的函数定义域、图形、特性，将在本章 1.5 节中进行介绍.

## 练习 1.1

1．求下列函数的定义域：

（1）$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$　　（2）$y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{\lg(1-x)}$

（3）$y = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}; \\ x, & \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$

2．判断下列各题中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数：

（1）$f(x) = \frac{x}{x}$，$g(x) = 1$　　（2）$f(x) = |x|$，$g(x) = \sqrt{x^2}$

（3）$f(x) = x$，$g(x) = (\sqrt{x})^2$　　（4）$f(x) = \sin x$，$g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

3．求函数值：

（1）$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(x_0)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$；

（2）$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leqslant 0; \\ 2, & x > 0. \end{cases}$　求 $f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$.

4．判断下列函数的奇偶性：

（1）$y = x + \sin x$　（2）$y = x(x-1)(x+1)$　（3）$y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$　（4）$y = x^3 - 1$

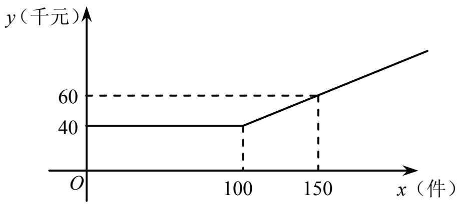
5．求下列函数的反函数：

（1）$y = 2x - 4$　$x \in (-\infty, +\infty)$　（2）$y = x^2$　$x \in (-\infty, +\infty)$　（3）$y = 2^x$　$x \in (-\infty, +\infty)$

6．写出下列函数的复合过程：

（1）$y = \sqrt{3x - 1}$　（2）$y = (1 + \ln x)^5$　（3）$y = 5(x+2)^2$　（4）$y = \sin^3(8x + 5)$

7．某停车场收费标准为：不超过 2 小时，收费 2 元；超过 2 小时后多停车 1 小时（不到 1 小时按 1 小时计算）加收 0.5 元；停车时间不得超过 8 小时. 试建立停车费与停车时间的函数关系.




8．管理会计学中，成本 $y$ 与业务量 $x$ 之间的函数关系式如左图所示，并称 $y$ 为延期变动成本. 试写出这一函数关系的数学表达式.

## 1.2 极限的概念

早在公元前 3 世纪，我国的庄子就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的名言，这反映了我国古代劳动人民在长期的生产和生活实践中所产生的朴素的极限思想.

### 1.2.1 数列的极限

#### 1．数列的概念

**定义 1.6** 按一定顺序排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，记作 $\{x_n\}$. 其中，$x_i$（$i=1,2,\cdots,n,\cdots$）称为数列的第 $i$ 项. 如果数列的项数 $n$ 与数列的各项 $x_i$（$i=1,2,\cdots,n,\cdots$）之间都是按照某种相同的对应规则对应的，并且这种对应规则可以用一个解析式表达，那么这个解析式称为数列的**通项公式**，记作 $x_n = f(n)$，（$n\in\mathbf{N}$）. 由于项数 $n$ 的取值特点，数列 $\{x_n\}$ 的图像是平面上无穷多个孤立点组成的集合.

#### 2．数列的极限

**例 1** 观察下面的数列，求当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 的变化趋势.

（1）$x_n = \dfrac{n}{n+1}$；（2）$x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

**解** （1）数列 $\{x_n\}$：$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限趋近于数值 1（如图 1-6 所示）.

（2）数列 $\{x_n\}$：$1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{(-1)^{n+1}}{n},\cdots$

当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限趋近于数值 0（如图 1-7 所示）.

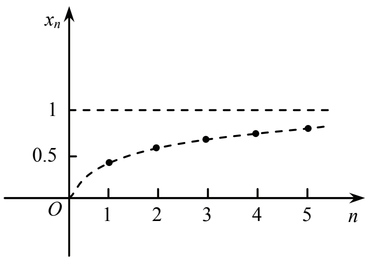



图 1-6

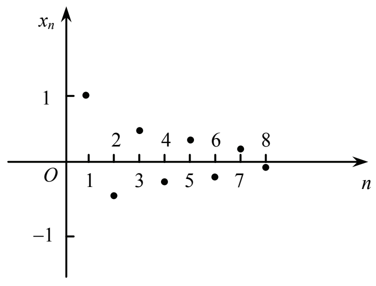



图 1-7

**定义 1.7**　设数列 $\{x_n\}$，如果当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限趋近于一个常数 $a$，则把 $a$ 称为当 $n$ 趋近于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \quad (n\to\infty)$$

此时，也称数列 $\{x_n\}$ 的极限存在. 否则称数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

由定义可知，例 1 中的两个数列都有极限，分别记作：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$.

由图 1-6、图 1-7 可见，如果数列有极限，那么数列的各项将随着项数 $n$ 的增大无限趋近于一个确定的常数.

**例 2**　判断下面各数列的极限是否存在，若存在，求出数列的极限.

（1）$x_n=2$；（2）$x_n=(-1)^n$；（3）$x_n=n$.

**解**　（1）数列 $\{x_n\}: 2,2,2,\cdots$. 由图 1-8 知，$\lim\limits_{n\to\infty}2=2$.

各项均为同一常数的数列叫做常数列. 常数列的极限仍为常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty} c = c \quad （c \text{ 为常数}）$$

（2）数列 $\{x_n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots$. 由图 1-9 知，当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 总是在 $-1$ 与 1 之间跳跃，而不能无限趋近于一个确定的常数，所以该数列的极限不存在.

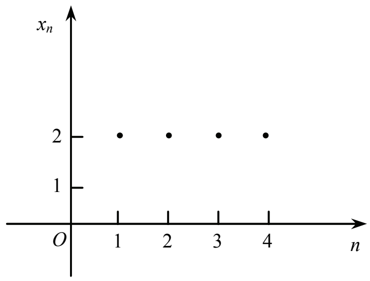



图 1-8

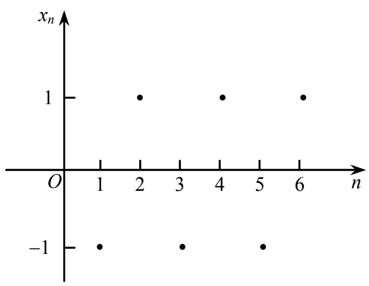



图 1-9

（3）数列 $\{x_n\}: 1,2,3,\cdots,n.$ 由图 1-10 可见，当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 越来越大，不趋近于任何一个常数，所以，不符合数列极限的定义，因此该数列的极限不存在.

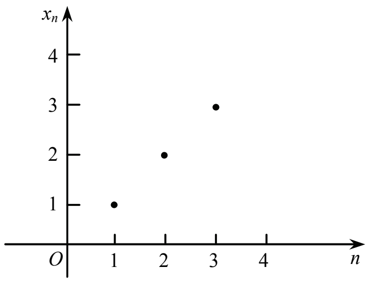



图 1-10

## 1.2.2　函数的极限

### 1．$x\to\infty$ 时，$y=f(x)$ 的极限

**定义 1.8**　（1）如果当自变量 $x$ 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

此时，也称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在. 否则，称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

（2）如果当自变量 $x$ 取正值且无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$

（3）如果当自变量 $x$ 取负值而绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

**注意**

“$x\to\infty$”包含“$x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$”，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

**例 3** 观察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图像，判断当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

**解** $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由图 1-11 可见，当 $x\to+\infty$ 时，曲线无限趋近于 $x$ 轴，曲线上各点处的函数值无限趋近于 0，即 $\dfrac{1}{x}\to 0$.

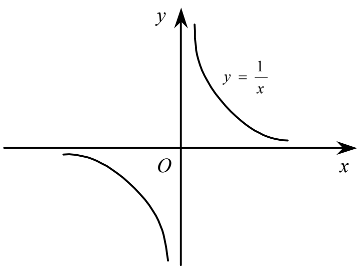


图 1-11

当 $x\to-\infty$ 时，曲线无限趋近于 $x$ 轴，曲线上各点处的函数值无限趋近于 0，即 $\dfrac{1}{x}\to 0$.

由定义 1.8 可知，上例中的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限存在，为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\text{，即 }\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

**例 4** 用观察图像的方法，判断下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限是否存在.

（1）$f(x)=2^x$；（2）$f(x)=\sin x$.

**解** （1）函数 $f(x)=2^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-12 所示，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$；而当 $x\to+\infty$ 时，$2^x$ 的值无限增大，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$ 不存在. 为了研究方便，一般可以记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

（2）函数 $f(x)=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1-13 所示，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值 $\sin x$ 在 $[-1,1]$ 内振荡，而不能无限趋近于一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

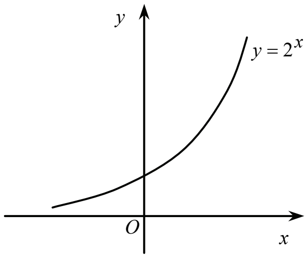


图 1-12

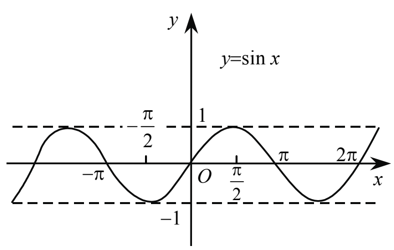


图 1-13

**2．当 $x \to x_0$ 时，$y = f(x)$ 的极限**

**定义 1.9**　（1）如果当自变量 $x$ 无限趋近 $x_0$（但 $x \neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

（2）如果当自变量 $x$ 从大于 $x_0$ 一侧无限趋近 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (x \to x_0^+)$$

（3）如果当自变量 $x$ 从小于 $x_0$ 一侧无限趋近 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (x \to x_0^-)$$

**注意**

① 极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 又称为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左、右极限；

②“$x \to x_0$”包含“$x \to x_0^+$ 和 $x \to x_0^-$”，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

**例 5**　观察函数 $y = x^2$ 当 $x \to 1$ 时的变化趋势.

**解**　由图 1-14 可见，当自变量 $x$ 无限趋近于 1 时，对应的曲线上的点无限趋近于点(1,1)，即函数值无限趋近于 1.

当 $x$ 从 1 的左侧趋近于 1 时，函数 $y = x^2$ 无限趋近于 1，函数在 $x_0$ 的左极限是 $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$；

当 $x$ 从 1 的右侧趋近于 1 时，函数 $y = x^2$ 无限趋近于 1，函数在 $x_0$ 的右极限是 $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$.

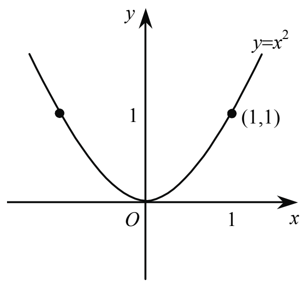


图 1-14

函数的左、右极限都存在且相等，即 $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$，所以 $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

一般地，对于幂函数 $y = x^\alpha$，总有 $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$（当 $\alpha < 0$ 时，$x_0 \neq 0$）.

**例 6**　用观察图像的方法，写出下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$；

（2）$f(x) = \begin{cases} x, & x < -1; \\ x^2, & -1 \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

**解**　（1）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义，如图 1-15 所示.

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

本例说明，函数在点 $x_0$ 处是否有定义与该点处的极限是否存在无关.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<-1;\\ x^2, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$x=-1$ 与 $x=1$ 是函数的分界点，如图 1-16 所示.

因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}x=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x^2=(-1)^2=1$，即 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 不存在.

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}1=1$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

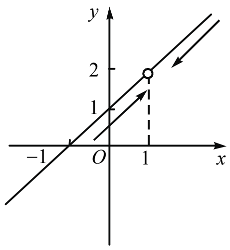



图 1-15

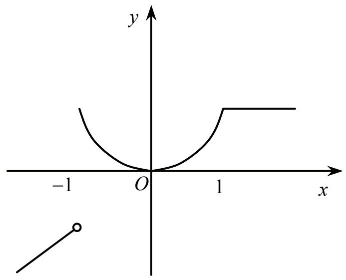



图 1-16

**例 7**　观察图 1-17，两条直线间所夹曲线为 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$，判断当 $x\to0$ 时曲线的趋向.

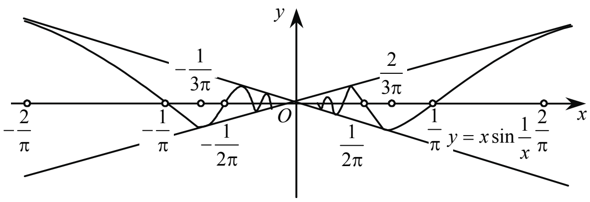



图 1-17

**解**　当 $x$ 趋近于零时，函数仍然有无限多次振荡，可是它们的振幅（由于有乘数 $x$ 的缘故）下降且趋近于零. 函数曲线包含在两条直线 $y=x$ 与 $y=-x$ 的中间. 这是一种以在 $x$ 轴上下反复振荡，无限次骚扰 $x$ 轴的方式趋近于零的形式.

### 1.2.3　无穷小量与无穷大量

#### 1．无穷小量

**定义 1.10**　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则函数 $f(x)$ 称为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

**注意**

无穷小不是一个很小的数，它是在自变量的某一变化过程中一个以零为极限的变量.

观察函数 $y=x^2$，因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以 $x^2$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小. 而 $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$，所以，$x^2$ 当 $x\to 1$ 时不是无穷小.

由此可见，一个函数是否为无穷小量，还取决于它的自变量的变化趋势. 因此，当说某一变量是无穷小量时，必须指明其自变量的变化趋势.

**2．无穷大量**

**定义1.11**　当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，即 $|f(x)|\to +\infty$，则函数 $f(x)$ 称为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$.

**注意**

无穷大不是一个很大的数，它是绝对值无限增大的变量.

**例 8**　分别求当 $x\to 0$、$x\to\infty$、$x\to 2$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的极限.

**解**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

由此可见，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷大量；当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量；

当 $x\to 2$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 既不是无穷小量，也不是无穷大量.

在自变量的不同的变化趋势中，同一个函数可能是无穷大，也可能是无穷小，还可能既不是无穷大，也不是无穷小. 因此，一个函数是否为无穷大或无穷小，与它的自变量的变化趋势是有关系的.

**定理 1.1**　在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；若 $f(x)$ 为无穷小，并且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

**例 9**　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x}$.

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$，由定理 1.1 可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{1-x}=\infty$$

**3．无穷小的性质**

可以证明，无穷小有如下性质：

**性质 1**　有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

**性质 2**　有限个无穷小的乘积仍是无穷小；

性质 3　常数与无穷小的乘积仍是无穷小；

性质 4　有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为，当 $x\to 0$ 时，$x$ 是无穷小，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数. 所以，由性质 4 可知，$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

例 11　当 $x\to\infty$ 时，下列函数哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

（1）$\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$　（2）$100x^2$　（3）$\dfrac{\cos x}{x^2}$

解　因为 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，$|\cos x|\leqslant 1$. 所以，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 与 $\dfrac{\cos x}{x^2}$ 为无穷小量；$100x^2$ 为无穷大量.

### 练习 1.2

1．观察下面各数列的变化趋势，判断数列的极限是否存在，如果有极限，写出极限：

（1）$x_n=1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$　（2）$x_n=\dfrac{2n+1}{n}$

（3）$x_n=(-1)^n n$　（4）$x_n=3-\dfrac{1}{n}$

2．观察下面各函数的变化趋势，判断函数的极限是否存在，如果有极限，写出极限：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} c$　（$c$ 为常数）　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$　（3）$\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin\dfrac{1}{x}$

（4）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　（5）$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$

3．$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 作函数的图形，并求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<0;\\ 2e^x, & 0\leqslant x<1;\\ 4, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. 讨论 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在，求出极限值.

## 1.3　极限的运算

### 1.3.1　极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$.

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=AB$

**法则 3**　$\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = cA$（$c$ 为常数）

**法则 4**　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）

### 注意

运算法则中对于 $x\to\infty$ 的情况也成立，且法则 1、2 可推广到存在极限的有限个函数的情形.

**例 1**　求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)$.

**解**　因为
$$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$$
所以
$$\lim_{x\to 2}(x^3+1) = \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 1 = \lim_{x\to 2} x^3 + 1 = 8+1 = 9$$

**例 2**　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}=0$

所以由无穷小与无穷大的关系知，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$.

**例 3**　求 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)=0$，同时 $\lim\limits_{x\to -3}(x^2-9)=0$.

所以，极限是未定式“$\dfrac{0}{0}$”的形式，显然不能应用法则 4. 考虑到函数的分子和分母存在公因式 $(x+3)$，于是可以先约去公因式，再求极限，即
$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6$$

**例 4**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{x^3+2x+1}$.

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3-4x^2+2)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2x+1)=\infty$，极限是未定式“$\dfrac{\infty}{\infty}$”的形式. 求这种极限的常用方法是：分子、分母同时除以分母中自变量的最高次幂. 所以
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = 3$$

**例 5**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{2x^3+x^2+1}$.

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+x^2+1)=\infty$，极限是未定式“$\dfrac{\infty}{\infty}$”的形式. 求这种极限的常用方法是：分子、分母同时除以分母中自变量的最高次幂. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{2x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

**例 6**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2+2}$.

**解**　由例 5 知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2+2}=\infty$

一般地，当 $x\to\infty$ 时，有理分式（$a_0\neq 0,b_0\neq 0$）的极限有以下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n;\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

## 1.3.2　两个重要极限

### 1．第一个重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

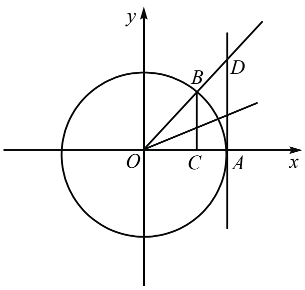



图 1-18

事实上，在单位圆内（如图 1-18 所示），因为函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}$$

观察 $x\to 0^+$ 时的情况. 扇形 $AOB$ 是单位圆的一个部分，令圆心角 $\angle BOC=x$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，过点 $A$ 作圆的切线交半径 $OB$ 的延长线于点 $D$，过点 $B$ 作 $x$ 轴的垂线，交 $x$ 轴于点 $C$. 显然

$$\overline{BC}<AB\text{ 长}<\overline{AD}$$

即

$$\sin x<x<\tan x$$

于是有

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$，于是 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 从而得到第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

**例 7**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

**例 8**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\tan 5x}{5x}}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　令 $x=\dfrac{1}{t}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

**2．第二个重要极限**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}}\qquad（\mathrm{e}=2.71828\cdots）（证明略）$$

例 11　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$

解　（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$

（2）
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\mathrm{e}\cdot1=\mathrm{e}$$

例 12　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

解
$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1}}=\mathrm{e}$$

**第二个重要极限的另一种形式：**

$$\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}}$$

例 13　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

解法一　令 $\cos x=t$，则 $\sec x=\dfrac{1}{t}$，当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t\to0$，所以有
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\mathrm{e}^2$$

解法二　$原式=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^2=\mathrm{e}^2$

例 14　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解
$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\mathrm{e}^2$$

例 15　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

**注意**

利用重要极限求函数的极限时，一定要注意两个重要极限的形式特征. 求极限过程的实质就是对函数实施某种变量代换（一般并不写出代换的过程），使原极限式成为含新变量的重要极限，从而得解.

### 练习 1.3

1．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$　　（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

（5）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

2．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$

3．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$

（3）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

## 1.4　函数的连续性

### 1.4.1　函数的连续概念

#### 1．增量的概念

**定义 1.12**　设函数 $y=f(x)$，当自变量 $x$ 从 $x_0$ 变化到 $x_1$ 时，差 $x_1-x_0$ 称为**自变量 $x$ 的增量**，也称为 $x$ 的**改变量**，记作 $\Delta x$，即 $\Delta x=x_1-x_0$（或 $x_1=x_0+\Delta x$）. 在自变量 $x$ 的变化过程

中，函数值相应地从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_1)=f(x_0+\Delta x)$，差 $f(x_1)-f(x_0)$ 称为**函数 $y$ 的增量**，也称为 $f(x)$ 的**改变量**，记作 $\Delta y$，即

$$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

增量的几何图形表示，如图 1-19 所示．$\Delta x$ 与 $\Delta y$ 可能是正的，可能是负的．$\Delta x$ 与 $\Delta y$ 不全为正数时的示意图请读者自己完成．

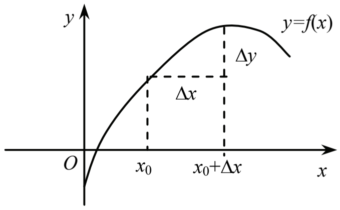



图 1-19

经济学中，用比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示当 $x$ 增大时，$y$ 增长（减小）的速度．如图 1-20 所示，当 $x$ 增大时，$y$ 的增长速度越来越快（$\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x}>\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}$）；如图 1-21 所示，当 $x$ 增大时，$y$ 的增长速度越来越慢（$\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x}<\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x}$），称此类增长为负增长．

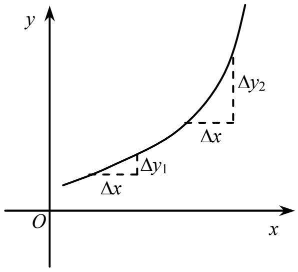



图 1-20

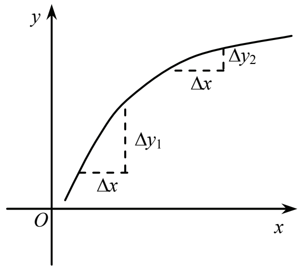



图 1-21

**例 1**　设函数 $y=f(x)=x^2+1$，求适合下列条件的增量 $\Delta x$ 和 $\Delta y$．

（1）当 $x$ 由 1 变化到 1.2 时；

（2）当 $x$ 由 1 变化到 0.8 时；

（3）当 $x$ 由 1 变化到 $1+\Delta x$ 时．

**解**　（1）

$$\Delta x=x_1-x_0=1.2-1=0.2$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1.2)-f(1)=0.44$$

（2）

$$\Delta x=x_1-x_0=0.8-1=-0.2$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(0.8)-f(1)=-0.36$$

（3）

$$\Delta x=x_1-x_0=1+\Delta x-1=\Delta x$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+\Delta x)-f(1)=2\Delta x+(\Delta x)^2$$

### 2．函数的连续性

**定义 1.13**　设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某一邻域内有定义，当自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的改变量 $\Delta x\to 0$ 时，相应函数的改变量 $\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处**连续**．$x_0$ 称为 $f(x)$ 的**连续点**．

**例 2**　判断函数 $y=2x^2-1$ 在给定点 $x_0$ 处是否连续．

**解**　显然，函数在点 $x_0$ 处有意义．由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=[2(x_0+\Delta x)^2-1]-(2x_0^2-1)=4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2$$

且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2]=0$．所以，函数 $y=2x^2-1$ 在给定点 $x_0$ 处连续.

在定义 1.13 中，令 $x_0+\Delta x=x$，相应地 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$.

当 $\Delta x\to 0$ 时，必有 $x\to x_0$．于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

因此，函数在点 $x_0$ 处连续还可定义如下.

**定义 1.14** 设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某一邻域内有定义，若函数满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处**连续**．$x_0$ 称为 $f(x)$ 的**连续点**.

当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 时，称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续.

当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 时，称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处右连续.

**例 3** 设函数 $f(x)=\begin{cases} x， & x<0； \\ x^2， & 0\leqslant x\leqslant 1； \\ 2， & x>1. \end{cases}$ 试讨论函数在 $x=0$ 及 $x=1$ 处的连续性.

**解** 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-22 所示.

（1）因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，且由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又因为 $f(0)=0^2=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$．所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

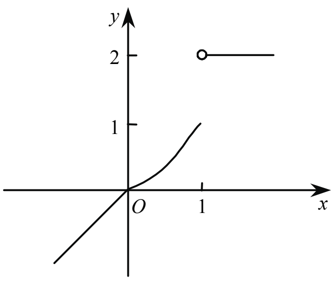


图 1-22

（2）虽然函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，但由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2=2$，所以，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在．因此，$f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内的每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续．函数 $f(x)$ 称为区间 $(a,b)$ 内的**连续函数**，区间 $(a,b)$ 称为函数 $f(x)$ 的**连续区间**．若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内连续，且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在**闭区间** $[a,b]$ **上连续**.

### 1.4.2 初等函数的连续性

可以证明，基本初等函数在其定义域内是连续的．初等函数在其定义区间内也都是连续的.

**定理 1.2** 如果函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，则它们的和、差、积、商（分母不为零）在 $x_0$ 点也连续.

设函数 $y=f(x)$，其定义域为 $D$，对于任意的 $x_0\in D$，由函数的连续性可知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．不难看出，函数的连续性把求极限的问题简化为求函数值的问题.

**例 4** 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$ （2）$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{6-2x^2}$ （3）$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2+1)$

**解** （1）由于函数 $\sin x$ 是初等函数，在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（2）由于函数 $\sqrt{6-2x^2}$ 是初等函数，在 $x=1$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to1}\sqrt{6-2x^2}=\sqrt{6-2\times1^2}=\sqrt{4}=2$$

（3）由于函数 $\ln(x^2+1)$ 是初等函数，在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to0}\ln(x^2+1)=\ln(0^2+1)=0$$

**例 5**　求函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}}$ 的连续区间.

**解**　解不等式组 $\begin{cases}1-x>0\\x+1>0\end{cases}$，得函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1,1)$，由于 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}}$ 是初等函数，所以它的连续区间为$(-1,1)$.

### 1.4.3　函数的间断点

如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处不满足连续条件，则称函数 $f(x)$ 的图形在点 $x_0$ 处不连续，或称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处间断．点 $x_0$ 称为 $f(x)$ 的**间断点（或不连续点）**.

函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处出现以下三种情形之一时为不连续点：

（1）函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处没有定义；

（2）函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限不存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的极限值不等于 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$$

**例 6**　考查函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 在点 $x=-1$ 处的连续性.

**解**　因为函数在 $x=-1$ 处无定义，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的间断点. 如图 1-23 所示.

**例 7**　$f(x)=\begin{cases}1, & x<0;\\0, & x=0;\\-1, & x>0.\end{cases}$ 考查函数在点 $x=0$ 处的连续性.

**解**　因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在. 因此函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，如图 1-24 所示.

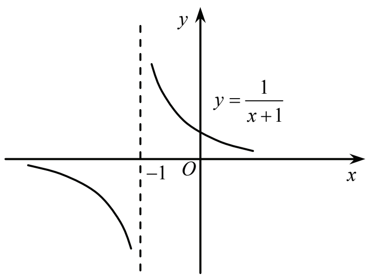



图 1-23

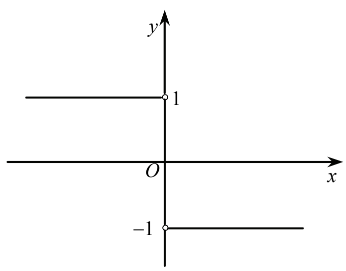



图 1-24

**例 8** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1;\\ k, & x=1.\end{cases}$ 已知函数在点 $x=1$ 处连续，求 $k$ 的值.

**解** $f(x)$ 在点 $x=1$ 处有定义：$f(1)=k$，并且极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，即 $k=2$.

### 1.4.4 闭区间上连续函数的性质

**定理 1.3** （最大值和最小值定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在这个区间上一定有最大值和最小值.

定理的几何意义如图 1-25 所示.（证明略）

**定理 1.4** （介值定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$m$ 和 $M$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对介于 $m$ 和 $M$ 之间的任意实数 $c$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.（证明略）

其几何意义如图 1-26 所示.

**定理 1.5** （零值定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.（证明略）

其几何意义如图 1-27 所示.

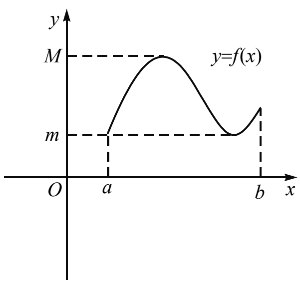



图 1-25

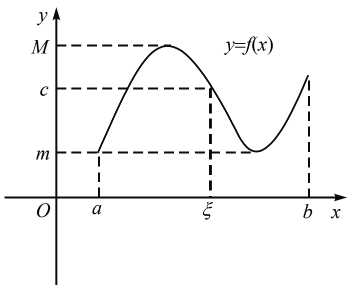



图 1-26

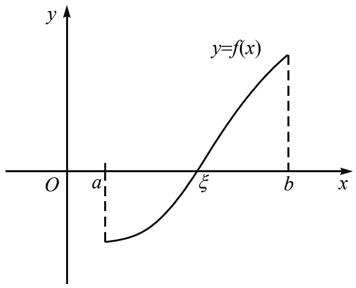



图 1-27

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a_0,b_0]$ 上连续，且 $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$，那么方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a_0,b_0]$ 内至少有一个解 $x_0$.

### 练习 1.4

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$　　（2）$\lim\limits_{x\to \pi}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^3$

（3）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\ln(2\cos x)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+2x-x^2}$

2．$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x+1, & x>1.\end{cases}$ 考查函数在 $x=\dfrac{1}{2}$、$x=1$、$x=2$ 处的连续性，并画出函数的图形.

3．$f(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x^2+1, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$ 讨论函数在点 $x=2$ 处的连续性.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\mathrm{e}^{-x}, & x<0;\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 试确定 $a$ 的值，使 $f(x)$ 在其定义域内连续.

5．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0;\\ k, & x=0;\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0.\end{cases}$ 问当 $k$ 为何值时，函数 $f(x)$ 在其定义域内连续？

## 1.5　常用经济函数

### 1.5.1　需求函数与供给函数

#### 1．需求函数

某种商品的需求量与该商品的价格密切相关，一般地，需求量随着价格的提高而减少. 如果不考虑其他因素的影响，需求量 $q$ 可以看成是价格 $p$ 的一元函数，称为需求函数，记作

$$q=f(p)$$

根据市场统计资料，常见的需求函数有以下几种类型：

（1）线性需求函数　$q=a-bp$　（$a>0,b>0$）；

（2）二次需求函数　$q=a-bp-cp^2$　（$a>0,b>0,c>0$）；

（3）指数需求函数　$q=a\mathrm{e}^{-bp}$　（$a>0,b>0$）.

需求函数 $q=f(p)$ 的反函数，称为价格函数，记作 $p=\varphi(q)$.

#### 2．供给函数

某种商品的市场供给量也受商品价格的制约，一般地，价格的上涨将制约生产者向市场提供更多的商品，价格下跌将使需求量增加，供给量也随之增加. 供给量 $s$ 可看成价格 $p$ 的一元函数，称为供给函数，记作 $s=f(p)$.

#### 3．市场均衡

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 $p_0$，称为**均衡价格**. 此时的需求量（供给量）称为**均衡商品量**. 均衡价格在市场分析中起着很重要的作用，市场上的商品价格围绕着均衡价格上下波动.

**例 1**　某种商品的需求函数和供给函数分别为

$$q=40-6p,\quad s=4p-5$$

求该商品的市场均衡价格及均衡商品量.

**解**　由供需均衡条件知

$$40-6p_0=4p_0-5$$

解得均衡价格为

$$p_0=4.5$$

均衡商品量为

$$q_0=40-6p_0=13$$

### 1.5.2 总成本函数

**总成本函数**是指在一定时期内，生产某种产品所消耗的费用总合，记作 $C=C(x)$，其中，$x$ 为产量．经济学中，通常总成本由**固定成本** $a$ 和**可变成本** $bx$ 两部分组成，即 $C(x)=a+bx$，其中，$b$ 为单位产品的变动成本．

**平均成本函数**是指生产 $x$ 件产品时，单位产品的平均成本，记作

$$\overline{C}=\overline{C}(x)\frac{a+bx}{x}=b+\frac{a}{x}$$

**例 2** 已知某种产品的固定成本为 1000 元，每生产一件产品成本增加 25 元，试求总成本函数及平均成本函数．

**解** 由题意知，固定成本 $a=1000$，可变成本 $bx=25x$，则

总成本函数为 $$C(x)=1000+25x$$

平均成本函数为 $$\overline{C}=\frac{1000+25x}{x}=25+\frac{1000}{x}$$

### 1.5.3 收入函数

**收入函数**是指生产者售出生产的产品所得的全部收入，即产品的销量 $x$ 与价格 $p$ 的乘积，记作 $R=px$．

### 1.5.4 利润函数

税前**利润函数**是收入函数与总成本函数的差．利润函数常用 $L$ 表示．通常有

$$L=R-C=px-(a+bx)=(p-b)x-a$$

式中，$p-b$ 为单位产品的边际贡献，$(p-b)x$ 为产品的边际贡献总额，其充抵全部固定成本 $a$ 后的余额为税前利润额．

### 1.5.5 盈亏平衡点

产品的销售收入为 $R=px$（$p>b$），产品的总成本为 $C=a+bx$，当销售收入额与总成本额相等时，称为**盈亏平衡**．销售收入直线与总成本直线的交点 $BEP$，称为**盈亏平衡点**（如图 1-28 所示）．$BEP$ 对应的销售量 $x_0$ 称为**保本业务量**，对应的 $R_0$ 称为**保本销售额**．

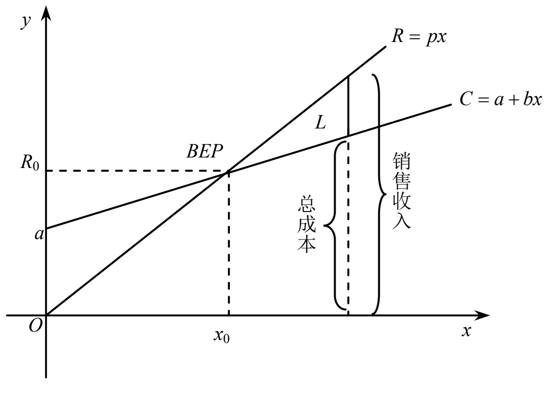



图 1-28

由 $R=C$，即 $px=a+bx$，得到保本业务量 $x_0=\dfrac{a}{p-b}$，保本销售额 $R_0=px_0$.

十分明显，预期的利润为 $L$ 时，保利业务量为 $x_2=\dfrac{L+a}{p-b}$，保利销售额为 $R_2=px_2$.

**例 3**　某种产品的售价是每件 125 元，产品的总成本为 $C=10000+25x$（单位：元），试求

（1）利润函数及盈亏平衡时的保本业务量、保本销售额；

（2）当取得的利润额为 5 万元时，求出保利业务量及保利销售额.

**解**　（1）由题意知，收入函数为 $R=125x$，总成本函数为 $C=10000+25x$，则利润函数为 $L=R-C=100x-10000$.

由 $L=0$，即 $100x-10000=0$，解得保本业务量为 $x_0=100$（件），保本销售额为 $R_0=px_0=125\times100=12500$（元）.

该商品的销售量不足 100 件时亏损，而当销售量超过 100 件时转为盈利.

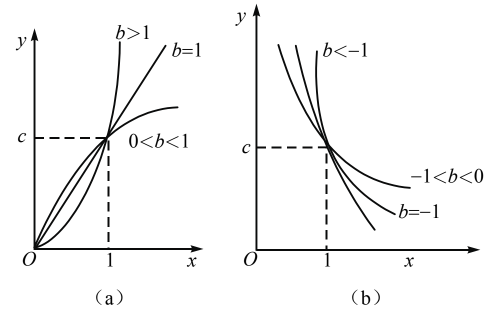
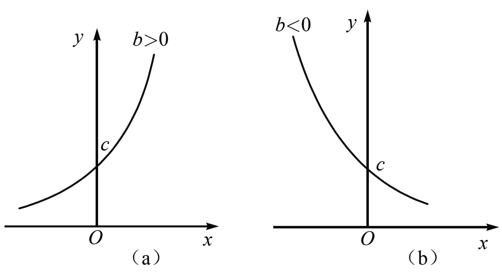
（2）$L=50\,000$（元）时，$x_2=\dfrac{L+a}{p-b}=\dfrac{50\,000+10\,000}{125-25}=600$（件）

$$R_2=px_2=75\,000\ （元）$$

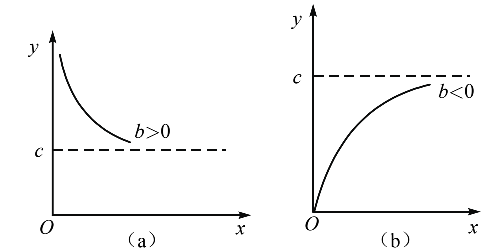
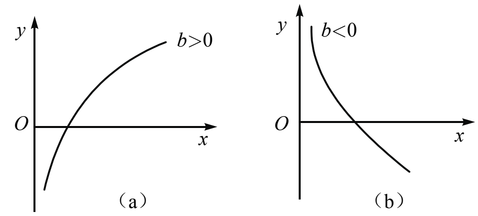
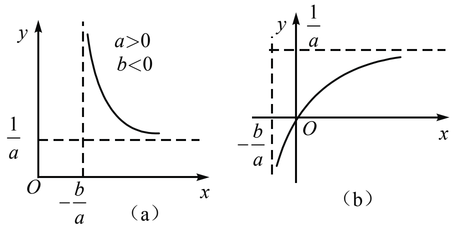
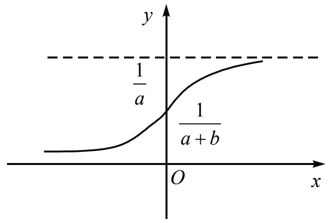
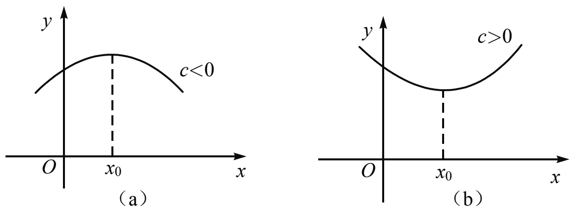
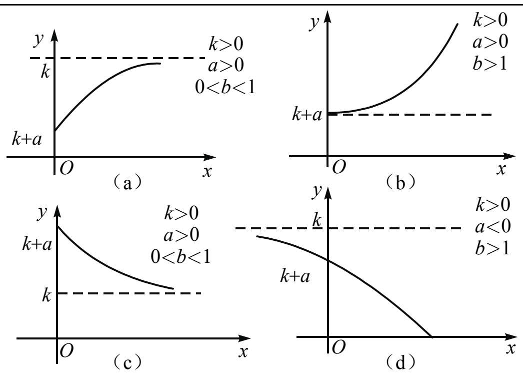
### 1.5.6　经济预测中常用的函数

下面给出经济预测中常用函数的图形、主要特性及其有代表性的应用（如表 1-3 所示）.

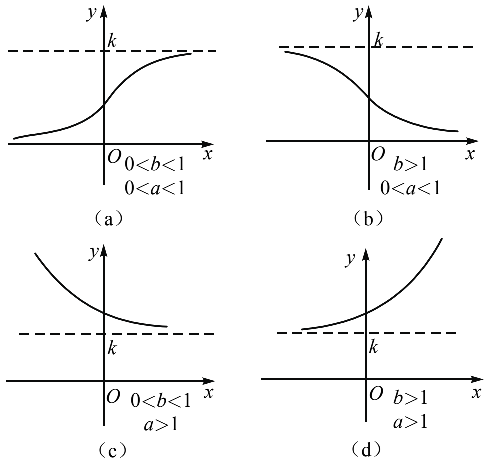
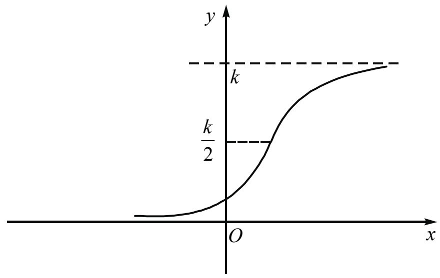
表 1-3

| 序号 | 函数表达式 | 图　形 | 函数特性及应用 |
|---|---|---|---|
| 1 | $y=cx^b$ |  | $y$ 的增长（减小）速度，因参数不同而加快或放慢.<br>常用于回归分析预测 |
| 2 | $y=ce^{bx}$ |  | （a）$y$ 的增长速度越来越快；（b）$y$ 的减小速度越来越慢.<br>常用于回归分析预测 |

续表

| 序号 | 函数表达式 | 图　　形 | 函数特性及应用 |
|---|---|---|---|
| 3 | $y=c\mathrm{e}^{\frac{b}{x}}$ |  | $y$ 的增长（减小）的速度越来越慢，且有上（下）限．<br>常用于回归分析预测 |
| 4 | $y=a+b\ln x$ |  | $y$ 的增长（减小）的速度放慢．<br>常用于回归分析预测 |
| 5 | $\frac{1}{y}=a+b\frac{1}{x}$ |  | 一定条件下，$y$ 的减小（增长）有下（上）限．<br>常用于回归分析预测分析 |
| 6 | $y=\frac{1}{a+b\mathrm{e}^{-x}}$ |  | $y$ 的增长速度由慢变快，又由快而慢．<br>常用于描述产品寿命由成长期至成熟期的需求量变动情况 |
| 7 | $y=a+bx+cx^2$ |  | 最值点两侧，一侧增长，一侧减小<br>常用于趋势外推预测分析 |
| 8 | $y=k+ab^x$ |  | $y$ 的增长（减小）速度变化与参数有关，有下（上）限．<br>常用于趋势外推预测分析 |

续表

| 序号 | 函数表达式 | 图　形 | 函数特性及应用 |
|---|---|---|---|
| 9 | $y = ka^{b^x}$ |  | 反映出在不同参数条件下，y 的增长（减小）的变化趋势.<br>常用于耐用消费品的需求预测分析 |
| 10 | $y = \dfrac{k}{1+be^{-ax}}$<br>$k>0$，$a>0$，$b>0$ |  | 常用于描述产品寿命由成长期至成熟期的需求量变动情况 |

通常，当 $x$、$y$ 满足 $ax+bx=c$ 的函数关系时，称 $y$ 与 $x$ 之间具有线性关系. 而上述各函数中，$y$ 与 $x$ 的关系为非线性关系. 具有线性关系的两个量的函数图形为直线，非线性关系的两个量的函数图形是曲线.

## 练习 1.5

1．已知某种商品的需求函数为 $q = 50 - \dfrac{4}{3}p$，供给函数为 $s = \dfrac{2}{3}p - 4$. 试求该商品的市场均衡价格及均衡商品量.

2．生产某产品的总成本为 $C(x) = 500 + 2x$（单位：元），试求生产 50 个产品时的总成本函数及平均成本函数.

3．某商店以每件 30 元的进价购进一批商品，设该商品的需求函数为 $q = 200 - 5p$（$p$ 为价格），试求利润函数.

4．已知某种商品的成本函数和收入函数（单位分别为：元，件）分别为

$$C(x) = 1200 + 18x \qquad R = 42x$$

试求（1）保本业务量，保本销售额；

（2）预期利润为 12 万元时的保利销售量及销售额.

## 本章知识结构图

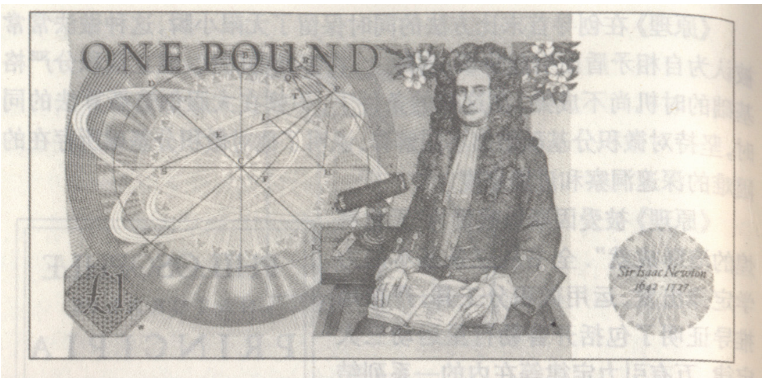
- 函数、极限与连续
  - 函数的概念
  - 极限的概念
    - 数列的极限
    - 函数的极限
    - 无穷小量与无穷大量
  - 极限的运算
    - 极限的运算法则
    - 两个重要极限
  - 函数的连续性
    - 连续函数
    - 函数的间断点
  - 常用经济函数
    - 需求、供给、成本、利润函数，盈亏平衡

# 数学史话 2

牛顿（Isaac Newton，1642—1727，英国数学家、物理学家）

牛顿于伽利略去世那年——1642 年（儒略历）的圣诞出生于英格兰林肯郡伍尔索普村一个农民家庭，是遗腹子，且早产，生后勉强存活. 少年牛顿不是神童，成绩并不突出，但酷爱读书与制作玩具. 17 岁时，牛顿被母亲从他就读的格兰瑟姆中学召回田庄务农，但在牛顿的舅父 W·埃斯库和格兰瑟姆中学校长史托克思的竭力劝说下，牛顿的母亲在九个月后又允许牛顿返校学习. 史托克思校长的劝说词中，有一句话可以说是科学史上最幸运的预言，他对牛顿的母亲说："在繁杂的农务中埋没这样一位天才，对世界来说将是多么巨大的损失！"

牛顿于 1661 年入剑桥大学三一学院，受教于巴罗，同时钻研伽利略、开普勒、笛卡儿和沃利斯等人的著作. 三一学院至今还保存着牛顿的读书笔记，从这些笔记可以看出，就数学思想的形成而言，笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算术》对他影响最深，正是这两部著作引导牛顿走上了创立微积分之路.




1665 年 8 月，剑桥大学因瘟疫流行而关闭，牛顿离校返乡，随后在家乡躲避瘟疫的两年，竟成为牛顿科学生涯中的黄金岁月. 制定微积分，发现万有引力和颜色理论，……，可以说牛顿一生大多数科学创造的蓝图，都是在这两年描绘的.

牛顿的科学贡献是多方面的. 在数学上，除了微积分，他的代数名著《普遍算术》，包含了方程论的许多重要成果，如虚数根必成对出现、笛卡儿符号法则的推广、根与系数的幂和公式等；他的几何杰作《三次曲线枚举》，首创三次曲线的整体分类研究，是解析几何发展新的一页；在数值分析领域，今天任何一本教程都不能不提到牛顿的名字：牛顿迭代法（牛顿—拉弗森公式）、牛顿—格列高公式、牛顿—斯特林公式、……，牛顿还是几何概率的最早研究者.

牛顿是一位科学巨人，但他有一次在谈到自己的光学发现时却说："如果我看得更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上". 还有一次，当别人问他是怎样作出自己的科学发现时，他的回答是："心里总是装着研究的问题，等待那最初的一线希望渐渐变成普照一切的光明！"据他的助手回忆，牛顿往往一天伏案工作 18 小时左右，仆人常常发现送到书房的午饭和晚饭一口未动. 偶尔去食堂用餐，出门便陷入思考，兜个圈子又回到住所. 惠威尔（W.Whewell）

在《归纳科学史》书中写道："除了顽强的毅力和失眠的习惯，牛顿不承认自己与常人有什么区别".

牛顿终身未婚，晚年由外甥女凯瑟琳协助管家. 牛顿的许多言论、轶闻，就是靠凯瑟琳和她的丈夫康杜得的记录流传下来的. 家喻户晓的苹果落地与万有引力的故事，就是凯瑟琳告诉法国哲学家伏尔泰并被后者写进《牛顿哲学原理》一书中的.

牛顿 1727 年因患肺炎与痛风而逝世，葬于威斯特敏斯特大教堂. 当时参加了葬礼的伏尔泰亲眼目睹英国的大人物争抬牛顿灵柩而无限感慨. 剑桥三一学院教堂大厅内立有牛顿全身塑像. 牛顿去世后，外甥女凯瑟琳夫妇在亲属们围绕遗产的纠纷中不惜代价保存了牛顿的手稿. 现存牛顿手稿中，仅数学部分就达 5000 多页.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716，德国数学家）

莱布尼茨出生于德国莱比锡一个教授家庭，早年在莱比锡大学学习法律，同时开始接触伽利略、开普勒、笛卡儿、帕斯卡以及巴罗等人的科学思想. 1667 年获阿尔特多夫大学法学博士学位，次年开始为缅因茨选帝侯服务，不久被派往巴黎任大使. 莱布尼茨在巴黎居留了四年（1672—1676），这四年对他整个科学生涯的意义，可以与牛顿在家乡躲避瘟疫的两年类比，莱布尼茨许多重大的成就包括创立微积分都是在这一时期完成或奠定了基础.

莱布尼茨的博学多才在科学史上罕有所比，其著作涉及数学、力学、机械、地质、逻辑、哲学、法律、外交、神学和语言学等. 在数学上，他的贡献也远不止微积分.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

# 第 2 章　导数与微分

数学中研究导数、微分及其应用的部分，称为微分学. 研究不定积分、定积分及其应用的部分，称为积分学. 本章及下一章将主要介绍一元函数微分学及其应用的内容.

## 2.1　导数的概念

**引例**　计算一个物体作变速直线运动的瞬时速度.

设一个物体作变速直线运动，其运动方程为 $s=s(t)$ . 求该物体在 $t$ 时刻的瞬时速度.

在 $t$ 附近的一段时间间隔内，即从 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，物体的位移为

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$$

当 $\Delta t$ 很小时，把变速运动近似地看成是匀速运动. 因此，用这段时间的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

近似地描述瞬时速度. 由于运动是变化的，在 $\Delta t$ 无限变小的过程中，平均速度 $\bar{v}$ 会无限接近 $t$ 时刻的瞬时速度. 因此，当 $\Delta t$ 趋于零时，如果极限

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

存在，则该极限值就是变速直线运动的瞬时速度.

### 2.1.1　导数的定义

**定义 2.1**　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一邻域内有定义，当自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处有改变量 $\Delta x$（ $\Delta x\neq 0$ ）时，相应的函数 $y$ 有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处**可导**，并把这个极限值称为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**导数**. 记为 $y'\big|_{x=x_0}$ ，即

$$y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2-1}$$

函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数也可以记作 $f'(x_0)$ ，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ .

函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，也称作函数 $f(x)$在点 $x_0$ 处具有导数或导数存在.

如果式（2-1）的极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处**不可导**.

上面介绍的是函数在某一点 $x=x_0$ 处可导. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内每一点处均可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导. 这时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内对于 $x$ 的每一个确定的值，都对应着一个确定的导数值. 这种一一对应的关系也就构成了一个新的函

数，该函数称为**导函数**，记作 $y'(x)$、$f'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，且 $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

今后，在不引起混淆的情况下，导函数和导数统称为**导数**.

在式（2-1）中，如果 $\Delta x\to 0^+$ 时极限存在，则这个极限值称为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**右导数**，记作 $f'_+(x_0)$；如果 $\Delta x\to 0^-$ 时极限存在，则这个极限值称为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**左导数**，记作 $f'_-(x_0)$．可以证明

$$f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

利用定义求函数 $y=f(x)$的导数，一般包括三个步骤：

（1）写出函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

（2）计算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

（3）求极限 $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

**例 1** 求函数 $y=C$ 的导数（$C$ 为常量）.

**解** （1）求函数的改变量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$$

（2）计算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

（3）求极限

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

即
$$(C)'=0$$

**例 2** 求函数 $y=x^2$ 的导数 $y'$，$y'\big|_{x=2}$.

**解** （1）求函数的改变量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

（2）计算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

（3）求极限

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

即
$$(x^2)'=2x$$
故
$$y'\big|_{x=2}=2\times 2=4$$

可以证明，幂函数 $y=x^\alpha$（$\alpha$ 是任意实数）的导数为

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

**例 3** 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数 $y'$.

**解** （1）$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$

$$=\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x=\sin x(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x$$

（2）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin x(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$

$=\dfrac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\dfrac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$

（3）$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{\Delta x}{2}\sin x\right)+\cos x=\cos x$

由此得到正弦函数的导数公式

$$(\sin x)'=\cos x$$

同理可求得余弦函数的导数公式

$$(\cos x)'=-\sin x$$

**例 4**　求对数函数 $y=\log_a x$ 的导数.

**解**　（1）$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x$

$=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$

（2）$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$

（3）$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

$=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\mathrm{e}$$

所以

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$$

由此得到对数函数的导数公式

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

当 $a$=e 时得到自然对数的导数公式

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

利用定义求函数的导数一般是比较麻烦的，实际计算时，经常是利用导数公式来计算函数的导数.

**例 5**　求下列函数的导数：

（1）$y=x^4$　（2）$(\log_2 x)'\big|_{x=4}$

**解**　（1）由公式$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$知

$$y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$$

（2）由公式$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$知

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x\ln 2}$$

所以
$$(\log_2 x)'\Big|_{x=4} = \frac{1}{x\ln 2}\Big|_{x=4} = \frac{1}{4\ln 2}$$

### 2.1.2　导数的几何意义

已知函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 是函数改变量 $\Delta y$ 与自变量改变量 $\Delta x$ 之比的极限，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

先看$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在函数 $y = f(x)$ 的图形中的几何图形表示（如图 2-1 所示）.

设自变量在点 $x = x_0$ 处的改变量为 $\Delta x$，则函数 $y = f(x)$ 取得相应的改变量为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，在曲线上对应两点 $M(x_0, y_0)$，$N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$，由解析几何知识可知，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$就是割线 $MN$ 的斜率，即$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\varphi$，其中$\varphi$是割线 $MN$ 的倾角.

当 $\Delta x$ 变小时，点 $N$ 就沿着曲线向点 $M$ 靠近，因而割线 $MN$ 就绕着点 $M$ 转动. 当 $\Delta x \to 0$ 时，点 $N$ 就无限靠近 $M$，割线 $MN$ 就无限趋向于其极限位置——直线 $MT$（如图 2-2 所示）. 直线 $MT$ 称为曲线在点 $M$ 处的切线. 因而切线的倾角$\alpha$是割线倾角的极限，切线的斜率 $\tan\alpha$ 是割线斜率 $\tan\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限，即

$$\tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

因此，函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$处的切线的斜率，即 $f'(x_0) = \tan\alpha$. 其中，$\alpha$ 是切线的倾角.

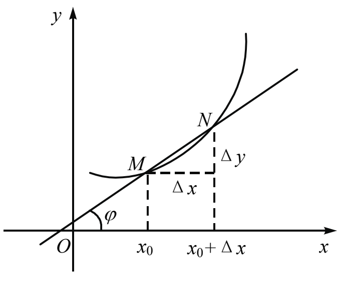


图 2-1

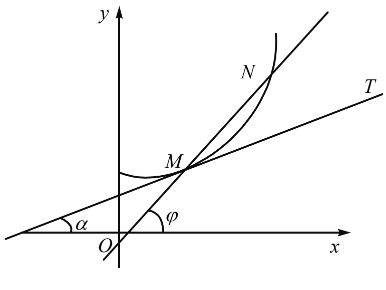


图 2-2

根据导数的几何意义，并利用直线的点斜式方程容易得到曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

**例 6**　求曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 在点(1,1)处的切线方程.

解
$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$y'\big|_{x=1} = -1$$
所求的切线方程为 $$y-1=(-1)\cdot(x-1)$$
即 $$x+y-2=0$$

### 2.1.3　可导与连续的关系

**定理 2.1**　如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，那么 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处必连续.

**此定理的逆定理不成立．即连续不一定可导，连续是可导的必要条件.**

**例 7**　讨论函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x$=0 处是否可导.

**解**　因为函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内连续，所以在点 $x$=0 处必连续，下面讨论在点 $x$=0 处的可导性.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$，极限不存在，故在点 $x$=0 处不可导.

由上面的讨论可知，函数在某一点处连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件．但是，**如果函数在某点处不连续，则函数在该点处一定不可导.**

### 练习 2.1

1．设函数 $f(x)=x+1$，求从 $x=1$ 到 $x=1.2$ 时，自变量的增量 $\Delta x$ 和函数的增量 $\Delta y$.

2．根据导数定义求函数 $y=2x$ 的导数.

3．求曲线 $y=x^3$ 在 $x$ =2 时对应的点的切线方程.

## 2.2　函数的求导

### 2.2.1　函数的求导法则

**定理2.2**　设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 均在点 $x$ 处可导，则它们和、差、积、商（分母不为零）的函数在点 $x$ 处仍可导，且有

（1）　$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x) \tag{2-2}$$

（2）　$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \tag{2-3}$$

特别地，当 $v(x)=c$（常数）时，有 $[cu(x)]'=cu'(x)$　（2-4）

（3）　$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \tag{2-5}$$

其中，式（2-2）、式（2-3）可推广到有限个可导函数的情形.

下面证明式（2-3），其他证明请读者自己完成.

**证**　设自变量 $x$ 有增量 $\Delta x$，则函数 $u(x)$、$v(x)$ 及 $y=u(x)v(x)$ 相应的有增量 $\Delta u$、$\Delta v$ 及 $\Delta y$.

因为
$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=\Delta uv+u\Delta v+\Delta u\Delta v$$
所以
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

从而 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)$$

因为函数 $u(x)$、$v(x)$ 在点 $x$ 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'，\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$$

函数 $v(x)$ 在点 $x$ 处必连续，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$$

由此得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)=u'v+uv'$$

于是 $$y'=[\,u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

**例 1** 求函数 $y=5x^2-\dfrac{1}{x}+4\sin x+1$ 的导数.

**解**
$$\begin{aligned}y'&=5(x^2)'-(x^{-1})'+4(\sin x)'+(1)'\\&=10x-(-x^{-2})+4\cos x+0\\&=10x+\frac{1}{x^2}+4\cos x\end{aligned}$$

**注意**

为便于做题，将 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ 记为一个求导公式.

**例 2** 求函数 $y=x^2\ln x$ 的导数.

**解**
$$\begin{aligned}y'&=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'\\&=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\\&=2x\ln x+x\end{aligned}$$

**例 3** 求函数 $y=\tan x$ 的导数.

**解**
$$\begin{aligned}y'&=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'\\&=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

**例 4** 求函数 $y=\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{x+1}{x-1}$ 的导数.

**解**
$$y'=\left(\frac{x^4}{3}\right)'+\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\left(\frac{x^4}{3}\right)'+\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{(x-1)^2}$$

### 2.2.2　复合函数的导数

首先，研究函数 $y=\sin 2x$ 的导数. 由于 $y=\sin 2x=2\sin x\cos x$，所以

$$y'=2[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)']=2[\cos^2 x-\sin^2 x]=2\cos 2x$$

$(\sin 2x)'=\cos 2x$ 显然是错误的，发生错误的原因是 $y=\sin 2x$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=2x$ 组成的复合函数，不能直接应用正弦函数的导数公式.

下面介绍复合函数的求导方法.

**定理 2.3**　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x$ 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的 $u$ 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x$ 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2-6}$$

**证**　由于函数 $y=f(u)$ 在点 $u$ 处可导，故极限 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ 存在. 由函数的极限与无穷小的关系知

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha\ \text{（其中}\alpha\text{ 是 }\Delta u\to 0\text{ 时的无穷小）}$$

两边同乘以$\Delta u$，得

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\Delta u+\alpha\Delta u$$

两边同除以$\Delta x$，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\ \frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

由于 $u=\varphi(x)$ 在 $x$ 处可导，故 $u=\varphi(x)$ 在 $x$ 处连续. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0$$

又因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

式（2-6）也可以写成 $y'_x=y'_u u'_x$ 或 $y'(x)=f'(u)\varphi'(x)$，其中 $y'_x$ 表示 $y$ 对 $x$ 的导数，$y'_u$ 表示 $y$ 对 $u$ 的导数，而 $u'_x$ 表示中间变量 $u$ 对自变量 $x$ 的导数.

式（2-6）也可以推广到多次复合的复合函数的求导中. 例如，设 $y=f(u)$、$u=\varphi(v)$、$v=\omega(x)$，则 $y'(x)=f'(u)\varphi'(v)\omega'(x)$ 或 $y'_x=y'_u u'_v v'_x$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

例 5　设 $y=(1+2x)^{30}$，求 $y'$.

解　$y=(1+2x)^{30}$ 由 $y=u^{30}$ 和 $u=1+2x$ 复合而成，根据（2-6）式可得

$$y'_x=(u^{30})'_u(1+2x)'_x=30u^{29}\times 2=60u^{29}=60(1+2x)^{29}$$

例 6　设 $y=\ln(1+x^2)$，求 $y'$.

解　$y=\ln(1+x^2)$ 由 $y=\ln u$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成，因此

$$y'=[\ln(1+x^2)]'=(\ln u)'_u u'_x=\frac{1}{u}\cdot 2x=\frac{1}{1+x^2}2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

求复合函数的导数时，一般不写出中间变量，而是按照由外向内的顺序，分步依次求出各层的导数. 例 6 的解题过程可以写为

$$y'=[\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=\frac{1}{1+x^2}2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

例 7　设 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$，求 $y'$，$y'|_{x=0}$.

解

$$y'=\mathrm{e}^{\cos x}(\cos x)'=-\sin x\mathrm{e}^{\cos x}$$

$$y'|_{x=0}=-\sin 0\mathrm{e}^{\cos 0}=0$$

例 8　求下列函数的导数：

（1）$y=\ln\tan x$　（2）$y=\cos\dfrac{x^2}{5+x}$

解　（1）$y'=\dfrac{1}{\tan x}(\tan x)'=\dfrac{1}{\tan x}\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$

（2）$y'=-\sin\dfrac{x^2}{5+x}\cdot\left(\dfrac{x^2}{5+x}\right)'=-\sin\dfrac{x^2}{5+x}\dfrac{10x+x^2}{(5+x)^2}=-\dfrac{10x+x^2}{(5+x)^2}\sin\dfrac{x^2}{5+x}$

例 9　设 $y=\sqrt[3]{2x^2-5}$，求 $y'$.

解　$y'=\left(\sqrt[3]{2x^2-5}\right)'=\dfrac{1}{3}(2x^2-5)^{-\frac{2}{3}}(2x^2-5)'=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-5\right)^2}}$

## 2.2.3　隐函数的导数

在实际问题中，经常需要求隐函数的导数. 而将隐函数化为显函数有时是比较困难的，所以需要研究隐函数的求导方法.

由于在用方程表示函数关系的隐函数中，$y$ 依然是 $x$ 的函数，故隐函数求导的基本方法是，方程两端同时对自变量 $x$ 求导，要注意 $y$ 是 $x$ 的函数. 下面通过例题来说明这种方法.

例 10　求由方程 $x^2+y^2=r^2$（$r$ 为常数）所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程两边同时对 $x$ 求导，并把 $y^2$ 看作 $x$ 的复合函数.

$$2x+2yy'=0$$

$$2yy'=-2x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{x}{y}$$

例 11　求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　方程两边同时对 $x$ 求导，得

$$(e^y)'+(xy)'-(e)'=0$$

$$e^y y'+x'y+xy'=0$$

即
$$e^y y'+y+xy'=0$$

整理得

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{y}{x+e^y}$$

从以上两例中看到，隐函数的导数的表达式中，一般可以含有 $y$，这与显函数的导数是不同的.

例 12　求曲线 $xy+\ln y=1$ 在点 $M(1,1)$处的切线方程.

解　方程两边分别对 $x$ 求导，得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0$$

整理得

$$y'=\frac{-y}{x+\dfrac{1}{y}}=-\frac{y^2}{xy+1}$$

在点 $M(1,1)$ 处的切线斜率为
$$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2}$$

于是在点 $M(1,1)$处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

即
$$x+2y-3=0$$

### 2.2.4　取对数求导法

求导时经常会遇到这样的情形，虽然给定的函数是显函数，但由于其函数解析式比较复杂，直接求它的导数很困难或很麻烦. 在这种情形下，可以考虑利用对数的性质，先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后再利用隐函数求导法求出 $y$ 的导数. 这种求导数的方法叫做**取对数求导法**.

例 13　求 $y=x^{\sin x}$（$x>0$）的导数.

解　该函数既不是幂函数又不是指数函数，通常称为**幂指函数**. 为了求这类函数的导数，可以先在两边取对数（不妨取自然对数），得

$$\ln y=\sin x\ln x$$

两边同时对 $x$ 求导，注意 $y$ 是 $x$ 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

**例 14** 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$（$x>4$）的导数.

**解** 本题如果利用复合函数求导法计算比较麻烦，考虑到所给的函数是连乘积与开方的形式，故可以利用对数的性质，采用取对数求导法来计算. 函数两边取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

上式两边对 $x$ 求导，注意 $y$ 是 $x$ 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

于是

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

一般地，求由几个含有变量的因式的乘、除、乘方、开方所构成的函数的导数时，采用取对数求导法是比较简便的.

为了便于查阅，现把基本初等函数的常用导数公式和求导法则归纳如下.

**1．常用导数公式**

（1）$(c)'=0$

（2）$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

（3）$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

（4）$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

（5）$(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0,a\neq 1$）

（6）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

（7）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$（$a>0,a\neq 1$）

（8）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

（9）$(\sin x)'=\cos x$

（10）$(\cos x)'=-\sin x$

（11）$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

（12）$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

**2．函数的求导法则**

（1）$[\,u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

（2）$[\,u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（3）$[\,cu(x)]'=cu'(x)$

（4）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

（5）$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ 或 $y'_x = y'_u u'_x$

## 练习 2.2

1．求下列函数的导数：

（1）$y=\sin x+\cos x-x^2$　（2）$y=\dfrac{x^2+1}{\sin x}$　（3）$y=\ln\sin 2x$

（4）$y=x^2\ln 3x$　（5）$y=e^{\sin x}$

2．求下列函数在点 $x=0$ 的导数：

（1）$y=\cos 2x$　（2）$y=x^2+\sin x+5$

3．求下列函数的导数：

（1）$x^2-xy+y^2=3$　（2）$xy-e^x+e^y=1$

（3）$e^{x+y}-xy=1$　（4）$\ln y-xe^y=1$

4．求下列函数的导数：

（1）$y^2=e^{\sin x}$　（2）$y=x^x$　（3）$y=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$

# 2.3　高阶导数

## 2.3.1　高阶导数的概念

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 可导，那么称 $f'(x)$ 在点 $x$ 处的导数为二阶导数，记作 $f''(x)$、$y''$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

二阶导数 $y''=f''(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的三阶导数，记作 $f'''(x)$、$y'''$ 或 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

三阶导数 $y'''=f'''(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的四阶导数，记作 $f^{(4)}(x)$、$y^{(4)}$ 或 $\dfrac{d^4y}{dx^4}$.

$(n-1)$ 阶导数 $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的 **$n$ 阶导数**，记作 $f^{(n)}(x)$、$y^{(n)}$ 或 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的各阶导数值就是其各阶导函数在点 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0)$.

## 2.3.2　高阶导数的运算

下面通过例题来说明怎样求某函数 $y=f(x)$ 的高阶导数.

**例 1**　设函数 $y=\ln(1+x^2)$，求 $y''(0)$.

**解**

$$y'=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$y''=\frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(0)=\left.\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=2$$

**例 2** 设函数 $y=\ln x$，求 $y'''$.

**解** $y'=\dfrac{1}{x}$， $y''=-\dfrac{1}{x^2}$， $y'''=-\dfrac{-2}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}$

**例 3** 设函数 $y=3x^3+4x^2+5x+6$，求 $y^{(4)}$.

**解** $y'=9x^2+8x+5$， $y''=18x+8$， $y'''=18$， $y^{(4)}=0$

**例 4** 设函数 $y=\mathrm{e}^{ax}$，求 $y^{(n)}$.

**解** $y'=a\mathrm{e}^{ax}$， $y''=a^2\mathrm{e}^{ax}$， $y'''=a^3\mathrm{e}^{ax}$， …， $y^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}$

### 练习 2.3

1．求下列函数的二阶导数：

（1） $y=\sin x$　　（2） $y=\ln(2x+1)$　　（3） $y=\mathrm{e}^{x^2}$

2．已知函数 $y=3x^2+4x-5$，求 $y'''$.

## 2.4 微分

### 2.4.1 微分的概念

在函数的导数一节中，已知导数表示函数相对于自变量变化的快慢程度（变化率），即 $\Delta x\to 0$ 时，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限. 在许多问题中，由于函数式比较复杂，当自变量取得一个微小改变量 $\Delta x$ 时，相应函数的改变量 $\Delta y$ 的精确计算也比较复杂. 因此，希望找到函数改变量的近似表达式以简化计算. 为此，引入函数的微分的概念. 在引入微分概念之前，先回顾一下导数的定义，设 $y=f(x)$ 在点 $x$ 处可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

因此 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，其中 $\alpha$ 为 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小，故 $\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$. 当 $|\Delta x|$ 很小时，有 $\Delta y\approx f'(x)\,\Delta x$.

**定义 2.2** 设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处有导数 $f'(x_0)$，则 $f'(x_0)\,\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的**微分**，记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\,\Delta x$.

此时也称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处**可微**. 显然，函数的微分与 $x_0$ 和 $\Delta x$ 有关.

当取函数 $f(x)=x$ 时，可以得到 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分记作

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 等于该函数的导数，因此导数也称为**微商**.

**例 1** 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$， $\Delta x=0.01$ 时的改变量及微分.

解
$$\Delta y=(1+0.01)^2-1^2=1.0201-1=0.0201$$
$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=f'(x)\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=2\times1\times0.01=0.02$$

### 2.4.2　微分的求法

从微分的定义可以看出，求函数 $y=f(x)$ 的微分，只需求它的导数 $f'(x)$，然后再乘以 $\mathrm{d}x$ 就可以了，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$．所以，就微分的运算方法来说，与求导没有太大的区别．因此，求导数的一切基本公式及运算法则在微分运算中同样适用．为此，通常把求导数与求微分的运算统称为**微分法**.

例 2　设 $y=\sin 2x$，求 $\mathrm{d}y$．

解
$$\mathrm{d}y=(\sin 2x)'\mathrm{d}x=2\cos 2x\mathrm{d}x$$

例 3　设 $y=\mathrm{e}^x\sin x$，求 $\mathrm{d}y$．

解
$$\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^x\sin x)'\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$$

例 4　设 $y=\mathrm{e}^{ax+bx^2}$，求 $\mathrm{d}y$．

解
$$\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{ax+bx^2})'\mathrm{d}x=(a+2bx)\mathrm{e}^{ax+bx^2}\mathrm{d}x$$

### 2.4.3　微分形式的不变性

设函数 $y=f(x)$ 在点 $x$ 处可微，当 $x$ 为自变量时，有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$．当 $x$ 为中间变量时，设 $x=\varphi(t)$ 且 $\varphi'(t)$ 存在，则 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=f'(x)\varphi'(t)\mathrm{d}t$，又因为 $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，所以 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，即无论 $x$ 是自变量还是中间变量，$y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 总可用 $f'(x)\mathrm{d}x$ 来表示，这个性质称为微分形式的不变性.

### 2.4.4　微分的应用

由微分定义可知 $\Delta y\approx\mathrm{d}y$（$|\Delta x|$ 很小时），又知 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$（$|\Delta x|$ 很小时），故 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$．

例 5　求 $\sin 31^\circ$ 的近似值.

解　设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$．因为 $31^\circ=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{180}$，所以取 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$．

故
$$\sin 31^\circ\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times0.01745\approx0.5151$$

例 6　求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解　设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.02$

所以
$$\sqrt[3]{1.02}\approx1+\frac{1}{3}(0.02)\approx1.0067$$

### 练习 2.4

1．将适合的函数填入下列括号，使等号成立：

（1）$\mathrm{d}(3x+2)=$______$\mathrm{d}x$　　（2）$\mathrm{d}(\sin at)=$______$\mathrm{d}t$

（3）$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)=$_________$\mathrm{d}x$　　（4）$\mathrm{d}[\ln(1+x)]=$______$\mathrm{d}x$

（5）$\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$　　（6）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=$_______$\mathrm{d}x$

2．求下列函数的微分：

（1）$y=\ln\cos x$　　（2）$y=\ln\ln x$

3．求$\sqrt{1.01}$的近似值.

## 2.5　二元函数微分学

### 2.5.1　二元函数的概念

**引例**　在研究许多问题时，所遇到的函数往往不仅仅依赖于一个自变量，而是要依赖若干个自变量. 例如，圆柱体的体积$V$就是底圆半径$r$和高$h$的函数，即$V=\pi r^2 h$，如果给定$r$和$h$的一组数值，则圆柱体的体积就唯一确定了.

#### 1．二元函数的定义

**定义 2.3**　设$D$为$xoy$平面上的一个区域，如果对$D$上每一点$M(x,y)$，变量$z$依照某一规则$f$总有唯一确定的数值与之对应，则称$z$为$x$、$y$的**二元函数**，记作$z=f(x,y)$.

把二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

例如，$z=xy+y^2$、$u=x^2+y^2+z$均为多元函数.

**注意**

$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$是二元函数. 因为它对于平面区域$D$（$D$：$x^2+y^2\leqslant 1$）中的任意一点$P(x,y)$，按照一定的规则，有唯一确定的$z$值与之对应.

#### 2．二元函数的定义域

**定义 2.4**　平面上使函数$z=f(x,y)$有定义的点的全体，称作二元函数的定义域，记作$D$或$D(f)$.

二元函数的定义域$D$是$xoy$平面的某一区域. 其定义域的求法与一元函数定义域的求法相似，只是二元函数的定义域一般为一个平面区域.

**例 1**　求下列函数的定义域.

（1）$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$　　（2）$z=\ln(x^2+y^2-4)$

**解**　（1）由$9-x^2-y^2\geqslant 0$，即$x^2+y^2\leqslant 9$，其定义域为圆心在原点，半径为3的圆内区域（含边界）.

（2）由$x^2+y^2-4>0$，即$x^2+y^2>4$，其定义域为平面内去掉以原点为圆心，以 2 为半径的圆（含边界）所得到的区域.

#### 3．二元函数的几何意义

二元函数$z=f(x,y)$的几何图形为平面或一空间曲面.

如$z=ax+by+c$　　　　表示一个平面.

$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$　　表示球心在原点，半径为 $r$ 的上半个球面.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$　　表示开口向上的圆锥面.

$z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$（$a,b,c$ 均大于零）表示以原点为中心的三条半轴都在坐标轴上的上半个椭球面.

$z=xy$　　表示双曲抛物面.

### 2.5.2　偏导数定义及求法

1．偏导数的定义

**定义 2.5**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，当自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处取得改变量 $\Delta x$（$\Delta x\neq 0$），而 $y=y_0$ 保持不变时，得到一个改变量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

若当 $\Delta x\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数在点 $(x_0,y_0)$ 处**对于 $x$ 的偏导数**，记作 $f'_x(x_0,y_0)$、$\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$、$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

同理可以定义 $z=f(x,y)$ 对 $y$ 的偏导数：

如果极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称此值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处**对于 $y$ 的偏导数**，记作 $f'_y(x_0,y_0)$、$\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$、$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，即

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内的每一点 $(x,y)$ 处都有偏导数 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$. 一般来说，它们都是 $x$、$y$ 的函数，称为 $z=f(x,y)$ 的**偏导函数**，通常称为**偏导数**. 记作

$$f'_x(x,y)\text{、}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\text{、}\frac{\partial z}{\partial x}\text{或}z'_x$$

$$f'_y(x,y)\text{、}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\text{、}\frac{\partial z}{\partial y}\text{或}z'_y$$

2．偏导数的求法

二元函数 $z=f(x,y)$ 对 $x$ 求偏导数时，按照定义 2.5 只需将函数中的 $y$ 看成常数，只对 $x$ 求导数就可以了. 用同样的方法亦可求出 $z=f(x,y)$ 对 $y$ 的偏导数. 如果求函数 $z=f(x,y)$ 在一点 $(x_0,y_0)$ 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$，只需将 $x=x_0$ 与 $y=y_0$ 代入偏导函数中即可.

**例 2**　设函数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$，求 $f'_x(0,1)$ 和 $f'_y(0,1)$.

**解**　求 $f'_x(x,y)$ 时，将 $y$ 看作常量，函数 $f(x,y)$ 对 $x$ 求导，得

$$f'_x(x,y)=2x+2y$$

$$f'_x(0,1)=2\times 0+2\times 1=2$$

求 $f'_y(x,y)$ 时，将 $x$ 看作常量，函数 $f(x,y)$ 对 $y$ 求导，得

$$f'_y(x,y)=2x-2y$$

$$f'_y(0,1)=2\times 0-2\times 1=-2$$

**例 3** 设函数 $z=x^y$（$x>0,x\neq 1$），求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

**解** 将 $y$ 看作常量，函数 $z$ 对 $x$ 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$$

将 $x$ 看作常量，函数 $z$ 对 $y$ 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

**例 4** 设二元函数 $z=\ln(xy+\ln y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

**解**
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy+\ln y}\left(x+\frac{1}{y}\right)$$

**3．二阶偏导数**

设 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$. 一般来讲，它们还是 $x$、$y$ 的函数，如果这两个偏导数对 $x$ 或对 $y$ 的偏导数也存在，则称为 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}(x,y)$$

**例 5** 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**解** 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y-9y^2-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy$$

**例 6** 设函数 $z=2x^2y^2+3\sin(xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=4xy^2+3y\cos(xy)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8xy+3\cos(xy)-3xy\sin(xy)$$

## 练习 2.5

1．求下列函数的定义域：

（1）$f(x,y)=\ln(x+y)+1$　　（2）$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

2．求下列函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$：

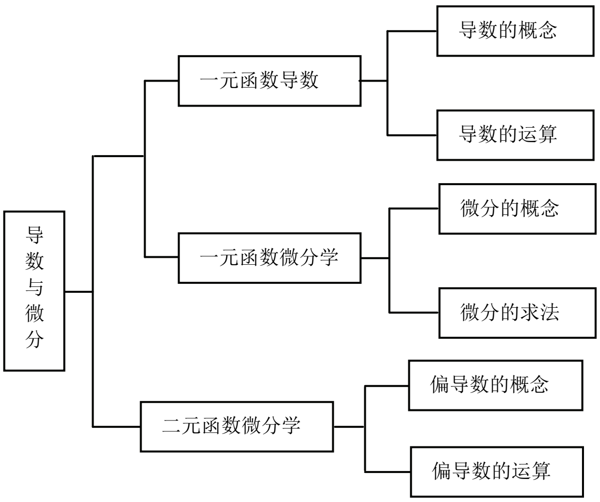
（1）$z=\sin(xy)$　　（2）$z=\ln(x^2+y^2-1)$

（3）$z=x^y$　　（4）$z=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$

3．求下列函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

（1）$z=2x^2y^2+\sin(xy)$　　（2）$z=\sin x\cos y$

## 本章知识结构图



# 数学史话 3

柯西（A.L.Cauchy，1789—1851，法国数学家）

经过近一个世纪的尝试与酝酿，数学家们在严格化基础上重建微积分的努力到 19 世纪初开始获得成效. 19 世纪分析严格化真正有影响的先驱是法国数学家柯西.

柯西长期担任巴黎综合工科学校教授，他有许多著作都是以工科大学讲义形式面世的. 在分析方法方面，他写出了一系列著作，其中最有代表性的是《分析教程》( Coursd’analyse de l’Ecole polytechnique，1821 )和《无限小计算教程概论》( Resume des lecons donnees a l’Ecole Royale polytechnique sur les calcul infinitesimal，1823 )，他们以严格化为目标，对微积分的基本概念，如变量、函数、极限、连续性、导数、微分、收敛等给出了明确的定义，并在此基础上重建和拓展了微积分的重要事实与定理.

柯西的工作向分析的全面严格化迈出了关键的一步. 他的许多定义和论述已经相当接近于微积分的现代形式，像微积分基本定理，几乎与今天的教科书完全一样 ( 区别仅在于现代教科书中为了区别积分号下的哑变量与上限变量，往往将 $f(x)\mathrm{d}x$ 换作 $f(t)\mathrm{d}t$ ). 柯西的研究结果一开始就引起了科学界很大的轰动. 据说柯西在巴黎科学院宣读第一篇关于级数收敛性的论文时，使德高望重的拉普拉斯大感困惑，会后急忙赶回家去检查他那五大卷《天体力学》里的级数，结果发现他所用到的级数幸好都是收敛的. 而同一个拉普拉斯，当有一次拿破仑问他为什么五大卷《天体力学》中没有一处提到上帝时，曾傲然答道：“陛下，我不需要这样的假设!”

摘自《数学史概论 ( 第二版 )》.李文林

# 第 3 章　导数的应用

导数作为函数的变化率，在研究函数变化的状态中有着十分重要的意义，因而在自然科学、工程技术及社会科学领域中得到广泛的应用.

## 3.1　中值定理和洛必达法则

中值定理揭示了函数在某区间上的整体性质与函数在该区间内某一点的导数之间的关系，它既是用微分学知识解决应用问题的理论基础，又是解决微分学自身发展的一种理论性模型.

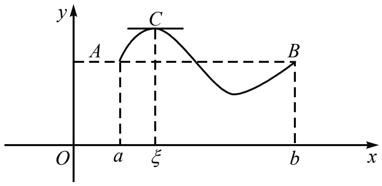



图 3-1

### 3.1.1　中值定理

**定理 3.1**　（罗尔定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，且端点 $f(a)=f(b)$，那么在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=0$（$a<\xi<b$）. 如图 3-1 所示.

**注意**

这个定理的结论告诉我们，满足上面定理条件的函数 $f(x)$ 至少存在一点 $\xi$，使得函数在该点具有水平切线.

**例 1**　设函数 $f(x)=x\sqrt{4-x}$ 在区间[0,4]上满足罗尔定理的条件，求出罗尔定理结论中的 $\xi$ 值.

**解**

$$f'(x)=\sqrt{4-x}+\frac{-x}{2\sqrt{4-x}}=\frac{8-2x-x}{2\sqrt{4-x}}=\frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{8}{3}\in(0,4)$.

取 $\xi=\dfrac{8}{3}$，有 $f'\left(\dfrac{8}{3}\right)=0$.

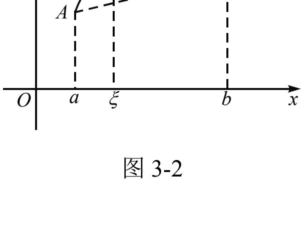



图 3-2

**定理 3.2**　（拉格朗日中值定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 $(a,b)$ 内可导，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 如图 3-2 所示.

在拉格朗日中值定理中，如果 $f(b)=f(a)$，那么得到罗尔定理的结论. 所以，罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例.

**推论 1** 如果 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内任一点的导数 $f'(x)$ 均等于零，则在 $(a,b)$ 内 $f(x)$ 为一个常数.

**推论 2** 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内的导数处处相等，即 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内只相差一个常数，亦即 $f(x)=g(x)+c$.

**例 2** 验证函数 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 在区间[0,3]上满足拉格朗日中值定理的条件，并求出定理结论中的 $\xi$ 值.

**解** $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，显然 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件.

$$f'(x)=3x^2-12x+11$$

令
$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(\xi)$$

即
$$\xi^2-4\xi+3=0，\ (\xi-1)(\xi-3)=0$$

得
$$\xi_1=1；\ \xi_2=3\ （端点，舍去）$$

所以，存在 $\xi=1\in(0,3)$，使得 $\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(1)$ 成立.

### 3.1.2 洛必达法则

在第 1 章中讨论了一些求未定式极限的方法，但还有相当数量的未定式极限很难解出，本节给出利用导数知识求未定式极限的法则——洛必达法则.

**定理 3.3** 设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=0$；

（2）在点 $a$ 的某个邻域内（点 $a$ 可以除外）可导，且 $f_2'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$（或 $\infty$）.

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A\ （或\ \infty）$$

**定理 3.4** 设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 满足：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f_2(x)=0$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$（或 $\infty$）.

则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A\ （或\ \infty）$$

应当指出，对 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时的未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$，也有相应的洛必达法则.

**例 3** 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

**解**
$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

**例 4** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x^2-x}$.

**解**
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2x-1}=-1$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解　$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$（注：洛必达法则可连续使用）

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

解　$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x(1+x)}=\infty$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

解　$$原式=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$\lambda>0, n\in\mathbf{N}$）.

解　$$原式=\lim_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

利用洛必达法则不仅可以解决“$\dfrac{0}{0}$”型和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式的极限问题，还可用来解决“$0\cdot\infty$”型、“$\infty-\infty$”型等未定式的极限问题. 解决这些未定式类型的极限问题的方法，就是利用初等数学的知识，经过适当的变换，将它们化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，然后再利用洛必达法则求解. 下面通过例题加以说明.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$（“$0\cdot\infty$”型）.

解　$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$（“$\infty-\infty$”型）.

解　$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$$

## 练习 3.1

1．下列函数在给定区间上是否满足罗尔定理的所有条件？如满足就求出定理中的数值 $\xi$.

（1）$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　$[-2,2]$　　（2）$f(x)=e^{x^2}-1$　$[-1,1]$

2．下列函数在给定区间上是否满足拉格朗日中值定理的所有条件？如满足就求出定理中的数值 $\xi$.

（1）$f(x)=x^3$　$[0,a],\ a>0$　　（2）$f(x)=\ln x$　$[1,2]$

3．利用洛必达法则求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ （2） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ （3） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

（4） $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}-2x}{\ln x+x}$ （5） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

## 3.2 函数的单调性

在第 1 章中已经了解了函数在某个区间内单调增减性的概念. 现在介绍利用函数的导数判定函数单调增减性的方法.

**定理 3.5** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导，则有：

（1）如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)>0$ ，则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调增加；

（2）如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)<0$ ，则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调减少.

**例 1** 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^3-3x)$ 的单调性.

**解** 函数的定义域 $D$ 为 $(-\infty,+\infty)$ ， $f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ ，则 $x_1=-1$ ， $x_2=1$ .

因为当 $x\in(-\infty,-1)$ 时， $f'(x)>0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 内单调增加；

因为当 $x\in(-1,1)$ 时， $f'(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调减少；

因为当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调增加.

**例 2** 讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

**解** $D$ 为 $(-\infty,+\infty)$ ， $y'=e^x-1$ .

令 $y'=0$ ，即 $e^x-1=0$ ，得 $x=0$ .

因为在 $(-\infty,0)$ 内， $y'<0$ ，所以 $y$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少；

因为在 $(0,+\infty)$ 内， $y'>0$ ，所以 $y$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

### 练习 3.2

求下列函数的单调增减区间：

1． $y=3x^2+6x+5$ 2． $y=x^4-2x^2+2$ 3． $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 4． $y=2x^2-\ln x$

## 3.3 一元函数的极值

### 3.3.1 极值的定义

**定义 3.1** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内有定义，如果对该邻域内任意的 $x$ （ $x\neq x_0$ ）总有 $f(x)<f(x_0)$ ，那么称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极大值**，称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的**极大值点**；如果对该邻域内任意的 $x$（ $x\neq x_0$ ）总有 $f(x)>f(x_0)$ ，那么称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极小值**，称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的**极小值点**. 极大值点与极小值点统称为**极值点**；极大值与极小值统称为**极值**.

### 3.3.2 极值点的判定

**定理 3.6** （必要条件）如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，且在 $x_0$ 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$ . 通常称使 $f'(x_0)=0$ 成立的点 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**驻点**.

**定理 3.7**　（第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内连续并且可导（ $f'(x_0)$ 可以不存在），则：

（1）如果在点 $x_0$ 的左邻域内 $f'(x)>0$，在点 $x_0$ 的右邻域内 $f'(x)<0$，那么 $x_0$ 就是 $f(x)$ 的极大值点，且 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

（2）如果在点 $x_0$ 的左邻域内 $f'(x)<0$，在点 $x_0$ 的右邻域内 $f'(x)>0$，那么 $x_0$ 就是 $f(x)$ 的极小值点，且 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

（3）如果在点 $x_0$ 的邻域内， $f'(x)$ 不变号，那么 $x_0$ 就不是 $f(x)$ 的极值点.

由以上定理可得出求函数极值点和极值的步骤如下：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域 $D$；

（2）求 $f'(x)$；

（3）求出 $D$ 内所有驻点及使 $f(x)$ 连续但 $f'(x)$ 不存在的所有点；

（4）讨论 $f'(x)$ 在驻点和不可导点的左右两侧邻域内正负号变化的情况，利用上述定理确定函数的极值点；

（5）求出极值点所对应的函数值（极大值或极小值).

**例 1**　求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值.

**解**　$D$ 为 $(-\infty,+\infty)$ .

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，令 $f'(x_0)=0$， 得$x_1=1,x_2=2$.

列表分析如下：

| $x$ | $(-\infty,1)$ | 1 | （1,2） | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 2（极大值） | ↘ | 1（极小值） | ↗ |

由上表可知：函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处有极大值 $f(1)=2$，在点 $x=2$ 处有极小值 $f(2)=1$ .

**例 2**　求函数 $f(x)=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调增减区间和极值.

**解**　$D$ 为 $(-\infty,+\infty)$ .

$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}$，令 $f'(x_0)=0$， 得$x=1$. 当 $x=0$ 时， $f'(x)$ 不存在.

列表分析如下：

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | （0,1） | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 不存在 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 0（极大值） | ↘ | $-\frac{1}{2}$（极小值） | ↗ |

由上表可知：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 内单调增加，在$(0,1)$内单调减少. 在点 $x=0$ 处有极大值 $f(0)=0$，在点 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

判定函数极值还可用 $y=f(x)$ 的二阶导数，也就是当 $y=f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为 0 时，可用下面定理来判定函数的极值.

**定理 3.8**　（第二充分条件）设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$，那么：

（1）如果 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

（2）如果 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

**例 3** 求函数 $f(x)=x^3-3x$ 的极值.

**解** $D$ 为 $(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，$f''(x)=6x$. 令

$$f'(x)=0，\ 得 x_1=1, x_2=-1$$

因为 $f''(-1)=-6<0$，所以 $f(-1)=2$ 为极大值.

因为 $f''(1)=6>0$，所以 $f(1)=-2$ 为极小值.

**注意**

当 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ 时，定理 3.8 失效.

例如，$f(x)=x^3$ 有 $f'(0)=f''(0)=0$，但点 $x=0$ 不是极值点. 函数 $f(x)=x^4$，有 $f'(0)=f''(0)=0$，而点 $x=0$ 却是极小值点. 遇到此类题只能用定理 3.7 来求其极值.

### 3.3.3 最大值与最小值

函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值（最小值）是指在整个区间上所有函数值当中的最大（小）者，因而最大（小）值是全局性的概念，而极值则是一个局部性概念.

最大值、最小值求法：

（1）求出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有驻点和导数不存在的点；

（2）求出驻点、导数不存在的点和端点的函数值；

（3）对上述函数值进行比较，其最大者即为最大值，其最小者为最小值.

**例 4** 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值.

**解**
$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

令
$$f'(x)=0，\ 得 x_1=-1, x_2=0, x_3=1$$

则
$$f(-1)=4, f(0)=5, f(1)=4, f(-2)=13, f(2)=13$$

将上述函数值进行比较后可知：

$f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 $f(-2)=f(2)=13$，最小值为 $f(-1)=f(1)=4$.

**例 5** 某引水工程要开凿一隧道，它的截面积是矩形加半圆面积之和（如图 3-3 所示）. 已知隧道截面的周长为 15 米. 问矩形的底是多少米时，才能使隧道截面积最大？

**解** 设隧道截面的底长为 $2x$ 米，这时半圆的半径为 $x$ 米，矩形的高就为

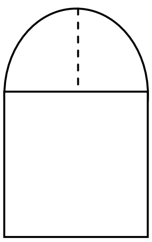


图 3-3

$\dfrac{15-\pi x-2x}{2}$（米），隧道截面积 $A=2x\cdot\dfrac{1}{2}(15-\pi x-2x)+\dfrac{1}{2}\pi x^2=15x-\left(2+\dfrac{1}{2}\pi\right)x^2$，

于是 $A'=15-(\pi+4)x$，$A''=-(\pi+4)$. 当 $A'=0$ 时，$x=\dfrac{15}{\pi+4}$，又因为 $A''=-(\pi+4)<0$，所以当 $x=\dfrac{15}{\pi+4}$ 时，$A$ 有唯一的极大值，即最大值.

因此，矩形的底为 $\dfrac{30}{\pi+4}$（米）时，隧道截面积最大.

**注意**

通常，在求解实际问题的最大（小）值时，如果根据问题的性质，最大（小）值一定在

$D$ 的内部取得. 而 $f(x)$ 在 $D$ 内可导，且有唯一驻点，则此唯一驻点即为实际问题的最大（小）值点.

**例 6**　某厂生产某种产品，其固定成本为 3 万元，每生产一百件产品，成本增加 2 万元，其产品的需求量 $q$（单位：百件）是价格 $p$（单位：万元/百件）的函数

$$q=10-2p$$

求当产量 $q$ 为多少时，可获得最大利润？最大利润是多少？

**解**　由题意知，总成本函数为

$$C(q)=2q+3$$

由需求量 $q=10-2p$，解得 $p=5-0.5q$，则当销售量为 $q$ 时，总收入函数为

$$R(q)=pq=5q-0.5q^2$$

于是利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)$$
$$=-0.5q^2+3q-3$$
$$L'(q)=-q+3$$

令 $L'(q)=0$，得 $q=3$（百件）.

因为 $q=3$ 是唯一驻点，所以为所求最大值点.

因此，当 $q=3$（百件）时，可获得最大利润，最大利润为 $L(3)=1.5$（万元）.

### 练习 3.3

1．求下列函数的极值：

（1） $y=x^3-3x^2+7$

（2） $y=\sqrt{2+x-x^2}$

2．利用二阶导数，判断函数 $y=x^3-3x^2-9x-5$ 的极值.

3．求下列函数在给定区间上的最大值和最小值：

（1） $y=x+\sqrt{x},\ [0,4]$　　（2） $y=\ln(x^2+1),\ [-1,2]$

4. 某种商品的需求量 $q$ 是价格 $p$ 的函数 $q=\dfrac{1}{5}(28-p)$，总成本函数为 $C(q)=q^2+4q$．求生产多少单位产品时，总利润最大？最大利润是多少？

## 3.4　二元函数的极值

**定义 3.2**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，对于该邻域内任何异于 $(x_0,y_0)$ 的点 $(x,y)$，如果均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有**极大值** $f(x_0,y_0)$．反之，如果有 $f(x_0,y_0)<f(x,y)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有**极小值** $f(x_0,y_0)$．点 $(x_0,y_0)$ 称为函数的**极值点**.

**定理 3.9**　（必要条件）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有偏导数，且在点 $(x_0,y_0)$ 处有极值，则必有 $f'_x(x_0,y_0)=0$、 $f'_y(x_0,y_0)=0$．

使偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$ 同时等于零的点 $(x_0,y_0)$，称为函数 $z=f(x,y)$ 的**驻点**，即

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$$

**注意**

在求解实际问题的最大（最小）值时，如果根据问题的性质，最大（最小）值一定在区域 $D$ 内取得，而 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 内有唯一驻点，则可以肯定该点处的函数值就是函数在区域 $D$ 内的最大（最小）值.

**例** 设甲、乙两种商品的需求量分别为 $q_1$ 和 $q_2$，它们的需求函数分别为 $q_1 = 8 - p_1 + 2p_2$，$q_2 = 10 + 2p_1 - 5p_2$，总成本函数为 $C = 3q_1 + 2q_2$. 其中 $p_1$ 和 $p_2$ 分别为甲和乙的价格. 问 $p_1$ 和 $p_2$ 取何值时可使利润最大？

**解** 总收入 $R = p_1q_1 + p_2q_2 = p_1(8 - p_1 + 2p_2) + p_2(10 + 2p_1 - 5p_2)$

总利润 $L = R - C = (p_1 - 3)(8 - p_1 + 2p_2) + (p_2 - 2)(10 + 2p_1 - 5p_2)$

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 7 - 2p_1 + 4p_2, \frac{\partial L}{\partial p_2} = 14 + 4p_1 - 10p_2$$

由 $\begin{cases} 7 - 2p_1 + 4p_2 = 0 \\ 14 + 4p_1 - 10p_2 = 0 \end{cases}$ 得到 $p_1 = \dfrac{63}{2}$， $p_2 = 14$

又由于 $(p_1, p_2) = \left(\dfrac{63}{2}, 14\right)$ 是唯一驻点，而且该问题的最大利润是存在的，所以它也是最大值点.

因此，最大利润 $L_{最大} = L\left(\dfrac{63}{2}, 14\right) = 164.25$.

### 练习 3.4

1．某厂家生产的某种产品同时在两个不同的市场上销售，售价分别为 $p_1$ 和 $p_2$，销售量分别为 $q_1$ 和 $q_2$，且需求函数为

$$q_1=24-0.2p_1，q_2=10-0.05p_2$$

总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$. 试问厂家如何确定两个市场的售价，使其获得的总利润最大？最大利润是多少？

2．某住宅的楼顶要安装一个带盖铁板水箱，容积为 8 立方米. 问该水箱的长、宽、高各取怎样的尺寸，才能使材料最省？

## 3.5 导数在经济管理中的应用

在经济学中，习惯上用平均变化和边际变化这两个概念来描述一个经济量 $y$ 对另一个经济量 $x$ 的变化.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 表示 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \Delta x)$ 内的平均变化率.

当 $\Delta x$ 很小时，$\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$. 特别地，当 $\Delta x = 1$，即 $x$ 变动一个单位时，$f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$. 在经济学中，称 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的边际函数值.

### 3.5.1　边际分析

1．**边际成本**：当产量为 $q$ 时，再生产一个单位产量所增加的成本.

设 $C(q)$ 为成本函数，则边际成本为 $C'(q)$，即边际成本为总成本函数对产量 $q$ 的导数.

2．**边际收入**：当销售量为 $q$ 时，多销售一个单位产量所增加的收入.

设总收入函数为 $R(q)$，则边际收入为 $R'(q)$，即边际收入为总收入函数对销售量 $q$ 的导数.

3．**边际利润**：当产量为 $q$ 时，再生产一个单位产量所增加的利润.

设利润函数为 $L(q)$，则 $L(q)=R(q)-C(q)$，边际利润为 $L'(q)=R'(q)-C'(q)$.

**例 1**　一家企业某产品的日生产能力为 500 台，每日产品的总成本 $C$（单位：千元）是日产量 $q$（单位：台）的函数，即 $C(q)=400+2q+5\sqrt{q}$.

求：（1）当产量为 400 台时的总成本；

（2）当产量为 400 台时的平均成本；

（3）当产量由 400 台增加到 484 台时，总成本的平均变化率；

（4）当产量为 400 台时的边际成本.

**解**　（1）当产量为 400 台时的总成本为

$$C(400)=400+2\times400+5\times\sqrt{400}=1300 \text{（千元）}$$

（2）当产量为 400 台时的平均成本为

$$\overline{C}(400)=\frac{1300}{400}=3.25 \text{（千元/台）}$$

（3）当产量由 400 台增加到 484 台时，总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta q}=\frac{C(484)-C(400)}{484-400}=\frac{1478-1300}{84}\approx 2.119 \text{（千元/台）}$$

（4）当产量为 400 台时的边际成本为

$$C'(q)=2+\frac{5}{2\sqrt{q}},\ C'(400)=2+\frac{5}{2\sqrt{400}}=2.125 \text{（千元/台）}$$

式中，$C'(400)=2.125$（千元/台），表示当产量为 400 台时，再多生产 1 台，成本将增加 2.125 千元.

**例 2**　设某产品的需求函数为 $q=1200-3p$，其中 $p$（单位：元）为该产品的销售价格，$q$（单位：件）为需求量，求销售该产品的边际收入函数，以及当 $q_1=450$，$q_2=600$，$q_3=750$ 时的边际收入.

**解**　$$p=\frac{1}{3}(1200-q)$$

总收入函数　$$R(q)=pq=\frac{1}{3}(1200-q)q=400q-\frac{1}{3}q^2$$

边际收入函数　$$R'(q)=400-\frac{2}{3}q$$

$$R'(q_1)=R'(450)=100,\quad R'(q_2)=R'(600)=0,\quad R'(q_3)=R'(750)=-100$$

从以上结果可知：当产品销售量为 450 件时，$R'(450)=100>0$，说明在 $q=450$ 附近销售量增加，总收入也增加，而且多销售一件总收入将增加 100 元；当销售量为 600 件时，$R'(600)=0$，说明总收入达到最大值，再增加销量，总收入将不再增加；当销售量为 750 件时，$R'(750)=-100<0$，说明在 $q=750$ 时销售量增加，总收入反而减少，而且多销售一件总

收入将减少 100 元.

**例 3** 某煤炭公司每天生产 $q$ 吨煤的总成本函数为

$$C(q)=2000+450q+0.02q^2$$

如果每吨煤的销售价格为 490 元，求：

（1）边际成本函数 $C'(q)$；

（2）利润函数 $L(q)$ 及边际利润函数 $L'(q)$；

（3）边际利润为 0 时的产量 $q$.

**解** （1）

$$C'(q)=450+0.04q$$

（2）

$$\begin{aligned}L(q)&=R(q)-C(q)\\&=p\cdot q-C(q)\\&=490q-(2000+450q+0.02q^2)\\&=40q-0.02q^2-2000\end{aligned}$$

$$L'(q)=40-0.04q$$

（3）当 $L'(q)=0$ 时，$40-0.04q=0$，即 $q=1000$（吨）.

**例 4** 某煤矿每班有 $x$ 个工人作业，每班产煤量 $y$（千吨）是 $x$ 的函数，为 $y=\dfrac{x^2}{25}\left(3-\dfrac{x}{12}\right)$. 试求作业条件、操作工艺等（即生产条件）不变的情况下，每班有多少人作业时产煤量最高？

**解**

$$y'=\frac{6}{25}x-\frac{x^2}{100}$$

令 $y'=0$，解得 $x_1=24$，$x_2=0$（舍）.

当 $x=24$ 时，函数 $y$ 取得极大值，也是最大值，即每班 24 人时产煤量最高.

### 3.5.2 弹性分析

对于给定变量 $x$，它在某处的改变量为 $\Delta x$，则称 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 为相对改变量.

**定义 3.3** 对于可微函数 $y=f(x)$，如果 $\dfrac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$ 的极限存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}=f'(x)\frac{x}{y}$$

称该极限值为 $f(x)$ 在点 $x$ 处的**弹性系数**，记作 $E=f'(x)\dfrac{x}{y}$.

弹性系数反映出因变量 $y$ 对于自变量 $x$ 变动的敏感程度，即当自变量变化百分之一时，其函数值变化的百分数（近似值）.

在经济分析中，常见的是需求价格弹性系数，设 $q=f(p)$ 为需求函数，其中 $p$ 为价格，则其弹性系数为 $E=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\dfrac{p}{q}$.

**例 5** 某种商品的需求量 $q$（单位：百件）与价格 $p$（单位：千元）的关系为

$$q(p)=15\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}p},\quad p\in[0,10]$$

求当价格为 9 千元时的需求价格弹性系数.

解　$q(p)=15\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}p}$，$E_p=\dfrac{p}{q(p)}q'(p)=\dfrac{p}{15\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}p}}\cdot\left(-5\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}p}\right)=-\dfrac{1}{3}p$

所以当 $p=9$ 时　$E_p\big|_{p=9}=-3$

此结果说明：当价格 $p=9$ 千元时，若价格上涨 1%，商品的需求量将减少 3%；反之，若价格下降 1%时，则商品的需求量将增加 3%.

## 练习 3.5

1．某化工厂日产能力最高为 1000 吨，每日产品的总成本 $C$（单位：元）是日产量 $q$（单位：吨）的函数

$$C=C(q)=1000+7q+50\sqrt{q}\,,\quad q\in[0,1000]$$

求：

（1）当日产量为 100 吨时的边际成本；

（2）当日产量为 100 吨时的平均单位成本.

2．某产品生产 $q$ 单位的总成本 $C$ 为 $q$ 的函数

$$C=C(q)=1100+\frac{1}{1200}q^2$$

求：

（1）生产 900 单位时的总成本和平均单位成本；

（2）生产 900 到 1000 单位时总成本的平均变化率；

（3）生产 900 单位和 1000 单位时的边际成本.

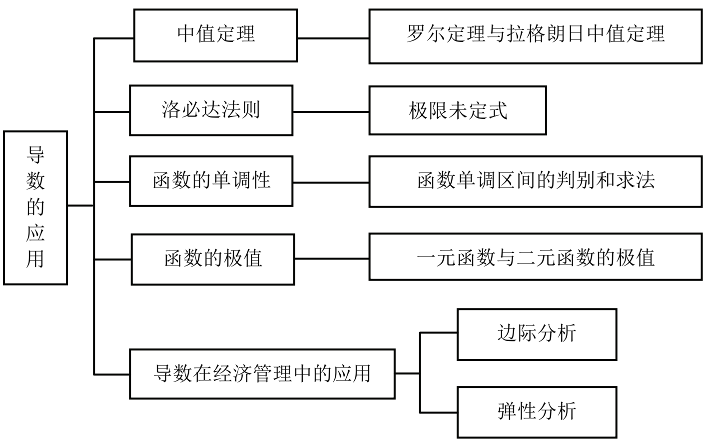
3．某厂每批生产某种商品 $q$ 单位的费用为 $C(q)=5q+200$（元），得到的收益是 $R(q)=10q-0.01q^2$（元）. 求：（1）边际成本函数，边际收益函数，边际利润函数；（2）每批应生产多少单位时利润最大？

4．某商品的价格 $p$ 与需求量 $q$ 的关系为 $p=10-\dfrac{q}{5}$，求：

（1）需求量为 20 及 30 时的总收益 $R$、平均收益 $\overline{R}$ 及边际收益 $R'$；

（2）$q$ 为多少时总收益最大？

## 本章知识结构图



# 数学史话 4

拉格朗日（J. L. Lagrange，1736—1813 年. 意大利数学家）

拉格朗日生于意大利都灵，19 岁就被任命为都灵炮兵学校数学教授. 欧拉和达郎贝尔力荐他到柏林科学院任职. 普鲁士王弗里德里克写信邀请拉格朗日说：“欧洲最大之王希望欧洲最大的数学家到宫中为伴”. 从 1766 年到 1787 年，拉格朗日长期在柏林科学院服务. 弗里德里克死后，他接受法国路易十六之邀到巴黎定居. 法国大革命期间，革命政府驱走了所有的外籍院士，却破例让拉格朗日留下来并负责法国的度量衡改革.

在 18 世纪，微分方程、变分法等上述这样一些新的分支与微积分本身一起，形成了被称之为“分析”的广大领域，与代数、几何并列为数学的三大学科，并且在这个世纪里，其繁荣程度远远超过了代数和几何. 18 世纪数学家们不仅大大开拓了分析的疆域，而且赋予它与几何相对的意义，他们力图用纯分析的手法以摆脱几何论证的束缚，这种倾向成为 18 世纪数学的又一大特征，在拉格朗日的工作中达到了登峰造极的程度. 拉格朗日在他的《分析力学》中声称：“这本书中找不到一张图，我所叙述的方法既不需要作图，也不需要任何几何的或力学的推理，只需要统一而有规则的代数（指分析）运算”.

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

# 第 4 章　不定积分

积分学是微积分的重要组成部分. 积分学中有两个基本概念，即不定积分和定积分. 不定积分是由微分法的逆运算而提出的，即已知导数求其原函数，也就是求一个未知函数，使其导数恰好是某一已知函数. 本章主要介绍不定积分的概念、性质、基本积分公式及换元积分法、分部积分法.

## 4.1　不定积分的概念

### 4.1.1　原函数

**引例**　在微分学中已经知道：若曲线方程为 $y=f(x)$，则曲线在任意一点 $x$ 处的切线斜率为 $k=f'(x)$.

例如，曲线 $y=x^2$ 在点 $x$ 处的切线斜率为 $k=2x$，同样，曲线 $y=x^2+2$ 在点 $x$ 处的切线斜率为 $k=y'=(x^2+2)'=2x$.

如果已知某物体做直线运动，运动方程为 $s=f(t)$，则该物体在 $t$ 时刻的速度就是路程 $s$ 对时间 $t$ 的导数，即 $v=s'=f'(t)$.

以上是对已知函数 $f(t)$ 求它的导数 $f'(t)$ 的问题，现在要解决其逆问题.

（1）已知曲线上任意一点 $x$ 处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程.

（2）已知物体做直线运动的速度为 $v=v(t)$，那么做直线运动的该物体的运动方程 $s=f(t)$ 是什么呢？

这就是已知函数 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$，求这个函数 $f(t)$ 的问题.

**定义 4.1**　设 $f(x)$ 是定义在某区间上的函数，如果存在一个函数 $F(x)$，对于该区间上每一点都满足 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**.

由定义知，判断一个函数 $F(x)$ 是不是已知函数 $f(x)$ 的原函数，只要看式子 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 是否成立.

由于 $(x^2)'=2x$，所以 $y=x^2$ 是 $2x$ 的一个原函数，显然 $y=x^2-1$，$y=x^2+2$，$y=x^2+C$（$C$ 为任意常数）都是 $2x$ 的原函数. 所以，$2x$ 有无穷多个原函数，而且它们之间仅差一个常数.

推广到一般情形，有以下定理.

**定理 4.1**　如果函数 $f(x)$ 在某区间上有原函数，则 $f(x)$ 就有无穷多个原函数，且它们相差一个常数.

不难得出，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数可以表示为 $F(x)+C$（其中 $C$ 是任意常数）.

### 4.1.2 不定积分的定义

**定义 4.2** 函数 $f(x)$ 的所有原函数，称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 其中，“$\int$ ”是积分符号，$f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，$x$ 称为**积分变量**.

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中，$F'(x) = f(x)$，$C$ 为任意常数.

由 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 可知，求被积函数 $f(x)$ 的不定积分，就是求它的一个原函数，再加上一个任意常数.

**例 1** 求不定积分 $\int 4x^3\mathrm{d}x$.

**解** 因为 $(x^4)' = 4x^3$，即 $x^4$ 是被积函数 $4x^3$ 的一个原函数，所以

$$\int 4x^3\mathrm{d}x = x^4 + C$$

**例 2** 求不定积分 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

**解** 因为当 $x > 0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，所以 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$.

又因为，当 $x < 0$ 时，$[\ln(-x)]' = -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C$$

故

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

### 4.1.3 不定积分的几何意义

设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，由于 $C$ 是任意常数，所以 $y = F(x) + C$ 的几何图形（如图 4-1 所示）是一族“平行”曲线，称为积分曲线族.

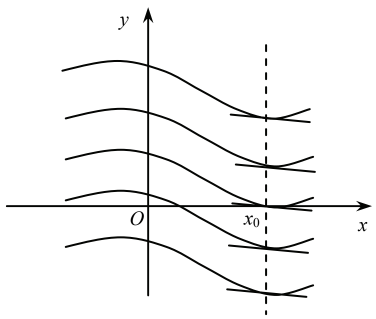


图 4-1

求已知函数的原函数的方法，称为不定积分法，简称积分法. 如果把积分法看成是一种运算，那么可以说，积分法是微分法的逆运算.

### 练习 4.1

1．判断下列函数中哪个是 $\mathrm{e}^x + \sin x$ 的原函数（　　）.

（A）$\mathrm{e}^x + \cos x$　　（B）$\mathrm{e}^x - \sin x$

（C）$\mathrm{e}^x - \cos x$　　（D）$\mathrm{e}^x + \sin x$

2．函数 $x^2 + 1$ 与 $x^2$ 是否均为 $2x$ 的原函数？

# 4.2　基本积分公式和不定积分的性质

## 4.2.1　基本积分公式

基本积分公式表如表 4-1 所示.

表 4-1　基本积分公式表

| $F'(x)=f(x)$ | $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ |
|---|---|
| （1）$(C)'=0$ | $\int 0\mathrm{d}x=C$ |
| （2）$\left(\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$（$\alpha\neq-1$）特别地 $(x)'=1$ | $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$（$\alpha\neq-1$）<br>特别地 $\int 1\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C$ |
| （3）$(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$ | $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$ |
| （4）$\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$ | $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ |
| （5）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ | $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$ |
| （6）$(\sin x)'=\cos x$ | $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$ |
| （7）$(-\cos x)'=\sin x$ | $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$ |
| （8）$(\tan x)'=\sec^2 x$ | $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$ |
| （9）$(-\cot x)'=\csc^2 x$ | $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$ |

上述基本积分公式包含了积分最基本的公式，在求不定积分时经常要用到这些公式. 今后学习定积分时，也要以这些公式为工具进行定积分的运算，因此，必须将这些公式熟记.

**例 1**　求下列不定积分：

（1）$\int x^3\mathrm{d}x$　（2）$\int 4^x\mathrm{d}x$　（3）$\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　（4）$\int \sin x\mathrm{d}x$

**解**　（1）$\int x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\dfrac{1}{4}x^4+C$

（2）$\int 4^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 4}4^x+C$

（3）$\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int x^{-2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\dfrac{1}{x}+C$

（4）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

## 4.2.2　不定积分的性质

**性质 1**　$[\int f(x)\mathrm{d}x]'=f(x)$，或 $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$

即不定积分的导数等于被积函数（或不定积分的微分等于被积表达式）.

**性质 2**　$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

即一个函数的导数的不定积分等于这个函数加上任意一个常数（或一个函数的微分的不定积分等于这个函数加上任意一个常数）.

性质 3 $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为非零常数）

即非零常数因子，可以移到积分号之前.

性质 4 $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

即两个函数代数和的不定积分，等于这两个函数不定积分的代数和.

这个公式可以推广到有限多个函数的代数和的情况.

例 2 求不定积分 $\int\left(x^5+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

解
$$\int\left(x^5+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \int x^5\mathrm{d}x + \int\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \int x^5\mathrm{d}x + \int x^{-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^{-2} + C$$

例 3 求不定积分 $\int(2^x+x^2)\mathrm{d}x$.

解
$$\int(2^x+x^2)\mathrm{d}x = \int 2^x\mathrm{d}x + \int x^2\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

例 4 求不定积分 $\int(x-1)(x+1)\mathrm{d}x$.

解
$$\int(x-1)(x+1)\mathrm{d}x = \int(x^2-1)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - \int\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

例 5 求不定积分 $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解
$$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int(3\mathrm{e})^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 3\mathrm{e}}(3\mathrm{e})^x + C$$

例 6 求不定积分 $\int(\sin x + 2\cos x)\mathrm{d}x$.

解
$$\int(\sin x + 2\cos x)\mathrm{d}x = -\cos x + 2\sin x + C$$

例 7 求不定积分 $\int 3^{x+4}\mathrm{d}x$.

解
$$\int 3^{x+4}\mathrm{d}x = \int 3^x\cdot 3^4\mathrm{d}x = 3^4\int 3^x\mathrm{d}x = 3^4\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{3^{x+4}}{\ln 3} + C$$

### 练习 4.2

求下列不定积分：

1. $\int(1-3x^2)\mathrm{d}x$
2. $\int\sqrt{x}(x-3)\mathrm{d}x$
3. $\int\frac{(t+1)^3}{t^2}\mathrm{d}t$
4. $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$
5. $\int(2^x+x^2)\mathrm{d}x$
6. $\int\frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$

## 4.3 换元积分法

利用基本积分公式和积分性质，所能计算的不定积分是有限的. 本节主要讨论的是在不能直接利用基本积分公式和积分性质计算不定积分时，可以采取的换元积分的方法，使一些不定积分的计算问题得到解决.

### 4.3.1　第一类换元法（凑微分法）

如果所求的积分具有如下特征：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

设 $u=\varphi(x)$，于是上式可化为

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

如果 $f(u)$ 与 $\varphi'(x)$ 都是连续函数，且 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，由不定积分的定义可知

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)]+C$$

要证明上式成立，只需证明 $\{F[\varphi(x)]\}'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 就可以了.

事实上，$\{F[\varphi(x)]\}'=F'(u)\varphi'(x)=f(u)\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

第一换元积分法，是把复合函数的求导法则反过来用于求不定积分而得到的一种积分方法，称为换元积分法，简称换元法. 这种方法就是通过适当地选择变量替换，把某些不定积分转化为简单积分的计算.

**例 1**　求不定积分 $\int (x+2)^5\mathrm{d}x$.

**解**

$$\begin{aligned}\int (x+2)^5\mathrm{d}x &= \int (x+2)^5(x+2)'\mathrm{d}x \\ &= \int (x+2)^5\mathrm{d}(x+2)\end{aligned}$$

令 $u=x+2$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，故

$$\begin{aligned}\int (x+2)^5\mathrm{d}x &= \int u^5\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{6}u^6+C \\ &= \frac{1}{6}(x+2)^6+C\end{aligned}$$

**例 2**　求不定积分 $\int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x$.

**解**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}(2x-1)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}(2x-1) \\ &= \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C\end{aligned}$$

**例 3**　求不定积分 $\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

**解**

$$\begin{aligned}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \int \cos 2x(2x)'\mathrm{d}x \\ &= \int \cos 2x\,\mathrm{d}2x \\ &= \sin 2x+C\end{aligned}$$

当运算比较熟练后，可以略去设中间变量的步骤，而直接凑微分，再利用基本积分公式来计算.

为了便于计算，现将常用的凑微分公式列举如下：

（1）$a\mathrm{d}x=\mathrm{d}(ax)=\mathrm{d}(ax+b)$（$a,b$ 为常数）

（2） $x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}(x^{\alpha+1})}{\alpha+1}$ （$\alpha\neq -1$）

（3） $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\mathrm{d}(ax^2+b)$ （$a,b$ 为常数且 $a\neq 0$）

（4） $\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

（5） $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}(\sqrt{x})$

（6） $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$

（7） $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

（8） $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$

（9） $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$

例 4　求不定积分 $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$$

例 5　求不定积分 $\int\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ （$a>0$）.

解
$$\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\ln|\ln x|+C$$

例 6　求不定积分 $\int\dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{a+x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2a}\int\frac{1}{a-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}\ln|a+x|-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\end{aligned}$$

例 7　求不定积分 $\int\cot x\mathrm{d}x$.

解
$$\int\cot x\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\ln|\sin x|+C$$

### 4.3.2　第二类换元法

对于某些含有根式的积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$，可以做适当的变量替换. 设 $x=\varphi(t)$，去掉根式，并把原积分化为 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ 的形式，使其能够求出. 当然在求出原函数后，还要将 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代回，还原成 $x$ 的函数，这就是第二类换元积分法求不定积分的基本思路.

例 8　求不定积分 $\int\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x$.

解　设 $t=\sqrt{x-3}$，则 $x=t^2+3$，$t>0$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，并且
$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2+3}{t}2t\mathrm{d}t=2\int(t^2+3)\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)+C\\&=\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}+6(x-3)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

例 9　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\mathrm{d}x$.

解　设 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$ 并且

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t-1}2t\mathrm{d}t = 2\int \frac{t-1+1}{t-1}\mathrm{d}t = 2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\left[t+\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}(t-1)\right] = 2[t+\ln|t-1|]+C \\ &= 2[\sqrt{x+1}+\ln|\sqrt{x+1}-1|]+C\end{aligned}$$

## 练习 4.3

1．计算下列不定积分：

（1）$\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　（2）$\int \frac{1}{x}\ln x\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{\mathrm{d}t}{1+2t}$　　（4）$\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$

（5）$\int \mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

2．计算下列不定积分：

（1）$\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$　　（2）$\int \sqrt[3]{x+a}\mathrm{d}x$　　（3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-3}+1}$

# 4.4　分部积分法

分部积分法是另一种新的积分法，此方法常用于被积函数是两种不同类型函数乘积的形式．事实上，是用两个函数乘积的微分法逆转过来求不定积分.

由 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$，$u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$，因此

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{4-1}$$

即

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x \tag{4-2}$$

式（4-1）或式（4-2）称为分部积分公式.

例 1　求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=\mathrm{e}^x$.

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

例 2　求不定积分 $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\ln x$，$\mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，$v=\frac{1}{4}x^4$.

$$\int x^3\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}x^4\ln x - \int\frac{1}{4}x^4\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

在计算比较熟练后，分部积分法的替换过程可以省略.

例 3　求不定积分 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解　$\int x\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}\ln x$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

例 4　求不定积分$\int x^2\cos x\mathrm{d}x$.

解　$\int x^2\cos x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\sin x$
$$=x^2\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x^2$$
$$=x^2\sin x-2\int x\sin x\mathrm{d}x$$
$$=x^2\sin x+2\int x\mathrm{d}\cos x$$
$$=x^2\sin x+2[x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x]$$
$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

例 3、例 4 中使用了凑微分的方法，使积分运算更容易进行.

**注意**

在分部积分法中，$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ 中的$\int u\mathrm{d}v$ 往往是难于积出的不定积分，而$\int v\mathrm{d}u$ 是比较容易积出的不定积分，这样就将$\int u\mathrm{d}v$ 分离成两个部分，一部分是函数$uv$，另一部分是容易积出的不定积分.

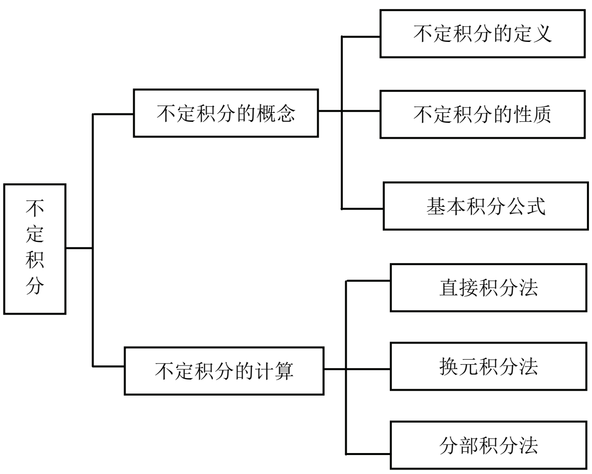
### 练习 4.4

计算下列不定积分：

1．$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　2．$\int\ln x\mathrm{d}x$　　3．$\int x^2\ln x\mathrm{d}x$

4．$\int x\cos x\mathrm{d}x$　　5．$\int x\sin x\mathrm{d}x$　　6．$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

## 本章知识结构图



## 数学史话 5

### 牛顿与莱布尼茨

牛顿与莱布尼茨都是他们所处时代的巨人．就微积分创立而言，尽管在背景、方法和形式上存在差异、各有特色，但二者的功绩是相当的，他们都使微积分成为能普遍使用的算法，同时又都将面积、体积及相当的问题归结为反切线（微分）运算．应该说，微积分能成为独立的科学并给整个自然科学带来革命性的影响，主要是靠了牛顿与莱布尼茨的工作．在科学史上，重大的真理往往在条件成熟的一定时期由不同的探索者相互独立地发现，微积分的创立，情形也是如此．

我们知道，牛顿在 1687 年以前没有公开发表过任何微积分的文章，而莱布尼茨则在 1684 和 1686 年分别发表了微积分的论文．1687 年当牛顿在《原理》中首次发布他的流数方法时，他在前言中作了这样一段说明：

“十年前，我在给学问渊博的数学家莱布尼茨的信中曾指出：我发现了一种方法，可用以求极大值、极小值、作切线以及解决其他类似的问题，而且这种方法也适用于无理数，…… ．这位名人回信说他也发现了类似的方法，并把他的方法给我看了．他的方法与我的大同小异，除了用语、符号、算式和量的产生方式外，没有实质性区别．”

这可以说是对微积分发明权问题的客观评述，遗憾的是，它在《原理》第 3 版时被删去了，原因是其间牛顿与莱布尼茨之间发生了优先权问题的争执．

争端是由局外人挑起的．瑞士数学家德丢勒（N.F.deDuillier）1699 年在一本小册子中提出“牛顿是微积分的第一发明人”，而莱布尼茨作为“第二发明人”，“曾从牛顿那里有所借鉴”．莱布尼茨立即对此作了反驳．1712 年，英国皇家学会专门指定了一个委员会进行调查，并于翌年公布了一份著名的《通报》，宣布“确认牛顿为第一发明人”．这引起了莱布尼茨的申诉，争论在双方的追随者之间越演越烈，直到莱布尼茨和牛顿都去世以后，才逐渐平息并得到解决．经过调查，特别是对莱布尼茨手稿的分析，证实两人确实是相互独立地完成了微积分的发明．就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨则先于牛顿．

值得补充的是，尽管发生了纠纷，两位学者却从未怀疑过对方的科学才能．有一则记载说，1701 年在柏林王宫的一次宴会上，当普鲁士王问到对牛顿的评价时，莱布尼茨回答道：“纵观有史以来的全部数学，牛顿做了一多半的工作．”

优先权争论被认为是“科学史上最不幸的一章”．微积分发明权的争论，对整个 18 世纪英国与欧陆国家在数学发展上的分道扬镳，产生了严重影响．虽然牛顿在微积分应用方面的辉煌成就极大地促进了科学的进步，但由于英国数学家固守牛顿的传统而使自己人逐渐远离分析的主流．分析的进步在 18 世纪主要是由欧陆国家的数学家在发展莱布尼茨微积分方法的基础上而取得的．

摘自《数学史概论（第二版）》.李文林

# 第 5 章　定积分及其应用

不定积分是微分法逆运算的一个侧面，定积分则是它的另一个侧面. 定积分起源于求图形的面积和体积的计算等实际问题. 17 世纪中叶，牛顿和莱布尼茨先后提出了定积分的概念，并发现了积分与微分之间的内在联系，给出了计算定积分的一般方法，从而才使定积分成为解决有关实际问题的有力工具，并使各自独立的微分学与积分学联系在一起，构成完整的理论体系——微积分学.

本章从求曲边梯形的面积入手，引入定积分的定义，然后再讨论定积分的性质、计算方法，以及定积分在几何学与经济管理中的应用.

## 5.1　定积分的概念

**引例**　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内连续，现在来求由 $y=f(x)$ 、$x=a$ 、$x=b$（$a<b$）、$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积（如图 5-1 所示）.

下面讨论如何求曲边梯形的面积 $S$ . 矩形的面积公式为底乘以高，而曲边梯形有一条边是曲线，其高是变化的，所以不能用矩形面积公式来计算其面积. 这个问题需用极限的方法来解决. 用分点把区间 $[a,b]$ 分成很多个如图 5-1 所示的区间，然后过每个分点做 $x$ 轴的垂线，就把曲边梯形分成许多小曲边梯形. 由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，在很小的一段区间上它的变化很小，近似于不变. 因此，每个小曲边梯形的面积用相应的小矩形面积来近似代替（如图 5-1 所示），然后把所有小矩形面积加起来，则所有小矩形面积之和就是曲边梯形面积 $S$ 的近似值.

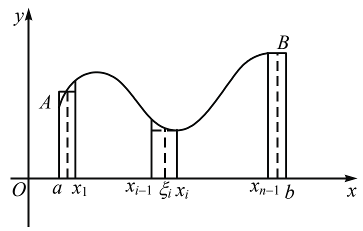


图 5-1

区间 $[a,b]$ 分得越细，每个小区间的宽度越小，那么小矩形面积之和就越接近曲边梯形面积 $S$ .

上述过程可归纳叙述如下.

**1．分割**

用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 分成 $n$ 个小区间 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$ . 它们的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1,2,\cdots,n$）.

**2．近似代替**

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内任取一点 $\xi_i$（$i=1,2,\cdots,n$），以 $\Delta x_i$ 为底、$f(\xi_i)$ 为高做小矩形，其面积为 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ ，并近似代替相应的小曲边梯形面积 $\Delta S_i$ ，即

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

**3．求和**

把 $n$ 个小矩形面积相加就得到曲边梯形面积 $S$ 的近似值，即

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4．取极限

设$\lambda$为小区间长度的最大值，即$\lambda = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$，当$\lambda \to 0$时，则上面和式的极限值就是曲边梯形的面积（此时区间$[a,b]$无限细分，即分点数$n \to \infty$），即

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

## 5.1.1　定积分的定义

1．定积分的定义

**定义 5.1**　设函数$y = f(x)$在区间$[a,b]$上连续．任取分点$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$将$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$．小区间的长度依次为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$（$i = 1,2,\cdots,n$）．

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i$（$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$），做乘积$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$），并做和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$．令$\lambda = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$，当$\lambda \to 0$时，若和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限存在（该极限值与区间$[a,b]$分法及点$\xi_i$取法都无关），则称此极限为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时，也称$f(x)$在$[a,b]$上可积，上式中“$\int$　”是积分符号，$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**，$x$称为**积分变量**，$[a,b]$称为**积分区间**，$a$称为**积分下限**，$b$称为**积分上限**.

2．关于定积分定义的几点说明

（1）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一个常数，它只与被积函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量所用字母无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

（2）定积分的定义是在积分限$a < b$情况下给出的，为讨论方便，规定：

① $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

② $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

（3）由定积分的定义可知，并不是所有函数都可积. 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积的充分条件是：如果$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，或有界且只有有限个间断点，那么$f(x)$在$[a,b]$上可积.

3．定积分的几何意义

由定积分的定义可得：如果$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x) \geqslant 0$，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示由曲线$y = f(x)$，直线$x = a$与$x = b$（$a<b$），以及$x$轴所围成的曲边梯形的面积（如

图 5-1 所示），即

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\leqslant 0$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$ 与 $x=b$，以及 $x$ 轴所围成的曲边梯形的面积的相反数（如图 5-2 所示），即

$$S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 有时为正有时为负，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$ 与 $x=b$，以及 $x$ 轴所围成的各部分面积的代数和（如图 5-3 所示），即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=S_1-S_2+S_3$$

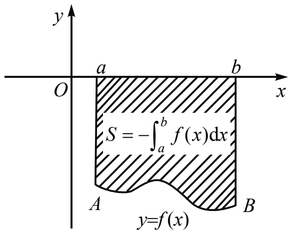



图 5-2

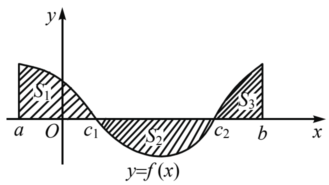



图 5-3

### 5.1.2 定积分的基本性质

**性质 1** 对任意常数 $k$ 都有 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**性质 2** $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

这个性质可以推广到有限多个函数的代数和的情况.

**性质 3** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$（$a<c<b$，或 $c$ 为任意常数）.

**性质 4** 若在 $[a,b]$ 上，恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 特别地，若在 $[a,b]$ 上，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

**性质 5** 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 内至少有一点 $\xi$ 使得下式成立.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a) \qquad \xi\in(a,b)$$

### 5.1.3 微积分基本定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $x$ 为 $[a,b]$ 上任意一点. 因为 $f(x)$ 在部分区间 $[a,x]$ 上仍连续，所以定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

因为定积分与积分变量所用字母无关，不妨把 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 的积分变量改为 $t$，从而

$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 可写成 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ . 称 $P(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为**变上限积分**.

**定理 5.1**　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么变上限积分 $P(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 $[a,b]$ 内可导，并且 $P'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t]'=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）.

例如，$(\int_3^x \sin t\,\mathrm{d}t)'=\sin x$ .

微分（或导数）与定积分这两个定义是各自独立给出的，定理 5.1 揭示了这两个不相关的概念之间的内在联系，因而称为**微积分基本定理.**

由定理 5.1 可知 $P(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，因此可以得到下面定理.

**定理 5.2**　（原函数存在定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $P(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理 5.2 的重要意义是：一方面，肯定了连续函数的原函数是存在的；另一方面，初步揭示了积分学中定积分与原函数的关系.

利用上面讨论的结果，可以得到利用原函数计算定积分的公式.

**定理 5.3**　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

上式称为**微积分基本公式**，也称为牛顿—莱布尼茨公式.

已学过的不定积分的基本公式，皆可应用到定积分中来，只是把上、下限代入原函数，进行计算就可以了. 定积分的计算简化了，使积分学得到广泛的应用.

**例 1**　求定积分 $\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1=1^3-0^3=1$$

**例 2**　求定积分 $\int_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\int_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_1^2=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}=\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)$$

**例 3**　求定积分 $\int_2^4 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\int_2^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln 2$$

**例 4**　求定积分 $\int_1^2 \dfrac{2x^2+1}{x}\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(2x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 2x\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x^2\Big|_1^2+\ln|x|\Big|_1^2$$
$$=(4-1)+\ln 2-\ln 1=3+\ln 2$$

## 练习 5.1

1．求函数 $y=\int_a^x \sin 2t\mathrm{d}t$ 的导数.

2．求函数 $y=\int_1^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ 当 $x=\ln 2$ 时的导数.

3．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}$.

4．计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 (3x^2+4x)\mathrm{d}x$　（2）$\int_0^1 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$　（3）$\int_0^{\sqrt{a}} x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$　（4）$\int_0^{\pi} \sin 2x\mathrm{d}x$

## 5.2　定积分的计算

### 5.2.1　换元积分法

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

（1）$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数；

（2）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，且 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$.

则有下列定积分换元公式成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

**例 1**　计算 $\int_0^5 \dfrac{1}{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x$.

**解**

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x&=\int_0^5 (1+3x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\int_0^5 (1+3x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+3x)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1+3x)^{-\frac{1}{2}+1}\Big|_0^5\\&=\frac{2}{3}(1+3x)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^5=\frac{2}{3}\times 4-\frac{2}{3}=2\end{aligned}$$

**例 2**　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x$.

**解法一**　设 $\cos x=t$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t=0$．故

$$原式=-\int_1^0 t^2\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

**解法二**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

解法二称为“凑微分法”，它不用引入新的变量，因此这种方法较为实用.

**例 3**　计算 $\int_0^4 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

**解**　设 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=4$ 时，$t=2$．故

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \mathrm{d}t - 2\int_0^2 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}(t+1)$$
$$= 2t\Big|_0^2 - \left(2\ln|t+1|\right)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

**例 4**　证明如果 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，那么 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

**证**　由 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，对上式等号右边第一个积分 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 做变量代换. 设 $x=-t$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-t)$. 当 $x=-a$ 时，$t=a$；当 $x=0$ 时，$t=0$.

于是　$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-t)\mathrm{d}(-t) = -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

故　$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)+f(x)=2f(x)$，于是有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

**例 5**　如果 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，那么 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

**证**（略）

### 5.2.2　分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导数，则定积分的分部积分公式为

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

**例 6**　计算 $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

**解**　令 $u=\ln x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，$v=x$，故

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - x\Big|_1^{\mathrm{e}} = (\mathrm{e}-0)-(\mathrm{e}-1) = 1$$

**例 7**　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x$.

**解**　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\sin x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$$
$$= x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right) = \frac{\pi}{2}-1$$

**例 8**　计算 $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

**解**　$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2 = x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e} - 2\left(x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\mathrm{e}-2\left(x\mathrm{e}^{x}\Big|_0^1-\mathrm{e}^{x}\Big|_0^1\right)=\mathrm{e}-2(\mathrm{e}-\mathrm{e}+1)=\mathrm{e}-2$$

## 练习 5.2

1．计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$

2．计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$　　（2）$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x$

## 5.3　无穷区间上的广义积分

前面讨论的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$要求积分区间$[a,b]$是有限区间，但在实际问题中，会遇到无穷区间上的积分，这类积分称为无穷区间上的广义积分．这样就需要对定积分的概念进行推广，从而形成了“广义积分”的概念．

**定义 5.2**　设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，$b>a$，称$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的**广义积分**，记作$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果上述极限存在，称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$是**收敛**的；反之如果极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$不存在，则称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$是**发散**的．

同样可以定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\qquad c\in(-\infty,+\infty)$$

**例 1**　求广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$．

**解**
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1$$

**例 2**　判断广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$的敛散性．

**解**　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$，所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散．

**例 3**　求广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$．

**解**
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)\Bigg|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^b}\right)=1$$

**练习 5.3**

1．计算下列广义积分：

（1）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

2．判断广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 的敛散性.

## 5.4　定积分的应用

### 5.4.1　平面图形的面积

已知定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$f(x) \geqslant 0$）的几何意义是由曲线 $y = f(x)$，$x$ 轴与直线 $x = a$ 及 $x = b$ 所围的曲边梯形的面积：

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

下面给出其他几种平面图形，利用定积分求出它们的面积.

（1）设平面图形由曲线 $y = f(x)$、$y = g(x)$ 和直线 $x = a$、$x = b$ 围成，且在 $[a,b]$ 上，$f(x) \geqslant g(x)$，如图 5-4 所示. 所围的平面图形的面积应为

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$

（2）设平面图形由曲线 $x = \varphi(y)$、$x = h(y)$ 和直线 $y = c$、$y = d$ 围成，且在 $[c,d]$ 上，$\varphi(y) \geqslant h(y)$，如图 5-5 所示. 所围的平面图形的面积应为

$$S = \int_c^d [\varphi(y) - h(y)]\mathrm{d}y$$

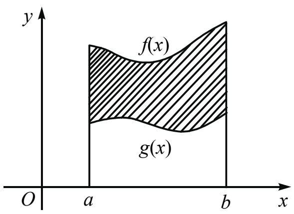



图 5-4

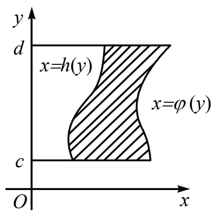



图 5-5

**例 1**　求由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^2$ 所围的平面图形的面积.

**解**　先做出所围面积的图形，如图 5-6 所示. 求出直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^2$ 的交点 $O(0,0)$，$A(1,1)$，则所求的面积应为

$$S = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

**例 2**　求由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$、$x = 2$ 所围的平面图形的面积.

**解**　曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$、$x = 2$ 所围的平面图形，如图 5-7 所示.

$y=\dfrac{1}{x}$ 与 $y=x$ 的交点坐标为(1,1)，所以

$$S=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln|x|\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$$

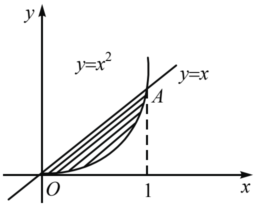



图 5-6

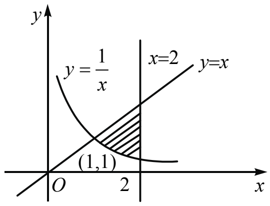



图 5-7

**例 3**　求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积.

**解**　曲线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围的图形，如图 5-8 所示，交点为 $A(8,4)$ 、$B(2,-2)$ .

**解法一**　可将所求的面积 $S$ 分成 $S_1$ 与 $S_2$ 的和. 其中 $S_1$ 是由曲线 $y=\sqrt{2x}$ 、$y=-\sqrt{2x}$ 及直线 $x=0$ 、 $x=2$ 所围的面积.

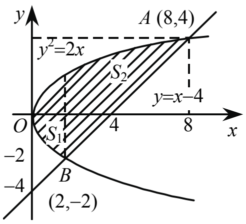



图 5-8

$$S_1=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})\right]\mathrm{d}x$$

$S_2$ 是由曲线 $y=\sqrt{2x}$ 、直线 $y=x-4$ 及直线 $x=2$ 、$x=8$ 所围的面积.

$$S_2=\int_2^8\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]\mathrm{d}x$$

所以 $S=S_1+S_2=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})\right]\mathrm{d}x+\int_2^8\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2 2\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^8\left(\sqrt{2}x-x+4\right)\mathrm{d}x=18$$

**解法二**　将 $S$ 看成由直线 $x=y+4$ 、曲线 $x=\dfrac{1}{2}y^2$ 和直线 $y=-2$ 、 $y=4$ 围成的面积，故有 $S=\int_{-2}^4\left[(y+4)-\dfrac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y=\left(\dfrac{1}{2}y^2+4y-\dfrac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_{-2}^4=18$ .

## 5.4.2　旋转体的体积

旋转体可以看成是由一平面曲边梯形绕某轴旋转而形成的立体图形.

由连续曲线 $y=f(x)$ ，直线 $x=a$ 、$x=b$（ $b>a$ ）及 $x$ 轴所围成的平面图形，绕 $x$ 轴旋转形成的旋转体，如图 5-9 所示，求它的体积.

在 $x$ 轴上过一点 $x$ 做垂直于 $x$ 轴的平面，得到旋转体的截面，其面积为 $S(x)=\pi y^2$ ，从而得到旋转体的体积

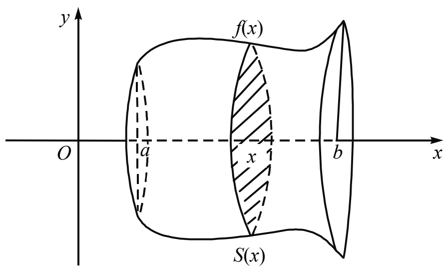



图 5-9

$$V_x=\int_a^b \pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

类似地，若所考虑的体积，由连续曲线 $x=\varphi(y)$ ，直线 $y=c$ 、 $y=d$ （ $d>c$ ）及 $y$ 轴围成的平面图形绕 $y$ 轴旋转而成，则它的体积公式为

$$V_y=\int_c^d \pi x^2 \mathrm{d}y=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 \mathrm{d}y$$

**例 4**　求曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1$、$x=4$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体的体积.

**解**　如图 5-10 所示，当绕 $x$ 轴旋转时，由公式 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，得

$$V_x=\pi\int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x=\frac{15}{2}\pi$$

**例 5**　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 $x$ 轴与 $y$ 轴旋转产生的旋转体体积.

**解**　如图 5-11 所示，由于椭圆的图形关于坐标轴对称，所以只需要考虑第一象限内的图形绕 $x$ 轴或 $y$ 轴旋转所产生的旋转体体积.

$$V_x=2\pi\int_0^a y^2 \mathrm{d}x=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

绕 $y$ 轴旋转所产生的旋转体体积为 $V_y=2\pi\int_0^b x^2\mathrm{d}y=2\pi\int_0^b \dfrac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.

特别地，当 $a=b$ 时，得球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

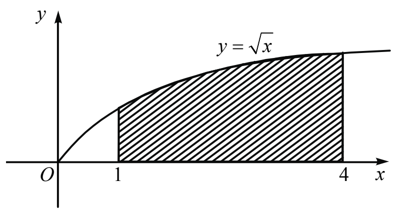


图 5-10

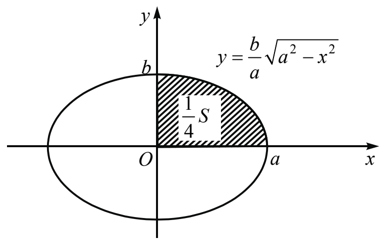


图 5-11

### 5.4.3　经济管理中的应用

**例 6**　已知某产品的总产量的变化率为

$$q'(t)=80+10t-3t^2 \text{（单位/天）}$$

求从第 3 天到第 10 天的总产量.

**解**　所求的总产量为

$$q=\int_3^{10}(80+10t-3t^2)\mathrm{d}t=(80t+5t^2-t^3)\Big|_3^{10}=(800+500-1\,000)-(240+45-27)=42\text{（单位）}$$

**例 7**　已知某商品每个月生产 $q$ 个单位时，其总费用 $F(q)$ 的变化率为

$$F'(q)=0.2q-10 \text{（元/单位）}$$

且 $F(0)=60$（元/单位），求总费用函数 $F(q)$.

**解法一**　$F(q)=\int F'(q)\mathrm{d}q=\int(0.2q-10)\mathrm{d}q=0.1q^2-10q+C$

因为 $F(0)=60$，所以 $C=60$.

因此，总费用函数为 $F(q)=0.1q^2-10q+60$ .

**解法二** 因为 $\int_0^q F'(q)\mathrm{d}q=F(q)-F(0)$ ，所以

$$F(q)=\int_0^q (0.2q-10)\mathrm{d}q+F(0)=0.1q^2-10q+60$$

**例 8** 某产品的总成本 $C(q)$（万元）的边际成本为 2（万元/百台），总收入 $R(q)$（万元）的边际收入为 $R'(q)=5-q$ （万元/百台），其中 $q$ 为产量，固定成本为 3 万元. 问：

（1）产量为多少时总利润 $L(q)$ 最大，最大利润为多少？

（2）当利润最大时再生产 100 台总利润增加多少？

**解** （1）由已知得 $C(q)=\int C'(q)\mathrm{d}q=\int 2\mathrm{d}q=2q+C_1$ .

因为固定成本为 3，所以 $C_1=3$ ，即总成本函数为

$$C(q)=2q+3$$

又知 $R'(q)=5-q$ ，所以 $R(q)=\int(5-q)\mathrm{d}q=-\dfrac{1}{2}q^2+5q+C_2$ .

因为 $R(0)=0$ ，所以 $C_2=0$ ，即总收入函数为

$$R(q)=-\frac{1}{2}q^2+5q$$

此时总利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=-\frac{1}{2}q^2+5q-(2q+3)=-\frac{1}{2}q^2+3q-3$$

由题意得，边际利润函数为

$$L'(q)=-q+3$$

令 $L'(q)=0$ ，得到 $q=3$ .

由于 $q=3$ 为唯一驻点，且存在最大利润，因此，当 $q=3$ （百台）时，利润最大，此时最大利润为 $L(3)=1.5$ （万元）.

（2）当 $q=3$ （百台）时，再多生产 100 台，此时总利润增加

$$\int_3^4 L'(q)\mathrm{d}q=\int_3^4(3-q)\mathrm{d}q=\left(-\frac{1}{2}q^2+3q\right)\Bigg|_3^4=4-4.5=-0.5 \text{（万元）}$$

即当利润最大时，若再多生产 100 台，总利润将减少 0.5 万元.

## 练习 5.4

1．求下列各题中平面图形的面积：

（1）曲线 $y=x^2+3$ 在区间 $[0,1]$ 上的曲边梯形的面积；

（2）曲线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围图形的面积；

（3）曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=1$ 和 $x=2$ 所围图形的面积.

2．求曲线 $y=x$ 与 $x=1$ 、 $x=2$ 及 $x$ 轴所围图形绕 $x$ 轴旋转所得到的体积.

3．生产某产品的边际费用函数为 $F'(q)=q^2-4q+50$ （元/件），其中 $q$ 为产量，已知生产 3 件时，总费用为 181 元，求总费用函数 $F(q)$ .

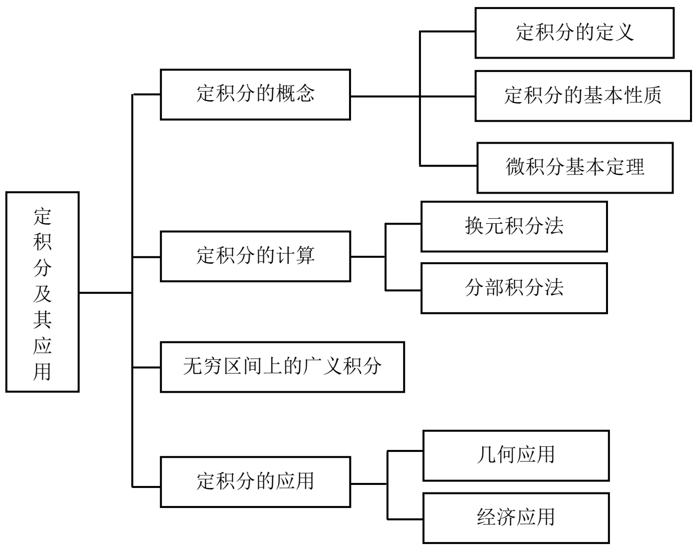
4．已知某产品产量 $q$ 对时间的变化率为 $q'=-0.9t^2+20t+200$ （吨/小时）. 求从 $t=1$ 到 $t=10$ 时的产量.

5．已知某产品生产 $q$ 个单位时，边际收益为 $R'(q)=200-\dfrac{q}{100}$ （$q\geqslant 0$）. 求：

（1）生产 50 个单位时的总收益；

（2）如果已生产了 100 个单位，再生产 100 个单位，此时总收益将增加多少？

## 本章知识结构图



# 第6章 矩　　阵

从 19 世纪中叶以来，矩阵代数已经以现在这种形式存在．它由哈密顿、凯利及西而维斯特所发明，长期以来一直是代数的一个专门分支，直到20世纪20年代，它才成为量子力学的工具．现在矩阵成为普通数学教育的一部分．它在数值分析与所有其他应用数学分支中有着广泛的应用．

摘自《数学概论》．［瑞典］ L・戈丁 著；胡作玄 译

本章主要介绍矩阵、逆矩阵、矩阵的秩等概念，几种特殊的矩阵，矩阵的加减、数乘、乘法等运算及其运算规律，矩阵的初等行变换，以及用初等行变换求逆矩阵和秩的方法.

## 6.1　矩阵的概念

### 6.1.1　矩阵的定义

矩阵是实数的矩形阵表，先看一个实例.

**引例**　某工厂的 1、2、3 三个分厂，生产 A、B、C、D 四种产品（单位：吨），其生产情况如表 6-1 所示.

表 6-1

| 产品 / 产量 / 分厂 | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 | 8 |
| 2 | 5 | 0 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 0 |

上述产品情况可以用一个数表表示为

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

称这样的矩形数表为矩阵.

**定义 6.1**　由 $m\times n$ 个实数 $a_{ij}$ （$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）排成 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 **$m$ 行 $n$ 列矩阵**，简称 **$m\times n$ 矩阵**. 其中横排称为矩阵的**行**，纵排称为矩阵的**列**. $a_{ij}$ 称为矩阵的第 $i$ 行 $j$ 列处的**元素**.

矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}\cdots$ 表示，也可以用$[a_{ij}]$、$[b_{ij}]$、$[c_{ij}]\cdots$表示. 有时为了标明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 $m$ 和列数 $n$，可用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或$[a_{ij}]_{m\times n}$表示.

矩阵的行数和列数可以是任意的正整数.

具有 $n$ 行 $n$ 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 **$n$ 阶矩阵**或 **$n$ 阶方阵**，可简记作 $\boldsymbol{A}_n$.

方阵 $\boldsymbol{A}_n$ 中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角元素**，从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**.

只有一行的矩阵称为**行矩阵**，只有一列的矩阵称为**列矩阵**，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为行矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为列矩阵. 特别地，规定 $(a)_{1\times1}=a$.

所有的元素都为零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

例如

$$\boldsymbol{O}_{2\times3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别为 2×3 零矩阵和 2 阶零矩阵.

主对角线上的元素全为 1，其余元素都为 0 的 $n$ 阶方阵称为 **$n$ 阶单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$. 例如

$$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

### 6.1.2　矩阵的相等

两个行数、列数分别相等的矩阵称为**同型矩阵**. 若同型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$ 的各对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ （$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}$=$\boldsymbol{B}$.

### 练习 6.1

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & b \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 3 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 $a$、$b$.

2．写出矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&3&0\\4&5&-6\end{pmatrix}$ 的主对角元素.

## 6.2 矩阵的运算

### 6.2.1 矩阵的加法

**定义 6.2** 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 同为 $m\times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的加法记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的各对应元素相加构成的矩阵.

**注意**

如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是同型矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 没有意义.

**例 1** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-3\\-2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&3\\4&0\\1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

**解**

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+(-2)&2+3\\0+4&-3+0\\-2+1&1+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5\\4&-3\\-1&0\end{pmatrix}$$

**例 2** 设某物资（单位：吨）从三个产地运往四个销地，一、二月份的调运方案分别用矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&7&4&2\\2&0&1&3\\4&3&7&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&3&0\\2&5&2&5\\3&2&0&6\end{pmatrix}$$

求两个月从各产地到各销地的调运总量.

**解** 从各产地到各销地的调运总量可表示为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3+2&7+1&4+3&2+0\\2+2&0+5&1+2&3+5\\4+3&3+2&7+0&0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8&7&2\\4&5&3&8\\7&5&7&6\end{pmatrix}$$

矩阵的加法满足以下的运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

（2）结合律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

### 6.2.2　数与矩阵的乘法

**定义 6.3**　数 $k$ 与 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的乘积，记作 $k\boldsymbol{A}$.

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

即 $k\boldsymbol{A}$ 为数 $k$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的各元素相乘构成的矩阵.

特别地，当 $k=-1$ 时，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，习惯上，称之为矩阵的减法.

数与矩阵的乘法满足以下的运算规律：（设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，$k$、$l$ 为常数）

（1）结合律　$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$;

（2）矩阵对数的分配律　$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

（3）数对矩阵的分配律　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

**例 3**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

**解**　$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 \\ 3 & -3 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -12 & 0 & -13 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

**例 4**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，满足关系式 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

**解**　由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 可得到

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**例 5**　两个车间分别加工三种产品（单位：件），假设 5 月份的加工量表示为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 130 & 80 & 110 \\ 90 & 120 & 100 \end{pmatrix}$$

且每件产品的加工费都为 2 元，求各车间每种产品应得的加工费.

**解** 所求费用可表示为矩阵

$$2\boldsymbol{A}=2\begin{pmatrix}130 & 80 & 110\\ 90 & 120 & 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}260 & 160 & 220\\ 180 & 240 & 200\end{pmatrix}$$

### 6.2.3 矩阵的乘法

**定义 6.4** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

则 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，或称为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$）的积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$．其中，$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ （$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）.

**注意**

（1）当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{AB}$ 才有意义；

（2）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的行数同 $\boldsymbol{A}$ 的行数，列数同 $\boldsymbol{B}$ 的列数；

（3）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 中的第 $i$ 行第 $j$ 列处元素 $c_{ij}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列各对应元素乘积的代数和.

**例 6** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ .

**解**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1)\\ 1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1)\\ 3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}8 & -7\\ -3 & 0\\ 5 & -7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

此例中 $\boldsymbol{A}$ 是 $3\times2$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $2\times2$ 矩阵，$\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义. 说明 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义.

**例 7** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1\quad 2\quad 3)$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ .

解
$$AB=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$
$$BA=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1\times1+2\times2+3\times3)=(14)=14$$

此例中 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但不是同型矩阵. 说明即使 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义，它们也未必同型.

例 8　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{AC}$、$\boldsymbol{AD}$.

解
$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\3&3\end{pmatrix}$$
$$AC=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-3&0\end{pmatrix}$$
$$AD=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-3&0\end{pmatrix}$$

此例中 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$且$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$；$\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义且同型，但 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}$，但 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{D}$ .

**说明**：（1）两个非零矩阵的乘积可能为零矩阵；

（2）矩阵的乘法不满足交换律：通常 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

（3）$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}$ 时，未必 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$.

例 9　某工厂两个车间，分别生产甲、乙、丙三种产品，两个车间日产量（单位：件）用矩阵

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc}\text{甲} & \text{乙} & \text{丙}\end{array} \\ A= & \begin{pmatrix}450&300&500\\200&550&400\end{pmatrix}\begin{array}{l}1\text{ 车间的产量}\\2\text{ 车间的产量}\end{array}\end{array}$$

表示，其三种产品的单位出厂价（单位：元）和单位利润（单位：元）用矩阵

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{cc}\text{单位出厂价} & \text{单位利润}\end{array} \\ B= & \begin{pmatrix}2&1\\1.5&0.8\\3&1.5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{甲}\\\text{乙}\\\text{丙}\end{array}\end{array}$$

表示，求这两车间的总收益和总利润各是多少？

解　两车间的收益、利润情况用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示

$$C=AB=\begin{pmatrix}450&300&500\\200&550&400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1.5&0.8\\3&1.5\end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{总收益} & \text{总利润} \end{array} \\
= & \begin{pmatrix} 2850 & 1440 \\ 2425 & 1240 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ 1\text{ 车间} \\ 2\text{ 车间} \end{array}
$$

矩阵乘法满足以下运算规律：（假设运算都是可行的）

（1）结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

（3）数乘结合律　$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$（$k$ 为常数）.

### 6.2.4　矩阵的幂

**定义 6.5**　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，用 $\boldsymbol{A}^k$ 表示 $k$ 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 次幂. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂运算具有以下性质（$k$、$l$ 为非负常数）：

（1）$\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$

（2）$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$

规定　$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

**注意**

一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

**例 10**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$.

**解**

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$$

### 6.2.5　矩阵的转置

**定义 6.6**　将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即如果

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\text{，则 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&4\end{pmatrix}$，$A$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\3&4\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-2\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 0\quad -2)^{\mathrm{T}}$$

**例 11**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

**解**

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{pmatrix}$$

**例 12**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & -5 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，求 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

**解**

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & -5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 12 & 5\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

**注意**

由运算结果可以看出 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

转置矩阵具有以下运算规律：

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

（3）$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

## 练习 6.2

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 5 & 4 & 0\end{pmatrix}$，计算（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；（2）$5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

2．计算：

（1）$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -7 & 5 & -3\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 8\end{pmatrix}$

3．已知矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{C}$.

## 6.3 矩阵的初等行变换与矩阵的秩

### 6.3.1 矩阵的初等行变换

**定义 6.7** 矩阵的下面三种变换，称为**矩阵的初等行变换**：

（1）交换第 $i$、$j$ 两行，记为 $(i)\leftrightarrow(j)$；

（2）用非零数 $k$ 乘以第 $i$ 行各元素，记为 $k(i)$；

（3）用非零数 $k$ 乘以第 $j$ 行各元素后，加到第 $i$ 行的对应元素上，记为 $(i)+k(j)$.

### 6.3.2 行阶梯形矩阵

把矩阵中元素全为零的行称为**零行**，元素不全为零的行称为**非零行**，非零行的左起第一个非零元素称为**首非零元**.

**定义 6.8** 具有以下两个特点的矩阵称作**行阶梯形矩阵**：

（1）各行首非零元的列标，小于它下一行首非零元的列标；

（2）矩阵中如果有零行，那么零行位于矩阵的最下方.

例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&0&-2\\0&-1&3&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{是行阶梯形矩阵.}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&8&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{不是行阶梯形矩阵.}$$

**定理 6.1** 任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，经过有限次初等行变换，都可以化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵.

**例 1** 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&5&-1\\1&2&3&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵.

**解**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&5&-1\\1&2&3&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\3&2&1&1\\5&5&2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(4)-5(1)]{(3)-3(1)}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&-4&-8&4\\0&-5&-13&5\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)+5(2)]{(3)+4(2)}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&12&0\\0&0&12&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(4)-(3)}\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&5&-1\\0&0&12&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵. 将此矩阵继续作初等行变换还可以化为

$$B \xrightarrow{\frac{1}{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)-3(3)]{(2)-5(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵. $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵不是唯一的，$\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**行最简形矩阵**.

在 $m \times n$ 的行阶梯形矩阵中，如果各行的首非零元全为 1，而首非零元所在列的其余元素全为零，形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{rr+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

那么称此矩阵为**行最简形矩阵**.

**推论**　任何一个矩阵，经有限次初等行变换，都可以化为行最简形矩阵.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为的行最简形矩阵称为 **$\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵**.

### 6.3.3　矩阵的秩

**定义 6.9**　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵中非零行的行数称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩**，记作 $r(\boldsymbol{A})$.

**例 2**　求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩.

**解**　$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+(1)]{(2)+2(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 已化为阶梯形，所以 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

对于 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $r(\boldsymbol{A}) = n$，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**.

单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 是满秩矩阵.

**例 3**　求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-3(1)]{(2)-2(1)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&-2&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

因为 $r(A)=3$，所以 $A$ 为满秩矩阵.

### 练习 6.3

1．判断下列矩阵是否为行阶梯形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&3&-2\\0&0&0&5\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}3&-1&-2&5\\0&0&1&4\\0&0&7&0\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}0&1&3&2\\0&0&4&5\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&-1\\0&4&5\\0&0&7\end{pmatrix}$

2．求下列矩阵的秩：

（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\2&3&2\end{pmatrix}$　　（2）$B=\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\2&1&-1&1\\1&-1&3&8\end{pmatrix}$

（3）$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&7\\3&2&1&1&-2\\5&4&3&3&12\\0&1&2&2&23\end{pmatrix}$

3．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3&4\\1&3&4&6&5\\2&5&3&9&k\end{pmatrix}$，如果 $r(A)=2$，求 $k$ 的值.

4．将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

## 6.4 逆矩阵

### 6.4.1 逆矩阵的概念与性质

#### 1．逆矩阵的定义

**定义 6.10** 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，如果存在 $n$ 阶方阵 $B$，使得

$$AB=BA=E$$

则称 $A$ 是可逆矩阵（简称 $A$ 可逆），并称 $B$ 是 $A$ 的**逆矩阵**，记作 $A^{-1}$，即 $B=A^{-1}$.

**例 1**　设矩阵

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&2&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&2\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，判断 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

**解**　由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

**注意**

（1）如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

（2）如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是唯一的.

**2．逆矩阵的性质**

逆矩阵具有下列性质：

**性质 1**　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；

**性质 2**　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$；

**性质 3**　如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，那么 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；

**性质 4**　如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都可逆，那么 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

## 6.4.2　逆矩阵的存在条件和求法

是否每个方阵都可逆？矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足什么条件才可逆？如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，如何求得 $\boldsymbol{A}^{-1}$？

**1．矩阵可逆的条件**

**定理 6.2**　$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，即 $r(\boldsymbol{A})=n$.

**例 2**　已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&5&6\\-2&3&5\end{pmatrix}$$

试问 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是否可逆？

**解**　因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1)}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

于是 $r(\boldsymbol{A})=2=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 满秩，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

又因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&5&6\\-2&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)+2(1)]{(2)+(1)}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&7&7\\0&7&7\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&7&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

于是 $r(\boldsymbol{B})=2<n=3$，$\boldsymbol{B}$ 不满秩，所以 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

**2．逆矩阵的求法**

由定理 6.1 的推论可知，任何一个矩阵都可以通过初等行变换化为行最简形矩阵，一个满秩 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵，是一个 $n$ 阶单位阵.

设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

记
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

此为 $n\times 2n$ 矩阵.

**定理 6.3** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，对 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 施以若干次初等行变换，可使 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$.

定理 6.3 给出了用初等行变换求逆矩阵的方法.

将 $n$ 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边并上一个同阶单位阵，构成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$，对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 进行若干次初等行变换，当左边的 $\boldsymbol{A}$ 化为单位阵时，右边的 $\boldsymbol{E}$ 即随之化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 进行初等行变换时，如果 $\boldsymbol{A}$ 至少有一行被化为零行，那么可以知道 $\boldsymbol{A}$ 不满秩，由定理 6.2 可知，$\boldsymbol{A}$ 不可逆.

**例 3** 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**解** 
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(2)-3(1)}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(1)+2(2)}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{-1(2)}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

**例 4** 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆阵.

**解** 
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[(3)-4(1)]{(2)+3(1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&2&2\\0&0&1&0&1&3\end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

**例 5**　矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$是否可逆?

**解**　$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\3&1&2&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)-3(1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-3&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{(3)+(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-3&1&0\\0&0&0&-3&1&1\end{array}\right)$$

因为$r(\boldsymbol{A})=2<3=n$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

**例 6**　解矩阵方程$\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

**解**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$

由$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&1&0\\-1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)+(1)}\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&1&0\\0&6&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{6}(2)}\left(\begin{array}{cc:cc}1&4&1&0\\0&1&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{(1)-4(2)}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{array}\right)=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$$

得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}$.

再由$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc:cc}2&0&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\left(\begin{array}{cc:cc}-1&1&0&1\\2&0&1&0\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{(2)+2(1)}\left(\begin{array}{cc:cc}-1&1&0&1\\0&2&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{-1(1),\frac{1}{2}(2)}\left(\begin{array}{cc:cc}1&-1&0&-1\\0&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)}\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{-1})$$

得 $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

因为 $AXB=C$，所以矩阵方程两边左乘 $A^{-1}$，右乘 $B^{-1}$ 得 $A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$，于是

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6 & 6\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12 & 12\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$$

**例 7** 某厂一季度 1、2、3 三个月生产甲、乙、丙产品的产量用矩阵 $A$ 表示（单位：吨），三个月的收入情况用矩阵 $B$ 表示（单位：万元）.

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc}甲 & 乙 & 丙\end{array} \\ A= & \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}1月\\ 2月\\ 3月\end{array}\end{array}\qquad B=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ 7\end{pmatrix}\begin{array}{l}1月\\ 2月\\ 3月\end{array}$$

求三种产品的出厂价分别为多少.

**解** 设甲、乙、丙 3 种产品的出厂价分别为 $x_1$、$x_2$、$x_3$（万元/吨），如果

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ 7\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

则有 $AX=B$.

由 $(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-(1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{(3)+(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}(3)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)+(3)]{(1)+(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{(1)-2(2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

因此，甲、乙、丙三种产品的出厂价分别为 1 万元/吨、2 万元/吨和 3 万元/吨.

矩阵方程还可以用于求解投入产出问题.

**例 8**　设有一个经济系统包括 3 个部门，在某一个生产周期内各部门间的消耗系数及最终产品如表 6-2 所示.

表 6-2

| 消耗部门 / 消耗系数 / 生产部门 | 1 | 2 | 3 | 最终产品产值 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.25 | 0.1 | 0.1 | 245 |
| 2 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 90 |
| 3 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 175 |

求各部门的总产值.

**解**　设 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 分别表示部门 1、2、3 的总产值.

直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与最终产品产值矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}245\\90\\175\end{pmatrix}$$

由投入产出分析知 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$，且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在，则 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}$.

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.75 & -0.1 & -0.1\\ -0.2 & 0.8 & -0.1\\ -0.1 & -0.1 & 0.8\end{pmatrix}$$

经计算

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{10}{891}\begin{pmatrix}126 & 18 & 18\\ 34 & 118 & 19\\ 20 & 17 & 116\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}=\frac{10}{891}\begin{pmatrix}126 & 18 & 18\\ 34 & 118 & 19\\ 20 & 17 & 116\end{pmatrix}\begin{pmatrix}245\\90\\175\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\250\\300\end{pmatrix}$$

即三个部门的总产值分别为 400、250、300.

## 练习 6.4

1．判别下列方阵是否可逆，若可逆，求逆矩阵：

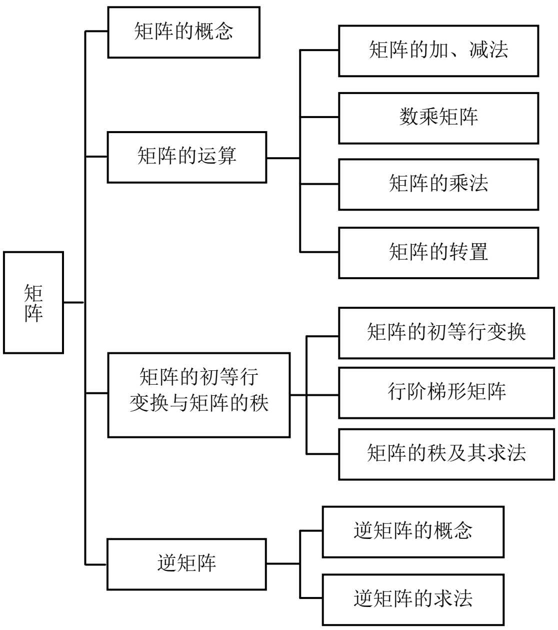
（1）$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2．解矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

## 本章知识结构图



# 第 7 章 线性方程组

本章主要介绍 $n$ 元线性方程组的概念及其矩阵形式，非齐次线性方程组、齐次线性方程组解的判定，用初等行变换法求解线性方程组.

## 7.1 $n$ 元线性方程组

**引例** 已知总成本 $y$ 是产量 $x$ 的二次函数

$$y = a + bx + cx^2$$

根据统计资料，产品与总成本之间有如表 7-1 所示的数据.

**表 7-1**

| 时　　期 | 第 一 期 | 第 二 期 | 第 三 期 |
|---|---|---|---|
| 产量 $x$（千台） | 6 | 10 | 20 |
| 总成本 $y$（万元） | 104 | 160 | 370 |

试求总成本函数中的 $a,b,c$ .

要解这个问题，可将三组 $x$ 、 $y$ 的值分别代入二次函数中，得到方程组：

$$\begin{cases} a + 6b + 36c = 104 \\ a + 10b + 100c = 160 \\ a + 20b + 400c = 370 \end{cases}$$

解方程组即可以得到 $a,b,c$ 的值.

在经济管理、工程技术等实际应用问题中，还有大量像这样可以用线性方程组解决的问题. 这些方程组的个数与未知量的个数有时相等，有时不相等. 如方程组

$$（1）\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases} \quad （2）\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

这些方程组只含未知量的一次幂，因此称为**线性方程组**.

$n$ 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7-1}$$

方程组有 $m$ 个方程、$n$ 个未知量，$a_{ij}$ 表示第 $i$ 个方程、第 $j$ 个未知量的系数，$b_i$ 表示第 $i$ 个方程的常数项（$i$=1,2, $\cdots$ ,$m$；$j$=1,2, $\cdots$ ,$n$）.

把方程组（7-1）的系数组成的矩阵记为 $\boldsymbol{A}$，称为**系数矩阵**；未知量组成的矩阵记为 $\boldsymbol{X}$，称为**未知矩阵**；常数项组成的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，称为**常数项矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

那么方程组（7-1）的矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 放在一起组成的矩阵记为 $\overline{\boldsymbol{A}}$，称为方程组（7-1）的**增广矩阵**.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由于线性方程组是由它的系数和常数项确定的，所以用增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 可以清楚地表示一个线性方程组.

当方程组（7-1）的常数项 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ 时，方程组的形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{7-2}$$

称为 $n$ **元齐次线性方程组**. 其矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=O$$

其中 $\boldsymbol{O}=(0\ 0\cdots 0)^{\mathrm{T}}$.

相应地，称方程组（7-1）为 $n$ **元非齐次线性方程组**（$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0）.

### 练习 7.1

写出下列线性方程组的系数矩阵、常数项矩阵和增广矩阵：

1．$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+3x_3=1 \\ -x_1+3x_2+\ x_3=8 \\ x_1-2x_2+6x_3=-3 \end{cases}$

2．$\begin{cases} x_1+\ x_2-2x_3+3x_4=-1 \\ \quad -x_2+3x_3+\ x_4=4 \\ 3x_1-4x_2+\ x_3-2x_4=-3 \end{cases}$

## 7.2 线性方程组解的判定

线性方程组的解有唯一解、无穷多解、无解三种情况. 那么怎样判断它们是否有解？若有解，有怎样的解？如何求解呢？

### 7.2.1　非齐次线性方程组解的判定

**定理 7.1**　$n$ 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，即

$$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$$

并且当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$ 时，方程组有无穷多解.

由于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 中包含着系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，所以只需将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为行阶梯形矩阵，便可以得到 $r(\boldsymbol{A})$及$r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

**例 1**　判断线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$$

的解的情况.

**解**　因为 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+3(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$，

已化为行阶梯形矩阵，可得 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3=n$.

所以方程组有唯一解.

**注意**

将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的行阶梯形矩阵的最末一列去掉，便可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵.

**例 2**　讨论当 $\lambda$ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

有解.

**解**　因为 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

所以，当 $\lambda-5=0$，即 $\lambda=5$ 时，有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<n=4$，方程组有无穷多解；当 $\lambda-5\neq0$，即 $\lambda\neq5$ 时，有 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解.

### 7.2.2　齐次线性方程组解的判定

对于齐次线性方程组（7-2），因为 $r(\boldsymbol{A})\equiv r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以齐次线性方程组恒有解. $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是方程组（7-2）的解. 因此，方程组（7-2）有唯一解时，一定是零解 $\boldsymbol{X}=(0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)^{\mathrm{T}}$.

结合定理 7.1 有下述定理.

**定理 7.2** $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 恒有解. 当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时方程组有唯一零解，当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时有无穷多解.

**例 3** 判断齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-4x_4=0 \\ 2x_1 \qquad\quad - x_3+3x_4=0 \\ -5x_1+6x_2-5x_3+9x_4=0 \\ 4x_1-4x_2+3x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

的解的情况.

**解** 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -5 & 6 & -5 & 9 \\ 4 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)+5(1)\\(4)-4(1)}]{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 11 \\ 0 & -4 & 5 & -11 \\ 0 & 4 & -5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $r(\boldsymbol{A})=2<n=4$，所以，方程组有无穷多解.

## 练习 7.2

1．判断非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad +2x_3=1 \\ 2x_1+x_2+5x_3=-1 \\ x_1-x_2+\ x_3=4 \\ x_1+x_2+3x_3=-2 \end{cases}$$

的解的情况.

2．判断非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+\ x_4=1 \\ \qquad x_2+\ x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1 \qquad +\ x_3+2x_4=0 \\ \qquad 2x_2 \qquad +\ x_4=2 \end{cases}$$

的解的情况.

3．齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+\ x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

当 $\lambda$ 取什么值时有唯一零解？有无穷多解?

# 7.3 初等行变换法解线性方程组

用消元法解线性方程组大家并不陌生，下面看一道用消元法解线性方程组的例题.

**例 1** 解线性方程组

$$\begin{cases}5x_1-2x_2+7x_3=22\\ x_1+\ \ x_2-2x_3=-3\\ 2x_1-5x_2+4x_3=4\end{cases} \quad ①$$

**解**　首先将方程组①的第 2、3 个方程中的 $x_1$ 消去. 为了避免出现分数，先交换第 1、2 个方程，得

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2-2x_3=-3\\ 5x_1-2x_2+7x_3=22\\ 2x_1-5x_2+4x_3=4\end{cases} \quad ②$$

再将方程组②中的第 1 个方程分别乘以–5、–2 后加到第 2、3 个方程上，得

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2-\ \ 2x_3=-3\\ \quad -7x_2+17x_3=37\\ \quad -7x_2+\ \ 8x_3=10\end{cases} \quad ③$$

将方程组③的第 2 个方程乘以–1 加到第 3 个方程上，消去第 3 个方程中的 $x_2$ 项，得

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2-\ \ 2x_3=-3\\ \quad -7x_2+17x_3=37\\ \qquad\quad -\ \ 9x_3=-27\end{cases} \quad ④$$

将方程组④的第 3 个方程两边同乘以 $-\dfrac{1}{9}$，得

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2-\ \ 2x_3=-3\\ \quad -7x_2+17x_3=37\\ \qquad\qquad\quad x_3=3\end{cases} \quad ⑤$$

将方程组⑤中的第 3 个方程分别乘以–17、2 后加到第 2、1 个方程上，消去第 1、2 个方程中的 $x_3$ 项，得

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad=3\\ \quad -7x_2\qquad=-14\\ \qquad\qquad x_3=3\end{cases} \quad ⑥$$

将方程组⑥的第 2 个方程两边同乘以 $-\dfrac{1}{7}$，得

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad=3\\ \qquad x_2\qquad=2\\ \qquad\qquad x_3=3\end{cases} \quad ⑦$$

将方程组⑦中的第 2 个方程乘以–1 加到第 1 个方程上，得

$$\begin{cases}x_1\qquad\qquad=1\\ \qquad x_2\qquad=2\\ \qquad\qquad x_3=3\end{cases} \quad ⑧$$

此即为方程组①的解，而且解是唯一的.

在例 1 的消元过程中，无非是对方程组反复进行以下三种变换：

（1）交换两个方程的位置，如交换第 $i$、$j$ 两方程，记为 $(i)\leftrightarrow(j)$；

（2）某方程两边同乘以一个非零常数，如将第 $i$ 个方程 $k$ 倍，记为 $k(i)$；

（3）某方程两边同乘以一个非零常数后加到另一个方程上，如将第 $j$ 个方程 $k$ 倍再加到第 $i$ 个方程上，记为$(i)+k(j)$.

称方程组的这三种变换为**线性方程组的初等变换**.

方程组② ~ ⑧都是方程组①经初等变换得到的，即由方程组①经加、减消元得到，因此它们都与方程组①有相同的解，称它们为方程组①的同解方程组.

用消元法解线性方程组，实质上是方程组各系数及常数项之间的运算. 因此，非齐次线性方程组的初等变换，完全可以用其增广矩阵的初等行变换来表达，即对方程组的增广矩阵进行初等行变换，将其化为行阶梯形矩阵，用定理 7.1 判断方程组的解的情况. 如果有解，再继续对矩阵进行初等行变换，将之化为行最简形，写出同解方程组，即可求解. 按此方法求解线性方程组，被称为初等变换法求解线性方程组.

于是例 1 的解题过程又可写为

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 7 & 22\\ 1 & 1 & -2 & -3\\ 2 & -5 & 4 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 5 & -2 & 7 & 22\\ 2 & -5 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-5(1)}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -7 & 17 & 37\\ 0 & -7 & 8 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -7 & 17 & 37\\ 0 & 0 & -9 & -27\end{pmatrix}$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=3=n$，所以方程组有唯一解.

继续进行初等行变换，有

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}(3)}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -7 & 17 & 37\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[(2)-17(3)]{(1)+2(3)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -7 & 0 & -14\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}(2)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

上面最后一个矩阵已为行最简形，写出同解方程组

$$\begin{cases}1x_1+0x_2+0x_3=1\\ 0x_1+1x_2+0x_3=2\\ 0x_1+0x_2+1x_3=3\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=3\end{cases}$$

得到方程组的解.

引例的方程组 $\begin{cases}a+\ \ 6b+\ \ 36c=104\\ a+10b+100c=160\\ a+20b+400c=370\end{cases}$ 的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&6&36&104\\1&10&100&160\\1&20&400&370\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)}\begin{pmatrix}1&6&36&104\\0&4&64&56\\0&14&364&266\end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-\frac{7}{2}(2)]{\frac{1}{4}(2)}\begin{pmatrix}1&6&36&104\\0&1&16&14\\0&0&140&70\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{140}(3)}\begin{pmatrix}1&6&36&104\\0&1&16&14\\0&0&1&0.5\end{pmatrix}\xrightarrow[(1)-36(3)]{(2)-16(3)}\begin{pmatrix}1&6&0&86\\0&1&0&6\\0&0&1&0.5\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)-6(2)}\begin{pmatrix}1&0&0&50\\0&1&0&6\\0&0&1&0.5\end{pmatrix}$$

可得 $a=50$， $b=6$， $c=0.5$.

于是所求的总成本函数为　　$y=50+6x+0.5x^2$

**例 2**　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=3\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=1\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7\end{cases}$$

**解**

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\\3&8&-1&1&1\\1&-9&3&7&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(3)-3(1)\\(4)-(1)}]{(2)-(1)}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&-7&2&4&4\\0&-14&4&8&8\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)-2(2)]{(3)-(2)}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为 $r(A)=r(\overline{A})=2<n=4$，所以方程组有无穷多解.

继续进行初等行变换，有

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}(2)}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)-5(2)}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}&\frac{13}{7}&\frac{13}{7}\\0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组

$$\begin{cases}x_1+\frac{3}{7}x_3+\frac{13}{7}x_4=\frac{13}{7}\\x_2-\frac{2}{7}x_3-\frac{4}{7}x_4=-\frac{4}{7}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4\\x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4\end{cases}$$

同解方程组中只有两个方程，只能确定两个未知量，因此将含 $x_3$、$x_4$ 的项移到等式右边，称 $x_3$、$x_4$ 为**自由未知量**.

自由未知量的取值是任意的，它们每取一组值，方程组都会得到一组解. 于是取 $x_3=c_1$、$x_4=c_2$（$c_1$、$c_2$ 为任意常数），方程组的解可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{7} - \dfrac{3}{7}c_1 - \dfrac{13}{7}c_2 \\ x_2 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7}c_1 + \dfrac{4}{7}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

此解也称为方程组的**一般解**或**通解**. 此解也可以表达为如下形式

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{7} \\ -\dfrac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{7} \\ \dfrac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{7} \\ \dfrac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

称为方程组**解的向量形式**.

**注意**

$n$ 元线性方程组当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r < n$ 时，其通解中自由未知量的个数为 $n-r$.

**例 3** 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**解**

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2$， $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$， $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组无解.

**注意**

此题当 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为阶梯形时，同解方程组的第 3 个方程为 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$ ，任何一组未知量的取值都不能满足方程，所以方程组无解.

6.4 节的例 8 中关于投入产出问题的方程组，也可以用初等行变换法求解.

投入产出方程为 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$

亦即

$$\begin{pmatrix} 0.75 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 90 \\ 175 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.1 & -0.1 & 245 \\ -0.2 & 0.8 & -0.1 & 90 \\ -0.1 & -0.1 & 0.8 & 175 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)\leftrightarrow(1)]{10(3)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & -1750 \\ -0.2 & 0.8 & -0.1 & 90 \\ 0.75 & -0.1 & -0.1 & 245 \end{pmatrix}\xrightarrow[(3)-0.75(1)]{(2)+0.2(1)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & -1750 \\ 0 & 1 & -1.7 & -260 \\ 0 & -0.85 & 5.9 & 1557.5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+0.85(2)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & -1750 \\ 0 & 1 & -1.7 & -260 \\ 0 & 0 & 4.455 & 1336.5 \end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4.455}(3)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & -1750 \\ 0 & 1 & -1.7 & -260 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)+1.7(3)]{(1)+8(3)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 650 \\ 0 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

于是得到 $x_1 = 400$， $x_2 = 250$， $x_3 = 300$ .

## 练习 7.3

1．解下列非齐次线性方程组：

（1）$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

2．解下列齐次线性方程组：

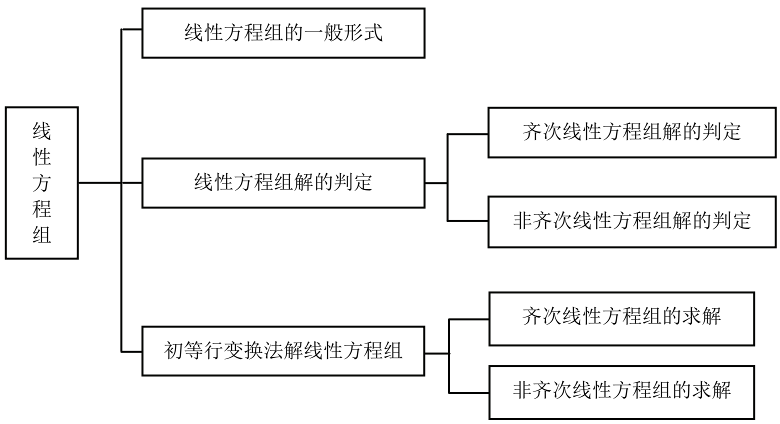
（1）$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

3．当 $a$ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

有解，并求解.

## 本章知识结构图



# 数学史话 6

## 概率论的起源

概率论是研究随机现象数学规律的数学分支. 真正引发数学家研究概率理论的是“合理分配赌注问题”. 1654 年，法国一位名叫梅雷（A.G.C.de Mere，1610—1685 年）的赌徒向他的朋友、数学家帕斯卡（法国，1623—1662 年）重新提出“合理分配赌金问题”，问题的表述更一般化：两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 $s$ 局就算是赢了. 现在一个人赢 $a$（$a<s$）局，另一个人赢 $b$（$b<s$）局，赌博终止，问赌本怎样分才合理？帕斯卡得到这一问题后立即告知费马（法国，1601—1665 年），他们之间从 1654 年 7 月开始频繁通信，展开有关概率论和数学组合的讨论. 费马利用组合学理论解决了这一问题，帕斯卡利用算术方法也得到该问题的解. 通信中的一些结果收入惠更斯（荷兰，1629—1695 年）的同类著作.

1657 年，荷兰数学家惠更斯出版了概率论最早的论著——《论赌博中的计算》.

摘自《数学史简编》.王青建

## 伯努利（Bernoulli，1654—1705 年，瑞士数学家）

詹姆士 · 伯努利，1654 年生于巴塞尔，从 1687 年一直到 1705 年去世，他都在故乡担任数学教授的职位. 在这段时期，他和莱布尼茨一直保持着积极的通信联系，对莱布尼茨表现了衷心的敬佩，并且不久就完全掌握了他的方法. 接着詹姆士 · 伯努利便开始用大家都能懂得的语言去解释新方法的原理. 这就是他在世纪末出版论文集《微分学方法，论反切线法》的目的. 在詹姆士作过显著贡献的许多分支中，有概率论、变分学和解析几何的推广.

詹姆士 · 伯努利，给概率论建立了牢固的数学基础. 他就这个题目给《博学杂志》(1685 年）写过一些论文，其中典型的问题可表示如下：

1. A、B 二人玩一颗骰子,先掷出幺点的人算是胜利者. A 掷一次之后接着 B 也掷一次. 然后 A 掷两次, B 再掷两次. 然后 A 掷三次, B 掷三次, 依次继续下去. 每人获胜的希望多大?

2. 或者，A 先掷一次，B 再掷两次，然后 A 掷三次，B 再掷四次，依次继续下去.

每个这样的问题都悬而未决，直到伯努利自己在 1690 年的《博学者学报》(以后又在《猜测的艺术》) 一书中才发表了问题的答案.

摘自《数学史》.［英］斯科特 著；侯德润，张兰 译

# 第 8 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象量的规律的一门数学学科. 本章主要介绍事件的关系及运算、概率的性质及概率的计算、事件的独立性及 $n$ 重伯努利概型.

## 8.1　随机事件

### 8.1.1　随机试验

在自然界和社会生活中，人们观察的现象一般分为两大类. 一类是**确定性现象**，另一类是**随机现象**. 确定性现象是指在一定条件下必然出现的现象，如上抛的一粒石子必然下落；在标准大气压下，加热到 100℃的水必然沸腾等. 随机现象是指在一定条件下可能发生，也可能不发生的现象，如上抛一枚硬币，可能出现正面（币值面），也可能不出现正面；每掷一颗骰子，可能出现的是 1,2,3,4,5,6 点中的某个点数.

**随机试验**是指对随机现象进行实验或观察的过程，是研究随机现象统计规律性的一种手段. 例如：

（1）有 10000 人参加某保险公司的人身寿命保险，统计在一年中参保者死亡的人数；

（2）某公交车站，记录某一时刻候车的人数；

（3）袋中装有 7 个白球，3 个红球，任取一球，观察其颜色；

（4）某射手对目标进行射击，直到击中目标为止，观察射击次数；

（5）在一批电子管产品中，任取一只，检测其使用寿命.

以上试验都是随机试验，不管试验的结果如何，随机试验具有以下三个特点：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的结果具有多种可能，并且在试验之前可以明确试验的所有可能结果；

（3）每次试验只有一种结果，但在每次试验之前不能确定将出现哪一种结果.

### 8.1.2　随机事件与样本空间

在随机试验中，人们常常关心试验的结果. 在一次试验中可能发生也可能不发生，但在大量试验中具有某种规律性的事件，称为**随机事件**，简称**事件**，一般用大写英文字母 $A$、$B$、$C$、…表示.

**例 1**　袋中装有 7 个白球、3 个红球，任取两球，取出的是“两个白球”，则“两个白球”是随机事件，记作 $A$，表示取到两个白球.

**例 2**　从 3 件次品、7 件正品中，任意抽取 3 件，“有 2 件次品”，“至少有 1 件正品”等. 这些事件都是随机事件. 事件 $A$ 表示有 2 件次品，事件 $B$ 表示至少有 1 件正品.

**例 3**　在黄金周期间，某商场的销售额是随机事件.

随机事件中，有些可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其他事件的组合.

随机事件包括下列四种类型.

（1）**基本事件**：不能再分解成其他事件组合的随机事件. 例如，在掷一颗骰子的试验中，出现“1 点”，出现“2 点”，……，出现“6 点”.

（2）**复合事件**：含有两个或两个以上基本事件的事件. 例如，在掷一颗骰子的试验中，“奇数点”、“小于 4 的点数”；从一批产品中抽取 10 件，“至少有 1 件正品”等，均为复合事件.

（3）**必然事件**：每次试验中必然发生的事件，记作 $\Omega$. 例如，在掷一颗骰子的试验中，“点数小于 7”.

（4）**不可能事件**：每次试验中都不会发生的事件，记作 $\phi$. 例如，掷一颗骰子的试验中，“点数大于 7”.

必然事件 $\Omega$ 与不可能事件 $\phi$ 看作是特殊的随机事件.

在一个随机试验中，每一个基本事件称为样本点，全体样本点的集合，称为**样本空间**，用字母 $\Omega$ 表示. 例如，在掷一颗骰子的试验中，样本空间由“1 点”,“2 点”,……,“6 点”组成.

### 8.1.3 事件的关系与运算

#### 1．事件的包含与相等

如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$（如图 8-1 所示）.

例如，一批产品中有合格品与不合格品，合格品中有一等品、二等品，现从中任取一件，用 $A$ 表示一等品，$B$ 表示合格品，显然 $A \subset B$.

如果事件 $A$ 包含事件 $B$，事件 $B$ 也包含事件 $A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等，记作 $A = B$.

#### 2．事件的和

事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生，即“$A$ 或 $B$”是一个事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和，记作 $A + B$（如图 8-2 所示）.

例如，有甲、乙两人各向同一目标射击一次，令 $A$ 表示甲击中目标，$B$ 表示乙击中目标，$C$ 表示目标被击中，则有 $C = A + B$.

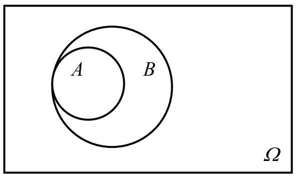



图 8-1

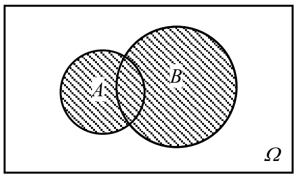



图 8-2

#### 3．事件的积

事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生，即“$A$ 且 $B$”是一个事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积，记作 $AB$（如图 8-3 所示）.

例如，有甲、乙两人各向同一目标射击一次，令 $A$ 表示甲击中目标，$B$ 表示乙击中目标，

$C$ 表示甲、乙都击中目标，则有 $C = AB$ .

关于事件的和与积，可推广到有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，至少有一个发生，记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$；所有事件都发生，记作 $A_1 A_2 \cdots A_n$ .

### 4．事件的差

事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差，记作 $A - B$（如图 8-4 所示）.

例如，在掷一颗骰子的试验中，$A$ 表示出现的点数大于 3，$B$ 表示出现奇数点，则 $A - B$ 表示出现的点数为 4 或 6.

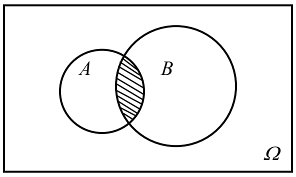


图 8-3

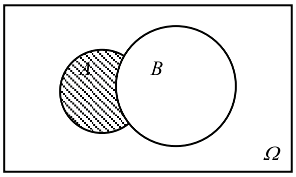


图 8-4

### 5．互不相容事件

如果事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，即 $AB = \phi$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容（如图 8-5 所示）.

例如，在掷一颗骰子的试验中，$A$ 表示出现奇数点，$B$ 表示出现偶数点，则 $AB = \phi$ .

### 6．对立事件

在试验中，事件 $A$ 与 $B$ 必有且仅有一个发生，称事件 $A$ 与事件 $B$ 是对立的，记作 $B = \overline{A}$（如图 8-6 所示）. $A$ 的对立事件是样本空间$\Omega$与事件 $A$ 的差，即$\Omega - A$ . 显然有 $AB = \phi$ 且 $A + B = \Omega$.

例如，抛两枚均匀硬币一次，$A$ 表示正面均向上，则 $A$ 的对立事件 $\overline{A}$ 表示至少有一个反面向上.

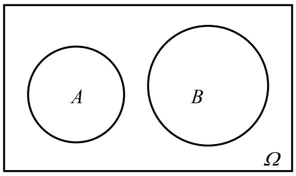


图 8-5

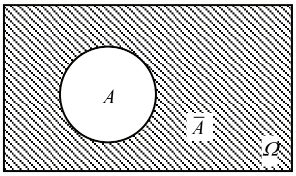


图 8-6

### 7．事件的运算规律

交换律　$A + B = B + A$；$AB = BA$

结合律　$(A + B) + C = A + (B + C)$；$(AB)C = A(BC)$

分配律　$A(B + C) = AB + AC$

摩根律　$\overline{A + B} = \overline{A}\ \overline{B}$；$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

例 4　从一批产品中，每次取出一个产品进行检验（不放回），用事件 $A_i$（$i = 1,2,3$）表示第 $i$ 次取到合格品. 试用 $A_1, A_2, A_3$ 表示下列事件：

（1）$B$ 表示三次都取到合格品；

（2）$C$ 表示三次至少有一次取到合格品；

（3）$D$ 表示三次恰有一次取到合格品；

（4）$E$ 表示三次最多有一次取到合格品.

**解** （1）$B = A_1 A_2 A_3$

（2）$C = A_1 + A_2 + A_3$

（3）$D = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$

（4）$E = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

**例 5** 甲、乙两人各向同一目标射击一次，$A$ 表示甲击中目标，$B$ 表示乙击中目标，说明下列事件的含义：

（1）$A+B$ （2）$AB$ （3）$\overline{A}\overline{B}$ （4）$\overline{A} + \overline{B}$ （5）$\overline{A + B}$

**解** （1）$A + B$ 表示甲、乙至少有一人击中目标；

（2）$AB$ 表示甲、乙都击中目标；

（3）$\overline{A}\overline{B}$ 表示甲、乙都没有击中目标；

（4）$\overline{A} + \overline{B}$ 表示甲、乙至少有一人没有击中目标；

（5）$\overline{A + B}$ 表示甲、乙都没有击中目标，由摩根律知，$\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$，所以此事件与事件 $\overline{A}\overline{B}$ 相等.

## 练习 8.1

1．判断下列事件是不是随机事件.

（1）掷一枚均匀的骰子，“出现 6 点”；

（2）天气预报，“明天降小雨”；

（3）掷两枚骰子，“点数之和小于 7”；

（4）“在天津地区，将水加热到 100℃，水变成蒸汽”；

（5）一批产品中有正品和次品，现从中任意抽取一件是“次品”；

（6）某公共汽车站恰有 5 人等车.

2．设 $A,B,C$ 为三个随机事件，试用 $A,B,C$ 表示下列事件：

（1）$A,B,C$ 至少有一个发生；

（2）$A, B, C$ 都不发生；

（3）$A$ 不发生，而 $B, C$ 至少有一个发生.

3．设 $\Omega$ 表示样本空间，$\phi$ 表示不可能事件，$A$ 表示一个随机事件，求下列事件的运算结果.

（1）$A + \overline{A} =$________；

（2）$A\overline{A} =$________；

（3）$A + \Omega =$________；

（4）$A + A =$________；

（5）$AA =$________；

（6）$A - A =$________.

4．甲、乙两人对同一目标各射击一次，用 $A$ 表示甲击中，$B$ 表示乙击中，试说出 $A + B$，$AB$，$\overline{A}\overline{B}$，$A\overline{B}$ 的含义.

5．掷一颗骰子，观察出现的点数，设事件 $A$ 表示不超过 3 点，$B$ 表示 6 点，$C$ 表示 4 点，$D$ 表示不超过 5 点. 试问哪些事件是对立事件？哪些事件互不相容？

## 8.2　随机事件的概率

### 8.2.1　概率的古典定义

概率的古典定义起源于 17 世纪欧洲盛行的抛硬币、掷骰子、摸球等赌博游戏，这种游戏只能在特定的条件下进行，在随机试验中具有以下特点：

（1）试验的基本事件的总数是有限的；

（2）每个基本事件发生的可能性是相等的.

称满足上述特点的试验模型为**古典概型**.

**定义 8.1**　如果古典概型中的所有基本事件的总数是 $n$，事件 $A$ 包含的基本事件数是 $m$，则事件 $A$ 的**概率**为

$$P(A)=\frac{\text{组成}A\text{的基本事件个数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n} \tag{8-1}$$

此定义称为概率的古典定义.

**例 1**　袋中装有 3 个白球，2 个黑球，现从中任取两个，求：

（1）取出的是两个白球的概率 $P_1$；

（2）取出的是一个白球和一个黑球的概率 $P_2$.

**解**　设 $A$ 表示取出两个白球，$B$ 表示取出一个白球和一个黑球.

试验的基本事件总数 $n=\mathrm{C}_5^2$，$A$ 的基本事件个数 $m_1=\mathrm{C}_3^2$，$B$ 的基本事件个数 $m_2=\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1$，由式（8-1）可得

（1）$P_1=\dfrac{m_1}{n}=\dfrac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^2}=\dfrac{3}{10}=0.3$

（2）$P_2=\dfrac{m_2}{n}=\dfrac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_5^2}=\dfrac{6}{10}=0.6$

**例 2**　设 100 个同一产品中有 5 个废品，每次从中任取 3 个进行检验，求：

（1）任取 3 个恰有 1 个是废品的概率；

（2）任取 3 个都是正品的概率.

**解**　设 $A_1$ 表示任取 3 个恰有 1 个是废品，应有 $\mathrm{C}_{95}^2\,\mathrm{C}_5^1$ 种方法；$A_2$ 表示任取 3 个都是正品，应有 $\mathrm{C}_{95}^3$ 种方法；从 100 个产品中任取 3 个，共有 $\mathrm{C}_{100}^3$ 种不同的抽取方法. 由式（8-1）可得

（1）$P(A_1)=\dfrac{\mathrm{C}_{95}^2\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_{100}^3}\approx 0.138$

（2）$P(A_2)=\dfrac{\mathrm{C}_{95}^3}{\mathrm{C}_{100}^3}\approx 0.856$

**例 3**　今有七把钥匙，其中一把能打开门锁，现逐把试，求恰好第三次打开门锁的概率.

**解**　恰好第三次打开门锁是指从不能打开门锁的六把钥匙中抽取了前两次（不放回），第三次恰好抽到能打开门锁的钥匙.

设 $A$ 表示恰好第三次打开门锁，$A$ 的基本事件个数为 $m=\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_1^1=30$，基本事件总数为 $n=\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_5^1=210$，由（8-1）式可得

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$$

或
$$P(A)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$$

大家试求一下，恰好第二次打开门锁的概率或恰好第四次打开门锁的概率.

### 8.2.2 概率的统计定义

随机试验并不仅限于古典概型，在实际工作中，为了求出随机事件概率的近似值，往往采用对随机事件进行大量重复观察的方法.

在同一条件下，设事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中发生了 $m$ 次（$m$ 称作事件 $A$ 发生的频数），则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 $A$ 发生的**频率**.

**定义 8.2** 在随机试验中，随着试验次数 $n$ 的增大，事件 $A$ 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 在某一常数 $p$ 附近摆动，则称常数 $p$ 为事件 $A$ 发生的**概率**，记作

$$P(A)=p$$

概率的统计定义实际给出了计算随机事件 $A$ 概率近似值的方法：当试验次数 $n$ 充分大时，可以用频率 $\frac{m}{n}$ 作为概率 $P(A)$ 的近似值. 例如，某类种子的发芽率；某种疾病的死亡率；某种新药的有效率；新生婴儿性别的比率等分别作为其相应概率的近似值.

**例 4** 某一妇产医院对出生婴儿调查，可以看到新生男孩的频率是稳定的，生男孩的概率近似值是 0.515（如表 8-1 所示）.

表 8-1

| 出生年份 | 新生儿总数 | 新生儿分类 | | 频率（%） | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 男孩数 | 女孩数 | 男孩 | 女孩 |
| 1977 | 3670 | 1883 | 1787 | 51.31 | 48.69 |
| 1978 | 4250 | 2177 | 2073 | 51.22 | 48.78 |
| 1979 | 4055 | 2138 | 1917 | 52.73 | 47.27 |
| 1980 | 5844 | 2955 | 2889 | 50.56 | 49.44 |
| 1981 | 6344 | 3271 | 3073 | 51.56 | 48.44 |
| 1982 | 7231 | 3722 | 3509 | 51.47 | 48.53 |
| 总数 | 31 394 | 16 146 | 15 248 | 51.48 | 48.52 |

### 8.2.3 概率的基本性质

**性质 1** 任何事件 $A$ 的概率 $P(A)=p$，都有

$$0\leqslant p\leqslant 1$$

**性质 2** 必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，即

$$P(\Omega)=1,\quad P(\phi)=0$$

**性质 3** 如果事件 $A$、$B$ 满足 $A\subset B$，则有

$$P(A) \leqslant P(B)\text{，}\ P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{8-2}$$

**性质 4**　如果两个事件 $A$、$B$ 互不相容，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{8-3}$$

**推广**：如果 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{8-4}$$

**性质 5**　对任意一个事件的对立事件，有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{8-5}$$

**性质 6**　若 $A$、$B$ 为任意两个事件，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{8-6}$$

**例 5**　某设备由甲、乙两元件组成，由于某种原因出现故障，甲出现故障的概率是 0.4，乙出现故障的概率是 0.3，甲、乙同时出现故障的概率是 0.2. 求由于这种原因导致设备出现故障时至少有一个元件出现故障的概率.

**解**　设 $A$ 表示甲出现故障，$B$ 表示乙出现故障，$AB$ 表示甲、乙同时出现故障，$A+B$ 表示甲、乙至少有一个出现故障，根据题意及式（8-6）有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0.2=0.5$$

### 练习 8.2

1．袋中装有 3 个红球，2 个白球，现从中任取 2 个球，求：

（1）2 个球都是红球的概率；

（2）2 个球都是白球的概率；

（3）恰有 1 个红球、1 个白球的概率.

2．掷 2 枚均匀的骰子，出现点数和为 3 的概率是______，点数和为 11 的概率是______，点数和大于 2 的概率是______.

3．设 10 个产品中有 7 个正品，3 个次品.

（1）不放回地每次从中任取 1 个，共取 3 次，求取到 3 个次品的概率；

（2）每次从中任取 1 个，有放回地取 3 次，求取到 3 个次品的概率.

4．某汽车修理厂的经理发现，汽车使用 5 年后，需要更换轮胎的概率为 0.6，需要换闸的概率为 0.1，两者都需要换的概率为 0.02. 求汽车需要换轮胎或换闸的概率.

5．设 $A$、$B$ 是两个事件，其中 $P(A)=0.5$，$P(A+B)=0.8$.

（1）若 $A$、$B$ 互不相容，求 $P(B)$；

（2）若 $A \subset B$，求 $P(B)$.

6．某城市有 50%的居民订日报，有 65%的居民订晚报，有 85%的居民这两种报纸至少订一种. 求该城市同时订这两种报纸的居民所占百分比.

## 8.3　条件概率与概率的乘法公式

### 8.3.1　条件概率

在实际问题中，常常要考虑在一个事件 $B$ 已发生的条件下，另一个事件 $A$ 发生的概率，记作 $P(A|B)$. 先看一个例子.

**例 1**　设袋中有 10 个球，其中 6 个红球，4 个白球，又知红球中有 2 个玻璃球，4 个木质球；白球中有 1 个玻璃球，3 个木质球. 现从中任取 1 个球，求：

（1）该球是红球的概率；

（2）已知是玻璃球的情况下，该球是红球的概率.

**解**　由题意知，球的分类如下：

| | 红　色 | 白　色 |
|---|---|---|
| 玻璃球 | 2 | 1 |
| 木质球 | 4 | 3 |

设 $A$ 表示任取 1 个球是红球，$B$ 表示任取 1 个球是玻璃球，由式（8-1）可得

（1）$P(A)=\dfrac{6}{10}$

（2）从表中可以看出，玻璃球共有 3 个，而玻璃球中的红球有 2 个，则有

$$P(A\mid B)=\frac{2}{3}$$

**定义 8.3**　设 $A$、$B$ 为两个事件，在事件 $B$ 发生的条件下，事件 $A$ 发生的概率，称为事件 $A$ 在给定 $B$ 下的**条件概率**，计算公式为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\qquad (P(B)\neq 0)\tag{8-7}$$

同理，在事件 $A$ 已经发生的条件下 $B$ 发生的概率的计算公式为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\qquad (P(A)\neq 0)\tag{8-8}$$

**例 2**　某地区气象台统计，该地区下雨的概率是 0.4，刮风（三级以上）的概率是 0.2，既刮风又下雨的概率是 0.1，求：

（1）在刮风的条件下，下雨的概率；

（2）在下雨的条件下，刮风的概率.

**解**　设 $A$ 表示下雨，$B$ 表示刮风，$P(A\mid B)$ 表示在刮风的条件下，下雨的概率；$P(B\mid A)$ 表示在下雨的条件下，刮风的概率. 由题意知，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.2$，$P(AB)=0.1$，则有：

（1）$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.1}{0.2}=0.5$

（2）$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25$

**例 3**　市场销售的灯泡是由甲、乙两个厂家生产的，甲厂产品占 70%，甲厂产品的合格率为 95%，乙厂产品的合格率为 80%，现从中任取一个灯泡，求：

（1）甲厂产品的不合格率；

（2）乙厂产品的合格率.

**解**　设 $A$ 表示甲厂生产的产品，$\overline{A}$ 表示乙厂生产的产品；$B$ 表示合格灯泡，$\overline{B}$ 表示不合格灯泡.

由题意知，$P(A)=0.7$，$P(\overline{A})=0.3$，$P(B\mid A)=0.95$，$P(B\mid\overline{A})=0.8$.

（1）甲厂产品的不合格率为

$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)=1-0.95=0.05$$

（2）乙厂产品的合格率为

$$P(B\,|\,\overline{A})=0.8$$

### 8.3.2　概率乘法公式

由式（8-7）、式（8-8）得

$$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)\qquad（P(A)\neq 0）\tag{8-9}$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A\,|\,B)\qquad（P(B)\neq 0）\tag{8-10}$$

即两个事件 $A$、$B$ 乘积的概率等于其中一个事件的概率（其概率不为 0）乘以另一个事件在已知前一个事件发生条件下的概率.

三个事件概率的乘法公式为

$$P(ABC)=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,AB)$$

**例 4**　10 个考签中有 4 个难签，3 人参加抽签（不放回），甲、乙、丙依次抽签. 设 $A$、$B$、$C$ 分别表示甲、乙、丙各抽到难签.

求：（1）$P(A)$；（2）$P(AB)$；（3）$P(\overline{A}B)$；（4）$P(ABC)$.

**解**　（1）$P(A)=\dfrac{4}{10}=0.4$

（2）$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{2}{15}$

（3）$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{15}$

（4）$P(ABC)=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,AB)=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{3}{9}\times\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{30}$

### 8.3.3　全概率公式

**定理 8.1**　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1，\ P(A_i)>0\ （i=1,2,\cdots,n）$$

则对任意一个事件 $B$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\,|\,A_i)\tag{8-11}$$

称式（8-11）为**全概率公式**，它是概率论的一个基本公式，当计算事件 $B$ 的概率较复杂时，用全概率公式计算比较容易.

特别地，

$$P(B)=P(A)P(B\,|\,A)+P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})\tag{8-12}$$

**例 5**　10 个考签中 4 个难签，3 人参加抽签（不放回），甲、乙、丙依次抽取，求乙抽到难签的概率.

**解**　设 $A$ 表示甲抽到难签，$B$ 表示乙抽到难签，根据题意 $P(A)=\dfrac{4}{10}$，$P(\overline{A})=\dfrac{6}{10}$，$P(B|A)=\dfrac{3}{9}$，$P(B\,|\,\overline{A})=\dfrac{4}{9}$. 由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B\,|\,A)+P(\overline{A})P(B\,|\,\overline{A})=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{10}$$

大家可以试求丙抽到难签的概率仍是$\frac{4}{10}$. 由此说明，抽签在概率意义下合理.

**例 6** 某厂有 4 个车间生产同一产品，生产的产品分别占总产品的 35%，20%，15%，30%，各车间的次品率分别为 5%，3%，2%，4%，现从总产品中任取一件，求此产品为次品的概率.

**解** 设$A_i$表示第$i$个车间生产的产品（$i=1,2,3,4$），$B$表示任取一件产品为次品，由全概率公式知

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)\\&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)\\&=35\%\times5\%+20\%\times3\%+15\%\times2\%+30\%\times4\%\\&=0.0385\end{aligned}$$

### 练习 8.3

1．排列以下概率（由大到小的顺序）：

$$P(A+B)，P(AB)，P(A)+P(B)$$

2．在对 100 家公司的最新调查中发现，有 40%的公司大力研究广告的效果；有 50%的公司在进行短期销量预测；而有 30%的公司在从事这两项研究. 现任选一家公司，求：

（1）它研究广告效果或短期销量预测的百分比；

（2）在短期销售预测的条件下，研究广告效果的百分比；

（3）在研究广告效果的条件下，进行短期销售预测的百分比.

3．设$A$、$B$是两个事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(B|A)=0.4$，求：

（1）$P(AB)$　（2）$P(A+B)$　（3）$P(A|B)$

4．已知盒中有 10 只电子元件，其中 6 只是正品，现从中做无放回抽样两次，每次取 1 只，求：

（1）第一次取到正品的概率；

（2）当第一次取到正品时，第二次取到正品的概率；

（3）两次都取到正品的概率.

5．设袋中有 10 个球，其中有 2 个是红球，8 个白球，甲、乙两人依次从袋中取 1 个球. 求乙取到红球的概率.

6．设某厂有甲、乙两个车间生产同一种产品，产量依次占 40%、60%，各车间的次品率依次为 4%、5%，现从全厂的产品中任取一件进行检验. 求此产品为次品的概率.

## 8.4 事件的独立性

### 8.4.1 事件的独立

通常，事件$A$的发生影响事件$B$发生的概率，即$P(B|A)\neq P(B)$. 有时$P(B|A)=P(B)$，即事件$A$的发生与否不影响事件$B$发生的概率.

**定义 8.4** 如果事件$A$发生的可能性不受事件$B$发生与否的影响，即$P(A|B)=P(A)$，则称事件$A$对于事件$B$独立，同时事件$B$对于事件$A$也独立. 称事件$A$与$B$**相互独立**，简称

事件 $A$ 与 $B$ **独立**.

关于独立性的几个结论.

（1）必然事件$\Omega$及不可能事件$\phi$与任何事件独立.

（2）如果事件 $A$ 与 $B$ 独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{8-13}$$

（3）如果事件 $A$ 与 $B$ 独立，则 $A$ 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $B$ 中的各对事件也相互独立.

（4）如果事件 $A$ 与 $B$ 独立，则加法公式可为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B) \tag{8-14}$$

或

$$P(A+B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B}) \tag{8-15}$$

（5）如果 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意一个事件发生的可能性都不受其他事件发生与否的影响，则称这 $n$ 个事件相互独立，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{8-16}$$

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n) \tag{8-17}$$

**例 1**　甲、乙两人独立向同一目标各射击一次，甲击中目标的概率为 0.8，乙击中目标的概率为 0.7. 求：

（1）甲、乙两人都击中目标的概率；

（2）甲、乙两人至少有一人击中目标的概率.

**解**　设 $A$ 表示甲击中目标，$B$ 表示乙击中目标，且 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.7$.

（1）甲、乙两人是否击中目标是独立的，$AB$ 表示甲、乙两人都击中目标，其概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.7=0.56$$

（2）$A+B$ 表示甲、乙两人至少有一人击中目标，其概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.8+0.7-0.8\times0.7=0.94$$

**例 2**　加工一个零件需要三道工序，三道工序不出次品的概率依次为 0.9、0.8、0.85，假定每道工序是否出次品是相互独立的. 求经过三道工序不出次品的概率.

**解**　设 $A$ 表示第一道工序不出次品，$B$ 表示第二道工序不出次品，$C$ 表示第三道工序不出次品，$ABC$ 表示三道工序不出次品.

由题意知 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.85$. 则有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.9\times0.8\times0.85=0.612$$

## 8.4.2　伯努利概型

**定义 8.5**　在随机试验中事件 $A$ 只有两个结果，即 $A$ 发生或 $\overline{A}$ 发生，称为**伯努利试验**. 将这样的试验，独立地重复进行 $n$ 次，称为 $n$ **重伯努利概型**.

在 $n$ 重伯努利试验中，事件 $A$ 可能发生 0 次或 1 次，…，或 $n$ 次. 主要讨论，在 $n$ 次试验中，事件 $A$ 恰好发生 $k$（$0\leqslant k\leqslant n$）次的概率 $P_n(k)$.

**定理 8.2**　如果每次试验中，$A$ 发生的概率为 $p$（$0<p<1$），则在 $n$ 重伯努利试验中，事件 $A$ 发生 $k$ 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n) \tag{8-18}$$

式中，$p=1-q$.

**例 3**　某种商品的合格率为 0.8，一顾客购买该商品 6 件. 求：

（1）6 件商品中恰有 2 件合格的概率；

（2）6 件商品中最多有 2 件合格的概率；

（3）6 件商品全部合格的概率.

**解** 购买 6 件商品，可看作 6 重伯努利试验. 由式（8-18）可知

（1）6 件商品中恰有 2 件合格的概率为

$$P_6(2)=\mathrm{C}_6^2(0.8)^2(0.2)^4=0.015\,36$$

（2）6 件商品中最多有 2 件合格的概率为

$$\begin{aligned}P_6(2)+P_6(1)+P_6(0)&=\mathrm{C}_6^2(0.8)^2(0.2)^4+\mathrm{C}_6^1(0.8)^1(0.2)^5+\mathrm{C}_6^0(0.8)^0(0.2)^6\\&=0.015\,36+0.001\,536+0.000\,064=0.016\,96\end{aligned}$$

（3）6 件商品全部合格的概率为

$$P_6(6)=\mathrm{C}_6^6(0.8)^6(0.2)^0=0.262\,144$$

**例 4** 某种药品对疾病的有效率是 85%，现有 10 个患者同时服用这种药. 求在这 10 名患者中该药品至少对 8 人有效的概率.

**解** 把 10 个患者服用这种药的有效情况，看作 10 重伯努利试验，“至少有 8 人有效”的概率为

$$\begin{aligned}P_{10}(8\leqslant k)&=\sum_{k=8}^{10}\mathrm{C}_{10}^k(0.85)^k(0.15)^{10-k}\\&=\mathrm{C}_{10}^8 0.85^8 0.15^2+\mathrm{C}_{10}^9 0.85^9 0.15^1+\mathrm{C}_{10}^{10} 0.85^{10} 0.15^0\\&=0.8202\end{aligned}$$

## 练习 8.4

1．加工某种零件需要两道工序，设第一道工序出现次品的概率为 0.02，第二道工序出现次品的概率为 0.03，各道工序互不影响，求：

（1）加工出来的零件是次品的概率；

（2）加工出来的零件是正品的概率.

2．假设有甲、乙两批种子，发芽率分别是 0.8 和 0.9，现从两批种子中各随机取一粒，求：

（1）两粒都发芽的概率；

（2）恰有一粒发芽的概率；

（3）至少有一粒发芽的概率.

3．某射手向某一目标射击，命中率为 0.8，连续射 3 发子弹，求：

（1）3 发全中的概率；

（2）至少有 1 发命中的概率；

（3）3 发中有 2 发命中的概率.

4．某公司招聘职员，需要通过三项考核，三项考核的通过率分别是 0.6、0.8、0.85. 求招聘员工时的淘汰率.

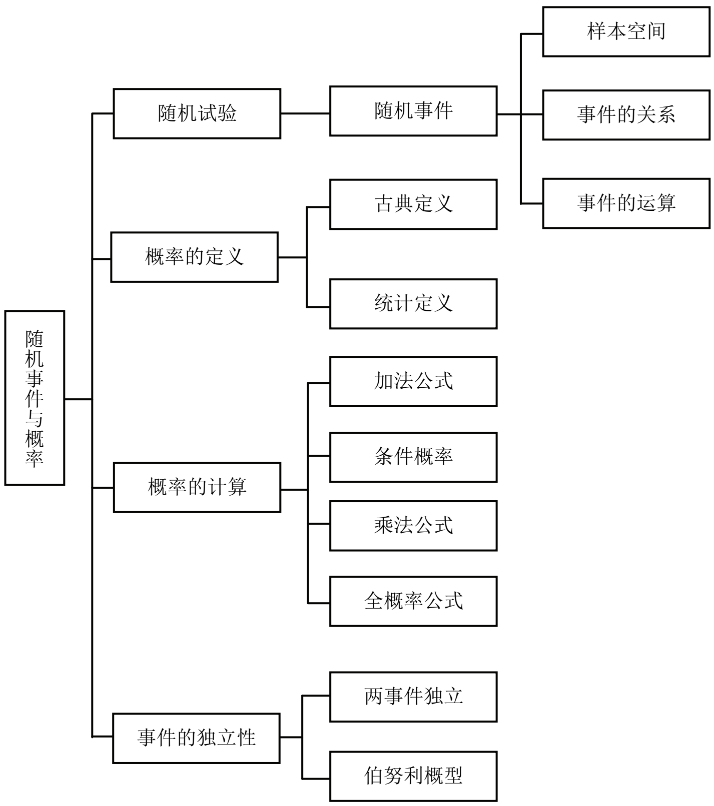
5．已知 100 件产品中有 5 个次品，现从中任取 1 个，有放回地取 3 次. 求所取的 3 个产品中恰有 2 个正品的概率.

6．一批产品中有 20%的次品，现进行抽样检查，共抽得 5 件样品，求：

（1）5 件样品中恰有 2 件次品的概率；

（2）5 件样品中至多有 2 件次品的概率.

## 本章知识结构图



# 第 9 章　随机变量及其数字特征

本章主要介绍随机变量的概念及其常见的重要分布——**二项分布**、**正态分布**和随机变量的数字特征——**期望**、**方差**.

## 9.1　随机变量的概念

### 9.1.1　随机变量

**随机变量**是指在随机试验中，随着试验结果的不同而随机取各种不同的数值，而且对每一数值或某一范围内的值都有相应概率的变量. 随机变量一般用大写字母 $X$、$Y$、$Z$ 等表示，随机变量的观测值一般用小写字母 $x$、$y$、$z$ 等表示.

**例 1**　在 10 件产品中有 3 件一等品，现任取 2 件，用随机变量 $X$ 表示 2 件产品中含有一等品的件数，则 $X$ 可能取 0、1、2 中的一个值，$X$ 取不同的值就表示不同的随机事件. "$X=0$"表示"2 件产品中没有一等品"；"$X=1$"表示"2 件产品中恰有 1 件一等品"；"$X=2$"表示"2 件产品都是一等品"，它们的概率分别为

$$P(X=0)=\frac{\mathrm{C}_3^0\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^1}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^0}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{1}{15}$$

**例 2**　某射手击中目标的概率为 0.7，现连续射击 10 次，用随机变量 $Y$ 表示命中次数，$Y$ 取值为 $0,1,2,\cdots,10$ 中的一个，"$Y=k$"表示"在 10 次射击中，恰有 $k$ 次命中"（$k=0,1,2,\cdots,10$），由于各次射击是独立的，所以根据伯努利试验的计算公式知

$$P(Y=k)=\mathrm{C}_{10}^k p^k(1-p)^{10-k}=\mathrm{C}_{10}^k 0.7^k 0.3^{10-k}$$

如"$Y=5$"表示"在 10 次射击中，恰有 5 次命中"，其概率为

$$P(Y=5)=\mathrm{C}_{10}^5 0.7^5 0.3^5=0.1029$$

**例 3**　从一批电灯泡中任取一个，观测其寿命，假设电灯泡的寿命不超过 10 000 小时，用随机变量 $Z$ 表示电灯泡的寿命，则 $Z$ 可能取[0,10 000]上的任意一个实数.

"$Z=1500$"表示寿命为 1500 小时；

"$Z=2000$"表示寿命为 2000 小时；

"$Z\leqslant 5000$"表示寿命不超过 5000 小时.

**例 4**　某长途汽车站，每 30 分钟发出一班车，候车室的旅客等车所用时间用 $W$ 表示，

它可以取[0,30]之间的任意一个数，显然$W$是一个随机变量.

按照随机变量取值的情况，可以将随机变量分为三类：

（1）离散型随机变量，随机变量取值是可以逐个列举出来的，如例 1、例 2.

（2）连续型随机变量，随机变量可以在整个数轴上或某个实数区间内连续取值，如例 3、例 4.

（3）其他类型随机变量.

在实际中经常遇到的是离散型随机变量和连续型随机变量，本章只讨论这两种随机变量.

## 9.1.2　分布函数

### 1．分布函数的概念

**定义 9.1**　设$X$是一个随机变量（离散型、连续型均可），对任意实数$x$，函数

$$F(x)=P(X\leqslant x) \tag{9-1}$$

称为随机变量$X$的**分布函数**.

由分布函数的定义知

$$P(a<X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a)=F(b)-F(a) \tag{9-2}$$

当$X$是离散型随机变量时，其分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_k\leqslant x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k \tag{9-3}$$

关于连续型随机变量分布函数的计算将在本章 9.3 节中介绍.

### 2．分布函数的性质

（1）对于任意实数$x$，均有$0\leqslant F(x)\leqslant 1$成立，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0，\quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

（2）$F(x)$是$x$的不减函数，即当$x_1<x_2$时，有$F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

（3）当$X$是离散型随机变量时，$F(x)$有若干个间断点，而在其间断点上是右连续的.

**例 5**　掷一枚硬币，观察正反面情况，用$X$表示出现正面的次数，求$X$的分布函数.

**解**　显然$X$只可能取两个值 0 和 1，“$X=0$”表示出现反面，“$X=1$”表示出现正面，它们的概率分别为

$$P(X=0)=\frac{1}{2}，\quad P(X=1)=\frac{1}{2}$$

由于随机变量$X$只能取两个值 0 和 1，且 0 和 1 将实数轴分为三部分：

$$x<0，\quad 0\leqslant x<1，\quad x\geqslant 1$$

当$x<0$时，$F(x)=P(X\leqslant x)=P(\phi)=0$；

当$x=0$时，$F(x)=F(0)=P(X\leqslant 0)=P(X=0)=\dfrac{1}{2}$；

当$0<x<1$时，$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)=\dfrac{1}{2}$；

当$x=1$时，$F(x)=F(1)=P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)=1$；

当$x>1$时，$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

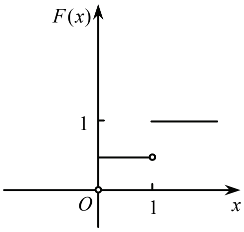


图 9-1

综上所述，$X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

其分布函数的图像如图 9-1 所示，分布函数 $F(x)$ 是一个分段函数，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,1]$.

## 练习 9.1

已知随机变量 $X$ 取值为 1、2、3、4、5，取各值的概率分别如下表：

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

$F(x)$ 为 $X$ 的分布函数，则 $F(2)=$________，$F(3.5)=$________，$F(5)=$________，$F(6)=$_______.

# 9.2 离散型随机变量的分布

## 9.2.1 离散型随机变量的概率分布

### 1. 概率分布

**定义 9.2** 设 $X$ 是离散型随机变量，它可能取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$. 而 $X$ 取这些不同值的概率为

$$P(X=x_k)=p_k,\ k=1,2,3,\cdots \tag{9-4}$$

则式（9-4）称为离散型随机变量 $X$ 的**概率分布**，也称为**概率函数**.

离散型随机变量 $X$ 的概率分布可用表格直观表示，称为 $X$ 的**概率分布表**.

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ |

上述定义中，$X$ 也可能取有限个值.

### 2. 概率分布的基本性质

（1）$p_k\geqslant 0$，$k=1,2,3,\cdots$

（2）$\sum\limits_{k} p_k=1$

**例 1** 在掷一枚骰子的试验中，试写出可能出现的点数的概率分布.

**解** 设 $X$ 表示掷一枚骰子可能出现的点数，显然 $X$ 的所有可能取值为 1,2,3,4,5,6.

由古典概型知，$X$ 取每一个值的概率均为 $\dfrac{1}{6}$.

$X$ 的概率分布表为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**例 2**　某人打靶，命中环数 $X$ 的概率分布表为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0 | 0 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.02 | 0.10 | 0.30 | 0.35 | 0.15 | 0.05 |

求：（1）至少命中 9 环的概率；

（2）命中少于 6 环的概率.

**解**　（1）“至少命中 9 环”是指“命中 9 环”或“命中 10 环”，且互不相容，其概率为

$$P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0.15 + 0.05 = 0.20$$

（2）“命中少于 6 环”是指命中环数为 0 环、1 环、2 环、3 环、4 环、5 环，并且两两事件互不相容，其概率为

$$P(X < 6) = \sum_{k=0}^{5} P(X = k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 5)$$
$$= 0 + 0 + 0.01 + 0.01 + 0.01 + 0.02 = 0.05$$

**例 3**　社会定期发行某种奖券，每券 2 元，中奖率为 $p$，某人每次购买 1 张奖券，如果没有中奖下次再继续购买 1 张，直到中奖为止. 试写出购买次数 $X$ 的概率分布.

**解**　随机变量 $X$ 取值应为大于零的正整数.

“$X = 1$”表示第一次购买就中奖了，其概率为

$$P(X = 1) = p$$

“$X = 2$”表示购买了两次奖券，第一次没中奖，而第二次中奖了，各期奖券中奖与否是相互独立的，其概率为

$$P(X = 2) = (1 - p)p$$

“$X = k$”表示购买了 $k$ 次奖券，第一次没中奖，第二次没中奖，……，直到第 $k$ 次才中奖，各期奖券中奖与否是相互独立的，其概率为

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

综上所述购买奖券次数 $X$ 的概率分布为

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1} p ，\quad i = 1, 2, 3, \cdots, k$$

其概率分布表为

| $X$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $(1-p)p$ | $\cdots$ | $(1-p)^{k-1}p$ |

## 9.2.2　二项分布与泊松分布

### 1．二项分布

如果离散型随机变量 $X$ 的概率分布为

$$P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} \tag{9-5}$$

式中，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$，$0 < p < 1$，$q = 1 - p$. 称 $X$ 服从参数 $n$、$p$ 的**二项分布**，简记作 $X \sim B(n, p)$.

二项分布的实际背景是 $n$ 重伯努利概型，用 $X$ 表示在随机试验中 $A$ 发生的次数，即 $X$ 可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$.

**例 4** 某地区每天保证用水量的概率为 0.75，试求：

（1）在最近 7 天内用水正常的天数的分布；

（2）7 天内至少有 2 天用水正常的概率.

**解** 设用水正常的天数为 $X$，$X$ 取值为 $0,1,\cdots,7$.

由题意知，$X$ 服从参数 $n=7$、$p=0.75$ 的二项分布，即 $X\sim B(7,0.75)$.

（1）由二项分布的概率分布知

$$P(X=0)=\mathrm{C}_7^0\,0.75^0\,0.25^7=0.0001$$

$$P(X=1)=\mathrm{C}_7^1\,0.75^1\,0.25^6=0.0013$$

$$P(X=2)=\mathrm{C}_7^2\,0.75^2\,0.25^5=0.0115$$

$$P(X=3)=\mathrm{C}_7^3\,0.75^3\,0.25^4=0.0577$$

$$P(X=4)=\mathrm{C}_7^4\,0.75^4\,0.25^3=0.1730$$

$$P(X=5)=\mathrm{C}_7^5\,0.75^5\,0.25^2=0.3114$$

$$P(X=6)=\mathrm{C}_7^6\,0.75^6\,0.25^1=0.3114$$

$$P(X=7)=\mathrm{C}_7^7\,0.75^7\,0.25^0=0.1335$$

其概率分布表为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.0001 | 0.0013 | 0.0115 | 0.0577 | 0.1731 | 0.3114 | 0.3114 | 0.1335 |

（2）“7 天内至少有 2 天用水正常”是指正常用水的天数在 2 天以上（包括 2 天），即取 $X\geqslant 2$.

**解法一** 
$$\begin{aligned}P(X\geqslant 2)&=\sum_{k=2}^{7}P(X=k)\\&=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=7)\\&=0.0115+0.0577+0.1731+0.3114+0.3114+0.1335\\&=0.9986\end{aligned}$$

**解法二** 因为“7 天内至少有 2 天用水正常”的对立事件为“7 天内最多有 1 天用水正常”，即“$X\geqslant 2$”的对立事件是“$X<2$”，所以有

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 2)&=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)\\&=1-\mathrm{C}_7^0 0.75^0 0.25^7-\mathrm{C}_7^1 0.75^1 0.25^6\\&=1-0.0001-0.0013\\&=0.9986\end{aligned}$$

**例 5** 有 10 台机床各自独立工作，因修理调整等原因，每台机床停车的概率为 0.2，求：（1）同时停车台数 $X$ 的概率分布；

（2）10 台机床恰有 1 台停车的概率；

（3）10 台机床最多有 1 台停车的概率.

**解** 设有 $X$ 台机床停车，由题意知，$X$ 服从参数 $n=10$、$p=0.2$ 的二项分布，即 $X\sim B(10,0.2)$.

（1）由二项分布的概率分布知

$$P(X=k)=\mathrm{C}_{10}^{k}0.2^{k}0.8^{10-k}\text{，}\quad k=0,1,2,\cdots,10$$

计算后得概率分布表

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.11 | 0.27 | 0.30 | 0.20 | 0.09 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

（2）“10 台机床恰有 1 台停车”是指只有 1 台停车，等价于 $X$ 取值为 1，即

$$P(X=1)=\mathrm{C}_{10}^{1}0.2^{1}0.8^{9}=0.2684$$

（3）“10 台机床最多有 1 台停车”是指“有 0 台停车”或“有 1 台停车”，等价于 $X$ 取 0 及 1.

$$\begin{aligned}P(X\leqslant 1)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=\mathrm{C}_{10}^{0}0.2^{0}0.8^{10}+\mathrm{C}_{10}^{1}0.2^{1}0.8^{9}\\&=0.1074+0.2684\\&=0.3758\end{aligned}$$

**例 6**　一批产品共 100 件，其中合格品有 95 件，现从中任取一件进行检验，写出其概率分布.

**解**　设 $X$ 表示检验的结果，显然只有两种结果. 用“$X$=0”表示合格品，“$X$=1”表示不合格品.

$X$ 服从 $n=1$、$p=0.05$ 的二项分布，其概率分布如下表：

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.95 | 0.05 |

此题是二项分布的特例，称为 **0-1 分布**.

**2．泊松分布（Poisson，法国数学家，1781—1840）**

如果离散型随机变量 $X$ 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\tag{9-6}$$

式中，$\lambda>0$，$k=0,1,2,\cdots$，则称 $X$ 服从参数 $\lambda$ 的**泊松分布**，简记作 $X\sim P(\lambda)$.

泊松分布是一种常见分布，在实际问题中，服从泊松分布的离散型随机变量有很多. 如在一段时间内电话台的被呼唤次数；铸件表面上一定大小面积内砂眼的个数；纺织机上断头的次数；某时间段内进入某商店的顾客数等.

在二项分布 $B(n,p)$ 中，当 $n$ 比较大、$p$ 很小时，可用泊松分布近似代替二项分布，公式中 $\lambda=np$. 泊松分布作为二项分布的近似，是法国数学家泊松于 1837 年首次提出的.

**例 7**　设随机变量 $X$ 为电话交换台每分钟接到的呼唤次数，且 $X\sim P(4)$，求 1 分钟内呼唤次数：

（1）恰为 5 次的概率；

（2）不超过 1 次的概率.

**解**　由题意知 $\lambda=4$，$P(X=k)=\dfrac{4^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-4}$，$k=0,1,2,\cdots$

（1） $P(X=5)=\dfrac{4^5}{5!}\mathrm{e}^{-4}=0.1563$

（2） $P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$$=\frac{4^0}{0!}\mathrm{e}^{-4}+\frac{4^1}{1!}\mathrm{e}^{-4}=0.092$$

### 练习 9.2

1．下列各表是否能表示出离散型随机变量 $X$ 的概率分布？为什么？

（1）

| $X$ | −1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.5 | 0.2 | 0.3 |

（2）

| $X$ | −2 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.5 | 0.3 | 0.4 |

（3）

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

（4）

| $X$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

2．某人定点投一次篮球，投中的概率是0.4，试写出投中与否的概率分布.

3．抛一枚均匀的骰子，试写出点数 $X$ 的概率分布，并求：

（1） $P(X>1)$　　（2） $P(2<X<5)$

4．同时抛两枚硬币，连续抛三次，用 $X$ 表示三次中同时出现两枚都是正面的次数，求：

（1） $X$ 的概率分布　　（2） $P(X\leqslant 2)$

5．某射手射击一固定目标，每次命中率为0.6，现进行三次射击，用 $X$ 表示三次射击中命中的次数，求：

（1）概率分布　　（2） $F(2)$

6．已知一大批种子的发芽率为0.8，现任取10粒，求这10粒种子中，发芽粒数不少于8粒的概率.

7．某电话总机共有 100 个用户，在某段时间内每一电话用户使用电话的概率为 0.01，求在这段时间内有4个用户使用电话的概率.

## 9.3　连续型随机变量的分布

### 9.3.1　连续型随机变量的概率密度

#### 1．概率密度

**定义 9.3**　如果对于任何实数 $x$，随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 可以表示为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{9-7}$$

式中，$f(x)$ 为非负函数，则 $f(x)$ 称为连续型随机变量 $X$ 的**概率密度函数**，简称**概率密度**.

#### 2．概率密度的性质

（1） $f(x)\geqslant 0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.　（9-8）

## 9.3.2　连续型随机变量的分布函数

### 1．计算公式

因为 $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，所以

$$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \tag{9-9}$$

### 2．分布函数与密度函数的关系

由定积分的几何意义知，概率 $P(a < X \leqslant b)$ 的值是曲边梯形的面积（如图 9-2 所示），即连续型随机变量 $X$ 落在区间 $(a,b]$ 内的概率为密度函数 $f(x)$ 在该区间上的定积分.

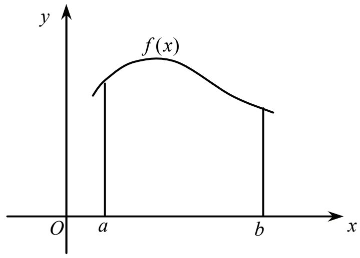


图 9-2

已知分布函数 $F(x)$，求概率密度 $f(x)$，只对 $x$ 求导即可，即

$$F'(x) = f(x) \tag{9-10}$$

**例 1**　已知连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} kx+1， & 0 \leqslant x \leqslant 2； \\ 0， & \text{其他}. \end{cases}$$

求：（1）系数 $k$；（2）分布函数 $F(x)$；（3）$P(1.5 < X < 2.5)$.

**解**　（1）由概率密度性质知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

$$\int_0^2 (kx+1)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}kx^2 + x\right)\Bigg|_0^2 = 2k+2 = 1$$

解得

$$k = -\frac{1}{2}$$

所以，概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+1， & 0 \leqslant x \leqslant 2； \\ 0， & \text{其他}. \end{cases}$$

（2）当 $x < 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$.

当 $0 \leqslant x < 2$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^x \left(-\frac{1}{2}t+1\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

当 $x \geqslant 2$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t+1\right)\mathrm{d}t + \int_2^x 0\mathrm{d}t = 1$.

综上，分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0， & x < 0； \\ -\dfrac{1}{4}x^2 + x， & 0 \leqslant x < 2； \\ 1， & x \geqslant 2. \end{cases}$$

（3） $P(1.5<X<2.5)=P(1.5<X\leqslant 2.5)-P(X=2.5)=F(2.5)-F(1.5)=0.0625$

计算此概率也可用式（9-10）

$$P(1.5<X<2.5)=\int_{1.5}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x=0.0625$$

**注意**

对连续型随机变量 $X$，对某个点 $a$，总有 $P(X=a)=0$. 因此

$$\begin{aligned}P(a<X\leqslant b)&=P(a\leqslant X<b)\\&=P(a\leqslant X\leqslant b)\\&=P(a<X<b)\end{aligned}$$

### 9.3.3 均匀分布和指数分布

**1．均匀分布**

如果连续型随机变量 $X$ 在区间 $[a,b]$ 内取值，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称随机变量 $X$ 在区间 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**，简记作 $X\sim U[a,b]$.

**注意**

均匀分布具有“均匀性”，即 $X$ 在区间 $[a,b]$ 上的任意长度相等的子区间的概率相等.

**例 2** 设天津至北京的长途汽车每隔 1 小时发一班车，某人来到始发站，他并不知道发车的时刻表. 试问他等车时间少于 15 分钟的概率.

**解** 等车时间是随机变量，用 $X$ 表示.

由题意知 $X$ 服从均匀分布，即 $X\sim U[0,60]$，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$P(0\leqslant X\leqslant 15)=\int_{0}^{15}\frac{1}{60}\mathrm{d}x=\frac{1}{60}x\Big|_{0}^{15}=0.25$$

**2．指数分布**

如果连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

式中，$\lambda>0$，则称随机变量 $X$ 服从**指数分布**，简记作 $X\sim E(\lambda)$.

在实际问题中，指数分布常作为各种“寿命”分布的近似，如电子元件的寿命、随机服务系统中的服务时间等. 下面讨论指数分布的分布函数 $F(x)$.

由于，当 $x<0$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

所以，指数分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

**例 3**　某电子元件的使用寿命 $X$ 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{1000}$ 的指数分布（单位：小时）. 求该电子元件使用 1000 小时而不坏的概率.

**解**　由题意知 $X\sim E\left(\frac{1}{1000}\right)$，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

"该电子元件使用 1000 小时不坏"是指"$X>1000$"，故有

$$P(X>1000)=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}$$

或

$$\begin{aligned}P(X>1000)&=1-P(X\leqslant 1000)=1-F(1000)\\&=1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}\times 1000}\right)\\&=\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

### 9.3.4　正态分布

#### 1. 正态分布

如果连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

式中，$\mu$、$\sigma$ 为常数，且 $\sigma>0$，则称随机变量 $X$ 服从**正态分布**，简记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 其分布函数为

$$\Phi(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$

正态分布在概率统计中占有重要的位置，如果随机变量的分布具有"中间大，两头小"的特点，都可以认为服从正态分布. 如高考考生成绩、某年龄段人员的身高、砖的抗压强度、测量误差、螺钉的口径等随机变量都服从正态分布.

#### 2. 标准正态分布

当参数 $\mu=0$、$\sigma=1$ 时，$X$ 的概率密度为

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

则称 $X$ 服从**标准正态分布**，简记作 $X \sim N(0,1)$ .

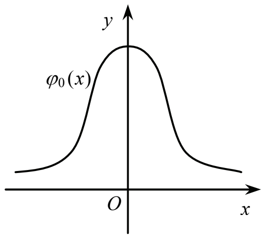



图 9-3

标准正态分布密度函数 $\varphi_0(x)$ 的图像如图 9-3 所示.

标准正态分布密度函数的特点是：

（1）曲线关于 $y$ 轴对称；

（2）$\varphi_0(-x)=\varphi_0(x)$；

（3）在 $(-\infty,0)$ 内单调增加，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少；

（4）当 $x\to+\infty$（$x\to-\infty$）时，$\varphi_0(x)\to 0$ .

为使用方便，书后附表 1 给出了标准正态分布密度函数值表.

标准正态分布的分布函数为

$$\Phi_0(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

书后附表 2 给出了标准正态分布函数值表.

设 $X\sim N(0,1)$，则有下列各公式：

（1）$P(X\leqslant x)=\Phi_0(x)$

（2）$P(X\leqslant -x)=\Phi_0(-x)=1-\Phi_0(x)$

（3）$P(|X|\leqslant x)=2\Phi_0(x)-1$（$x\geqslant 0$）

（4）$P(X>x)=1-P(X\leqslant x)=1-\Phi_0(x)$

（5）$P(a<X\leqslant b)=\Phi_0(b)-\Phi_0(a)$

（6）$P(X\leqslant 0)=\Phi_0(0)=0.5$

**例 4**　设 $X$ 服从标准正态分布，即 $X\sim N(0,1)$，求下列概率.

（1）$P(X>2)$（2）$P(-1<X\leqslant 3)$（3）$P(|X|\leqslant 2)$

**解**　因为 $X$ 服从标准正态分布，所以可以直接用公式计算.

（1）$P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)=1-\Phi_0(2)=1-0.9772=0.0228$

式中，$\Phi_0(2)$ 需查标准正态分布函数值表.

（2）$P(-1<X\leqslant 3)=\Phi_0(3)-\Phi_0(-1)=\Phi_0(3)-[1-\Phi_0(1)]$

$$=0.9987-(1-0.8413)=0.8400$$

式中，$\Phi_0(3)$、$\Phi_0(1)$ 需查标准正态分布函数值表.

（3）$P(|X|\leqslant 2)=2\Phi_0(2)-1=2\times 0.9772-1=0.9544$

如果 $X$ 不服从标准正态分布，不可以直接用公式计算或查表，需要将 $X$ 做变量替换.

### 3．一般正态分布化为标准正态分布

**定理**　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，作变量替换 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Y\sim N(0,1)$.

**证**　因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}\frac{t-\mu}{\sigma}\xlongequal{令y=\frac{t-\mu}{\sigma}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\varphi_0(y)\mathrm{d}y=\Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

所以
$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

**例 5**　设 $X\sim N(5,3^2)$，求以下概率：

（1） $P(X\leqslant 10)$　　（2） $P(2<X\leqslant 11)$

**解**　由于 $X\sim N(5,3^2)$ 不是标准正态分布，所以不可以直接查表求出结果，必须先将 $X$ 化为标准正态分布，然后再用公式计算或查表求出概率值.

因为 $X\sim N(5,3^2)$，则有 $\dfrac{X-5}{3}\sim N(0,1)$.

（1） $P(X\leqslant 10)=P(X-5\leqslant 5)=P\left(\dfrac{X-5}{3}\leqslant\dfrac{5}{3}\right)=P\left(\dfrac{X-5}{3}\leqslant 1.67\right)$

$=\Phi_0(1.67)=0.9525$

（2） $P(2<X\leqslant 11)=P\left(\dfrac{2-5}{3}<\dfrac{X-5}{3}\leqslant\dfrac{11-5}{3}\right)=P\left(-1<\dfrac{X-5}{3}\leqslant 2\right)$

$=\Phi_0(2)-\Phi_0(-1)=\Phi_0(2)-[1-\Phi_0(1)]$

$=0.9772-(1-0.8413)=0.8185$

## 练习 9.3

1．设连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A(1-x^2), & -1<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：（1）常数 $A$　　（2） $P\left(X=\dfrac{1}{2}\right)$　　（3） $P(0<X\leqslant 2)$

2．设连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & 1\leqslant x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：（1）常数 $A$　　（2） $P\left(0<X<\dfrac{1}{2}\right)$　　（3） $P\left(\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{3}{2}\right)$

3．某公共汽车站，每隔 5 分钟有一班车进站，乘客到达汽车站的任意时刻是等可能的，求乘客等车时间不超过 3 分钟的概率.

4．设某电子元件的寿命 $X$ 服从指数分布，即 $X\sim E\left(\dfrac{1}{1000}\right)$，求 $P(1000<X<1200)$.

5．设 $X\sim N(0,1)$，求：

（1） $P(0<X\leqslant 1.96)$　　（2） $P(-1<X\leqslant 2)$　　（3） $P(|X|\geqslant 2)$

6．设 $X\sim N(3,2^2)$，求：

（1） $P(X>3)$　　（2） $P(|X|\leqslant 2)$

7．某校入学考试的数学成绩近似地服从正态分布，且 $X \sim N(65,10^2)$，求数学成绩在 85 分以上的考生数约占总考生数的百分比.

## 9.4　一元随机变量的数字特征

### 9.4.1　随机变量的数学期望

#### 1．离散型随机变量的数学期望

**定义 9.4**　如果离散型随机变量 $X$ 的概率分布表为

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ | $\cdots$ |

或

$$P(X = x_k) = p_k \quad k = 1,2,\cdots$$

则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 $X$ 的**数学期望**，简称**期望**、**期望值**或**均值**，记作 $E(X)$，即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \tag{9-11}$$

离散型随机变量的数学期望是随机变量的所有取值与其相对应的概率的乘积之和.

当 $X$ 取值个数为 $n$ 个时，$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k$ .

**例 1**　已知甲、乙两名工人加工同一种零件，在某一段时期内，出现废品数（分别用 $X$ 、$Y$ 表示）的概率分布表为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P$ | 0.5 | 0.2 | 0.2 | 0.1 |

试比较甲、乙两名工人的技术水平.

**解**　在某一段时期内，比较甲、乙两名工人技术的好坏，较好的办法是用他们出现废品数的平均值来做比较.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} x_k p_k = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1.0$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{4} y_k p_k = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 0.9$$

根据以上结果，可以知道在某一段时期内，乙工人比甲工人出废品平均数少，故乙工人比甲工人技术好些.

**例 2**　设某产品中有一、二、三等品及废品 4 种，其相应的概率为 0.6、0.2、0.1 及 0.1，如果其产值分别为 10 元、8 元、5 元及 0 元. 试求该产品的平均产值.

**解**　设产品产值为 $X$，$X$ 是一个随机变量，求该产品的平均产值实质是求 $X$ 的数学期望. 由题意知，它的概率分布为

| $X$ | 10 | 8 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.6 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

所以由数学期望计算公式式（9-11）知

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_k p_k=10\times 0.6+8\times 0.2+5\times 0.1+0\times 0.1=8.1\text{（元）}$$

**2．连续型随机变量的数学期望**

**定义 9.5**　设连续型随机变量 $X$ 有概率密度 $f(x)$，若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

收敛，则称积分值 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 为随机变量 $X$ 的**数学期望**，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{9-12}$$

**例 3**　设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(X)$ .

**解**　由连续型随机变量数学期望的计算公式（9-12）知

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}0\mathrm{d}x+\int_{a}^{b}x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty}0\mathrm{d}x$$
$$=\int_{a}^{b}x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}$$

**3．随机变量函数的数学期望**

**定义 9.6**　设 $Y$ 是随机变量 $X$ 的函数 $Y=g(X)$，如果随机变量 $X$ 的分布已知，则随机变量函数 $Y=g(X)$ 的**数学期望**如下.

（1）离散型随机变量：设其概率分布为 $P(X=x_k)=p_k$， $k=1,2,\cdots,n$
则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{n}g(x_k)p_k \tag{9-13}$$

（2）连续型随机变量：设其概率密度为 $f(x)$，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{9-14}$$

**例 4**　设随机变量 $X$ 的概率分布表为

| $X$ | −1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

求 $E(X^2)$ .

解 $$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k=(-1)^2\times 0.4+0^2\times 0.3+1^2\times 0.3=0.7$$

**例 5** 设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X^2)$.

解 $$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

**4．数学期望的性质**

**性质 1** $E(c)=c$（$c$ 为常数）

**性质 2** $E(X+c)=E(X)+c$

**性质 3** $E(cX)=cE(X)$

**性质 4** $E(kX+c)=kE(X)+c$

**例 6** 设随机变量 $X$ 的概率分布为

| $X$ | $-2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |

求 $E(5X-1)$.

**解法一** 先求出 $E(X)$，再根据性质求出 $E(5X-1)$.

因为 $$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=-2\times 0.2+0\times 0.3+1\times 0.1+2\times 0.4=0.5$$

再由性质 4 得 $$E(5X-1)=5E(X)-1=5\times 0.5-1=1.5$$

**解法二** 根据随机变量函数的数学期望，可求出

$$E(5X-1)=[5\times(-2)-1]\times 0.2+(5\times 0-1)\times 0.3+(5\times 1-1)\times 0.1+(5\times 2-1)\times 0.4=1.5$$

### 9.4.2 随机变量的方差

在实际问题中，仅依靠期望值或均值还不能完善地说明随机变量的分布特征，还需要知道随机变量对期望值的偏离程度. 例如，甲、乙两工人各生产 5 个零件，尺寸如下（单位：cm）

甲：8.5　9.0　10.0　11.0　11.5

乙：9.5　9.8　10.0　10.2　10.5

可以算出甲、乙两工人生产的零件尺寸均值都是 10cm，这样无法区别两人技术的好坏，但从以上数据可观察到乙工人生产的零件尺寸集中在 10cm 附近，而甲比较分散. 为了描述随机变量取值与其数学期望的偏离程度，本节将介绍随机变量的另一个数字特征——方差.

**1．方差的概念**

**定义 9.7** 如果随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X)$ 存在，称 $X-E(X)$ 为随机变量 $X$ 的**离差**. 显然有，$E[X-E(X)]=0$，即随机变量离差的期望为零.

**定义 9.8**　随机变量 $X$ 的离差的平方的数学期望，称为随机变量 $X$ 的**方差**，记作 $D(X)$，即

$$D(X)=E[X-E(X)]^2 \tag{9-15}$$

从式（9-15）中可以看出，当 $X$ 的取值集中在数学期望附近，方差就小；若比较分散，方差就大. 显然，随机变量的方差是一个非负数.

如果 $X$ 是离散型随机变量，其概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k，\quad k=1,2,\cdots,n$$

则 $X$ 的方差为

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}\left[x_k-E(X)\right]^2 p_k \tag{9-16}$$

如果 $X$ 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则 $X$ 的方差为

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{9-17}$$

**2．方差的另一计算公式**

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{9-18}$$

事实上，由数学期望的性质，可推出

$$\begin{aligned}D(X)=E[X-E(X)]^2&=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned}$$

此公式是计算方差的常用公式，它对离散型随机变量和连续型随机变量均适用.

**3．标准差**

如果 $D(X)=E[X-E(X)]^2$ 存在，称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 $X$ 的**标准差**.

**4．方差的性质**

**性质 1**　$D(c)=0$

**性质 2**　$D(X+c)=D(X)$

**性质 3**　$D(cX)=c^2D(X)$

**性质 4**　$D(kX+b)=k^2D(X)$

**例 7**　设随机变量 $X$ 的概率分布表为

| $X$ | $-2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.3 | 0.4 |

求 $D(X)$.

**解**　根据计算方差的公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

先求出　$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=-2\times0.3+0\times0.3+1\times0.4=-0.2$

再求出 $$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k=(-2)^2\times 0.3+0^2\times 0.3+1^2\times 0.4=1.6$$

所以 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.6-(-0.2)^2=1.56$$

**例 8** 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

并设 $Y=5X+4$，求 $D(Y)$.

**解** 先求出 $D(X)$，再求 $D(Y)$.

因为 $$E(X)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1}=0$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{3}{5}$$

所以 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{5}-0^2=\frac{3}{5}$$

再由方差的性质知

$$D(Y)=D(5X+4)=5^2D(X)=5^2\times\frac{3}{5}=15$$

现将常见随机变量的期望与方差列于表 9-1 中.

**表 9-1**

| | 名称与记号 | 概率分布或概率密度 | 期　望 | 方　差 |
|---|---|---|---|---|
| 离散型 | 二项分布 $X\sim B(n,p)$ | $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$（$k=0,1,2,\cdots,n$；$0<p<1$；$q=1-p$） | $np$ | $npq$ |
| | 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ | $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$（$\lambda>0$，$k=0,1,2,\cdots$） | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 连续型 | 均匀分布 $X\sim U[a,b]$ | $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ | $\dfrac{a+b}{2}$ | $\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| | 指数分布 $X\sim E(\lambda)$ | $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$（$\lambda>0$） | $\dfrac{1}{\lambda}$ | $\dfrac{1}{\lambda^2}$ |
| | 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ | $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$（$-\infty<x<+\infty$） | $\mu$ | $\sigma^2$ |

## 练习 9.4

1．在射击比赛中，某人射 4 次，每次打 1 发子弹，规定全不命中得 0 分；只中 1 发得 15 分；中 2 发得 30 分；中 3 发得 55 分；4 发全命中得 100 分．设此人每次射击命中率为 0.5，求他的得分期望是多少分.

2．设离散型随机变量 $X$ 的概率分布为

| $X$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.5 | 0.2 | 0.1 |

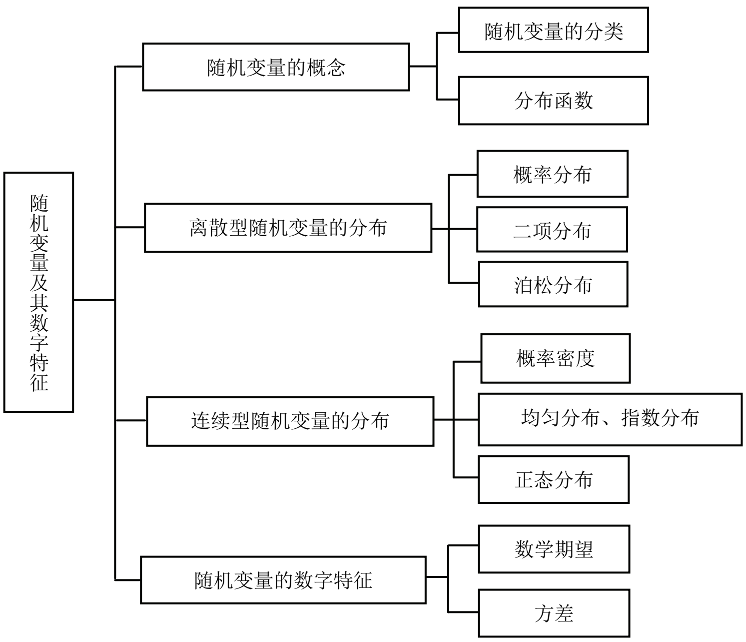
求：（1）$E(X)$　　（2）$E(3X+2)$　　（3）$E(X^2)$　　（4）$D(X)$

3．设随机变量 $X \sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，求参数 $n$ 和 $p$ .

4．设连续型随机变量 $X$ 服从区间[0,10]上的均匀分布，求

（1）$X$ 的概率密度　　（2）$E(X)$ 、$D(X)$　　（3）$P(3<X\leqslant 8)$

## 本章知识结构图



# 数学史话 7

## 数理统计的起源

近代统计学的发展起源于 20 世纪初，是在概率论的基础上发展起来的，但统计性质的工作可以追溯到远古的“结绳记事”和《二十四史》中大量的关于我国人口、钱粮、水文、天文、地震等资料的记录. 西方则把收集和整理国情资料的活动称为统计，统计（statistics）一词正是由国家（state）一词演化而来的.

现代数理统计的奠基人是英国数学家和生物学家费希尔（1890—1962)，他的主要贡献在估计理论、假设检验、实验设计和方差分析等方面. 他领导的伦敦大学数理统计学派在 20 世纪 30 年代到 40 年代，在世界数理统计界占主导地位.

摘自《数学思想史》.王树禾

# 第 10 章　数理统计简介

本章主要介绍数理统计的基本概念、参数估计、假设检验等问题. 使读者对数理统计有一个初步的了解.

## 10.1　数理统计的基本知识

### 10.1.1　总体和样本

当研究某厂所生产的灯泡寿命时，由于对灯泡寿命的测试是破坏性的，所以只能从这批产品中抽取一部分进行寿命测试. 并通过这部分产品的平均寿命，对该批产品的平均寿命进行统计推断.

在数理统计中，把被研究对象的全体称为**总体**，把组成总体的基本单位称为**个体**，从总体中抽取的个体称为**样品**，若干个样品构成**样本**，一个样本所含样品的个数称为**样本的容量**.

在上例中，某厂在研究灯泡的质量时，主要目的之一是测试灯泡的寿命. 一般的方法是从该批产品中随机抽出 10 个灯泡进行测试，然后根据测试的数据估计和推断出这批灯泡的寿命. 其中，这批灯泡的寿命是总体，每 1 个灯泡的寿命是个体，抽取的 10 个灯泡构成样本，样本的容量为 10.

当要研究的总体数目很大或者所做的试验具有破坏性，就不可能逐个测试个体，因为这样需要大量的人力和物力. 另外，对每个个体进行破坏性的试验是不允许的，所以对样本的研究就是为了对总体的研究，从样本推断总体. 一般从总体中抽取的样本具有两个**特征**：

（1）随机性. 总体中每个个体有相同的机会被选中.

（2）独立性. 从总体中抽取的每一个样品对其他的样品的抽取没有影响.

在实际应用时，从有限总体中采用有放回地抽样；从无限总体中或总体的个体数目较大时，采用不放回地抽样. 这种抽样称为**简单随机抽样**，抽得的样本称为**简单随机样本**. 简单随机抽样是一组**相互独立且与总体同分布**的随机变量，记作 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. 本章所提到的样本，都是指简单随机样本. 为了方便起见，用 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一次观测值，称为样本值.

### 10.1.2　样本的数字特征

样本的数字特征主要指样本的均值和方差，经常用它们估计总体的数字特征. 在统计推断中的一个重要方法就是，由样本的数字特征推断总体的数字特征.

#### 1．样本均值

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X$ 的一个样本，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{10-1}$$

称为**样本均值**.

对于样本的具体观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，样本均值的计算公式为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

2．样本方差

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $X$ 的一个样本，则

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{10-2}$$

称为**样本方差**.

对于样本的具体观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，样本方差的计算公式为

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

3．样本标准差

样本方差的算术平方根 $S=\sqrt{S^2}$ 称为**样本标准差**.

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \tag{10-3}$$

对于样本的具体观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，样本标准差的计算公式为

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

**例 1**　某商场抽查 10 个柜组，每个柜组的月销售额（万元）分别为

3.3　2.8　2.9　3.0　3.8　3.2　2.5　3.5　3.0　4.0

求此商场这 10 个柜组月销售额的均值和标准差.

**解**　均值　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{10}(3.3+2.8+\cdots+4.0)=3.2$（万元）

标准差
$$\begin{aligned}s&=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{9}\left[(3.3-3.2)^2+(2.8-3.2)^2+\cdots+(4.0-3.2)^2\right]}\\&=0.46\end{aligned}$$

**例 2**　设甲、乙两台机床加工同一种零件，标准长度是 20 厘米；允许误差是 ±0.08 厘米，现从两台机床加工的零件中各抽取 10 个进行检验，得到如下数据：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 20.02 | 20.06 | 20.01 | 19.98 | 19.96 | 20.04 | 19.95 | 19.99 | 20.05 | 19.94 |
| 乙 | 20.04 | 19.96 | 20.10 | 19.88 | 19.90 | 20.17 | 19.98 | 20.02 | 20.08 | 19.92 |

问哪台机床工作比较稳定？

**解**　由样本观测值，可计算出甲、乙两台机床加工零件的长度平均值.

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=\frac{1}{10}(20.02+20.06+\cdots+19.94)=20.00\ （厘米）$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=\frac{1}{10}(20.04+19.96+\cdots+19.92)=20.00\ （厘米）$$

由于甲、乙两台机床加工零件的长度平均值都为 20.00 cm，需要再考虑它们的方差.

$$s_{甲}^2=\frac{1}{9}\left[(20.02-20)^2+(20.06-20)^2+\cdots+(19.94-20)^2\right]=0.00164$$

$$s_{乙}^2=\frac{1}{9}\left[(20.04-20)^2+(19.96-20)^2+\cdots+(19.92-20)^2\right]=0.00656$$

从样本方差可以看出，甲机床加工零件的方差比乙机床加工零件的方差小，所以认为甲机床比乙机床工作稳定.

### 10.1.3　统计量

样本是进行统计推断的依据，在实际应用时，往往不直接采用样本，而是针对不同的问题构造出样本的函数，利用这些样本的函数进行统计推断.

**定义 10.1**　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $X$ 的一个样本，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的一个函数，且不含有任何未知参数，则样本的函数 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为**统计量**.

例如 $X_1+2X_2$、$\bar{X}$、$S^2$ 等都是统计量，而 $X_1+\mu X_2$、$\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$ 不是统计量（$\mu$、$\sigma$ 未知）.

**例 3**　设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu$、$\sigma$ 是未知参数，判断哪个是统计量.

（1）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　（2）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　　（3）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

**解**　因为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 与 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 不含未知参数，所以是统计量. 而 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 虽然是样本的函数，但含有未知参数 $\sigma$，所以不是统计量.

统计量是统计推断中一个非常重要的概念，要推断一个总体的分布或确定总体中的某个参数时，往往要引进一个统计量. 下面介绍几个常用统计量.

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 $X$ 的一个样本，常用统计量有以下几种：

（1）样本均值　$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

（2）样本方差　$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

（3）样本标准差　$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

（4）$k$ 阶样本原点矩　$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,k}\quad（k=1,2,\cdots,m）$$

（5）$k$ 阶样本中心矩　$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k\quad（k=1,2,\cdots,m）$$

### 10.1.4 常用统计量的分布

**1. $U$ 统计量**

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，样本的均值与方差分别为 $\bar{X}$ 、$S^2$. 若 $\mu$ 、 $\sigma^2$ 已知，令 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，则有

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \qquad (10\text{-}4)$$

式（10-4）表明，统计量 $U$ 服从标准正态分布.

当样本观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 取定时，$u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

**例 4** 设总体 $X\sim N(2,5^2)$，而 $(X_1,X_2,\cdots,X_9)$ 是取自总体的一个样本，试描述 $U$ 统计量的形式.

**解** 由题意知，$\mu=2$，$\sigma^2=5^2$，$n=9$，$\bar{X}=\dfrac{1}{9}(X_1+X_2+\cdots+X_9)$.

则 $U$ 统计量为
$$U=\frac{\bar{X}-2}{5/\sqrt{9}}=\frac{\bar{X}-2}{5/3}\sim N(0,1)$$

**2. $T$ 统计量**

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，样本的均值与方差分别为 $\bar{X}$ 、$S^2$. 若 $\mu$ 已知，$\sigma^2$ 未知，令 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，则有

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1) \qquad (10\text{-}5)$$

式（10-5）表明，统计量 $T$ 服从自由度为 $n-1$ 的 $t$ 分布.

当样本观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 取定时，$t=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$.

**例 5** 设总体 $X\sim N(7,\sigma^2)$，而 $(X_1,X_2,\cdots,X_5)$ 是取自总体的一个样本，试描述 $T$ 统计量的形式.

**解** 由题意知，$\mu=7$，$\sigma^2$ 未知，$n=5$，$\bar{X}=\dfrac{1}{5}(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X})^2}$$

则 $T$ 统计量为
$$T=\frac{\bar{X}-7}{S/\sqrt{5}}\sim t(n-1)=t(4)$$

**3. $\chi^2$ 统计量**

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，样本的均值与方差分别为 $\bar{X}$ 、

$S^2$. 若 $\mu$ 未知，$\sigma^2$ 已知，令 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，则有

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \tag{10-6}$$

式（10-6）表明，统计量 $\chi^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 $\chi^2$ 分布.

当样本观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 取定时，$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$.

**例 6**　设总体 $X\sim N(\mu,4^2)$，而 $(X_1,X_2,X_3,X_4)$ 是取自总体的一个样本，试描述 $\chi^2$ 统计量的形式.

**解**　由题意知，$\sigma^2=4^2$，$n=4$，$\bar{X}=\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2$$

则 $\chi^2$ 统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{3S^2}{4^2}\sim\chi^2(4-1)=\chi^2(3)$$

### 练习 10.1

1．从总体 $X$ 中抽取一个容量为 10 的样本，其值分别为

3.5　1.5　2.0　4.5　1.0　4.5　3.5　6.5　4.0　5.0

试求样本均值 $\bar{x}$ 和方差 $s^2$.

2．设 $(X_1,X_2,X_3)$ 是取自总体的一个样本，$\mu$ 是未知参数. 试问下面哪几个是统计量.

（1）$X_1+\mu X_2+X_3$　（2）$X_1+X_2+X_3$　（3）$X_1X_2X_3$

（4）$\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}X_i$　（5）$X_1X_2$　（6）$\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2$

3．设总体 $X\sim N(165,10^2)$，而 $(X_1,X_2,X_3,X_4)$ 是取自总体的一个样本，试描述 $U$ 统计量的形式.

4．总体 $X\sim N(8,\sigma^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的一个样本，试描述 $T$ 统计量的形式.

5．设总体 $X\sim N(\mu,4^2)$，样本容量 $n=16$，样本方差 $s^2=3.8^2$，试描述 $\chi^2$ 统计量的形式.

## 10.2　参数估计

在实际问题中，需要根据样本所提供的信息，对总体分布中所含的未知参数做出估计，这类问题称为参数估计问题. 参数估计一般分为点估计与区间估计.

### 10.2.1　参数的点估计

设 $\theta$ 是总体 $X$ 的待估计参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $X$ 的一个样本，构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为参数 $\theta$ 的估计，称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 $\theta$ 的一个**估计量**. 当样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取定一组观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 就是 $\theta$ 的一个点**估计值**. 在这里只介绍常用的方法——**数字特征法**和**极大似然估计法**.

1．数字特征法

所谓数字特征法，就是利用样本的数字特征来估计总体中相应的数字特征，即用样本的均值估计总体的均值，用样本的方差估计总体的方差.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， $\mu$ 、 $\sigma^2$ 是总体的数字特征.

总体的均值与方差的估计值为

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{10-7}$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{10-8}$$

**例 1** 假设新生儿体重（单位：克）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现随机测得 10 名新生儿体重如下：

3100 3480 2520 3700 2520 3200 2800 3800 3020 3260

试估计总体的均值 $\mu$ 与方差 $\sigma^2$.

**解** 由题意知，样本均值 $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 3140$，样本方差 $s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 198\,133$

由数字特征法得：

总体均值 $\mu$ 的点估计值为 $\hat{\mu} = 3140$（克）

总体方差 $\sigma^2$ 的点估计值为 $\hat{\sigma}^2 = 445.12^2$

**例 2** 对某地区的甲、乙两种职业人员作一次月收入调查，假设甲、乙两种职业人员月收入均服从正态分布，现随机抽取这两种职业人员调查其月收入（单位：元）状况如下：

甲 1550 1380 1630 1700 1420 1540 1500

乙 1320 1800 1270 1820 1780 1200 1790 1500 1300

试用数字特征法估计这两种职业人员收入的均值及方差.

**解** 设甲、乙两种职业人员的收入分别服从正态分布 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，均值及方差分别为 $E(X) = \mu_1$， $D(X) = \sigma_1^2$； $E(Y) = \mu_2$， $D(Y) = \sigma_2^2$.

（1）由题意知，甲样本的均值与方差经计算得

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 1531.43，\quad s_1^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2 = 111.72^2$$

总体 $X$ 均值的估计值为 $\hat{\mu}_1 = \overline{x}_1 = 1531.43$.

总体 $X$ 方差的估计值为 $\hat{\sigma}_1^2 = s_1^2 = 111.72^2$.

（2）乙样本的均值与方差经计算得

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 1531.11，\quad s_2^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = 264.93^2$$

总体 $Y$ 均值的估计值为 $\hat{\mu}_2 = \overline{x}_2 = 1531.11$.

总体 $Y$ 方差的估计值为 $\hat{\sigma}_2^2 = s_2^2 = 264.93^2$.

可以认为甲种职业人员月收入服从正态分布 $X \sim N(1531.43, 111.72^2)$，乙种职业人员月收入服从正态分布 $Y \sim N(1531.11, 264.93^2)$.

从抽样分析的结果可以看出，这两种职业人员的平均收入水平大致相同，但乙种职业人员的月收入相差程度比甲种职业人员的月收入相差程度稍大些.

**2．极大似然估计法**

所谓极大似然估计法，就是当用样本的函数值估计总体参数时，使得当参数取这些值时，所观察到的样本出现的可能性最大. 例如，一个老猎人带着一个新猎手进山打猎，发现一只飞跑的野兔，他们各发一枪，野兔被打中，但身上只中一发，绝大多数人认为是老猎人打中的. 又如，公安人员破一起凶杀案时，凶手的重点嫌疑对象应从与被害人来往密切又有作案可能的人先着手.

**定义 10.2**　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自概率密度为 $f(x;\theta)$ 的总体的一个样本，其中 $\theta$ 为未知参数，当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一组观测值时，称

$$f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta)$$

为样本的**似然函数**，记作

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta) \tag{10-9}$$

极大似然估计的直观想法是：选取参数 $\theta$ 的估计值 $\hat{\theta}$ 时，使似然函数 $L(\theta)$ 达到极大值. 如何求似然函数 $L(\theta)$ 的极大值？这是微分学中的极值问题，由于 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 的单调性相同，所以 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 有相同的极值点. 为了计算方便，把求似然函数 $L(\theta)$ 的极值点转化为求 $\ln L(\theta)$ 的极值点. 解似然方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{10-10}$$

从中得到参数 $\theta$ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}$ .

**求极大似然函数估计值的一般步骤：**

（1）写出似然函数；

（2）对似然函数取对数，并整理；

（3）建立似然方程 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = 0$ ；

（4）解似然方程，求出 $\hat{\theta}$ .

**例 3**　已知连续型随机变量 $X$ 服从参数为 $\theta$ 的指数分布，即

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta \mathrm{e}^{-\theta x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

式中，$\theta$ 为未知参数，设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本的一组观测值，求参数 $\theta$ 的极大似然估计.

**解**　建立似然函数

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta) \\ &= \begin{cases} \theta^n \mathrm{e}^{-\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

取对数，经整理得

$$\ln L = n \ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

对 $\theta$ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$，得 $\theta=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$，则参数 $\theta$ 的极大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$$

### 10.2.2 估计量的优劣性

前面介绍了参数点估计的两种方法，对于同一个参数 $\theta$，可以采用不同的估计量去估计参数 $\theta$，哪一个估计量更好呢？通常采用无偏性和有效性来评价估计量的好坏.

1．无偏性

**定义 10.3** 设参数 $\theta$ 的估计量为 $\hat{\theta}$，若满足 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为参数 $\theta$ 的**无偏估计量**.

常见的**无偏估计量**有：样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 是总体均值 $\mu$ 的无偏估计量；样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是总体方差 $\sigma^2$ 的无偏估计量.

**例 4** 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体的一个样本，证明样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 是总体均值 $\mu$ 的无偏估计量.

**证** 因为样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是独立同分布的随机变量，所以有

$$E(X_i)=\mu \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

故样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 $\mu$ 的无偏估计量.

2．有效性

**定义 10.4** 设估计量 $\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$ 都是 $\theta$ 的无偏估计量，而且它们的方差满足 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

**例 5** 设 $X_1$、$X_2$ 是来自总体 $X$ 的样本，总体均值 $E(X)=\mu$，总体方差 $D(X)=\sigma^2$. 估计量 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$，$\hat{\mu}_3=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$，都是总体均值的无偏估计量. 试问哪一个最有效？

**解** 因为 $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$、$\hat{\mu}_3$ 均是 $\mu$ 的无偏估计量，对它们求方差，有

$$D(\hat{\mu}_1)=D(\frac{1}{2}X_1)+D(\frac{1}{2}X_2)=\frac{1}{4}D(X)+\frac{1}{4}D(X)=\frac{1}{2}D(X)=\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_2)=D(\frac{1}{3}X_1)+D(\frac{2}{3}X_2)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{4}{9}D(X)=\frac{5}{9}D(X)=\frac{5}{9}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3)=D(\frac{1}{4}X_1)+D(\frac{3}{4}X_2)=\frac{1}{16}D(X)+\frac{9}{16}D(X)=\frac{5}{8}D(X)=\frac{5}{8}\sigma^2$$

由计算知 $$D(\hat{\mu}_1) < D(\hat{\mu}_2) < D(\hat{\mu}_3)$$
所以最有效的估计量是
$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

### 10.2.3　正态总体均值与方差的区间估计

上面介绍的参数点估计是用样本求得未知参数的估计值，它是参数的近似值，没有考证参数的点估计值与参数的真值的近似程度. 在实际问题中，不仅需要求出参数的近似值，而且还需要大致估计这个近似值的精确性与可靠性，即希望找出参数的一个可能的范围，并知道这个范围覆盖参数真值的可信程度. 这种形式的参数估计称为**区间估计**.

**定义 10.5**　设总体 $X$ 的分布中含有未知参数 $\theta$，$\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是由样本构成的两个统计量，如果对于给定的概率 $1-\alpha$，使得
$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1-\alpha \tag{10-11}$$
成立，则随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 称为参数 $\theta$ 的**置信度**为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，$\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 分别称为**置信下限与置信上限**，$\alpha$ 称为**检验水平**，一般取 $\alpha = 0.05$ 或 $\alpha = 0.01$.

$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1-\alpha$ 表示如果反复多次地随机抽取样本，对每一次具体的观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都可以求得一个区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$. 从统计的角度来看，约有概率为 $1-\alpha$ 的区间覆盖参数 $\theta$ 的真值，约有概率为 $\alpha$ 的区间不覆盖参数 $\theta$ 的真值. 假设进行 100 次随机抽样，就会有 100 个这样的区间，而在这 100 个区间中，有的覆盖参数 $\theta$ 的真值，有的不覆盖参数 $\theta$ 的真值，当 $\alpha = 0.05$ 时，约 95%的区间覆盖参数 $\theta$ 的真值，或者说约 5%的区间不覆盖参数 $\theta$ 的真值. 可以看出，置信区间是与一定的概率相对应的.

关于区间估计，在这里只介绍正态总体的均值和方差的区间估计.

#### 1．正态总体均值 $\mu$ 的区间估计

**（1）总体方差 $\sigma^2$ 已知，总体均值 $\mu$ 的区间估计.**

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，其观测值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 采用 $U$ 统计量.

因为 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，对于给定的 $\alpha$，可查标准正态分布表确定 $u_\alpha$，使 $P(|u| < u_\alpha) = 1-\alpha$，即 $P\left(\left|\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_\alpha\right) = 1-\alpha$
$$P\left(\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$
成立，所以总体均值 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为
$$\left(\bar{X} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{10-12}$$

当样本观测值取定时，置信区间为 $\left(\bar{x} - u_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

**注意**

利用 $P(|u| < u_\alpha) = 2\Phi_0(u_\alpha) - 1$，查标准正态分布表，可求出临界值 $u_\alpha$. 当 $\alpha = 0.05$ 时，

$u_\alpha = 1.96$；当 $\alpha = 0.01$ 时，$u_\alpha = 2.58$．当 $\alpha$ 给定时，这两个 $u_\alpha$ 值可直接引用.

**例 6** 设随机变量 $X \sim N(\mu, 2.8^2)$，已知样本的容量为 10，其均值为 $\bar{x} = 1500$，求总体均值 $\mu$ 的置信区间（$\alpha = 0.05$）.

**解** 因为总体 $X \sim N(\mu, 2.8^2)$，已知方差为 $\sigma^2 = 2.8^2$，所以置信区间为

$$\left(\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

由题意知，$n = 10$，$\bar{x} = 1500$，$\alpha = 0.05$，$u_\alpha = 1.96$.

计算
$$\bar{x} \pm u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 \pm 1.96 \times \frac{2.8}{\sqrt{10}}$$

所以总体均值 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为(1498.27, 1501.74).

可以理解为：上述区间覆盖住 $\mu$ 的置信度（可靠度）在 95%左右，或称覆盖不住 $\mu$ 的可能性大约为 5%.

**总体方差 $\sigma^2$ 已知时，求总体均值 $\mu$ 的置信区间的一般步骤：**

① 由样本观测值，计算出 $\bar{x}$；

② 根据给定的 $\alpha$，查标准正态分布表得 $u_\alpha$，并计算 $\bar{x} \pm u_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$；

③ 写出均值 $\mu$ 的置信区间 $\left(\bar{x} - u_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

**（2）总体方差 $\sigma^2$ 未知，总体均值 $\mu$ 的区间估计.**

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，其观察值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．采用 $T$ 统计量.

因为 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，对于给定的 $\alpha$，可查 $t$ 分布双侧临界值表，确定临界值 $t_\alpha(n-1)$，使 $P(|T| < t_\alpha(n-1)) = 1 - \alpha$，即 $P\left(\left|\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\alpha(n-1)\right) = 1 - \alpha$

$$P\left(\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

成立，所以总体均值 $\mu$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \tag{10-13}$$

当样本观测值取定时，置信区间为 $\left(\bar{x} - t_\alpha(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\alpha(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$.

**例 7** 某商店购进一批食盐，已知这批食盐的质量服从正态分布，现从中随机抽取 8 袋进行质量测试，结果如下：502, 505, 499, 501, 498, 497, 499, 501（单位：克）. 试求该批食盐的平均质量的置信区间（$\alpha = 0.05$）.

**解** 由已知可求出样本的均值与方差

$$\bar{x} = 500.25,\quad s^2 = 6.5,\ 即\ s = 2.55$$

已知 $\alpha = 0.05$，自由度 $n - 1 = 7$，查 $t$ 分布双侧临界值表，得 $t_\alpha(7) = 2.365$，计算

$$\overline{x} \pm t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} = 500.25 \pm 2.365 \times \frac{2.55}{\sqrt{8}}$$

所以总体均值 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为(498.12, 502.38).

**总体方差 $\sigma^2$ 未知时，求总体均值 $\mu$ 的置信区间的一般步骤：**

① 由样本观测值，计算出 $\overline{x}$ 及 $s$；

② 根据给定的 $\alpha$，查 $t$ 分布双侧临界值表确定 $t_\alpha(n-1)$，并计算 $\overline{x} \pm t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$；

③ 写出均值 $\mu$ 的置信区间 $\left(\overline{x} - t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$.

### 2. 正态总体方差 $\sigma^2$ 的区间估计

因为一般情况下总体的均值 $\mu$ 未知，所以只讨论 $\mu$ 未知时，对总体方差 $\sigma^2$ 的区间估计采用 $\chi^2$ 统计量.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，其观察值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

因为 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，对于给定的 $\alpha$，可查 $\chi^2$ 分布上侧临界值表，确定 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 与 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，使

$$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

成立（如图 10-1 所示），所以总体方差 $\sigma^2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) \quad (10\text{-}14)$$

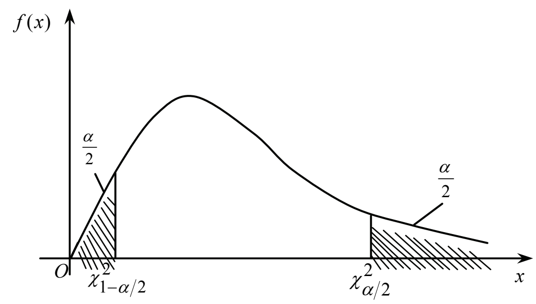



图 10-1

当样本观测值取定时，$s^2$ 为样本方差值，置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

**求总体方差 $\sigma^2$ 置信区间的一般步骤：**

① 由样本观测值，计算出 $(n-1)s^2$；

② 根据给定的 $\alpha$，查 $\chi^2$ 分布上侧临界值表确定临界值 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 与 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，并计算 $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$ 和 $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$ 的值；

③ 写出方差 $\sigma^2$ 的置信区间 $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$.

**例 8**　某机床加工零件，其长度服从正态分布，随机抽查 16 个零件，长度方差 $s^2 = 0.002\,44$，求该机床加工零件长度方差的置信区间（$\alpha = 0.05$）.

**解**　由题意知 $n = 16$，$s^2 = 0.00244$，可计算 $(n-1)s^2 = 0.0366$.

又知 $\alpha = 0.05$，查 $\chi^2$ 分布表，得到 $\chi^2_{0.025}(15) = 27.5$ 和 $\chi^2_{0.975}(15) = 6.26$.

经计算 $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=0.0013$， $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=0.0058$.

该机床加工零件长度方差 $\sigma^2$ 的置信区间为(0.0013, 0.0058).

为方便区间估计的分析、计算，将上述三种情况下的区间估计法汇总如下（如表 10-1 所示）. 在做区间估计时，分清条件，直接查表计算即可.

表 10-1

| 估 计 量 | 条　　件 | 置 信 区 间 |
|---|---|---|
| $\mu$ | 正态总体<br>$\sigma^2$ 已知 | $\left(\overline{x}-u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ |
| $\mu$ | 正态总体<br>$\sigma^2$ 未知 | $\left(\overline{x}-t_\alpha(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_\alpha(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ |
| $\sigma^2$ | 正态总体<br>$\mu$ 未知 | $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$ |

式中，$n$ 为样本容量，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$；当 $\alpha=0.05$ 时，$u_\alpha=1.96$；当 $\alpha=0.01$ 时，$u_\alpha=2.58$. 而 $t_\alpha(n-1)$、$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$、$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 可查表求出.

## 练习 10.2

1．已知钢丝的折断强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从一批钢丝中抽取 10 根，测得折断强度为

568　572　570　578　570　572　570　584　572　596

试估计总体的均值 $\mu$ 和方差 $\sigma^2$.

2．设 $X_1$、$X_2$、$X_3$ 是总体 $X$ 的一个样本，试证：

（1）$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{3}{10}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$

（2）$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3$

（3）$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{3}{4}X_2-\dfrac{1}{12}X_3$

均为总体均值 $\mu$ 的无偏估计，且说明哪个估计量最有效.

3．已知连续型随机变量 $X$ 的概率密度为

$$\varphi(x;\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

式中，$\mu$ 是未知参数. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是取自总体 $X$ 的一组观测值，试求 $\mu$ 的极大似然估计.

4．测某型号螺钉的长度 5 次，数值分别为（单位：毫米）

108.5　109.0　110.0　110.5　112.0

如果认为测量的数值服从正态分布 $X\sim N(\mu,0.5^2)$，试求这批螺钉的平均长度 $\mu$ 的置信区间（$\alpha=0.05$）.

5．为了估计某型号灯泡的平均寿命，共测试了 10 个灯泡，得到均值 $\overline{x}=1500$ 小时，

$s^2=400$ 小时，已知灯泡的寿命服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求该批灯泡平均寿命 $\mu$ 的置信区间（$\alpha=0.05$）.

6．某种零件尺寸服从正态分布，抽样检查 6 件，测得尺寸如下（单位：毫米）

31.56　　29.66　　31.64　　30.00　　31.87　　31.03

试求这种零件的平均长度的置信区间（$\alpha=0.05$）.

7．从正态总体 $X\sim N(\mu,2^2)$ 中抽取容量为 4 的样本，样本均值为 $\bar{x}=13.2$，样本方差为 $s^2=142.5$，试求总体方差 $\sigma^2$ 的置信区间（$\alpha=0.05$）.

8．某商场 9 月份随机抽取 8 天的销售额分别为（单位：万元）

54.2，53.8，55.0，56.7，54.4，53.2，56.3，55.6

假设销售额服从正态分布，试求该商场日销售额方差 $\sigma^2$ 的置信区间（$\alpha=0.01$）.

## 10.3　假设检验

10.2 节介绍了对总体未知参数的估计方法，在本节将介绍统计推断中另一类重要问题——假设检验. 在此只介绍一个正态总体的均值与方差的假设检验.

### 10.3.1　假设检验的概念与基本思想

先看一个例子.

某食品厂用自动生产线包装袋装食品，规定每袋质量为 250 克，通过长期检测知道每袋质量服从正态分布，且标准差为 $s=1.5$ 克. 从某日生产该种食品的生产线中随机抽取 20 袋进行测试，得到平均质量为 249 克，试问该日生产线工作是否正常？

基本思路是：通过取自总体 $X$ 的一个样本，断定总体的均值是否为 $\mu$.

设这种袋装食品的平均质量为 $\mu$，即为总体均值. 本题的实质是：假设当日袋装食品的平均质量 $\mu=250$ 克，再根据抽样的结果来判定 $\mu=250$ 克，还是 $\mu\neq250$ 克，从而推断该日生产线工作是否正常.

在数理统计中的**假设检验**，就是从样本出发，对总体的某一假设问题是否成立做出定性回答.

**假设检验的基本步骤是：**

（1）先对要检验的对象提出待检假设 $H_0$；

（2）选取相应的统计量；

（3）对于给定的小概率 $\alpha$（检验水平），确定检验临界值；

（4）根据样本的观测值，计算统计量的实际值；

（5）比较实际值与临界值，得出检验结果.

假设检验的基本思想是利用**小概率原理**（通常将概率 $\alpha=0.05$ 或 $\alpha=0.01$ 作为小概率，小概率原理是指小概率事件在个别试验中几乎不可能发生），作出拒绝假设或者接受假设的判断. 如果抽样的结果是发生小概率事件，则拒绝假设 $H_0$；否则接受假设.

假设检验中，由于作出判定的依据是一个样本，因而假设检验的准确性不可能是绝对的，这就导致假设检验可能犯两类错误. 第一类错误是**弃真错误**，原假设 $H_0$ 是正确的却被拒绝了；第二类错误是**取伪错误**，原假设 $H_0$ 不正确却被接受了. 通常情况下，增大样本容量会使犯这两类错误的概率减小.

### 10.3.2　正态总体均值的假设检验

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，对参数均值 $\mu$ 的假设检验，有 6 种情况.

已知方差 $\sigma^2$，待检假设 $H_0$：$\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu \leqslant \mu_0 \\ \mu \geqslant \mu_0 \end{cases}$

未知方差 $\sigma^2$，待检假设 $H_0$：$\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu \leqslant \mu_0 \\ \mu \geqslant \mu_0 \end{cases}$

下面介绍均值的假设检验中常用的两种检验法.

#### 1．*U* 检验法

**已知方差 $\sigma^2$，待检假设 $H_0$：$\mu = \mu_0$.**

设( $x_1, x_2, \cdots, x_n$ )是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本观测值，其中 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 已知. 用 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 检验假设 $H_0$：$\mu = \mu_0$. 当 $H_0$ 成立时，有 $U$ 统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

对给定的检验水平 $\alpha$，使 $P(\,|u| > u_\alpha\,) = \alpha$ 成立，从而有 $P(\,|u| < u_\alpha\,) = 1 - \alpha$.

利用 $P(\,|u| < u_\alpha\,) = 2\Phi_0(u_\alpha) - 1$，查标准正态分布表，可求出 $u_\alpha$.

由样本观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，计算统计量 $U$ 的值，如果 $|u| > u_\alpha$，表明小概率事件 $|u| > u_\alpha$ 发生了，则拒绝 $H_0$；如果 $|u| < u_\alpha$，则接受 $H_0$. 由于此检验法用 $U$ 统计量，习惯上称为 $U$ 检验法.

**已知方差 $\sigma^2$，待检假设 $H_0$：$\mu = \mu_0$ 的解题步骤.**

（1）提出待检假设 $H_0$：$\mu = \mu_0$；

（2）选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$；

（3）对检验水平 $\alpha$，确定临界值 $u_\alpha$;

（4）根据样本观测值，计算出统计量 $U$ 的实际值 $u$；

（5）如果 $|u| < u_\alpha$，接受 $H_0$；若 $|u| > u_\alpha$，则拒绝 $H_0$.

当 $\alpha = 0.05$ 时，$u_\alpha = 1.96$；当 $\alpha = 0.01$ 时，$u_\alpha = 2.58$.

**例 1**　已知某超市日销售额服从正态分布，且平均日销售额为 $\mu = 8$，方差 $\sigma^2 = 2^2$，即 $X \sim N(8, 2^2)$. 现从中随机抽取某一星期的日销售额为（单位：万元）

7.0　7.9　7.6　7.8　8.2　8.5　7.5

问该星期的平均日销售额能否认为是 8 万元？（$\alpha = 0.05$）

**解**　（1）提出待检假设 $H_0$：$\mu = 8$；

（2）选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$；

（3）对检验水平$\alpha=0.05$，得临界值$u_\alpha=1.96$；

（4）由样本观测值得$\bar{x}=7.786$，统计量的实际值

$$u=\frac{7.786-8}{2/\sqrt{7}}=-0.283$$

（5）因为$|-0.283|<1.96$，即$|u|<u_\alpha$，所以接受$H_0$.

故有 95%的把握认为该星期的平均日销售额可以是 8 万元.

### 2．*T* 检验法

**未知方差$\sigma^2$，检验假设$H_0$：$\mu=\mu_0$.**

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本观测值，其中$\sigma^2=\sigma_0^2$未知. 用$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$检验假设$H_0$：$\mu=\mu_0$. 当$H_0$成立时，有$T$统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

对给定的检验水平$\alpha$，查$t$分布表，确定临界值$t_\alpha(n-1)$，使

$$P(|T|>t_\alpha(n-1))=\alpha$$

由样本观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，计算检验量$T$的值$t$，如果$|t|>t_\alpha(n-1)$，则拒绝$H_0$；如果$|t|<t_\alpha(n-1)$，则接受$H_0$，此检验法为$T$ **检验法**.

**未知方差$\sigma^2$，检验假设$H_0$：$\mu=\mu_0$的解题步骤.**

（1）提出待检假设$H_0$：$\mu=\mu_0$；

（2）选取统计量$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$；

（3）对检验水平$\alpha$，查$t$分布表，得临界值$t_\alpha(n-1)$；

（4）根据样本观测值，计算统计量$T$的实际值$t$；

（5）如果$|t|<t_\alpha(n-1)$，则接受$H_0$；如果$|t|>t_\alpha(n-1)$，则拒绝$H_0$.

**例 2**　正常成年人的脉搏$X$平均为每分钟 72 次，现对 10 名患某种疾病的人，测得其脉搏为

69　54　65　77　70　68　64　72　71　62

假设人的脉搏服从正态分布，试问患者脉搏与正常人脉搏有无明显差异？（$\alpha=0.05$）

**解**　由题意知，总体$\mu_0=72$，$\sigma^2$未知；样本$\bar{x}=67.2$，$s^2=6.34^2$.

（1）待检假设$H_0$：$\mu=72$；

（2）选取统计量$T=\dfrac{\bar{X}-72}{6.34/\sqrt{10}}\sim t(n-1)$；

（3）对检验水平$\alpha=0.05$，查$t$分布表，得临界值$t_\alpha(9)=2.262$；

（4）由样本观测值得$t=\dfrac{67.2-72}{6.34/\sqrt{10}}=-2.39$；

（5）因为$|-2.39|>2.262$，即$|t|>t_\alpha(n-1)$，所以拒绝$H_0$.

可认为患者的脉搏与正常人的脉搏有明显差异.

### 10.3.3 正态总体方差的假设检验

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，$\mu$未知，则有$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$．假设$\sigma^2=\sigma_0^2$成立，则$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，在假设$\sigma^2=\sigma_0^2$成立的条件下，样本的方差与总体的方差比较接近才合理. 若比值$S^2/\sigma^2$接近 1，说明$\sigma^2$与$\sigma_0^2$近似相等，$H_0$成立；否则，$H_0$不成立. 对于给定的检验水平$\alpha$，可查$\chi^2$分布临界值表，确定$a=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$与$b=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，使

$$P(\chi^2>a)=1-\frac{\alpha}{2},\quad P(\chi^2>b)=\frac{\alpha}{2}$$

成立. 当$a<\chi^2<b$时，接受$H_0$；当$\chi^2<a$或$\chi^2>b$时，拒绝$H_0$. 称这个检验法为$\chi^2$**检验法**.

**未知均值$\mu$，检验假设$H_0$：$\sigma^2=\sigma_0^2$的解题步骤.**

（1）提出待检假设$H_0$：$\sigma^2=\sigma_0^2$；

（2）选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$；

（3）对检验水平$\alpha$，查$\chi^2$分布临界值表，临界值$a=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$与$b=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$；

（4）根据样本观测值，计算统计量$\chi^2$的实际值；

（5）当$a<\chi^2<b$时，接受$H_0$；当$\chi^2<a$或$\chi^2>b$时，拒绝$H_0$.

**例 3** 某厂生产的某种型号的电池，长期以来其寿命$X\sim N(\mu,50^2)$. 现有一批这种电池，从它的生产情况看，寿命的波动性有所改变，现随机抽取 25 只电池，测出其寿命的样本方差为$s^2=55^2$（小时）. 试问根据此数据能否推断这批电池的寿命比以往的有显著性变化？（$\alpha=0.05$）

**解** 由题意知$n=25$，样本方差为$s^2=55^2$.

（1）待检假设$H_0$：$\sigma^2=50^2$；

（2）选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$；

（3）对检验水平$\alpha=0.05$，查$\chi^2$分布表，得临界值$\chi^2_{0.975}(24)=12.4$及$\chi^2_{0.025}(24)=39.4$；

（4）由样本，得$\chi^2=\dfrac{24\times55^2}{50^2}=29.04$；

（5）因为$12.4<29.04<39.4$，即$a<\chi^2<b$，则接受$H_0$.

故有 95%以上的把握认为该批电池的寿命比以往的无显著性变化.

关于总体满足正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，均值$\mu$、方差$\sigma^2$的假设检验汇总为表 10-2.

表 10-2

| 条件 | 待检假设 $H_0$ | 检验统计量 | 临界值 | 检验结论 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 接受 $H_0$ | 拒绝 $H_0$ |
| $\sigma^2$ 已知 | $\mu=\mu_0$ | $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $u_\alpha$ | $\lvert u\rvert<u_\alpha$ | $\lvert u\rvert>u_\alpha$ |

续表

| 条　　件 | 待检假设 $H_0$ | 检验统计量 | 临　界　值 | 检 验 结 论 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 接受 $H_0$ | 拒绝 $H_0$ |
| $\sigma^2$ 未知 | $\mu=\mu_0$ | $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ | $t_\alpha(n-1)$ | $\lvert t\rvert<t_\alpha(n-1)$ | $\lvert t\rvert>t_\alpha(n-1)$ |
| $\mu$ 未知 | $\sigma^2=\sigma_0^2$ | $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ | $a=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$<br>$b=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ | $a<\chi^2<b$ | $\chi^2<a$<br>或 $\chi^2>b$ |

## 练习 10.3

1．某养鸡场用某种饲料喂养肉鸡一定时间后，平均体重为 2.6 千克，标准差为 0.5 千克. 现改用复合饲料喂养 64 只肉鸡，在同样时间内，平均体重为 2.5 千克，假设肉鸡的体重服从正态分布，试问复合饲料与原饲料是否同样有利于肉鸡的生长？（$\alpha=0.05$）

2．某地区环保部门规定，废水处理后某种有毒物质的平均含量不得超过 10 毫克/升. 现从废水处理厂随机抽取 20 升，测得 $\overline{x}=11$ 毫克/升. 假定废水处理后某种有毒物质的含量服从标准差为 2.0 毫克/升的正态分布，试判断该厂处理后的水是否合格.（$\alpha=0.05$）

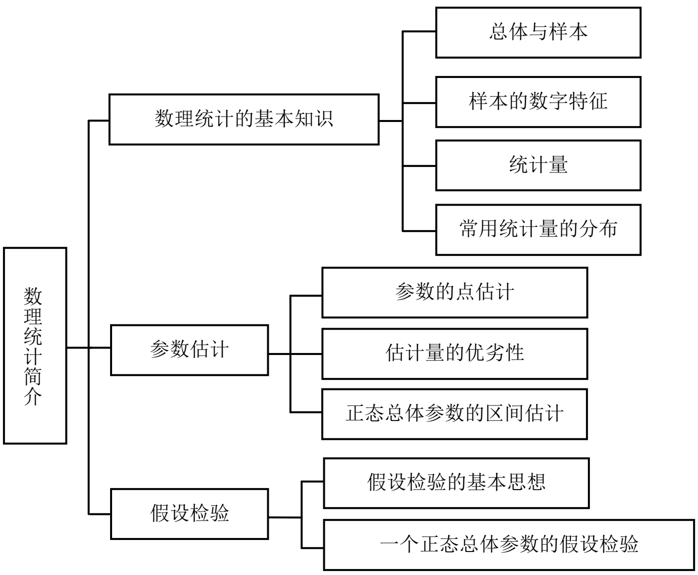
3．已知某次考试学生的成绩服从正态分布，现随机抽取 30 位考生的成绩，平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，是否认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分？（$\alpha=0.05$）

4．已知某自动车床加工零件的长度偏差 $X$（单位：毫米）服从正态分布 $N(\mu,3)$，从某日加工的一批零件中随机抽取 10 件，测量其长度偏差分别为

$$2，1，-2，3，2，4，-2，5，3，4$$

试在检验水平 $\alpha=0.10$ 下，检验这批零件长度偏差的方差 $\sigma^2$ 显著改变是否成立？

## 本章知识结构图



# 练习题参考答案

## 第 1 章

### 练习 1.1

1.（1）$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$　（2）$[-2,0)\cup(0,1)$　（3）$[0,\pi]$

2.（1）、（3）、（4）不相同　（2）相同

3.（1）$f(0)=\sqrt{3}$，$f(2)=\sqrt{7}$，$f(x_0)=\sqrt{3+x_0^2}$，$f(\frac{1}{a})=\sqrt{3+\frac{1}{a^2}}$

（2）$f(-1)=0$，$f(0)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

4.（1）、（2）为奇函数　（3）为偶函数　（4）非奇非偶函数

5.（1）$y=\frac{1}{2}x+2\quad x\in(-\infty,+\infty)$　（2）$y=\sqrt{x}\quad x\in[0,+\infty)$　（3）$y=\log_2 x\quad x\in(0,+\infty)$

6.（1）$y=\sqrt{u}$，$u=3x-1$　（2）$y=u^5$，$u=1+\ln x$

（3）$y=5u^2$，$u=x+2$　（4）$y=u^3$，$u=\sin v$，$v=8x+5$

7. $y=\begin{cases}2, & 0<x\leqslant 2;\\ 2+0.5(x-2), & 2<x\leqslant 8.\end{cases}$　8. $y=\begin{cases}40, & 0\leqslant x\leqslant 100;\\ \frac{2}{5}x, & x>100.\end{cases}$

### 练习 1.2

1.（1）1　（2）2　（3）$\infty$　（4）3

2.（1）$c$　（2）$\infty$　（3）0　（4）0　（5）$-\infty$　（6）1

3. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$　图形略

4. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在

### 练习 1.3

1.（1）4　（2）$\infty$　（3）27　（4）$\frac{1}{2}$　（5）0

2.（1）$\frac{2}{3}$　（2）0　（3）0　（4）$\frac{2}{3}$

3.（1）$\mathrm{e}^4$　（2）$\mathrm{e}^{-1}$　（3）$\mathrm{e}^{-2}$　（4）$\mathrm{e}^3$

## 练习 1.4

1．（1）$-\dfrac{e^{-2}+1}{2}$　（2）1　（3）$\dfrac{1}{2}\ln 2$　（4）1

2．$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$、$x=2$ 处连续；在 $x=1$ 处不连续.

3．$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续.

4．$a=2$

5．$k=1$

## 练习 1.5

1．$p=27$，$q=14$

2．$C(50)=600$，$\overline{C}(50)=12$

3．$L(q)=-\dfrac{1}{5}q^2+10q$

4．（1）$x=50$（件），$R=2100$（元）　（2）$x=5050$（件），$R=212100$（元）

# 第 2 章

## 练习 2.1

1．$\Delta x=0.2$　$\Delta y=0.2$　2．$y'=2$　3．$y=12x-16$

## 练习 2.2

1．（1）$y'=\cos x-\sin x-2x$　（2）$y'=\dfrac{2x\sin x-x^2\cos x-\cos x}{\sin^2 x}$

（3）$y'=2\cot 2x$　（4）$y'=2x\ln 3x+x$

（5）$y'=\cos x e^{\sin x}$

2．（1）0　（2）1

3．（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-2x}{2y-x}$　（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x-y}{x+e^y}$

（3）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$　（4）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^y}{1-xye^y}$

4．（1）$y'=\dfrac{\cos x e^{\sin x}}{2y}$　（2）$y'=(\ln x+1)x^x$

（3）$y'=\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-4}\right)(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$

## 练习 2.3

1．（1）$y''=-\sin x$　（2）$y''=\dfrac{-4}{(2x+1)^2}$　（3）$y''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$

2．$y'''=0$

### 练习 2.4

1.（1）3 （2）$a\cos ax$ （3）$-\dfrac{1}{x^2}$ （4）$\dfrac{1}{1+x}$ （5）$e^{x^2}$ （6）$2e^{2x}$

2.（1）$dy=-\tan x dx$ （2）$dy=\dfrac{1}{x\ln x}dx$

3．1.005

### 练习 2.5

1.（1）$x+y>0$ （2）$x^2+y^2\geqslant 4$

2.（1）$z'_x=y\cos(xy)$；$z'_y=x\cos(xy)$

（2）$z'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2-1}$；$z'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}$

（3）$z'_x=yx^{y-1}$；$z'_y=\ln x\cdot x^y$

（4）$z'_x=2xe^{x^2+y^2}$，$z'_y=2ye^{x^2+y^2}$

3.（1）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8xy+\cos(xy)-xy\sin(xy)$ （2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin x\cos y$

## 第 3 章

### 练习 3.1

1.（1）满足罗尔定理，$\xi=0$ （2）满足罗尔定理，$\xi=0$

2.（1）满足拉格朗日中值定理，$\xi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ （2）满足拉格朗日中值定理，$\xi=\dfrac{1}{\ln 2}$

3.（1）2 （2）1 （3）$\dfrac{1}{2}$ （4）$+\infty$ （5）0

### 练习 3.2

1．当 $x$ 在 $(-\infty,-1)$ 内，函数单调减少；当 $x$ 在 $(1,+\infty)$ 内，函数单调增加.

2．当 $x$ 在 $(-\infty,-1)$ 内，函数单调减少；当 $x$ 在 $(-1,0)$ 内，函数单调增加；
当 $x$ 在 $(0,1)$ 内，函数单调减少；当 $x$ 在 $(1,+\infty)$ 内，函数单调增加.

3．当 $x$ 在 $(-\infty,-2)$ 内，函数单调增加；
当 $x$ 在 $(-2,-1)\cup(-1,0)$ 内，函数单调减少；
当 $x$ 在 $(0,+\infty)$ 内，函数单调增加.

4．当 $x$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 内，函数单调减少；当 $x$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内，函数单调增加；
当 $x$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内，函数单调减少；当 $x$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内，函数单调增加.

### 练习 3.3

1.（1）当 $x=0$ 时，$y(0)=7$ 为极大值；当 $x=2$ 时，$y(2)=3$ 为极小值.

（2）当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$ 为极大值.

2．当 $x=3$ 时，$y''=12>0$，$y=-32$ 为极小值；当 $x=-1$ 时，$y''=-12<0$，$y=0$ 为极大值.

3．（1）在区间 $[0,4]$ 上最小值为 0，最大值为 6.

（2）在区间 $[-1,2]$ 上最小值为 0，最大值为 $\ln 5$.

4．$q=2$，$L(2)=24$.

## 练习 3.4

1．$p_1=80$，$p_2=120$，最小利润为 605.

2．长、宽、高各为 2 米，所用材料最省.

## 练习 3.5

1．（1）$C'(100)=9.5$（元）；（2）$\bar{C}(100)=22$（元）

2．（1）$C(900)=1775$（元），$\bar{C}(900)\approx 1.97$（元）

（2）总成本的平均变化率为 1.58.

（3）$C'(900)=1.5$（元），$C'(1000)\approx 1.67$（元）

3．（1）$C'(q)=5$，$R'(q)=10-0.02q$，$L'(q)=5-0.02q$

（2）每批生产 250 单位时可以使利润最大.

4．（1）当 $q=20$ 时，$R=120,\ \overline{R}=6,\ R'=2$；当 $q=30$ 时，$R=120,\ \overline{R}=4,\ R'=-2$.

（2）$q=25$ 时，收益最大.

# 第 4 章

## 练习 4.1

1．C　　2．是

## 练习 4.2

1．$x-x^3+C$　　2．$\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+C$　　3．$\dfrac{1}{2}t^2+3t+3\ln|t|-\dfrac{1}{t}+C$

4．$\sin x+\cos x+C$　　5．$\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{1}{3}x^3+C$　　6．$\mathrm{e}^t+t+C$

## 练习 4.3

1．（1）$-\mathrm{e}^{-x}+C$　　（2）$\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$　　（3）$\dfrac{1}{2}\ln|1+2t|+C$

（4）$\mathrm{e}^{\sin x}+C$　　（5）$\sin \mathrm{e}^x+C$

2．（1）$\dfrac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$　　（2）$\dfrac{3}{4}(x+a)^{\frac{4}{3}}+C$

（3）$\sqrt{2x-3}-\ln(\sqrt{2x-3}+1)+C$

### 练习 4.4

1．$-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C$

2．$x\ln x-x+C$

3．$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$

4．$x\sin x+\cos x+C$

5．$-x\cos x-\sin x+C$

6．$(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+C$

## 第 5 章

### 练习 5.1

1．$\sin 2x$

2．2

3．$\frac{1}{2}$

4．（1）2　　（2）$\frac{6}{7}$　　（3）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a-1)$　　（4）1

### 练习 5.2

1．（1）$\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$　　（2）$2-\frac{\pi}{2}$

2．（1）1　　（2）$1-\frac{2}{\mathrm{e}}$　　（3）1

### 练习 5.3

1．（1）1　　（2）1

2．发散

### 练习 5.4

1．（1）$\frac{10}{3}$　　（2）$\frac{8}{3}$　　（3）$1-\ln 2$

2．$\frac{7}{3}\pi$

3．$F(q)=\frac{1}{3}q^3-2q^2+50q+40$

4．2490.3

5．（1）9987.5　　（2）19850

# 第 6 章

## 练习 6.1

1．$a=-2,b=3$　　2．1,3,−6

## 练习 6.2

1．（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&5\\5&3&4\end{pmatrix}$　　（2）$5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}13&-1&9\\-15&-17&20\end{pmatrix}$

2．（1）$\begin{pmatrix}-1&-3&4\\2&12&7\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

3．$\begin{pmatrix}7&-7\\2&-16\end{pmatrix}$

## 练习 6.3

1．（1）是　　（2）不是　　（3）是　　（4）不是

2．（1）$r(\boldsymbol{A})=2$　　（2）$r(\boldsymbol{B})=3$　　（3）$r(\boldsymbol{C})=2$

3．$k$=9

4．$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$

## 练习 6.4

1．（1）$\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$　　（3）不可逆　　（4）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2．$-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}13&2\\4&11\\15&5\end{pmatrix}$

# 第 7 章

## 练习 7.1

1．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&3&1\\1&-2&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\8\\-3\end{pmatrix}$，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\-1&3&1&8\\1&-2&6&-3\end{pmatrix}$

2．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 3 & -4 & 1 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ -3\end{pmatrix}$，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4\\ 3 & -4 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$

### 练习 7.2

1．无穷多解　　2．唯一解　　3．$\lambda\neq1$时仅有零解，$\lambda=1$时有无穷多解

### 练习 7.3

1．（1）$\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-2\\ x_3=2\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{2}c_1-\dfrac{3}{4}c_2\\ x_2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}c_1+\dfrac{7}{4}c_2\\ x_3=c_1\\ x_4=c_2\end{cases}$（$c_1$、$c_2$为任意常数）

（3）无解

2．（1）$x_1=x_2=x_3=x_4=0$

（2）$\begin{cases}x_1=-25c\\ x_2=11c\\ x_3=-2c\\ x_4=c\end{cases}$（$c$ 为任意常数）

3．$a\neq1$时有唯一解$\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=2+a\\ x_3=-1\end{cases}$；$a=1$时有无穷多解$\begin{cases}x_1=1-c_1-c_2\\ x_2=c_1\\ x_3=c_2\end{cases}$（$c_1$、$c_2$为任意常数）

## 第 8 章

### 练习 8.1

1．（1）、（2）、（3）、（5）、（6）是随机事件，（4）是必然事件.

2．（1）$A+B+C$　　（2）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$　　（3）$\overline{A}(B+C)$

3．（1）$\Omega$　　（2）$\phi$　　（3）$\Omega$　　（4）$A$　　（5）$A$　　（6）$\phi$

4．略

5．$B$ 与 $D$ 对立；$A$ 与 $B$、$A$ 与 $C$、$B$ 与 $C$、$B$ 与 $D$ 互不相容.

### 练习 8.2

1．（1）$\dfrac{3}{10}$　　（2）$\dfrac{1}{10}$　　（3）$\dfrac{6}{10}$

2．$\dfrac{2}{36}$　　$\dfrac{2}{36}$　　$\dfrac{35}{36}$

3．（1）$\dfrac{1}{120}$　　（2）$\dfrac{3^3}{10^3}$

4．0.68

5．（1）0.3　（2）0.8

6．30%

## 练习 8.3

1．$P(A)+P(B) \geqslant P(A+B) \geqslant P(AB)$

2．（1）60%　（2）60%　（3）75%

3．（1）0.2　（2）0.7　（3）0.5

4．（1）$\frac{6}{10}$　（2）$\frac{5}{9}$　（3）$\frac{1}{3}$

5．0.2

6．0.046

## 练习 8.4

1．（1）0.0494　（2）0.9506

2．（1）0.72　（2）0.26　（3）0.98

3．（1）0.512　（2）0.992　（3）0.384

4．0.592

5．0.1354

6．（1）0.2048　（2）0.9421

# 第 9 章

## 练习 9.1

0.3，0.7，1，1

## 练习 9.2

1．（1）、（4）为概率分布

2．

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.6 | 0.4 |

3．（1）$\frac{5}{6}$　（2）$\frac{1}{3}$

4．（1）

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

（2）$\frac{63}{64}$

5．（1） $P(X=k)=C_3^k 0.6^k 0.4^{3-k}$ （ $k=0,1,2,3$ ）　（2） $F(2)=0.784$

6． 0.678

7． 0.015

## 练习 9.3

1．（1） $A=\dfrac{3}{4}$　（2） 0　（3） $\dfrac{1}{2}$

2．（1） $A=1$　（2） $\dfrac{1}{8}$　（3） $\dfrac{3}{4}$

3． $\dfrac{3}{5}$

4．0.0667

5．（1）0.475　（2）0.81855　（3）0.0455

6．（1）0.5　（2）0.3023

7．2.28%

## 练习 9.4

1． 35 分

2．（1）0.2　（2）2.6　（3）0.8　（4）0.76

3． $n=6$； $p=0.4$

4．（1） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & 0\leqslant x\leqslant 10; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　（2） $E(X)=5$　$D(X)=\dfrac{25}{3}$　（3） 0.5

# 第 10 章

## 练习 10.1

1． $\overline{x}=3.6$， $s^2=2.88$

2．（2）、（3）、（4）、（5）是统计量，（1）、（6）不是统计量.

3． $U=\dfrac{\overline{X}-165}{10/\sqrt{4}}\sim N(0,1)$

4． $T=\dfrac{\overline{X}-8}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

5． $\chi^2=\dfrac{15\times 3.8^2}{4^2}\sim \chi^2(15)$

## 练习 10.2

1． $\hat{\mu}=575.2$， $\hat{\sigma}^2=8.70^2$　2． $\hat{\mu}_2$ 最有效

3． $\hat{\mu}=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　4． $(109.56,110.44)$

5．(1485.69, 1514.31)　　6．(29.72, 31.66)

7．(45.72, 1979.17)　　8．(0.52, 10.66)

## 练习 10.3

1．可以认为复合饲料与原饲料同样有利于肉鸡的生长.

2．认为该厂处理后的水不合格.

3．可以认为这次考试的平均成绩为 70 分.

4．可以认为这批零件的长度偏差显著改变.

# 附表 1　标准正态分布密度函数值表

$$\varphi_0(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$$

| $u$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3988 | 0.3986 | 0.3984 | 0.3982 | 0.3980 | 0.3977 | 0.3973 |
| 0.1 | 0.3970 | 0.3965 | 0.3961 | 0.3956 | 0.3951 | 0.3945 | 0.3939 | 0.3932 | 0.3925 | 0.3918 |
| 0.2 | 0.3910 | 0.3902 | 0.3894 | 0.3885 | 0.3876 | 0.3867 | 0.3857 | 0.3847 | 0.3836 | 0.3825 |
| 0.3 | 0.3814 | 0.3802 | 0.3790 | 0.3778 | 0.3765 | 0.3752 | 0.3739 | 0.3725 | 0.3712 | 0.3697 |
| 0.4 | 0.3683 | 0.3668 | 0.3653 | 0.3637 | 0.3621 | 0.3605 | 0.3589 | 0.3572 | 0.3555 | 0.3538 |
| 0.5 | 0.3521 | 0.3503 | 0.3485 | 0.3467 | 0.3448 | 0.3429 | 0.3410 | 0.3391 | 0.3372 | 0.3352 |
| 0.6 | 0.3332 | 0.3312 | 0.3292 | 0.3271 | 0.3251 | 0.3230 | 0.3209 | 0.3187 | 0.3166 | 0.3144 |
| 0.7 | 0.3123 | 0.3101 | 0.3079 | 0.3056 | 0.3034 | 0.3011 | 0.2989 | 0.2966 | 0.2943 | 0.2920 |
| 0.8 | 0.2897 | 0.2874 | 0.2850 | 0.2827 | 0.2803 | 0.2780 | 0.2756 | 0.2732 | 0.2709 | 0.2685 |
| 0.9 | 0.2661 | 0.2637 | 0.2613 | 0.2589 | 0.2565 | 0.2541 | 0.2516 | 0.2492 | 0.2468 | 0.2444 |
| 1.0 | 0.2420 | 0.2396 | 0.2371 | 0.2347 | 0.2323 | 0.2299 | 0.2275 | 0.2251 | 0.2227 | 0.2203 |
| 1.1 | 0.2179 | 0.2155 | 0.2131 | 0.2107 | 0.2083 | 0.2056 | 0.2036 | 0.2012 | 0.1989 | 0.1965 |
| 1.2 | 0.1942 | 0.1919 | 0.1895 | 0.1872 | 0.1849 | 0.1826 | 0.1804 | 0.1781 | 0.1758 | 0.1736 |
| 1.3 | 0.1714 | 0.1691 | 0.1669 | 0.1647 | 0.1626 | 0.1604 | 0.1582 | 0.1561 | 0.1539 | 0.1518 |
| 1.4 | 0.1497 | 0.1476 | 0.1456 | 0.1435 | 0.1415 | 0.1394 | 0.1374 | 0.1354 | 0.1334 | 0.1315 |
| 1.5 | 0.1295 | 0.1276 | 0.1257 | 0.1238 | 0.1219 | 0.1200 | 0.1182 | 0.1163 | 0.1145 | 0.1127 |
| 1.6 | 0.1109 | 0.1092 | 0.1074 | 0.1057 | 0.1040 | 0.1023 | 0.1006 | 0.09893 | 0.09728 | 0.09566 |
| 1.7 | 0.09405 | 0.09246 | 0.09089 | 0.08933 | 0.08780 | 0.08628 | 0.08478 | 0.08329 | 0.08183 | 0.08038 |
| 1.8 | 0.07895 | 0.07754 | 0.07614 | 0.07477 | 0.07341 | 0.07206 | 0.07074 | 0.06943 | 0.06814 | 0.06687 |
| 1.9 | 0.06562 | 0.06438 | 0.06316 | 0.06195 | 0.06077 | 0.05959 | 0.05844 | 0.05730 | 0.05618 | 0.05508 |
| 2.0 | 0.05399 | 0.05292 | 0.05186 | 0.05082 | 0.04980 | 0.04879 | 0.04780 | 0.04682 | 0.04586 | 0.04491 |
| 2.1 | 0.04398 | 0.04307 | 0.04217 | 0.04128 | 0.04041 | 0.03959 | 0.03871 | 0.03788 | 0.03706 | 0.03626 |
| 2.2 | 0.03547 | 0.03470 | 0.03394 | 0.03319 | 0.03246 | 0.03174 | 0.03103 | 0.03034 | 0.02965 | 0.02898 |
| 2.3 | 0.02833 | 0.02768 | 0.02705 | 0.02643 | 0.02582 | 0.02522 | 0.02463 | 0.02406 | 0.02349 | 0.02294 |
| 2.4 | 0.02239 | 0.02186 | 0.02134 | 0.02083 | 0.02033 | 0.01984 | 0.01936 | 0.01888 | 0.01842 | 0.01797 |
| 2.5 | 0.01753 | 0.01709 | 0.01667 | 0.01625 | $0.0^{2}1585$ | 0.01545 | 0.01506 | 0.01468 | 0.01431 | 0.01394 |
| 2.6 | 0.01358 | 0.01323 | 0.01287 | 0.01256 | $0.0^{2}1223$ | 0.01191 | 0.01160 | 0.01130 | 0.01100 | 0.01071 |
| 2.7 | 0.01042 | 0.01014 | $0.0^{2}9871$ | $0.0^{2}9606$ | $0.0^{2}9347$ | $0.0^{2}9094$ | $0.0^{2}8846$ | $0.0^{2}8605$ | $0.0^{2}8370$ | $0.0^{2}8140$ |
| 2.8 | $0.0^{2}7915$ | $0.0^{2}7697$ | $0.0^{2}7483$ | $0.0^{2}7274$ | $0.0^{2}7071$ | $0.0^{2}6873$ | $0.0^{2}6679$ | $0.0^{2}6491$ | $0.0^{2}6307$ | $0.0^{2}6127$ |
| 2.9 | $0.0^{2}5953$ | $0.0^{2}5782$ | $0.0^{2}5616$ | $0.0^{2}5454$ | $0.0^{2}5296$ | $0.0^{2}5143$ | $0.0^{2}4993$ | $0.0^{2}4847$ | $0.0^{2}4705$ | $0.0^{2}4567$ |
| 3.0 | $0.0^{2}4432$ | $0.0^{2}4301$ | $0.0^{2}4173$ | $0.0^{2}4049$ | $0.0^{2}3928$ | $0.0^{2}3810$ | $0.0^{2}3695$ | $0.0^{2}3584$ | $0.0^{2}3475$ | $0.0^{2}3370$ |
| 3.1 | $0.0^{2}3267$ | $0.0^{2}3167$ | $0.0^{2}3070$ | $0.0^{2}2975$ | $0.0^{2}2884$ | $0.0^{2}2794$ | $0.0^{2}2707$ | $0.0^{2}2623$ | $0.0^{2}2541$ | $0.0^{2}2461$ |
| 3.2 | $0.0^{2}2384$ | $0.0^{2}2309$ | $0.0^{2}2236$ | $0.0^{2}2165$ | $0.0^{2}2096$ | $0.0^{2}2029$ | $0.0^{2}1964$ | $0.0^{2}1901$ | $0.0^{2}1840$ | $0.0^{2}1780$ |
| 3.3 | $0.0^{2}1723$ | $0.0^{2}1667$ | $0.0^{2}1612$ | $0.0^{2}1560$ | $0.0^{2}1508$ | $0.0^{2}1459$ | $0.0^{2}1411$ | $0.0^{2}1364$ | $0.0^{2}1319$ | $0.0^{2}1275$ |
| 3.4 | $0.0^{2}1232$ | $0.0^{2}1191$ | $0.0^{2}1151$ | $0.0^{2}1112$ | $0.0^{2}1075$ | $0.0^{2}1033$ | $0.0^{2}1003$ | $0.0^{3}9689$ | $0.0^{3}9358$ | $0.0^{3}9037$ |
| 3.5 | $0.0^{3}8727$ | $0.0^{3}8426$ | $0.0^{3}8135$ | $0.0^{3}7853$ | $0.0^{3}7581$ | $0.0^{3}7317$ | $0.0^{3}7061$ | $0.0^{3}6814$ | $0.0^{3}6575$ | $0.0^{3}6343$ |
| 3.6 | $0.0^{3}6119$ | $0.0^{3}5902$ | $0.0^{3}5693$ | $0.0^{3}5490$ | $0.0^{3}5294$ | $0.0^{5}5105$ | $0.0^{3}4921$ | $0.0^{3}4744$ | $0.0^{3}4573$ | $0.0^{3}4408$ |
| 3.7 | $0.0^{3}4248$ | $0.0^{3}4093$ | $0.0^{3}3944$ | $0.0^{3}3800$ | $0.0^{3}3661$ | $0.0^{5}3526$ | $0.0^{3}3396$ | $0.0^{3}3271$ | $0.0^{3}3149$ | $0.0^{3}3032$ |
| 3.8 | $0.0^{3}2919$ | $0.0^{3}2810$ | $0.0^{3}2705$ | $0.0^{3}2604$ | $0.0^{3}2506$ | $0.0^{3}2411$ | $0.0^{3}2320$ | $0.0^{3}2232$ | $0.0^{3}2147$ | $0.0^{3}2065$ |
| 3.9 | $0.0^{3}1987$ | $0.0^{3}1910$ | $0.0^{3}1837$ | $0.0^{3}1766$ | $0.0^{3}1693$ | $0.0^{3}1633$ | $0.0^{3}1569$ | $0.0^{3}1508$ | $0.0^{3}1449$ | $0.0^{3}1393$ |
| 4.0 | $0.0^{3}1333$ | $0.0^{3}1286$ | $0.0^{3}1235$ | $0.0^{3}1186$ | $0.0^{3}1140$ | $0.0^{3}1094$ | $0.0^{3}1051$ | $0.0^{3}1009$ | $0.0^{4}9687$ | $0.0^{4}9299$ |
| 4.1 | $0.0^{4}8926$ | $0.0^{4}8567$ | $0.0^{4}8222$ | $0.0^{4}7890$ | $0.0^{4}7570$ | $0.0^{4}7263$ | $0.0^{4}6967$ | $0.0^{4}6683$ | $0.0^{4}6410$ | $0.0^{4}6147$ |
| 4.2 | $0.0^{4}5894$ | $0.0^{4}5652$ | $0.0^{4}5418$ | $0.0^{4}5194$ | $0.0^{4}4979$ | $0.0^{4}4772$ | $0.0^{4}4573$ | $0.0^{4}4382$ | $0.0^{4}4199$ | $0.0^{4}4023$ |
| 4.3 | $0.0^{4}3854$ | $0.0^{4}3691$ | $0.0^{4}3535$ | $0.0^{4}3386$ | $0.0^{4}3242$ | $0.0^{4}3104$ | $0.0^{4}2972$ | $0.0^{4}2845$ | $0.0^{4}2723$ | $0.0^{4}2606$ |
| 4.4 | $0.0^{4}2494$ | $0.0^{4}2387$ | $0.0^{4}2284$ | $0.0^{8}2185$ | $0.0^{4}2090$ | $0.0^{4}1999$ | $0.0^{4}1912$ | $0.0^{4}1829$ | $0.0^{4}1749$ | $0.0^{4}1672$ |
| 4.5 | $0.0^{4}1593$ | $0.0^{4}1528$ | $0.0^{4}1461$ | $0.0^{4}1396$ | $0.0^{4}1334$ | $0.0^{4}1275$ | $0.0^{4}1218$ | $0.0^{4}1164$ | $0.0^{4}1112$ | $0.0^{4}1062$ |
| 4.6 | $0.0^{4}1014$ | $0.0^{5}9684$ | $0.0^{5}9248$ | $0.0^{5}8830$ | $0.0^{5}8430$ | $0.0^{5}8047$ | $0.0^{5}7681$ | $0.0^{5}7331$ | $0.0^{5}6996$ | $0.0^{5}6676$ |
| 4.7 | $0.0^{5}6370$ | $0.0^{5}6077$ | $0.0^{5}5797$ | $0.0^{5}5530$ | $0.0^{5}5274$ | $0.0^{5}5030$ | $0.0^{5}4796$ | $0.0^{5}4573$ | $0.0^{5}4360$ | $0.0^{5}4156$ |
| 4.8 | $0.0^{5}3961$ | $0.0^{5}3775$ | $0.0^{5}3593$ | $0.0^{5}3428$ | $0.0^{5}3267$ | $0.0^{5}3112$ | $0.0^{5}2965$ | $0.0^{5}2824$ | $0.0^{5}2690$ | $0.0^{5}2561$ |
| 4.9 | $0.0^{5}2439$ | $0.0^{5}2322$ | $0.0^{5}2211$ | $0.0^{5}2105$ | $0.0^{5}2003$ | $0.0^{5}1907$ | $0.0^{5}1814$ | $0.0^{5}1727$ | $0.0^{5}1643$ | $0.0^{5}1563$ |

# 附表 2　标准正态分布函数值表

$$\Phi_0(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad (u \geqslant 0)$$

| $u$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.50000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6404 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96721 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98 24 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | $0.9^{2}0097$ | $0.9^{2}0358$ | $0.9^{2}0613$ | $0.9^{2}0863$ | $0.9^{2}1106$ | $0.9^{2}1344$ | $0.9^{2}1576$ |
| 2.4 | $0.9^{2}1802$ | $0.9^{2}2024$ | $0.9^{2}2240$ | $0.9^{2}2451$ | $0.9^{2}2656$ | $0.9^{2}2857$ | $0.9^{2}3053$ | $0.9^{2}3244$ | $0.9^{2}3431$ | $0.9^{2}3613$ |
| 2.5 | $0.9^{2}3790$ | $0.9^{2}3963$ | $0.9^{2}4132$ | $0.9^{2}4297$ | $0.9^{2}4457$ | $0.9^{2}4614$ | $0.9^{2}4766$ | $0.9^{2}4915$ | $0.9^{2}5060$ | $0.9^{2}5201$ |
| 2.6 | $0.9^{2}5339$ | $0.9^{2}5473$ | $0.9^{2}5604$ | $0.9^{2}5731$ | $0.9^{2}5855$ | $0.9^{2}5975$ | $0.9^{2}6093$ | $0.9^{2}6207$ | $0.9^{2}6319$ | $0.9^{2}6427$ |
| 2.7 | $0.9^{2}6533$ | $0.9^{2}6636$ | $0.9^{2}6736$ | $0.9^{2}6833$ | $0.9^{2}6928$ | $0.9^{2}7020$ | $0.9^{2}7110$ | $0.9^{2}7197$ | $0.9^{2}7282$ | $0.9^{2}7365$ |
| 2.8 | $0.9^{2}7445$ | $0.9^{2}7523$ | $0.9^{2}7599$ | $0.9^{2}7673$ | $0.9^{2}7744$ | $0.9^{2}7814$ | $0.9^{2}7882$ | $0.9^{2}7948$ | $0.9^{2}8012$ | $0.9^{2}8074$ |
| 2.9 | $0.9^{2}8134$ | $0.9^{2}8193$ | $0.9^{2}8250$ | $0.9^{2}8305$ | $0.9^{2}8359$ | $0.9^{2}8411$ | $0.9^{2}8462$ | $0.9^{2}8511$ | $0.9^{2}8559$ | $0.9^{2}8605$ |
| 3.0 | $0.9^{2}8650$ | $0.9^{2}8694$ | $0.9^{2}8736$ | $0.9^{2}8777$ | $0.9^{2}8817$ | $0.9^{2}8856$ | $0.9^{2}8893$ | $0.9^{2}8930$ | $0.9^{2}8965$ | $0.9^{2}8999$ |
| 3.1 | $0.9^{3}0324$ | $0.9^{3}0646$ | $0.9^{3}0957$ | $0.9^{3}1260$ | $0.9^{3}1553$ | $0.9^{3}1836$ | $0.9^{3}2112$ | $0.9^{3}2378$ | $0.9^{3}2636$ | $0.9^{3}2886$ |
| 3.2 | $0.9^{3}3129$ | $0.9^{3}3363$ | $0.9^{3}3590$ | $0.9^{3}3810$ | $0.9^{3}4024$ | $0.9^{3}4230$ | $0.9^{3}4429$ | $0.9^{3}4623$ | $0.9^{3}4810$ | $0.9^{3}4911$ |
| 3.3 | $0.9^{3}5166$ | $0.9^{3}5335$ | $0.9^{3}5499$ | $0.9^{3}5658$ | $0.9^{3}5811$ | $0.9^{3}5959$ | $0.9^{3}6103$ | $0.9^{3}6242$ | $0.9^{3}6376$ | $0.9^{3}6505$ |
| 3.4 | $0.9^{3}6633$ | $0.9^{3}6752$ | $0.9^{3}6869$ | $0.9^{3}6982$ | $0.9^{3}7091$ | $0.9^{3}7197$ | $0.9^{3}7299$ | $0.9^{3}7398$ | $0.9^{3}7493$ | $0.9^{3}7585$ |
| 3.5 | $0.9^{3}7674$ | $0.9^{3}7759$ | $0.9^{3}7842$ | $0.9^{3}7922$ | $0.9^{3}7999$ | $0.9^{3}8074$ | $0.9^{3}8146$ | $0.9^{3}8215$ | $0.9^{3}8282$ | $0.9^{3}8347$ |
| 3.6 | $0.9^{3}8409$ | $0.9^{3}8469$ | $0.9^{3}8527$ | $0.9^{3}8583$ | $0.9^{3}8637$ | $0.9^{3}8689$ | $0.9^{3}8739$ | $0.9^{3}8787$ | $0.9^{3}8834$ | $0.9^{3}8879$ |
| 3.7 | $0.9^{3}8922$ | $0.9^{3}8964$ | $0.9^{4}0039$ | $0.9^{4}0426$ | $0.9^{4}0799$ | $0.9^{4}1158$ | $0.9^{4}1504$ | $0.9^{4}1838$ | $0.9^{4}2159$ | $0.9^{4}2468$ |
| 3.8 | $0.9^{4}2765$ | $0.9^{4}3052$ | $0.9^{4}3327$ | $0.9^{4}3593$ | $0.9^{4}3848$ | $0.9^{4}4094$ | $0.9^{4}4331$ | $0.9^{4}4558$ | $0.9^{4}4777$ | $0.9^{4}4988$ |
| 3.9 | $0.9^{4}5190$ | $0.9^{4}5385$ | $0.9^{4}5573$ | $0.9^{4}5753$ | $0.9^{4}5926$ | $0.9^{4}6092$ | $0.9^{4}6253$ | $0.9^{4}6406$ | $0.9^{4}6554$ | $0.9^{4}6696$ |
| 4.0 | $0.9^{4}6833$ | $0.9^{4}6964$ | $0.9^{4}7090$ | $0.9^{4}7211$ | $0.9^{4}7327$ | $0.9^{4}7439$ | $0.9^{4}7546$ | $0.9^{4}7649$ | $0.9^{4}7748$ | $0.9^{4}7843$ |
| 4.1 | $0.9^{4}7934$ | $0.9^{4}8022$ | $0.9^{4}8106$ | $0.9^{4}8186$ | $0.9^{4}8263$ | $0.9^{4}8338$ | $0.9^{4}8409$ | $0.9^{4}8477$ | $0.9^{4}8542$ | $0.9^{4}8605$ |
| 4.2 | $0.9^{4}8665$ | $0.9^{4}8723$ | $0.9^{4}8778$ | $0.9^{4}8832$ | $0.9^{4}8882$ | $0.9^{4}8931$ | $0.9^{4}8978$ | $0.9^{5}0226$ | $0.9^{5}0655$ | $0.9^{5}1066$ |
| 4.3 | $0.9^{5}1460$ | $0.9^{5}1837$ | $0.9^{5}2199$ | $0.9^{5}2545$ | $0.9^{5}2876$ | $0.9^{5}3193$ | $0.9^{5}3497$ | $0.9^{5}3788$ | $0.9^{5}4066$ | $0.9^{5}4332$ |
| 4.4 | $0.9^{5}4587$ | $0.9^{5}4831$ | $0.9^{5}5065$ | $0.9^{5}5288$ | $0.9^{5}5502$ | $0.9^{5}5706$ | $0.9^{5}5902$ | $0.9^{5}6089$ | $0.9^{5}6268$ | $0.9^{5}6439$ |
| 4.5 | $0.9^{5}6602$ | $0.9^{5}6759$ | $0.9^{5}6908$ | $0.9^{5}7051$ | $0.9^{5}7187$ | $0.9^{5}7318$ | $0.9^{5}7442$ | $0.9^{5}7561$ | $0.9^{5}7675$ | $0.9^{5}7784$ |
| 4.6 | $0.9^{5}7888$ | $0.9^{5}7987$ | $0.9^{5}8081$ | $0.9^{5}8172$ | $0.9^{5}8258$ | $0.9^{5}8340$ | $0.9^{5}8419$ | $0.9^{5}8494$ | $0.9^{5}8566$ | $0.9^{5}8634$ |
| 4.7 | $0.9^{5}8699$ | $0.9^{5}8761$ | $0.9^{5}8821$ | $0.9^{5}8877$ | $0.9^{5}8931$ | $0.9^{5}8983$ | $0.9^{6}0320$ | $0.9^{6}0789$ | $0.9^{6}1235$ | $0.9^{6}1661$ |
| 4.8 | $0.9^{6}2067$ | $0.9^{6}2453$ | $0.9^{6}2822$ | $0.9^{6}3173$ | $0.9^{6}3508$ | $0.9^{6}3827$ | $0.9^{6}4131$ | $0.9^{6}4420$ | $0.9^{6}4696$ | $0.9^{6}4958$ |
| 4.9 | $0.9^{6}5208$ | $0.9^{6}5446$ | $0.9^{6}5673$ | $0.9^{6}5889$ | $0.9^{6}6094$ | $0.9^{6}6289$ | $0.9^{6}6475$ | $0.9^{6}6652$ | $0.9^{6}6821$ | $0.9^{6}6981$ |

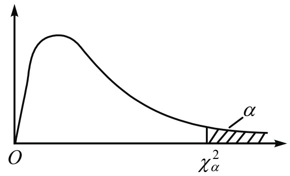
# 附表 3　t 分布双侧临界值表

$P(|t(n)|>t_{\alpha})=\alpha$　　　$n$：自由度

| $n$ \ $\alpha$ | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.158 | 0.325 | 0.510 | 0.727 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 0.142 | 0.289 | 0.445 | 0.617 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.598 |
| 3 | 0.137 | 0.277 | 0.424 | 0.584 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 0.134 | 0.271 | 0.414 | 0.569 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.132 | 0.267 | 0.408 | 0.559 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.859 |
| 6 | 0.131 | 0.265 | 0.404 | 0.553 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.130 | 0.263 | 0.402 | 0.549 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.405 |
| 8 | 0.130 | 0.262 | 0.399 | 0.546 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.129 | 0.261 | 0.398 | 0.543 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.129 | 0.260 | 0.397 | 0.542 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.129 | 0.260 | 0.396 | 0.540 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.128 | 0.259 | 0.395 | 0.539 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.128 | 0.259 | 0.394 | 0.538 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.537 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.536 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.128 | 0.258 | 0.392 | 0.535 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.128 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.127 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.532 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.767 |
| 24 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.531 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.126 | 0.255 | 0.388 | 0.529 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.432 | 2.704 | 3.551 |
| 60 | 0.126 | 0.254 | 0.387 | 0.527 | 0.679 | 0.848 | 1.046 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 120 | 0.126 | 0.254 | 0.386 | 0.526 | 0.677 | 0.845 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| $\infty$ | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

# 附表4　$\chi^2$分布的上侧临界值$\chi_\alpha^2$表

$P(\chi^2(n) \geqslant \chi_\alpha^2) = \alpha$　　　　$n$：自由度




| $n$ \ $\alpha$ | 0.995 | 0.99 | 0.98 | 0.975 | 0.95 | 0.90 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.02 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0.0^4393$ | $0.0^3157$ | $0.0^3628$ | $0.0^3982$ | $0.0^2393$ | 0.0158 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 5.41 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0404 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 7.82 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.185 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 9.84 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.2070 | 0.297 | 0.429 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 11.7 | 12.3 | 14.9 |
| 5 | 0.4120 | 0.554 | 0.752 | 0.831 | 1.145 | 1.61 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 13.4 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.13 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 15.0 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.56 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 16.6 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.340 | 1.65 | 2.03 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 18.2 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.730 | 2.09 | 2.53 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 19.7 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.160 | 2.56 | 3.06 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 21.2 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.61 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 22.6 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.18 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 24.0 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 4.77 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 25.5 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.37 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.10 | 23.7 | 26.1 | 26.9 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 5.99 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 28.3 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.61 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 29.6 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.26 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 31.0 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 7.91 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 32.3 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.57 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 33.7 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.24 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 35.0 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 9.92 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 36.3 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.6 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 20.8 | 33.9 | 36.8 | 37.7 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.3 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 39.0 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.0 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 40.3 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 12.7 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 41.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.4 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 42.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.1 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 44.1 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 14.8 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 45.4 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 15.6 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 46.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.3 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 48.0 | 50.9 | 53.7 |

# 附录A　初等数学中常用的公式与方法

学习《大学数学》是以初等数学作为基础的，但所用到的初等数学知识并不是全部，而是其中的一部分，在这部分初等数学知识中，有一些是必须熟练掌握的．

为了方便大家学习《大学数学》，现将必须熟练掌握的这部分初等数学知识中常用的公式与方法汇集如下．

## 一、幂函数与指数函数

数学表达式$a^b$称为幂，其中$a$称为底，$b$称为指数．若底为变量$x$，而指数为常数$\alpha$，则$y=x^{\alpha}$称为幂函数；若底为常数$a$而指数为变量$x$，则$y=a^x$称为指数函数．

### 1．幂的各种表达式的定义

（1）$a^n=\underbrace{a\,a\cdots a}_{n\text{个}}$；$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$　（$a\neq 0$）

（2）$a^0=1$　（$a\neq 0$）

（3）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　（$a\geqslant 0$）；$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　（$a>0$）

式中，$n$、$m$均为正整数，$a$为有理数．

### 2．幂的运算法则

（1）$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$

（2）$\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$

（3）$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$

（4）$(ab)^x=a^xb^x$

（5）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

式中，$a>0$，$b>0$；$x_1$、$x_2$、$x$均为任意实数．

## 二、对数函数

若$a^y=x$（$a>0,\ a\neq 1$），则将$y$表示为$\log_a{}^x$，$y=\log_a{}^x$称为对数函数．其中，$a$称为底，$x$称为真数，$y$称为对数．

当$a$=10时，$\log_{10}{}^x$记作$\lg x$，称为常用对数．

当 $a$=e 时，$\log_e{}^x$ 记作 $\ln x$，称为自然对数.

指数函数 $x=a^y$ 与对数函数 $y=\log_a{}^x$ 互为反函数，是表示 $a$、$x$、$y$ 三者同一关系的不同表示方法.

### 1．性质

（1）$\log_a a^x = x$　　（2）$a^{\log_a x} = x$　　（3）$\log_a 1 = 0$　　（4）$\log_a a = 1$

### 2．运算法则

（1）$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

（2）$\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

（3）$\log_a x^b = b\log_a x$

### 3．换底公式

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

## 三、三角函数

在《大学数学》中，一律以“弧度”作为度量角的单位，“弧度”二字经常省略不写.

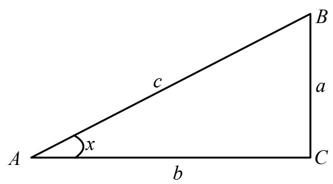
弧度与度的换算关系为：π 弧度=180°.

因此可得出：

0 弧度=0°　　$\dfrac{\pi}{6}$ 弧度=30°　　$\dfrac{\pi}{4}$ 弧度=45°　　$\dfrac{\pi}{3}$ 弧度=60°　　$\dfrac{\pi}{2}$ 弧度=90°

1 弧度≈57°17′　　1°≈0.0175 弧度

在三角函数中，特别当角 $x$ 为锐角时，其三角函数可用直角三角形有关两条边的比值表示.




$$\sin x = \frac{对边}{斜边} = \frac{a}{c},\quad \cos x = \frac{邻边}{斜边} = \frac{b}{c}$$
$$\tan x = \frac{对边}{邻边} = \frac{a}{b},\quad \cot x = \frac{邻边}{对边} = \frac{b}{a}$$
$$\sec x = \frac{斜边}{邻边} = \frac{c}{b},\quad \csc x = \frac{斜边}{对边} = \frac{c}{a}$$

### 1．同角三角函数的基本关系式

（1）$\sin x = \dfrac{1}{\csc x}$　　（2）$\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

（3） $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$　　（4） $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

（5） $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$　　（6） $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

（7） $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$　　（8） $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

### 2．异角三角函数的关系式

（1） $\sin(-x) = -\sin x$　　（2） $\cos(-x) = \cos x$

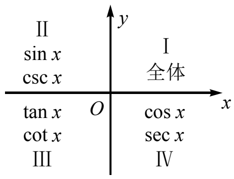
（3） $\tan(-x) = -\tan x$　　（4） $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

（5） $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$　　（6） $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

（7） $\sin(\pi - x) = \sin x$　　（8） $\cos(\pi - x) = -\cos x$

（9） $\tan(\pi - x) = -\tan x$

### 3．三角函数的正值的正值象限




### 4．特殊的正弦、余弦、正切数值

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ | 0 |

### 5．三角函数的和差化积

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

## 四、排列与组合

### 1．阶乘

$$n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n \text{（}n\text{ 为自然数）}$$

规定：$0! = 1$

### 2．排列

（1）选排列： $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

（2）全排列： $P^n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

### 3．组合

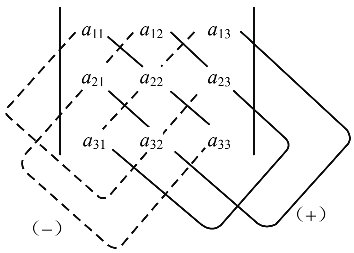
$C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$， $C_n^k$ 也记作 $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

规定： $C_n^0 = 1$

### 4．组合公式

（1） $C_n^k = C_n^{n-k}$　　（2） $C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$　　（3） $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

## 五、三阶行列式的计算（对角线法）




$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

## 六、其他

### 1．完全平方与立方公式

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

### 2．因式分解

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$
$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

### 3．一元二次方程

$(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的根为 $x=x_1$，$x=x_2$ .

### 4．一元二次不等式

$(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0$（ $x_1 < x_2$ ）的解为 $x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$ .

$(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0$（ $x_1 < x_2$ ）的解为 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ .

**5．等比数列前 $n$ 项的和**

等比数列 $a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, \cdots$（公比 $q \neq 1$）的前 $n$ 项的和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

**6．反三角函数的基本关系式**

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

# 参 考 文 献


［1］ 顾静相，张旭红．经济数学基础．北京：高等教育出版社，2004

［2］ 周誓达．线性代数与线性规划．北京：中国人民大学出版社，1997

［3］ 赵树塬．线性代数．北京：中国人民大学出版社，1997

［4］ 张乃一，曲文萍，刘九兰．线性代数．天津：天津大学出版社，2005

［5］ 孟昭为，张永风，梁振英．线性代数．上海：同济大学出版社，2005

［6］ 张茂，张振国，杜瑞文．经济应用数学．天津：天津科学技术出版社，1995

［7］ 黎诣远，李林曙．经济数学基础．北京：高等教育出版社，1998

［8］ 王永葆．线性代数题库精编．沈阳：东北大学出版社，2000

［9］ 高汝熹．高等数学．武汉：武汉大学出版社，1993

［10］吴坚．计算机应用数学．北京：科学出版社，2004

［11］唐瑞娜，李春梅，李美贞，邹慧超．高等数学（经管类）．北京：清华大学出版社，北京交通大学出版社，2004

［12］王永祥．应用经济数学．上海：上海交通大学出版社，2000

［13］吴赣昌．微积分（经济类）．北京：中国人民大学出版社，2006

［14］刘金冷，王坤龙，杨华．经济预测与决策．北京：中国教育文化出版社，2006

［15］甘键胜．概率论与数理统计．北京：清华大学出版社，北京交通大学出版社，2005

［16］孟昭为．概率论与数理统计．上海：同济大学出版社，2005

［17］周誓达．概率论与数理统计．北京：中国人民大学出版社，2005

［18］袁荫棠．概率论与数理统计．北京：中国人民大学出版社，2000

［19］全国各类成人高考复习考试辅导材料 高等数学（二）．北京：高等教育出版社，2005

［20］李文林．数学史概论．北京：高等教育出版社，2003

［21］［英］斯科特 著；侯德润，张兰 译．数学史．广西师范大学出版社，2002

［22］［瑞典］ L．戈丁著；胡作玄译．数学概论．北京：科学出版社，2002

［23］王树禾．数学思想史．北京：国防工业出版社，2003

［24］［苏］A.Д．亚历山大洛夫等著；孙小礼等译．数学——它的内容、方法和意义．北京：科学出版社，1988

［25］王青建．数学史简编．北京：科学出版社，2004

# 反侵权盗版声明



举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036