

大学物理(Ⅱ)

龙 涛 主编
胡 莉 副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是根据教育部《理工科类大学物理课程教学基本要求(2010年版)》精神,在总结长期教学实践经验的基础上编写而成的。本套书分为三册,第1册包括力学基础、振动和波、狭义相对论、热学;第2册包括电磁学、波动光学和量子物理等内容;第3册包括基础物理知识及新科技物理基础的拓展与应用。本套书内容概括了大学物理教学的基本要求,突出物理模型,注重科学分析方法上的衔接以及基础学科与工程学科之间的联系,力求清晰、简明地阐述物理概念和规律及其应用。

本书可作为高等工科院校各专业的大学物理教材,也可作为综合性大学和高等师范院校非物理类专业大学物理的教材和参考书。书中带*号的内容教师可根据专业需要选讲。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理. (II)/龙涛主编. —北京:电子工业出版社,2015.9

ISBN 978-7-121-26985-1

I. ①大… II. ①龙… III. ①物理学-高等学校-教材 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 196120 号

策划编辑:王赫男

责任编辑:王赫男

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:15.25 字数:390 千字

版 次:2015 年 9 月第 1 版

印 次:2015 年 9 月第 1 次印刷

定 价:38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

本书是为适应当前大学物理教学改革的要求,依据教育部《理工科类大学物理课程教学基本要求(2010年版)》和《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神,在汲取当前国内外优秀教学改革成果并结合我校近年来大学教学改革实践的成就的基础上编写的。

大学物理是理工科学生必修的一门重要基础理论课,是基础学科与工程学科相衔接的关键性课程,是为提高学生的科学素质服务的课程。本书编写过程中力求使学生能较好地掌握物理学的基本内容、基本规律、科学的分析方法,同时培养学生的科学思想、方法和态度并激发学生的创新意识和能力。

本套书内容包括五篇:力学、热学、电磁学、波动光学、量子物理及拓展应用。本套书分为三册——大学物理(Ⅰ)、大学物理(Ⅱ)、大学物理(Ⅲ)出版。第1册包括力学基础、狭义相对论、振动和波、热学;第2册包括电磁学、波动光学和量子物理等内容;第3册包括基础物理知识及新科技物理基础的拓展与应用。本书的讲授时数为120学时左右。

力学篇以牛顿定律为基础,从动量、角动量和能量的概念出发,着重阐述和导出了包括动量守恒、角动量守恒和机械能守恒等定律。在刚体转动部分指明了定轴转动定律与一般角动量定理的关系。狭义相对论是现代物理学的基础,主要内容是时空观的概念,机械振动和机械波是牛顿力学的延伸,也放在本篇介绍。

热学篇主要介绍气体的宏观性质及其变化规律,加强了在分子理论基础上的统计概念和规律的讲解,对功、热的本质、热力学第一定律、热力学第二定律的微观意义和宏观表示式等都做了清晰的讲解。

电磁学篇以库仑定律、毕奥-萨伐尔定律和法拉第定律为基础展开,再到麦克斯韦方程组。在讲解了电流的磁场之后,还根据相对论指出了电磁场规律的相对性,使学生对电磁场的性质有更深入的理解。在分析解决问题的方法上,本篇强调了对称性求解电场和磁场的分布。

波动光学篇主要阐述光的干涉、光的衍射和光的偏振的基本现象与规律。

量子物理基础篇的重点放在最基本的量子力学概念方面,如波粒二象性、不确定关系等,对于薛定谔方程及其应用、原子中电子运动的规律、固体物理及新技术的物理基础等做了简要陈述。

拓展应用部分“渗透”了科技前沿信息,介绍了基础性物理原理在新技术领域中的应用实例。

质点运动学、质点动力学、刚体定轴转动由代洪霞编写;狭义相对论、机械振动和机械波由兰明建编写;气体动理论、热力学基础由张翠玲编写;静电场、稳恒磁场、电磁感应和电磁波、量子物理基础、原子核物理和粒子物理简介、新技术的物理基础由龙涛编写;光的干涉、光的衍射、光的偏振由胡莉编写;拓展应用部分由程发银编写。

编写适合教学改革需要的大学物理教材是一种探索,也是一项凝聚教师集体劳动的工程。我们在编写本教材的过程中,听取了多年来从事大学物理教学工作的老师们的意见和建议,也参考了兄弟院校的相关教材,同时也结合了我校开展大学物理教学改革的实际。本书的出版得到了重庆工商大学和电子工业出版社的大力支持,在此,我们表示衷心的感谢。

由于时间仓促,加之编者水平有限,难免有不妥和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

目 录

第三篇 电磁学

第 8 章 静电场	2
8.1 电荷 库仑定律	2
8.1.1 电荷	2
8.1.2 库仑定律	3
8.2 电场强度	4
8.2.1 电场强度	4
8.2.2 电场强度的叠加原理	6
8.2.3 电场强度的计算	6
8.3 电场强度通量 高斯定理	11
8.3.1 电场线	11
8.3.2 电场强度通量	13
8.3.3 高斯定理	14
8.3.4 高斯定理的应用	16
8.4 静电场的环路定理 电势	19
8.4.1 静电场力所做的功与路径无关	19
8.4.2 静电场的环路定理	20
8.4.3 电势能 电势	21
8.4.4 电势的计算	22
8.5 静电场中的导体和电介质	25
8.5.1 导体的静电平衡条件	25
8.5.2 静电平衡时导体上的电荷分布	26
8.5.3 尖端放电 静电屏蔽	27
8.5.4 电介质的极化	29
8.5.5 电介质中的高斯定理	30
8.6 电容器 电场能量	32
8.6.1 电容器的电容	32
8.6.2 电容的计算	33
8.6.3 电容器的串联和并联	35
8.6.4 电容器的电能	35
8.6.5 静电场的能量 能量密度	36
8.7 电流 稳恒电场	37

8.7.1	电流 电流密度	37
8.7.2	稳恒电场	38
8.7.3	电动势	38
	本章小结	39
	习题 8	42
第 9 章	稳恒磁场	46
9.1	磁场 磁感应强度	46
9.1.1	基本磁现象	46
9.1.2	磁场 磁感应强度	47
9.2	磁通量 磁场的高斯定理	48
9.2.1	磁感应线	48
9.2.2	磁通量 磁场的高斯定理	49
9.3	毕奥-萨伐尔定律	50
9.3.1	毕奥-萨伐尔定律	50
9.3.2	毕奥-萨伐尔定律的应用	52
9.4	安培环路定理	55
9.4.1	安培环路定理	55
9.4.2	安培环路定理的应用	57
9.5	载流导线在磁场中所受的作用力	60
9.5.1	安培力	60
9.5.2	磁场对载流线圈的作用	62
9.5.3	磁力的功	63
9.6	带电粒子在磁场中的运动	65
9.6.1	带电粒子在磁场中的运动规律	65
9.6.2	霍尔效应	66
9.6.3	回旋加速器	67
* 9.7	磁介质中的磁场	69
9.7.1	磁介质 磁化强度	69
9.7.2	磁介质中的安培环路定理 磁场强度	71
9.7.3	铁磁质	74
	本章小结	76
	习题 9	78
第 10 章	电磁感应和电磁波	83
10.1	电磁感应定律	83
10.1.1	电磁感应现象	83
10.1.2	楞次定律	84
10.1.3	法拉第电磁感应定律	85
10.2	动生电动势和感生电动势	86

10.2.1	动生电动势	87
10.2.2	感生电动势	89
10.2.3	涡电流	91
10.3	自感和互感	93
10.3.1	自感电动势 自感	93
10.3.2	互感电动势 互感	95
10.4	磁场的能量	97
10.5	位移电流 麦克斯韦方程组	99
10.5.1	位移电流	99
10.5.2	麦克斯韦方程组	101
* 10.6	电磁振荡 电磁波	102
10.6.1	振荡电路 电磁波的产生和传播	102
10.6.2	平面电磁波的基本性质	104
10.6.3	电磁波谱	105
	本章小结	105
	习题 10	107

第四篇 波动光学篇

第 11 章	光的干涉	114
11.1	光波	114
11.1.1	光源	114
11.1.2	光的单色性与颜色	115
11.2	光的相干性 光程差	115
11.2.1	光的相干性	115
11.2.2	光程和光程差	117
11.3	杨氏双缝干涉	118
11.3.1	杨氏双缝干涉	118
11.3.2	应用分波阵面法的其他干涉实验	120
11.4	薄膜干涉	122
11.4.1	等倾干涉	122
11.4.2	增透膜和增反膜	124
11.4.3	等厚干涉	125
11.5	迈克耳孙干涉仪	128
	本章小结	129
	习题 11	130
第 12 章	光的衍射	133
12.1	光的衍射 惠更斯-菲涅耳原理	133
12.1.1	光的衍射现象	133

12.1.2	惠更斯-菲涅耳原理	134
12.2	单缝衍射	135
12.3	圆孔衍射 光学仪器的分辨率	137
12.3.1	圆孔衍射	137
12.3.2	光学仪器的分辨率	138
12.4	衍射光栅	140
12.4.1	衍射光栅	140
12.4.2	光栅衍射规律	141
12.4.3	光栅光谱	143
12.5	X射线的衍射	144
	本章小结	145
	习题 12	146
第 13 章	光的偏振	148
13.1	自然光和偏振光	148
13.1.1	自然光	148
13.1.2	线偏振光和部分偏振光	149
13.1.3	椭圆偏振光	149
13.2	偏振片 马吕斯定律	149
13.2.1	偏振片的起偏和检偏	149
13.2.2	马吕斯定律	150
13.3	布儒斯特定律	152
13.4	光的双折射	153
	本章小结	155
	习题 13	156

第五篇 量子物理

第 14 章	量子物理基础	160
14.1	黑体辐射 普朗克的能量子假设	160
14.1.1	黑体 黑体辐射	160
14.1.2	黑体辐射定律	161
14.1.3	普朗克假设 普朗克黑体辐射公式	162
14.2	光电效应	162
14.2.1	光电效应实验规律	162
14.2.2	光子 爱因斯坦光电效应方程	163
14.2.3	光的波粒二象性	165
14.3	康普顿散射效应	166
14.4	玻尔的氢原子理论	169
14.4.1	氢原子光谱的规律	169
14.4.2	氢原子的玻尔理论	171

14.4.3	氢原子玻尔理论的困难	173
14.5	德布罗意波 实物粒子的二象性	173
14.5.1	德布罗意波	173
14.5.2	德布罗意波的实验证明——汤姆孙电子衍射实验	174
14.5.3	德布罗意波的统计解释	174
14.6	测不准关系	175
* 14.7	波函数 薛定谔方程	177
14.7.1	波函数	177
14.7.2	薛定谔方程	178
14.7.3	一维无限深势阱中运动的粒子	179
14.7.4	氢原子的薛定谔方程	180
	本章小结	181
	习题 14	183
* 第 15 章	原子核物理和粒子物理简介	186
15.1	原子核的一般性质	186
15.1.1	核的组成及大小	186
15.1.2	核的自旋和磁矩	188
15.1.3	核力	189
15.1.4	原子核的结合能	190
15.2	原子核的放射性衰变	192
15.2.1	原子核的稳定性	192
15.2.2	原子核的放射性和衰变定律	193
15.2.3	α 衰变	196
15.3	粒子物理简介	198
15.3.1	粒子特征 四种相互作用和粒子分类	199
15.3.2	强子的夸克结构	202
15.3.3	相互作用的统一	203
	本章小结	204
	习题 15	205
第 16 章	新技术的物理基础	207
16.1	半导体	207
16.1.1	固体的能带结构	207
16.1.2	本征半导体和杂质半导体	209
16.1.3	pn 结	211
16.1.4	半导体的其他特征和应用	212
16.2	激光	213
16.2.1	自发辐射 受激辐射	213
16.2.2	激光原理	214

16.2.3	激光器	216
16.2.4	激光的特性和应用	217
* 16.3	超导体	218
16.3.1	超导体的转变温度	218
16.3.2	超导体的主要特性	219
16.3.3	超导的应用前景	220
* 16.4	纳米材料简介	221
16.4.1	纳米效应	221
16.4.2	纳米材料的制备	222
16.4.3	一种纳米新材料——碳纳米管	222
16.4.4	应用前景	223
参考答案		224

第三篇

电 磁 学

电磁学是研究电磁场运动规律的学科。电磁学主要研究电荷、电流激发的电场、磁场的规律，电场和磁场之间的相互作用，电磁场对电荷、电流的作用以及电磁场对物质的各种效应等。电磁学是物理学的一个重要分支，电磁学的知识是许多工程技术和科学研究的基础，电能是应用最广泛的能源之一，电磁波的传播实现了信息传递，研究新材料的电磁性质促进了新技术的诞生，显然电磁学与工程技术的各个领域联系十分密切。电磁学的研究在理论上也很重要，物质的各种性能是由物质的电磁结构决定的，在分子和原子等微观领域，电磁力起主要作用，许多物理现象，如物质的弹性、金属的导热、光的折射率等都可以由物质的电磁结构得以解释。随着对物质运动认识的深入，人们惊奇地发现，整个物质世界，无一不与电磁现象密切联系，所以，电磁学的理论在现代物理学中占有重要的地位。

人类对电磁现象的观察和认识是非常早的，最初曾认为电现象和磁现象是互不相关的，直到1819年奥斯特发现了电流对磁针的作用，1820年安培发现了磁铁对电流的作用，才开始认识到电和磁的关系。1831年，法拉第发现电磁感应定律，提出了场和力线的概念，揭示了自然界电现象与磁现象之间的联系。麦克斯韦在前人成就的基础上，再加上他关于感应电场和位移电流的假设，于1865年建立了系统的电磁场理论，并预言光是一种电磁波，使光学成为电磁场理论的组成部分。麦克斯韦的这一成就可以认为是从牛顿建立力学理论到爱因斯坦提出相对论的这段时期中物理学史上最重要的理论成果。1905年爱因斯坦创立了相对论，它不但使人们对牛顿力学有了更全面的认识，也使得人们对已知的电磁现象和理论有了更深刻的理解，根据电磁现象的规律必须满足相对论时洛伦兹变换的要求，可以证明，从不同参考系观测，同一电磁场可以表现为只是电场，或只是磁场，或电场和磁场并存。更确切地说，表征电磁场的物理量——电场强度和磁感应强度——是随参考系改变的，这说明电磁场是一个统一的实体，且麦克斯韦方程组可以在此基础上加以统一的论证。

本篇主要介绍电磁场的基本规律，首先讲电场的描述及其规律及静电场中的导体和电介质；再讲磁场的描述及其规律及磁场中的磁介质；最后介绍电场和磁场的相互联系的规律——电磁感应和电磁波的理论。

第 8 章

静 电 场

相对于观察者为静止的电荷在周围空间所激发的电场，称为静电场。本章我们研究真空中静电场的基本特性，主要内容有：静电场的基本定律——库仑定律，反映静电场基本性质的两个重要定理——高斯定理和环路定理，描述静电场的两个重要物理量——电场强度和电势。

8.1 电荷 库仑定律

8.1.1 电荷

1. 电荷的量子化

人们对于电的认识，最初来自人为的摩擦起电现象和自然界的雷电现象。事实上，两个不同质料的物体，例如丝绸和玻璃棒互相摩擦后，都能吸引羽毛、小纸片等轻微物体，这表明两个物体经摩擦后，处于一种特殊状态，我们把处于这种状态的物体称为带电体，并说它们分别带有电荷。电荷是物体状态的一种属性，宏观物体或微观粒子处于带电状态就说它们带有电荷。

自然界只存在正负两种电荷，同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。物体所带电荷的多少叫做电量，常用符号 Q 或 q 表示，在国际单位制(SI)中，电量的单位为库仑，简称为库，符号为 C。正电荷的电荷量取正值，负电荷的电荷量取负值。实验表明，在自然界中，电荷总是以一个基本单元的整数倍出现的，任何带电体或其他微观粒子所带的电量只能为基本单元电荷的整数倍。电荷的这种只能取离散的、不连续的量值的性质叫做电荷的量子化。1913年，密立根用油滴实验测定基本单元电荷的量值，即一个电子所带电量的绝对值，用符号 e 表示，迄今所知，电子是自然界存在的最小负电荷，质子是带最小正电荷。国际推荐的电子电量的绝对值为

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$$

因为 e 如此之小，以致电荷的量子性在研究宏观现象的绝大多数实验中未能表现出来，因此常把带电体当做电荷连续分布的带电体来处理，并认为电荷的变化是连续的。近代物理从理论上预言，基本粒子由若干种电量为 $\pm \frac{1}{3}e$ ， $\pm \frac{2}{3}e$ 的夸克或反夸克组成，然而到目前为止，实验上还没有发现处于自由状态的夸克。

2. 电荷守恒定律

在宏观过程中,摩擦起电、感应起电等事实表明,任何使物体带电的过程或带电体被中和的过程,都是电荷从一个物体转移到另一个物体,或从物体的一部分转移到另一部分。实验证明,正负电荷总是同时出现的,而且这两种电荷的量值一定相等。当两种等量的异号电荷相遇时,则互相中和,物体就不带电了。由此可见,当一种电荷出现时,必然有相等量值的异号电荷同时出现;一种电荷消失时,也必然有相等量值的异号电荷同时消失。在一个与外界没有电荷交换的系统内,无论进行怎样的物理过程,系统内正、负电荷代数和总是保持不变,这就是电荷守恒定律。

在微观过程中,近代科学研究表明电荷守恒定律仍然成立。例如高能光子(γ 射线)和一个重原子核相碰时,该光子会转化为一对正负电子(电子对产生);反之,当一对正负电子在一定条件下相遇时,又会同时消失而产生两个或三个光子(电子对湮灭),光子不带电,正负电子所带的电荷等量异号,故在此微观过程中尽管粒子产生或湮灭,但过程前后电荷的代数和仍没有变。

电荷守恒定律就像能量守恒定律、动量守恒定律和角动量守恒定律那样,也是自然界的基本守恒定律之一,无论是在宏观领域里,还是在原子、原子核和粒子范围内,电荷守恒定律也是成立的。

8.1.2 库仑定律

1. 库仑定律

1785年,法国物理学家库仑通过扭秤实验总结出了两个静止点电荷之间相互作用力的规律,即库仑定律。点电荷是从实际带电体中抽象出来的理想模型,是指带电体本身的几何线度比起它到其他带电体的距离小得多时,其形状和大小可以忽略,可把带电体抽象成一个几何点。库仑定律表述如下:

在真空中,两个静止点电荷之间的相互作用力的大小与这两个点电荷所带电量的乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比;作用力的方向沿着这两个点电荷之间的连线,同号电荷相斥,异号电荷相吸。

如图8-1所示,两个点电荷分别为 q_1 和 q_2 ,由电荷 q_1 指向电荷 q_2 的矢量用 \mathbf{r} 表示,则 q_2 受到 q_1 的作用力 \mathbf{F} 为

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (8.1)$$

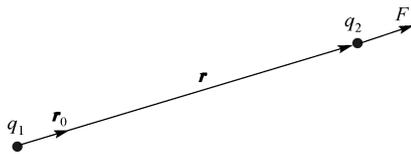


图8-1 库仑定律

式中 \mathbf{r}_0 为从电荷 q_1 指向电荷 q_2 的单位矢量, $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ 。

库仑定律公式中比例系数 k 的数值和单位取决于式中各量所采用的单位。在国际单位制中

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \approx 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

通常引入常量 ϵ_0 来代替 k ,并把 k 写成 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$,于是真空库仑定律就可写为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (8.2)$$

式中的常量 ϵ_0 称为真空介电常数(或电容率), 也称真空介电常量。一般计算时, 其值为

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

不论 q_1 和 q_2 的正负如何, 公式(8.1)都适用。当 q_1 和 q_2 同号时, \mathbf{F} 与矢量 \mathbf{r}_0 的方向相同, 表明 q_1 对 q_2 的作用力是斥力; q_1 和 q_2 异号时, \mathbf{F} 与 \mathbf{r}_0 的方向相反, 表明 q_1 对 q_2 的作用力是引力。静止电荷之间的电作用力, 又称库仑力或静电力。库仑定律是直接由实验总结出来的规律, 它是静电场理论的基础。

2. 静电力的叠加原理

实验还证明, 当空间有两个以上的点电荷(如 $q_0, q_1, q_2, \dots, q_i$) 存在时, 各对点电荷之间的静电力彼此都是独立的, 即任何一对点电荷之间的静电力都遵守库仑定律, 并不因为邻近存在其他电荷而改变。所以, 作用在每一点电荷(如 q_0) 上的总静电力 \mathbf{F} , 等于其他各点电荷单独存在时作用于该点电荷上的静电力 \mathbf{F}_i 的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_{i0}$$

这一结论称为电场力的叠加原理。根据库仑定律和静电力的叠加原理, 原则上可以求解任意带电体之间的静电力。

【例 8.1】 按量子理论, 在氢原子中, 核外电子快速地运动着, 并以一定的概率出现在原子核(质子)的周围各处, 在基态下, 电子在以质子为中心, 半径 $r = 0.529 \times 10^{-10} \text{m}$ 的球面附近出现的概率最大。试计算在基态下, 氢原子内电子和质子之间的静电力和万有引力, 并比较两者的大小。引力常量为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 。

【解】 按库仑定律计算, 电子和质子之间的静电力为

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8.99 \times 10^9 \times \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(0.529 \times 10^{-10})^2} = 8.22 \times 10^{-8} \text{N}$$

应用万有引力定律及相关的计算, 电子和质子之间的万有引力为

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27}}{(0.529 \times 10^{-10})^2} = 3.63 \times 10^{-47} \text{N}$$

由此得静电力与万有引力的比值为

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.26 \times 10^{39}$$

可见在原子内, 电子和质子之间的静电力远比万有引力大, 因此, 在处理电子和质子之间的相互作用时, 只需考虑静电力, 万有引力可以略去不计。而在原子结合成分子, 原子和分子组成液体或固体时, 它们的结合力在本质上都属于静电力。

8.2 电场强度

8.2.1 电场强度

1. 电场

任何电荷都在其周围空间激发电场, 电荷之间的相互作用是通过其中一个电荷所激发的电场对另一个电荷的作用来传递的。场是一种特殊形态的物质, 它和物质的另一种形态——

实物一起，构成了物质世界非常丰富的图景。静电场存在于静止电荷的周围，并分布在一定的空间。两个电荷之间的相互作用力本质上是一个电荷的电场作用在另一个电荷上的电场力。静电场是普遍存在的电磁场的一种特殊情况。

2. 电场强度

为了定量地描述电场中任一处电场的性质，可将一个试验电荷 q_0 放到电场中不同位置，并观测 q_0 受到的作用力的情况。试验电荷必须满足如下要求：首先试验电荷必须是点电荷，其次它所带的电荷量必须足够小，当把它引入电场时，不致扰乱原来的电场分布，即不会对原有电场有任何显著的影响。为了叙述方便取试验电荷 q_0 为正电荷。

如图 8-2 所示，在静止电荷 q 周围的静电场中，先后将同一试验电荷 q_0 放到电场中不同地点 A、B、C 时，发现 q_0 所受到的电场力 \mathbf{F} 的大小和方向逐点不同。另一方面，在电场中某一给定点处，试验电荷 q_0 在该处所受到的电场力 \mathbf{F} 只与 q_0 的大小有关，但 \mathbf{F} 与 q_0 之比则与 q_0 无关，为一不变的矢量。显然，比值 $\frac{\mathbf{F}}{q_0}$ 是一个无论大小和方向都与试验电荷本身无关的矢量，

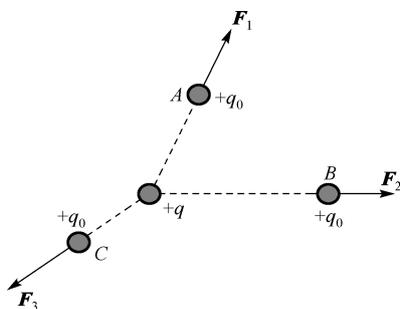


图 8-2 试验电荷 q_0 在电场中不同位置受力情况

它反映了试验电荷所在点处的电场本身的性质。所以，我们可用试验电荷所受的力和试验电荷所带电荷量之比，作为描述静电场中某一给定点的客观性质的一个物理量，定义为电场强度，简称场强，用 \mathbf{E} 表示，有

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (8.3)$$

上式表明，电场中某点处的电场强度 \mathbf{E} 等于单位试验电荷在该点所受的电场力。我们取试验电荷 q_0 为正时， \mathbf{E} 的方向和电场力 \mathbf{F} 的方向相同； q_0 为负时， \mathbf{E} 的方向和电场力 \mathbf{F} 的方向相反，如图 8-3 所示。

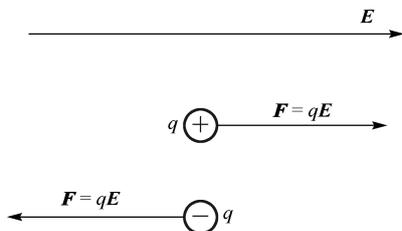


图 8-3 电场对正负电荷作用力的方向

在国际单位制中, 电场强度的单位为牛顿每库仑, 符号为 $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$, 电场强度的单位也可以为伏特每米, 符号为 $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 。这两种表示法是一样的, $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 比 $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ 使用得更普遍些。

8.2.2 电场强度的叠加原理

如果电场是由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 共同激发的, 这些电荷的总体称为电荷系, 将试验电荷 q_0 放在这个点电荷系所产生的电场中时, 根据电场力的叠加原理, q_0 在电场中某点 P 处所受的力等于各个点电荷单独存在时对 q_0 作用的力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

两边除以 q_0 得到

$$\frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0}$$

按场强的定义 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$, 有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (8.4)$$

上式说明, 电场中任一点处的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点各自激发的场强的矢量和, 这就是场强叠加原理, 是电场的基本性质之一。利用这一原理, 可以计算任意带电体所激发的场强, 因为任何带电体都可以看做是许多点电荷的集合。

8.2.3 电场强度的计算

如果场源电荷分布已知, 那么从点电荷的场强公式出发, 根据场强的叠加原理, 可以求出任意电荷分布所激发电场的电场强度。下面介绍电场强度的计算。

1. 点电荷的电场强度

如图 8-4 所示, 设在真空中有一个静止的点电荷 q , 则距 q 为 r 的空间任意一点 P 处的场强, 可由库仑定律和电场强度的定义求得。设在距离点电荷 q 为 r 的 P 点处放一试验电荷 q_0 , 则作用在 q_0 上的电场力是

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \mathbf{r}_0$$

式中 \mathbf{r} 是由点电荷 q 指向 P 点的矢量, \mathbf{r}_0 是沿着 \mathbf{r} 方向的单位矢量。再应用式(8.3)可求得 P 点的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 \quad (8.5)$$

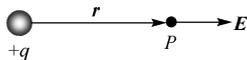


图 8-4 正点电荷的场强

由式(8.5)可知, 点电荷 q 在空间任一点所激发场强的大小与点电荷的电荷量 q 成正比, 与点电荷 q 到该点距离 r 的平方成反比。如果 q 为正电荷, 可知 \mathbf{E} 的方向与 \mathbf{r} 的方向一致, 即背离 q , 如图 8-4 所示。如果为负电荷, \mathbf{E} 的方向与 \mathbf{r} 的方向相反, 即指向 q 。

2. 点电荷系的电场强度

设真空中有 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 构成点电荷系, 用 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ 分别表示各点电荷到场点 P 的矢径, 各点电荷单独存在时在 P 点产生的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{r}_{10}, \mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{E}_n = \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \mathbf{r}_{n0}$$

根据场强叠加原理, 这个点电荷系在 P 点的总场强为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{r}_{i0} \quad (8.6)$$

在直角坐标系中式(8.6)的分量式分别为

$$\begin{cases} E_x = \sum_{i=1}^n E_{ix} \\ E_y = \sum_{i=1}^n E_{iy} \\ E_z = \sum_{i=1}^n E_{iz} \end{cases}$$

3. 电荷连续分布的电荷系的电场强度

引进连续分布电荷的概念, 根据电场强度叠加原理, 就可以计算电荷连续分布的电荷系的电场强度。为此, 对任一带电体所激发的场强, 我们把带电体看成是许多极小的连续分布的电荷元 dq 的集合, 每个电荷元 dq 都当做点电荷来处理, 电荷元 dq 在 P 点激发的场强, 按点电荷的电场强度公式可写为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0$$

式中 \mathbf{r}_0 是从 dq 所在点指向 P 点的单位矢量。带电体的全部电荷在 P 点激发的场强, 是所有的电荷元所激发场强 $d\mathbf{E}$ 的矢量和, 因为电荷是连续分布的, 我们把式(8.6)中的累加号 \sum 换成积分号 \int , 求得 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (8.7)$$

如果电荷分布在整个体积内, 这种分布称为体电荷分布, 引入体电荷密度来表征电荷在该体积上任一点附近的电荷分布情况。体上某点电荷体密度的定义为

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

相应的计算电场强度的公式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \mathbf{r}_0}{r^2} dV \quad (8.7a)$$

如果电荷分布在极薄的表面层里, 这时我们可以把带电薄层抽象为“带电面”并引入电荷面密度来表征电荷在该面上任一点附近的电荷分布情况。面上某点电荷面密度 σ 的定义为

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

相应的计算电场强度的公式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \mathbf{r}_0}{r^2} dS \quad (8.7b)$$

若电荷分布在细长的线上, 则定义电荷线密度 λ 为

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

相应的计算电场强度的公式为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda \mathbf{r}_0}{r^2} dl \quad (8.7c)$$

【例 8.2】 真空中有一均匀带电直线, 长为 L , 总电荷量为 q , 线外一点 P 离开直线的垂直距离为 a , P 点和直线两端的连线与直线之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 , 如图 8-5 所示, 试求 P 点的电场强度。

【解】 取 P 点到直线 L 的垂足 O 点为坐标原点, Ox 轴沿带电直线。 Oy 轴通过 P 点, 如图 8-5 所示, 设直线上单位长度所带电量为 λ , 即 $\lambda = \frac{q}{L}$, 则距离原点为 x 处的电荷元 $dq = \lambda dx$ 在 P 点产生的场强 $d\mathbf{E}$ 为

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0$$

式中 \mathbf{r} 是从 dx 指向 P 点的矢量, \mathbf{r}_0 是沿着 \mathbf{r} 方向的单位矢量。 \mathbf{r} 的大小为 $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$, 设 $d\mathbf{E}$ 与 x 轴之间的夹角为 θ , 则 $d\mathbf{E}$ 沿 x 轴和 y 轴的两个分量分别为

$$dE_x = dE \cos\theta$$

$$dE_y = dE \sin\theta$$

因为 $x = a \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cot\theta$

$$dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta$$

$$dE_y = dE \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\theta d\theta$$

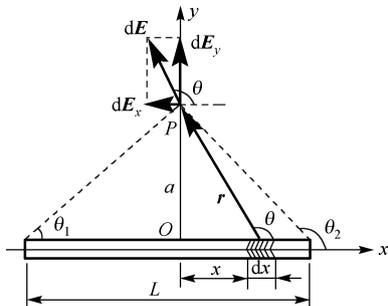


图 8-5 均匀带电直线外任一点的场强

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad (8.8a)$$

得

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (8.8b)$$

由 E_x 和 E_y 求出总场强 \mathbf{E} 的大小和方向, 请读者自己完成。

如果这一均匀带电直线无限长, 亦即 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 那么

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (8.9)$$

式(8.9)表明, 无限长带电直导线附近某点的场强 \mathbf{E} 的大小与该点离带电直线的距离 a 成反比, \mathbf{E} 的方向垂直于直线。若 λ 为正, \mathbf{E} 沿 y 轴的正方向; 若 λ 为负, \mathbf{E} 沿 y 轴的负方向。以上结果对有限长的细直线来说, 在靠近直线中部附近的区域 ($a \ll L$) 也近似成立。

【例 8.3】 如图 8-6 所示, 一半径为 R 的圆环, 均匀带有电荷量 q 。试计算圆环轴线上与环心相距为 x 的 P 点处的电场强度。

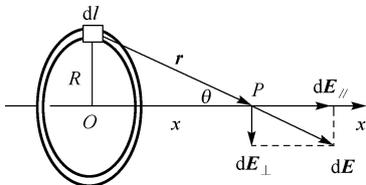


图 8-6 均匀带电圆环轴线上任一点处的场强

【解】 在圆环上任取长度元 dl , dl 上所带的电荷量为

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl$$

dq 在 P 点处所激发的场强 $d\mathbf{E}$ 的大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dl}{2\pi R r^2}$$

式中 $r = (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$, 由于圆环上各电荷元在 P 点激发的场强 $d\mathbf{E}$ 的方向各不相同, 为此把 $d\mathbf{E}$ 分为平行于 x 轴线的分量 $dE_{//}$ 和垂直于轴线的分量 dE_{\perp} 。

$$dE_{//} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

$$dE_{\perp} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

根据对称性, 各电荷元的电场强度在垂直于 x 轴方向上的分量 dE_{\perp} 互相抵消。所以 P 点的合场强就是平行于 x 轴的那些分量 $dE_{//}$ 的叠加, 其大小为

$$E = \int_L dE_{//} = \int_L dE \cos\theta$$

因为

$$dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

上式对整个圆环积分得

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl$$

故有

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (8.10)$$

若 $q > 0$, \mathbf{E} 与 x 轴正方向相同; 若 $q < 0$, \mathbf{E} 与 x 轴正方向相反。下面对几个特殊情况做一讨论。

(1) 若 $x \gg R$, 则 $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx x^3$, 这时有

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \quad (8.11)$$

亦即在远离环心处的地方, 可以把带电圆环看成点电荷, 这与电荷全部集中在环心处的一个点电荷所激发的电场强度相同。

(2) 若 $x = 0$, 则 $E = 0$, 这表明环心处的电场强度为零。

【例 8.4】 试计算均匀带电薄圆盘轴线上与盘心 O 相距为 x 的任一给定点 P 处的场强。设盘的半径为 R , 电荷面密度为 σ 。

【解】 如图 8-7 所示, 把圆盘分成许多同心的细圆环。考虑圆盘上任一半径为 r , 宽度为 dr 的细圆环, 该细圆环所带的电荷量为

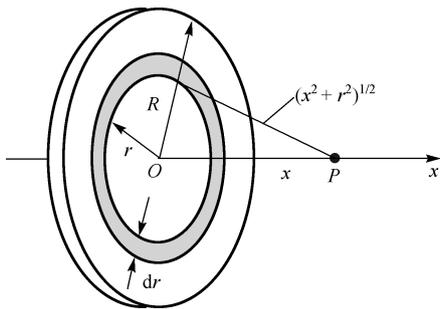


图 8-7 均匀带电圆盘轴线上任一点处的场强

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

利用例 8.3 中的结果, 可得到此带电细圆环在 P 点激发的场强为

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \sigma 2\pi r dr \end{aligned}$$

由于各带电细圆环在 P 点激发的场强的方向都是指向 x 轴正方向的, 而带电圆盘的电场强度 \mathbf{E} 就是这些带电细圆环所激发的场强的矢量和, 其大小为

$$\begin{aligned} E &= \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi x \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

场强 \mathbf{E} 的方向与圆盘相垂直, 其指向随 σ 的正负而定, $\sigma > 0$, \mathbf{E} 与 x 轴正方向相同; $\sigma < 0$, \mathbf{E} 与 x 轴正方向相反。若 P 点在盘的左侧, 并取 x 轴的正方向恒由 O 点指向场点, 亦得同样的结果。

由上述结果, 我们讨论两个特殊情况:

(1) 若 $R \gg x$, 即在 P 点看来可认为均匀带电圆盘为无限大, 则 P 点的场强可由对上式取极限求得

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (8.13)$$

式(8.13)的结论虽然是从圆盘轴线上场强的结果导出的, 但进一步可以证明, 只要点 P 与任意带电平面间的距离, 远小于该点到带电平面边缘各点的距离, 即对均匀带电平面中部附近各点来说, 该平面都可看做无限大, 其场强都可以由式(8.13)近似表示。这表明无限大均匀带电平面所激发的电场与距离 x 无关, 即在平面两侧各点场强大小相等, 方向都与平面相垂直, 这种电场称为匀强电场或均匀电场。

(2) 若 $x \gg R$, 则按二项式定理展开, 并略去 $\frac{R}{x}$ 的高次项, 即

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{x^2}\right)^2 - \dots \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$$

于是 P 点场强为

$$E = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad (8.14)$$

式(8.14)中 $q = \sigma\pi R^2$, 是圆盘所带电荷量。由此可见, 当 P 点离开圆盘的距离比圆盘本身的大小大得多时, P 点的场强与电荷量 q 集中在圆盘的中心的一个点电荷在该点所激发的场强相同。从上面两个例子, 也可以进一步理解点电荷概念的相对性。

从以上几个例子可以看到, 空间各点的电场强度完全决定于电荷在空间的分布情况, 如果给定电荷分布, 原则上就能算出任一点的场强, 计算的方法是利用点电荷在周围激发场强的表达式和场强叠加原理。计算的步骤为: (1) 先任取电荷元 dq , 写出 dq 在待求点处场强的矢量式, 再选取适当的坐标系, 将该场强分别投影到坐标轴上; (2) 用场强叠加原理, 最后写出总场强的矢量表示式, 并算出总场强的大小和方向角。

8.3 电场强度通量 高斯定理

8.3.1 电场线

为了更形象地描述电场中场强在空间的分布情况, 在电场中画出一系列假想的曲线, 我们称之为电场线。规定: 电场线上每一点的切线方向与该点的电场强度方向一致, 电场线的疏密程度表示该点电场强度的大小。图 8-8 中画出了几种常见电场的电场线。定量地说, 为了表示电场中某点场强的大小, 设想通过该点取一个垂直于电场方向的面元 dS , 如图 8-9 所示, 由于 dS 很小, 所以 dS 面上的各点的场强 E 认为是相同的, 则通过此面元的电场线数为 $d\Phi_e$ 与该点场强 E 的大小有如下关系:

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS}$$

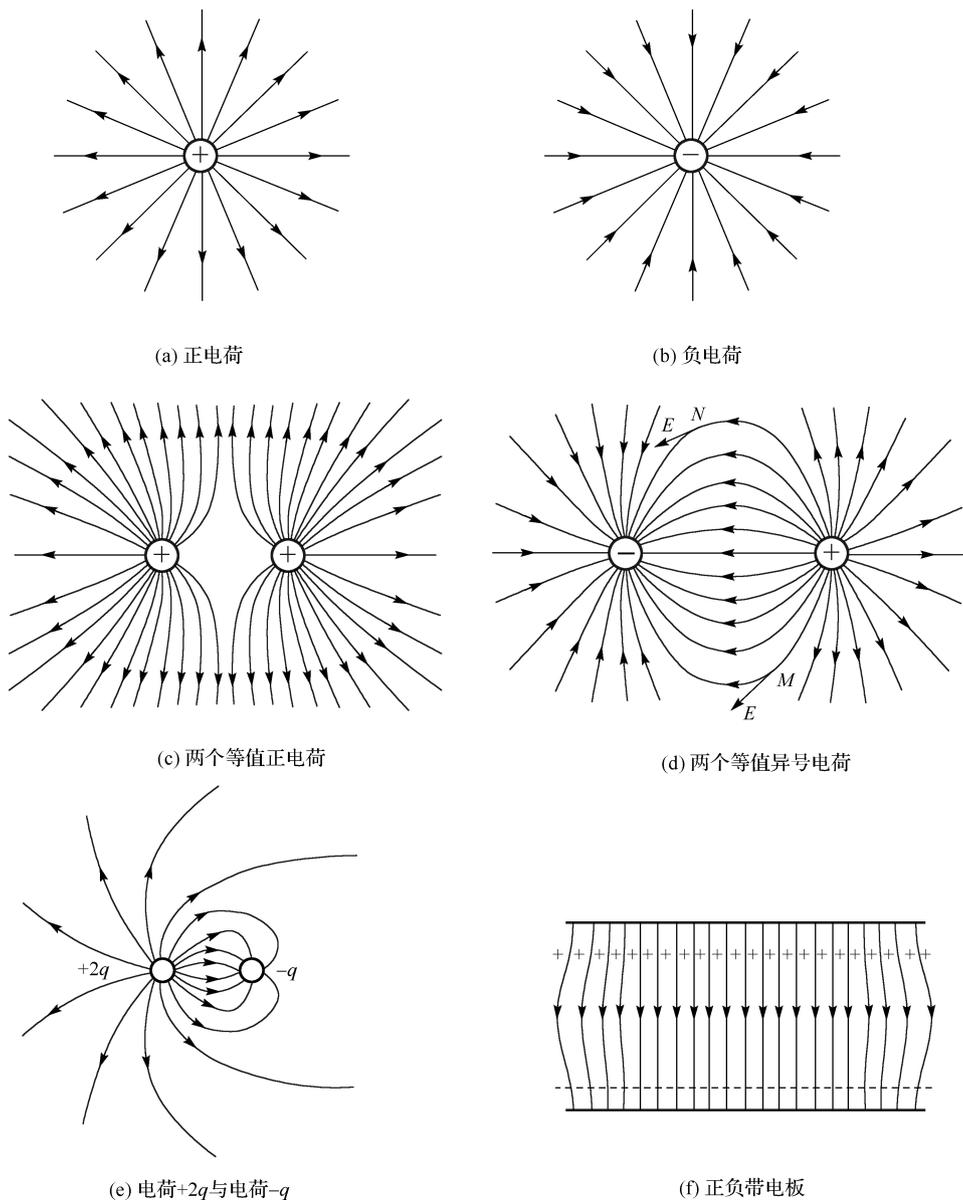


图 8-8 几种常见电场的电场线

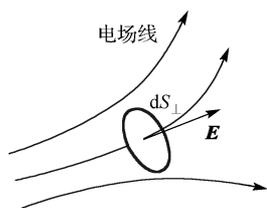


图 8-9 电场线数密度与场强的大小关系

即电场中某点处电场强度的大小等于该点处垂直电场方向的单位面积上通过的电场线条数,即等于该点的电场线数密度,这样,可以用电场线的疏密分布把电场中场强大小的分布形象地反映出来,即在场强较大的地方电场线较密,场强较小的地方电场线较疏。

静电场的电场线有如下性质:

(1) 电场线起自正电荷(或来自无限远处),终止于负电荷(或伸向无限远处),不会在没有电荷的地方中断,电场线不能形成闭合曲线;

(2)在没有电荷的空间,任何两条电场线都不能相交。这是因为电场中每一点处的电场强度只能有一个确定的方向。

8.3.2 电场强度通量

把垂直通过电场中任意一个面的电场线数目叫通过该面的电场强度通量,简称电通量,用 Φ_e 表示。

下面先讨论在均匀电场中的电场强度通量 Φ_e 。如图 8-10(a)所示,在均匀电场中取一个理想的面积为 S 的平面,并使它与 \mathbf{E} 的方向垂直,通过这一平面 S 的电场强度通量为

$$\Phi_e = ES\cos 0^\circ = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \quad (8.15)$$

式中 $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_n$, 其中 \mathbf{S} 是面积元矢量,规定其大小为 S ,其方向用它的单位法线矢量 \mathbf{e}_n 来表示。

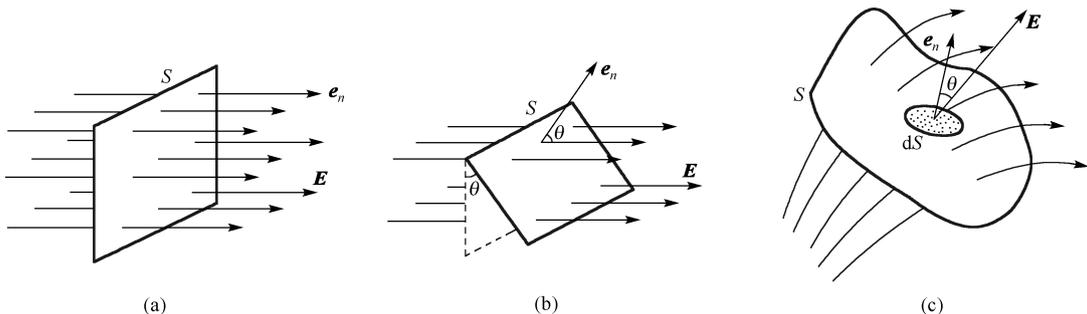


图 8-10 电通量

平面 S 与均匀电场的 \mathbf{E} 不垂直,见图 8-10(b),即 \mathbf{e}_n 与 \mathbf{E} 不平行。设平面 S 的单位法线矢量 \mathbf{e}_n 与场强 \mathbf{E} 成 θ 角,平面 S 在垂直于场强 \mathbf{E} 方向的投影为 S_\perp ,很明显,通过平面 S_\perp 和平面 S 的电场线条数是一样的,有 $S_\perp = S\cos\theta$,则通过平面 S 的电场强度通量为

$$\Phi_e = ES_\perp = ES\cos\theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \quad (8.16)$$

因为平面 S 的法线方向 \mathbf{e}_n 与场强 \mathbf{E} 之间的夹角可以是锐角,也可以是钝角,所以,通过给定面积的电场强度通量可正可负。当 θ 为锐角时, $\cos\theta > 0$, Φ_e 为正值; θ 为钝角时, $\cos\theta < 0$, Φ_e 为负值;如果 $\theta = \frac{\pi}{2}$,则 $\Phi_e = 0$ 。

一般情况,电场是非均匀电场,而且所取的几何面 S 是任意曲面,在曲面上场强的大小和方向是逐点变化的,要计算通过该任意曲面 S 的电场强度通量,可把曲面分成无限多个面积元 dS ,每个面积元 dS 都看成一个小平面。在每个无限小的面积元 dS 上电场强度 \mathbf{E} 可以认为是处处相等。设 dS 的法线单位矢量 \mathbf{e}_n 与该处的电场强度 \mathbf{E} 成 θ 角,见图 8.10(c),那么通过该面积元 dS 的电场强度通量为

$$d\Phi_e = E dS \cos\theta = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

所以通过整个曲面 S 的电场强度通量 Φ_e ,就等于通过曲面 S 上所有面积元 dS 的电场强度通量 $d\Phi_e$ 的总和,即分别可求得通过面积为 S 的任意曲面的 \mathbf{E} 通量

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S E \cos\theta dS = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.17)$$

如果曲面 S 是闭合曲面时,则通过它的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S E \cos\theta dS = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.18)$$

必须指出, 对非闭合曲面, 曲面上各处法线单位矢量的正方向可以取曲面的任一侧, 对闭合曲面来说, 通常规定自内向外的方向为法线单位矢量 \mathbf{e}_n 的正方向。因此, 有电场线从闭合曲面内向外“穿出”时, 电场强度通量 $\Phi_e > 0$; 有电场线“穿进”闭合曲面时, 电场强度通量 $\Phi_e < 0$; 如果穿出和穿入闭合曲面的电场线数目相等, 则 $\Phi_e = 0$ 。

8.3.3 高斯定理

上面介绍了电通量的概念, 现在进一步讨论通过闭合曲面的电通量和场源电荷量之间的定量关系, 从而得出一个表征静电场性质的基本定理——高斯定理。它是反映静电场性质的普遍原理, 由库仑定律和场强叠加原理导出。

如图 8-11 所示, 设真空中有一个正的点电荷 q , 首先我们计算在点电荷 $q (> 0)$ 所激发的电场中, 通过以点电荷为中心、半径为 R 的球面上的电场强度通量。根据点电荷电场强度公式, 在球面上各点场强 \mathbf{E} 的大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

\mathbf{E} 的方向沿矢径方向向外, 在球面上任取一面元 dS , 球面上面元处的法线单位矢量 \mathbf{e}_n 的方向与 \mathbf{E} 的方向相同, 即 \mathbf{e}_n 和 \mathbf{E} 之间的夹角 $\theta = 0$ 。所以通过 dS 面上的电场强度通量为

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS \cos\theta = E dS$$

于是可求得通过该闭合球面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2$$

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (8.19)$$

由此可见, 通过闭合球面上的电通量和球面所包围的电荷量成正比, 而与所取球面的半径无关。如果以点电荷 q 为球心作几个同心球面 S_1 、 S_2 、 S_3 , 通过各球面的电通量都等于 $\frac{q}{\epsilon_0}$, 如图 8-12 所示。这也表明从点电荷 q 发出的所有电场线连续地延伸到无限远处。

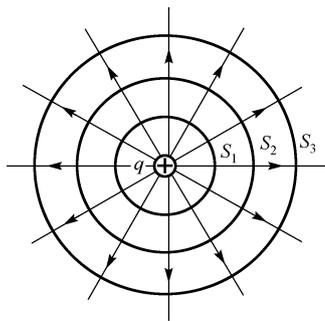
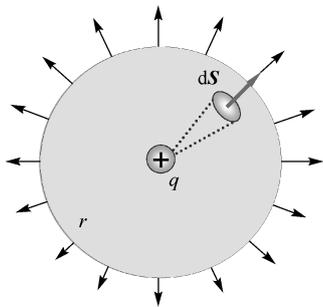


图 8-11 通过以点电荷为球心的球面上的电通量 图 8-12 通过以点电荷为球心的同心球面上的电通量

上面讨论的是一种很特殊的情况, 下面把这一结论推广到任意形状的闭合曲面包围点电荷的情况。如图 8-13 所示, 若以任意曲面 S' 包围点电荷 q , 在球面 S 与曲面 S' 之间无其他电

荷存在时, 由于电场线不会在没有电荷的地方中断, 所以通过曲面 S' 的电场线必定全部通过球面 S , 即通过曲面 S' 的电通量与通过球面 S 的电通量相等。因此, 即使在点电荷 q 的电场中, 通过包围 q 的任意闭合曲面 S' 的电场强度通量也是 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 。

如果闭合曲面不包围点电荷 q , 例如图 8-14 中的闭合曲面 S , 由于单个点电荷产生的电力线是辐射状的直线, 穿进闭合曲面的电场线与穿出闭合曲面的电场线数相等。因此, 通过整个闭合曲面的电场强度通量为零, 即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

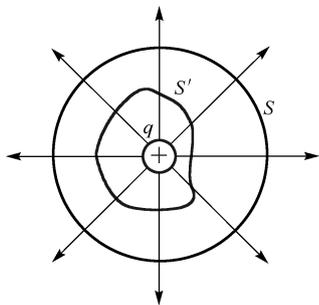
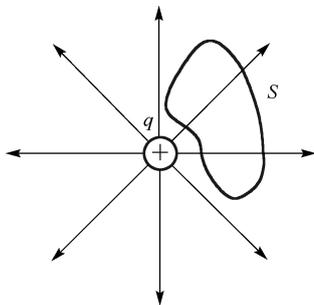


图 8-13 通过以点电荷为球心任意闭合曲面

图 8-14 闭合曲面不包围点电荷 q

闭合面 S 包围 n 个点电荷时, 电场由 n 个点电荷共同激发, 按场强叠加原理, 空间任一点的场强是各个点电荷所激发的电场强度的叠加, 即

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_n$$

这时电场中任意闭合曲面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \cdots + \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} \\ &= \Phi_{1e} + \Phi_{2e} + \cdots + \Phi_{ne} \end{aligned}$$

所以闭合曲面内有多点电荷存在时, 穿过任意闭合曲面 S 的电场强度通量等于每个点电荷单独存在时各自激发的电场穿过闭合曲面的电场强度通量的代数和。 Φ_{ie} 的取值有两种可能, 点电荷 q_i 如果被闭合面 S 所包围, 则 $\Phi_{ie} > 0$; 如果点电荷 q_i 不被包围, 则 $\Phi_{ie} = 0$ 。由此可知, 穿过闭合曲面的电场强度通量仅与此闭合曲面的电荷有关, 于是有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (8.20)$$

式(8.20)表明: 在真空中的静电场中, 通过任一闭合曲面的电场强度通量等于该闭合曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ϵ_0 , 这就是真空中静电场的高斯定理。对高斯定理的理解应注意以下几点: (1) 式(8.20)中的 \mathbf{E} 是指曲面 S 上各点的电场强度, 它是空间所有电荷(包括闭合曲面内和闭合曲面外的电荷)共同激发的总场强, 并非只由闭合面内的电荷产生。(2) 通过闭合曲面的总电通量只决定于它所包围的电荷, 即只有闭合曲面内部的电荷才对总通量有贡献, 通常把所取的闭合曲面称为高斯面。如果电场中通过某一个闭合曲面的电通量为零, 则只能推断在闭合曲面内没有电荷或电荷量的代数和为零, 并不能说明闭合曲面上各面积元的电通量和曲面上各点的电场强度为零。

从高斯定理可以看出,当闭合曲面内的电荷为正时, $\Phi_e > 0$,表示有电场线从 q 发出并穿出闭合曲面,所以,正电荷 q 称为静电场的源头;当闭合曲面内的电荷 q 为负时, $\Phi_e < 0$,表示有电场线穿进闭合曲面而终止于 q ,所以,负电荷称为静电场的尾间。因此高斯定理说明了电场线起始于正电荷、终止于负电荷,即静电场是有源场。当静电场中任一闭合曲面内不包围任何电荷时,那么曲面内既不存在场的源头,也不存在场的尾间,穿入曲面的电场线必定从该曲面的另一处穿出,为此通过这一闭合曲面的总电通量为零。

高斯定理和库仑定律都是静电场的基本规律,在这里,高斯定理是由库仑定律结合场强叠加原理导出的,但两者在物理含义上并不相同。库仑定律是从电荷间的作用反映静电场的性质,而高斯定理则是从场和场源电荷间的关系反映静电场的性质。库仑定律只适用于静电场,而高斯定理不但适用于静止电荷和静电场,也适用于运动电荷和迅速变化的电磁场。但是,必须指出,单靠高斯定理描述静电场是不完备的,只有和反映静电场的另一定理——静电场的环路定理结合起来,才能完整地描述静电场。

一般情况下,当电荷分布给定时,从高斯定理只能求出通过某一闭合曲面的电通量,并不能把电场中各点的场强确定下来。但是,当电荷分布具有某些特殊的对称性,从而使相应的电场分布也具有一定的对称性时,应用高斯定理来计算场强简便得多。

8.3.4 高斯定理的应用

利用高斯定理求解某些具有对称性分布的电荷的电场强度的方法通常包含两个步骤:首先根据电荷分布的对称性分析电场分布的对称性;然后应用高斯定理计算电场强度数值。此方法的关键是选取合适的闭合高斯面以便使积分 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 中的 \mathbf{E} 能以标量形式从积分号内提出来,选择的高斯面要通过所求的场点,使该面上的 \mathbf{E} 的大小相等,同时 \mathbf{E} 的方向与该面的法向方向平行或垂直。下面举例说明应用高斯定理计算具有对称性分布的电荷的电场强度。

【例 8.5】 如图 8-15 所示,设有一半径为 R ,均匀带电为 Q 的球面,求带电球面内部和外部任意点的电场强度。

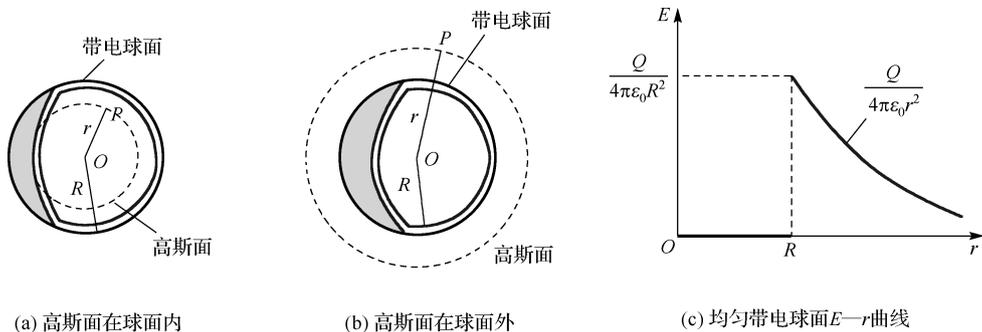


图 8-15 均匀带电球面的场强

【解】 由于电荷分布具有球对称性,所以电场强度 \mathbf{E} 的分布也具有球对称性,则在同一球面上各点的 \mathbf{E} 的大小相等,且 \mathbf{E} 与球面上各处的 $d\mathbf{S}$ 相垂直。如果点 P 在球面内部,如图 8-15(a)所示,那么以球心到 P 点的距离 r 为半径作一个闭合球形高斯面,因该高斯面内没有电荷,即 $\sum q = 0$,由高斯定理(8.20)式得到

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E4\pi r^2 = 0$$

有

$$E = 0 \quad (r < R) \quad (8.21)$$

上式表明, 均匀带点球面内部的电场强度为零。

如图 8-15(b) 所示, 以球心到球面外部点 P 的距离 $r (r > R)$ 为半径作一球面, 显然点 P 在此球面上, 以此球面为高斯面, 它所包围的电荷为 Q , 由高斯定理可得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

于是 P 点的电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R) \quad (8.22)$$

上式表明, 均匀带电球面外部的电场强度分布, 与等量电荷全部集中在球心时建立的电场强度相同。

由式(8.21)和式(8.22)可作如图 8-15(c) 所示的 $E-r$ 曲线, 从取向上可以看出, 球面内 ($r < R$) 的 E 为零, 球面外 ($r > R$) 的 E 与 r^2 成反比, 球面处 ($r = R$) 的电场强度有跃变。

【例 8.6】 电荷均匀分布在一个“无限大”平面上, 求它的电场强度分布。

【解】 设平面上的电荷面密度为 σ 。相对于从场点 P 到它在平面上垂足的连线, 平面上的电荷分布是轴对称的。采用与上题相似的对称性分析, 可得到两侧距平面等远点处的场强大小一样, 方向处处与平面垂直, 并指向两侧。

为了计算场强的大小, 过场点 P 和平面左侧对称的 P' 点作一个圆柱形闭合面, 其轴线与平面垂直。两底面与平面平行, 面积为 S , 如图 8-16 所示。由于在圆柱侧面上, 电场线与侧面平行, 所以, 通过侧面的电通量为零; 在圆柱底面上, 根据前面的分析, 平面两侧与平面等距离的底面上的场强 \mathbf{E} 的大小相等、方向相反, 电场线都垂直穿过左、右两个底面。因而通过两底面的电通量, 即通过圆柱形闭合曲面的电通量为

$$\Phi_e = ES + ES$$

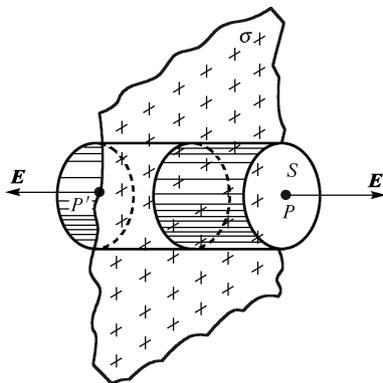


图 8-16 “无限大”均匀带电平面的电场

已知圆柱形面所包围的电荷量为 σS , 所以按高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

于是可求得 P 点的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

或

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

式中 \mathbf{e}_n 是带电平面两侧的法线单位矢量。上式表明,无限大带电平面所激发的场强与离平面的距离无关,即在平面的两侧形成一均匀场,这与例 8.4 通过积分计算所得结果一致,但计算简便得多。

应用本例的结果和场强叠加原理,读者可以证明,一对电荷面密度等值异号的无限大均匀带电的平行平面间场强的大小为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

其方向从带正电平面指向带负电平面;而在两个平行平面外部空间各点的场强为零。在实验室里,常利用一对均匀带电的平板电容器(忽略边缘效应)获得均匀电场。

【例 8.7】 求电荷呈无限长圆柱形轴对称均匀分布时所激发的场强。

【解】 设该圆柱的半径为 R ,单位长度所带的电荷量为 λ 。由于电荷分布是轴对称的,而且圆柱无限长,按对称性分析,可以确定其电场也具有轴对称性,即与圆柱轴线距离相等的各点,场强 \mathbf{E} 的大小相等,方向垂直柱面呈辐射状,如图 8-17 所示。为了求任一点 P 处的场强,过场点 P 作一个与带电圆柱共轴的圆柱形闭合高斯面 S ,柱高为 h ,底面半径为 r 。因为在圆柱面的曲面上各点场强 \mathbf{E} 的大小相等、方向处处与曲面正交,所以通过该曲面的电通量为 $2\pi r h E$,通过圆柱两底面的电通量为零。因此,通过整个闭合曲面 S 的电场强度通量为

$$\Phi_e = 2\pi r h E$$

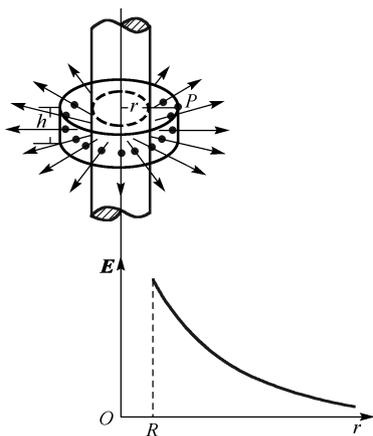


图 8-17 “无限长”均匀带电圆柱面的电场

如果 P 点位于带电圆柱之外 ($r > R$),则闭合曲面内所包围的电荷量为 $\sum q = \lambda h$ 。按高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

可得 P 点的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由此可见,“无限长”圆柱形轴对称均匀分布电荷在柱外各点的作用,与所带电荷全部集中在其轴线上的均匀分布电荷所激发的场强一样。

如果 P 点在带电圆柱之内 ($r < R$),我们对两种可能的电荷分布分别讨论如下。

(1)电荷均匀分布在圆柱面上,则闭合面 S 所包围的电荷量为零,按高斯定理,可求得带电圆柱面内各点的场强为

$$E = 0$$

由以上所得结果,可画出空间各点场强 E 随各点离带电圆柱面轴线的距离 r 的变化曲线,如图 8-17 所示。

(2)电荷均匀分布在圆柱体内,则闭合面 S 内所包围的电荷量为 $q' = \frac{\lambda h}{R^2} r^2$,按高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0 R^2} r^2$$

于是可求得圆柱体内任一点 P 处的场强为

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2}$$

或

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r$$

读者可以根据上述结果,画出“无限长”均匀带电圆柱体空间各点的场强 E 随各点离带电圆柱体轴线的距离 r 的变化曲线图。

从上面几个例子可以看出,只有当电荷所激发的电场具有球对称、均匀面对称时,才能过场点作出适当的高斯面,并按高斯定理求出场强。有时会遇到一些带电体,其电荷分布所激发的电场,虽然也具有某种对称性,但因对称性不够高,仍然无法在这样的电场中找到一个合适的高斯面来求出场强。所以问题的关键是:电场具有高度的对称性,我们再根据具体的对称性特点,找出合适的闭合面,使电场强度都垂直于这个闭合面,而且大小处处相等;或者使闭合面的一部分上场强处处与该面垂直,且大小相等,另一部分上场强与该面平行,因而通过该面的电通量为零。如果能找到这样的闭合面,就能很方便地求出场强。显然,只有当带电系统均匀带电并具有如上各例的那种对称性时,才能做到这一点。一般情况下,如果带电系统不具有这样的对称性,高斯定理就不能用来计算场强。

8.4 静电场的环路定理 电势

本节将从静电场力做功的特点出发,研究静电场的另一个重要性质,并由此引入另一个描述电场性质的物理量——电势及重要定理——安培环路定理。

8.4.1 静电场力所做的功与路径无关

如图 8-18 所示,设有一点电荷 q 固定在 O 点处,并在 q 的电场中,将试验电荷 q_0 从 a 点经过任意路径 acb 运动到 b 点,在路径中任一点 c 的附近,取元位移 $d\mathbf{l}$,当试验电荷 q_0 在电场

中移动 $d\mathbf{l}$ 时, 电场力所做的功为

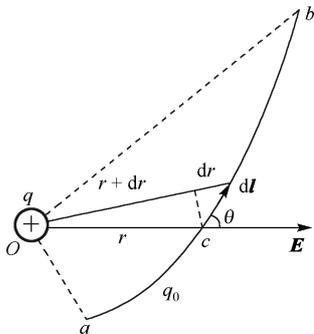


图 8-18 电场力所做的功与路径无关

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 E \cos\theta dl$$

已知点电荷 q 在 c 点处的电场强度的大小为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

由图可知, 式中 θ 是 \mathbf{E} 的方向和 $d\mathbf{l}$ 的方向之间的夹角, 而 $\cos\theta dl = dr$, 代入上式, 可得

$$dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta dl = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

当试验电荷 q_0 从 a 点运动到 b 点时, 电场力所做的总功为

$$A = \int_a^b dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (8.23)$$

式中 r_a 和 r_b 分别表示点电荷 q_0 从起点 a 和终点 b 到 O 的

距离。式(8.23)表明, 在静止点电荷 q 的电场中, 电场力对试验电荷 q_0 所做的功与路径无关, 而只与路径的起点和终点位置有关。

如果试验电荷 q_0 在点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 的电场中移动, 由电场叠加原理已知, 点电荷系的电场强度 \mathbf{E} 等于各个点电荷的电场强度的叠加, 即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$, 因此任意点电荷系的电场力对试验电荷 q_0 所做的功等于组成此点电荷系的各点电荷的电场力所做功的代数和, 即

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{ia}} - \frac{1}{r_{ib}} \right) \quad (8.24)$$

式中 r_{ia} 与 r_{ib} 分别为电荷 q_i 到 a 点和 b 点的距离。

上式中每一项都与路径无关, 故各项之和也应与路径无关, 所以它们的代数和也必然与路径无关, 由此得出有如下结论: 试验电荷 q_0 在任何静电场中从一点沿任意路径运动到另一点时, 静电场力对它所做的功只与该试验电荷的大小以及路径的起点和终点的位置有关, 而与该路径无关。这表明静电场力是保守力, 静电场是保守场。

8.4.2 静电场的环路定理

上述电荷在静电场做功与路径无关这一结论还可以表述成另一种等价的形式。如图 8-19 所示, 当试验电荷 q_0 在静电场中从同一起点出发, 沿不同路径 L_1 和 L_2 到达同一终点时, 电场力所做的功相等, 即由式(8.23)和式(8.24)可知电场力做功为零, 亦即

$$q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$(L_1) \quad (L_2)$$

$$q_0 \left(\int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) = 0$$

$$(L_1) \quad (L_2)$$

因为试验电荷 $q_0 \neq 0$, 所以上式也可写为

$$\left(\int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) = 0$$

$$(L_1) \quad (-L_2)$$

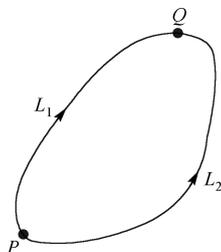


图 8-19 静电场的环路定理

L_1 和 $-L_2$ 正好形成一个闭合回路 L , 所以

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8.25)$$

上式表明, 在静电场中, 电场强度 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的线积分为零, \mathbf{E} 沿任意闭合路径的线积分又叫做 \mathbf{E} 的环流, 故上式也表明, 在静电场中电场强度 \mathbf{E} 的环流为零。这个结论称为静电场的环路定理。它与高斯定理一样, 也是表述静电场性质的一个重要定理。

至此, 我们可得出静电场力与万有引力、弹性力一样, 也都是保守力; 静电场也是保守场。

8.4.3 电势能 电势

1. 电势能

如上所述, 静电场是保守力场, 可以引进势能的概念, 正如我们研究重力场时, 引进重力势能那样, 在讨论静电场的性质时, 也可以认为电荷在静电场中的一定位置上具有一定的电势能, 这个势能是属于电荷—电场系统的, 而静电场力对电荷所做的功就等于电荷电势能的改变量。设以 W_{Pa} 与 W_{Pb} 分别表示试验电荷 q_0 在电场中起点 a 和终点 b 处的电势能, 则试验电荷从 a 移动到 b 静电场力对它所做的功为

$$A = W_{Pa} - W_{Pb} = -(W_{Pb} - W_{Pa})$$

$$\text{或} \quad q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = W_{Pa} - W_{Pb} = -(W_{Pb} - W_{Pa}) \quad (8.26)$$

在国际单位制中, 电势能的单位是焦耳, 用符号 J 表示。

静电势能也与重力势能相似, 是一个相对的量, 为了确定电荷在电场中某一点电势能的大小, 必须选定一个电势能参考点, 并设该点的电势能为零。这个参考点的选择是任意的, 处理问题时怎样方便怎样选取。在式(8.26)中, 若选电荷 q_0 在 b 处的电势能为零, 即 $W_{Pb} = 0$, 则电场中 a 点的电势能为

$$W_{Pa} = q_0 \int_a^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.27)$$

即试验电荷 q_0 在电场中某点处的电势能, 在数值上等于把它从该点移动到零电势能处静电场力所做的功。通常当电荷分布于有限区域内时, 我们选定电荷 q_0 在无限远处的电势能为零。

2. 电势

应该指出, 与重力势能相似, 电势能也是属于一定系统的。式(8.27)反映了电势能是试验电荷 q_0 与场源电荷所激发的电场之间的相互作用能量, 故电势能是属于试验电荷 q_0 和电场中整个系统的, 且与 q_0 的大小成正比, 因此电势能 W_{Pa} 并不直接描述某一定点 a 处电场的性质, 但比值 $\frac{W_{Pa}}{q_0}$ 却与 q_0 无关, 只决定于场中给定点 a 处电场的性质, 所以我们用这一比值来作为描述静电场中给定点静电场性质的另一个重要物理量, 称为电势, 用 U_a 表示 a 点的电势, 即

$$U_a = \frac{W_{Pa}}{q_0} = \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.28)$$

在式(8.28)中, 若规定无穷远处为电势零点, 当取试验电荷为单位正电荷时, U_a 和 W_{Pa} 等值, 这表示静电场中某点的电势等于单位正电荷放在该点处时的电势能, 也等于单位正电荷从该

点经过任意路径到无限远处时电场力所做的功。电势是标量,但相对于电势的零标度讲却有正或负的数值。在国际单位制中电势的单位是伏特,符号为 V。

3. 电势差

在静电场中,任意两点 a 和 b 的电势差,通常也叫做电压,用公式表示为

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_b^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.29)$$

这就是说,静电场中 a 、 b 两点的电势差,等于单位正电荷在电场中从 a 点经过任意路径到达 b 点时电场力所做的功。因此,当任一电荷 q_0 在电场中从 a 点移到 b 点时,电场力所做的功可用电势差表示为

$$U_{ab} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0(U_a - U_b) \quad (8.30)$$

8.4.4 电势的计算

1. 点电荷电场中的电势

设点电荷 q 的电场中,点 P 距点电荷 q 的距离为 r ,则 P 点的场强 \mathbf{E} 为

$$\mathbf{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

由电势的定义式(8.28)并选取无穷远处为电势零点,则距 q 为 r 处 P 点的电势为

$$U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.31)$$

由此可见,在点电荷周围空间任一点的电势与该点离点电荷 q 的距离 r 成反比。如果 q 是正的,各点的电势是正的,离点电荷越远处电势越低,在无限远处电势为零;如果 q 是负的,各点的电势也是负的,离点电荷越远处电势越高,在无限远处电势为零,值最大。

2. 点电荷系电场中的电势

如果电场由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 所激发,点电荷系的电场中某点 P 的电势是各个点电荷单独存在时的电场在该点的电势的代数和,若取无穷远处电势为零 ($U_\infty = 0$),利用电势的定义和场强叠加原理可得电场中任意一点 P 的电势为

$$U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^\infty \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_P^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_P^\infty \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l}$$

$$= U_{1P} + U_{2P} + \dots + U_{nP}$$

$$= \sum_{i=1}^n U_{iP} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (8.32)$$

式中 r_i 是 P 点离开点电荷 q_i 的相应距离。式(8.32)也称为电势的叠加原理。

3. 连续分布电荷电场中的电势

如果静电场是由电荷连续分布的带电体所激发的,则求某点的电势,只要将式(8.32)以积分式代之。设 dq 为带电体上任一电荷元的电荷量, r 为 dq 到给定点 P 的距离,则 P 点的电势为

$$U_P = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.33)$$

根据不同的情况,有时把电荷看成在一定体积内连续分布(体分布),有时把电荷看成在一定曲面上连续分布(面分布),有时把电荷看成在一定曲线上连续分布(线分布)等,对电荷连续分布的体分布、面分布和线分布,电荷元 dq 分别为 $dq = \rho dV$, $dq = \sigma dS$, $dq = \lambda dl$ 。由(8.33)得电势分别为

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}, \quad U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r}$$

因为电势是标量,这里的积分是标量积分,所以电势的计算比电场强度的计算较为简便。

应该注意,在式(8.32)、式(8.33)的计算中,电荷都是分布在有限区域内的,并且选择无限远处为电势的零点。当激发电场的电荷分布延伸到无限远时,不宜把电势的零点选在无限远处,否则将导致场中任一点的电势值无限大,这时只能根据具体问题,在场中选某点为电势的零点。

【例 8.8】 计算电偶极子电场中任一点的电势。

【解】 设电偶极子如图 8-20 所示,场点 P 到 $\pm q$ 的距离分别为 r_+ 和 r_- ,由式(8.29)可知, $\pm q$ 单独存在时在 P 的电势分别为

$$U_{P+} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} \quad U_{P-} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

根据叠加原理,电偶极子的电场中任一点 P 的电势为

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

电偶极子的中点 O 到场点 P 的距离为 r ,按题意 $r \gg l$,于是由图可知

$$\begin{aligned} r_+ &\approx r - \frac{l}{2} \cos\theta & r_- &\approx r + \frac{l}{2} \cos\theta \\ r_- - r_+ &\approx l \cos\theta & r_+ r_- &\approx r^2 \end{aligned}$$

将它们代入 U_P 的表达式,得到

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

这里用到了 $\mathbf{p} = ql$,电偶极子在远处的性质是由它的电偶极矩 \mathbf{p} 决定的。

【例 8.9】 如图 8-21 所示,正电荷均匀地分布在半径为 R 的细圆环上,计算在环的轴线上与环心相距为 x 处 P 点的电势。

【解】 如图 8-21(a)所示,设圆环处于通过圆环中心 O 且与 Ox 轴相垂直的平面上,在圆环上取一电荷元 dq ,其线电荷密度为 λ ,故有 $dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$,将它代入式(8.33),有

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (1)$$

图 8-21(b)给出了 x 轴上的电势 U 随 x 而变化的曲线。

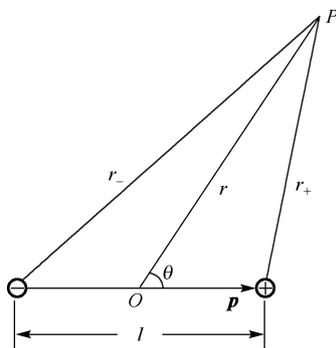


图 8-20 电偶极子的电势

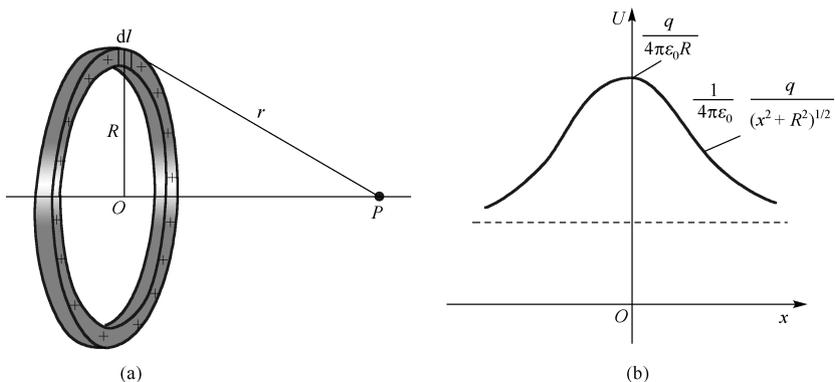


图 8-21 均匀带电圆环的电势

【例 8.10】 计算带电均匀薄圆盘的轴线上任意一点的电势。

【解】 如图 8-22 所示, 半径为 R 的薄圆盘, 圆盘的平面与通过盘心 O 的 Ox 轴相垂直, 圆盘中心与坐标原点 O 相重合, 点 P 距原点为 x , 由于圆盘均匀带有电荷 q , 其电荷面密度为 $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, 把圆盘分成许多个小圆环, 图中画出了一个半径为 r 、宽为 dr 的小圆环, 该圆环的电荷为

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

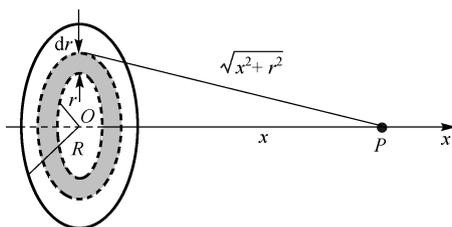


图 8-22 均匀带电圆盘的电势

利用例 8.9 的结果, 可得带电圆盘在 P 点的电势为

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \quad (2)$$

当 $x \gg R$ 时, $\sqrt{x^2 + R^2} \approx x + \frac{R^2}{2x}$, 由(2)式, 有

$$U_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \pi R^2}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$$

式中 $q = \sigma \pi R^2$ 为圆盘所带的电荷。由此结果可以看出, 在离开圆盘很远处, 整个圆盘可看成一个点电荷。

【例 8.11】 计算均匀带电球面电场中的电势分布。

【解】 如图 8-23 所示, 设带电球面的半径为 R , 总电荷量为 q , 求电场中任意一点 P 处的电势, P 点离球心的距离为 r 。

用电势的定义式(8-28)求解, 由例 8.5 已知均匀带电球面在空间激发的场强沿半径方向, 其大小为

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > R) \\ 0 (r < R) \end{cases}$$

利用式(8-28), 并沿半径方向积分, 则 P 点的电势为

$$U_P = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty E dr$$

当 $r > R$ 时,

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当 $r < R$ 时, 由于球面内外电场强度的分布关系不同, 积分必须分段进行, 即

$$\begin{aligned} U_P &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \\ &= \int_r^R 0 \cdot d\mathbf{r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

由此可见, 一个均匀带电球面在球外任意一点的电势和把全部电荷集中于球心的一个点电荷在该点的电势相同; 在球面内任意一点的电势与球面上的电势相等。故均匀带电球面及其内部是一个等电势区域, U 随距离 r 的变化关系如图 8-23 所示。

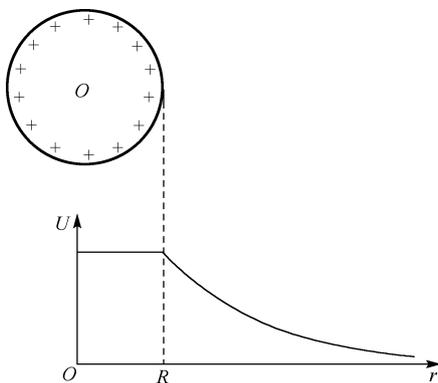


图 8-23 均匀带电球面的电势

8.5 静电场中的导体和电介质

导体和电介质放于电场中时, 其上的电荷分布将发生改变, 这种改变了的电荷分布反过来又会影响电场分布。本节将讨论静电场与导体和电介质相互作用的规律。

8.5.1 导体的静电平衡条件

导体内部存在着大量的自由电荷, 当导体不受外电场影响时, 自由电子在导体内部作无规则的热运动。如图 8-24 所示, 把一个不带电的导体板放在匀强电场中, 其电场强度为 \mathbf{E}_0 , 导体板内部的自由电子将在电场力 $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}_0$ 作用下逆着电场线向左运动, 从而使得导体左侧带负电, 右侧带正电, 于是导体两侧所积累的电荷在导体内部产生一个附加电场, 其电场强度为 \mathbf{E}' , 方向和外场强方向相反, 这样导体内部各点的合场强是外场强和附加场强的叠加, 其大小为 $E = E_0 - E'$ 。开始时 $E' < E_0$, 导体内部的合场强不为零, 自由电子不断向左运动, 从而使 E' 增大, 这个过程一直延续到导体内部的合场强 $\mathbf{E} = 0$, 此时, 导体内部没有电荷作定向运动, 导体处于静电平衡状态。

当导体处于静电平衡状态时, 必须满足以下两个条件:

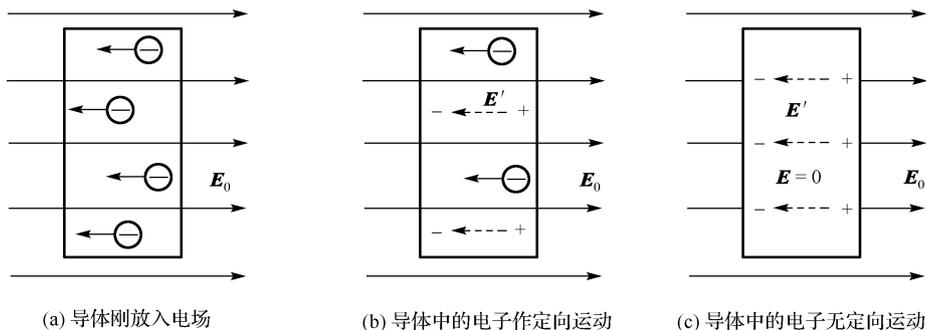


图 8-24 导体的静电平衡

用电场来表述。(1)导体内部电场强度处处为零；(2)导体表面附近的电场强度的方向处处与它的表面垂直。反证法证明，假设导体表面附近的场强方向与它的表面不垂直，则电场强度沿表面将有切向分量，自由电子将在切向分量的电场力作用下，沿表面运动，这样导体就不处于静电平衡状态。

用电势来表述。(1)导体是等势体。因为导体处于静电平衡状态时，导体内部场强处处为零，即 $E = 0$ ，导体内任意两点 P 、 Q 之间的电势差为

$$U_{PQ} = U_P - U_Q = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

所以导体内部所有点的电势相等，导体是等势体。

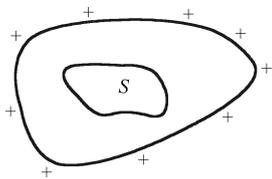
(2)导体表面是等势面。证明方法相似，因为导体处于静电平衡状态时，导体表面附近的场强方向处处与它的表面垂直，导体表面任意两点 P 、 Q 之间的电势差为

$$U_{PQ} = U_P - U_Q = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q E \cos \frac{\pi}{2} dl = 0$$

所以导体表面上所有点的电势相等，导体表面是等势面。

8.5.2 静电平衡时导体上的电荷分布

导体处于静电平衡时，其内部没有未抵消的净电荷，电荷只分布在导体的表面。这个结论可用高斯定理证明。如图 8-25 所示，在一处于静电平衡的导体内部作任意闭合高斯面 S ，由于此时导体内部场强处处为零，所以通过导体内任意闭合高斯面的电通量为零，即



$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = 0$$

因为此高斯面是任意作出的，所以上述结论得证。读者也可以证明带电空腔导体电荷只分布在导体的外表面上。

导体处于静电平衡时，其表面上电荷分布的定量研究是比较复杂的，这不仅与这个导体的形状有关，而且还和它附近有什么样的其他带电体有关。但是对于孤立带电导体来说，电荷的分布有如下定性规律：一个孤立导体上面电荷密度的大小与表面的曲率有关，如图 8-26 所示，导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大)，电荷比较密集，即面电荷密度 σ_e 较大；表面较平坦的地方(曲率较小)， σ_e 较小；表面凹进去的地方(曲率为负)， σ_e 更小。

图 8-25 证明导体内无净电荷

下面讨论导体表面附近电场强度的大小与该处导体表面电荷密度的关系。如图 8-27 所示, P 点是导体表面之外附近空间的点, 在 P 点附近的导体表面上取一面元 ΔS 。该面元取得充分小, 使得其上的面电荷密度 σ_e 可认为是均匀的。作扁圆柱形高斯面, 使圆柱的侧面与 ΔS 垂直, 圆柱的上底面通过点 P , 下底面在导体内部, 两底面都与 ΔS 平行, 并无限靠近它, 因此它们的面积是 ΔS , 根据高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{上底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma_e \Delta S}{\epsilon_0}$$

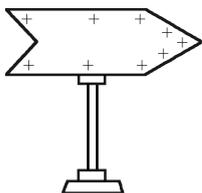


图 8-26 导体表面曲率对电荷分布的影响

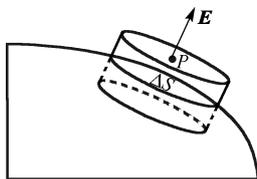


图 8-27 导体表面附近场强与面密度的关系

由于导体上底面的法线方向与场强 \mathbf{E} 方向一致, 导体内部场强处处为零, 侧面的法线方向与场强 \mathbf{E} 方向垂直, 所以有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{上底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\Delta S = \frac{\sigma_e \Delta S}{\epsilon_0}$$

故得

$$E = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad (8.34)$$

此公式表明, 导体表面电荷密度大的地方场强大, 面电荷密度小的地方场强小。

8.5.3 尖端放电 静电屏蔽

式(8.34)表明, 导体附近场强 \mathbf{E} 的大小与该处面电荷密度 σ_e 成正比, 所以孤立导体表面附近的场强分布也有同样的规律, 即尖端附近场强大, 平坦的地方次之, 凹进的地方最弱。在导体尖端附近电场特别强, 当电场强度达到一定程度时, 空气中残留的离子在强电场作用下发生激烈运动, 在激烈运动的过程中它们和空气分子相碰, 会使空气分子电离, 从而产生大量新的离子, 使得空气变得易于导电, 产生尖端放电现象。

尖端放电时, 周围往往隐隐地笼罩着一层光晕, 叫做电晕, 在黑暗中看得特别明显。例如, 阴雨潮湿天气常常在高压输电线附近看到淡蓝色辉光, 这是由于输电线附近的离子与空气分子碰撞时使分子处于激发状态, 从而产生光辐射, 形成电晕。高压输电线附近的电晕放电浪费了很多电能, 把电能消耗在气体分子的电离和发光过程中, 这是应尽量避免的, 为此高压输电线表面应做得极光滑, 其半径也不能过小。

尖端放电也有可利用的一面, 最典型的的就是避雷针。当带电云层接近地面时, 由于静电感应使地上物体带异号电荷, 这些电荷比较集中地分布在突出的物体(如高大的建筑物、烟囱、大树)上。当电荷积累到一定程度, 就会在云层和这些物体之间发生强大的火花放电, 这就是雷击现象。为了避免雷击, 可在建筑物上安装尖端导体(避雷针), 用粗铜缆将避雷针通地, 通地的一端埋在几尺深的潮湿泥土里或接地埋在地下的金属板(或金属管)上, 以保持避

雷针与大地电接触良好。当带电云层接近时,放电就通过避雷针和通地粗铜缆这条最易于导电的通路局部持续地进行,而使得建筑物免遭雷击的破坏。

在静电平衡状态下,腔内无其他带电体的导体壳,不管导体壳本身带电或是导体处于外界电场中,内部都没有电场。导体壳的表面就“保护”了它所包围的区域,使之不受导体壳外表面上的电荷或外界电场的影响,这个现象称为静电屏蔽。静电屏蔽现象在实际中有重要的应用,例如为了使一些精密的电磁测量仪器不受外界电场的干扰,通常在仪器外面加上金属外壳或金属网做成的外罩,如图 8-28(a)所示。

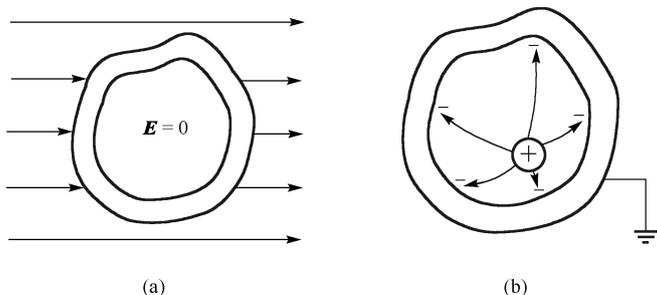


图 8-28 静电屏蔽

工作中要使一个带电体不影响外界,可以把带电体放在接地的金属壳或金属网内,如图 8-28 (b)所示。有了金属外壳之后,其内表面出现等量异号电荷,如果腔内的带电体带正电,由内部带电体发出的电场线就会全部终止在空腔内表面的负电荷上,使电场线不能穿出空腔。但是若空腔的外表面不接地,在它外表面还有与内表面等量异号的感应电荷,它的电场会对外界产生影响。

怎样在不停电的条件下检修和维护高压输电线路与设备? 高压电对人体造成危害不是因其高压,而是大的电势差。在高电势差作用下,就有强电流流过人体,对人体构成致命伤害。为了实现高电压带电作业,人们研制出一种防护服叫均压服(或屏蔽服),它是用铜丝(或导电纤维)和纤维编织在一起制成的导电良好的工作服。穿着时,把手套、帽子、衣裤和袜子连成一体,工作人员穿上它就相当于把人体罩在导体网罩内,使人体各处电势相等,还能起到减弱到达人体的电场和分流的作用,从而保证工作人员的安全。

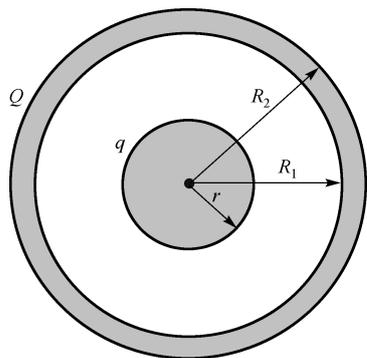


图 8-29 带电球壳包围带电小球

【例 8.12】 如图 8-29 所示,在内外半径分别为 R_1 和 R_2 的导体球壳内,有一个半径为 r 的导体小球,小球与球壳分别带上电荷量 q 和 Q 。试求:

- (1) 小球的电势 U , 球壳内、外表面的电势;
- (2) 小球与球壳的电势差;
- (3) 若球壳接地,再求小球与球壳的电势差。

【解】 (1) 由对称性可以肯定,小球表面上和球壳内外表面上的电荷分布是均匀的。小球上的电荷 q 将在球壳内外表面上感应出 $-q$ 和 $+q$ 的电荷,而 Q 只能分布在球壳的外表面上,故球壳外表面上的总电荷量为 $q + Q$ 。

由例 8-11 的结果可以得到,小球和球壳内外表面的电

势分别为

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right)$$

$$U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$U_{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_2} \right) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

球壳内外表面的电势差相等。

(2) 两球的电势差为

$$U_r - U_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

(3) 若外球壳接地，则球壳外表面上的电荷消失。两球的电势分别为

$$U_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$U_{R_1} = U_{R_2} = 0$$

两球的电势差仍为

$$U_r - U_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

由上式计算结果可以看出，不管外球壳接地与否，两球的电势差恒保持不变。而且，当 q 为正值时，小球的电势高于球壳的电势；当 q 为负值时，小球的电势低于球壳的电势。后一结论与小球在球壳内的位置无关，如果两球用导线相连或小球与球壳相接触，则不论 q 是正是负，也不管球壳是否带电，电荷 q 总是全部迁移到球壳的外表面上，直到 $U_r - U_R = 0$ 为止。

8.5.4 电介质的极化

我们知道静电场中的导体和电场相互作用有如下特点：电场可以改变导体上的电荷分布，产生感应电荷；反过来，导体上的电荷又改变电场分布。所谓电介质就是绝缘介质，它是不导电的，分子中正、负电荷束缚得较紧密，几乎不存在可自由移动的电荷。电介质与静电场的相互作用的特点有些方面与导体有相似之处，但也有区别。

在没有外电场作用时，由于分子作杂乱无章的热运动，电介质整体呈中性。如果将电介质放于外电场中，如图 8-30 所示，在外电场作用下，正电荷受到顺着电场线方向的力，负电荷受到逆着电场线方向的力，于是沿电场方向的电介质的两个端面分别出现正、负极化电荷，由于极化电荷的活动不能超出原子的范围，因此电介质上的极化电荷比导体上的感应电荷在数量上要少得多，极化电荷在电介质内产生的极化电场强度 \mathbf{E}' 不能把外电场强度 \mathbf{E}_0 全部抵消，只能使总电场有所削弱。总电场强度 \mathbf{E} 应是外电场强度 \mathbf{E}_0 和极化电荷产生的极化电场强度 \mathbf{E}' 的叠加，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}_0 \quad (8.35)$$

其大小为

$$E = E_0 - E'$$

总电场强度 \mathbf{E} 和外电场 \mathbf{E}_0 之间的关系为

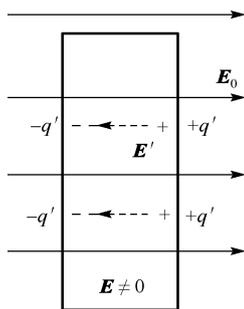


图 8-30 电介质极化

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} \tag{8.36}$$

式中 ϵ_r 为电介质的相对介电常数, 表 8-1 给出了一些常见电介质的相对介电常数, 在真空中 $\epsilon_r = 1$, 空气的相对介电常数近似等于 1, 其他电介质的相对介电常数均大于 1。

表 8-1 几种常见电介质的相对介电常数

电介质	相对介电常数 ϵ_r	电介质	相对介电常数 ϵ_r
真空	1	云母	5.4
空气(20℃)	1.00055	陶瓷	6~8
石蜡	2	玻璃	5~10
变压器油(20℃)	2.24	水(20℃)	80.2
聚乙烯	2.26	钛酸钡	$10^3 \sim 10^4$

在强电场中, 电介质中的一些束缚电荷在强电场力作用下会解除束缚作宏观定向运动, 电介质丧失绝缘性, 这种过程称为电介质的击穿, 一种电介质所能承受的最大电场强度称为该介质的绝缘强度。

8.5.5 电介质中的高斯定理

电介质放在电场中, 受电场的作用而极化, 产生极化电荷, 极化电荷又会反过来影响电场的分布, 有电介质存在时的电场应该由电介质上的极化电荷和自由电荷共同决定。

下面以平行板电容器中充满各向同性的电介质为例来讨论。如图 8-31 所示, 取一闭合的圆柱面作为高斯面, 高斯面的两底面与极板平行, 其中下底面在电介质内, 底面的面积为 S 。计算总电场强度 \mathbf{E} 时, 应计及高斯面内所包含的自由电荷和极化电荷, 即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_0 + q') \tag{8.37}$$

式中 q_0 和 q' 分别为高斯面内所包含的自由电荷和极化电荷。

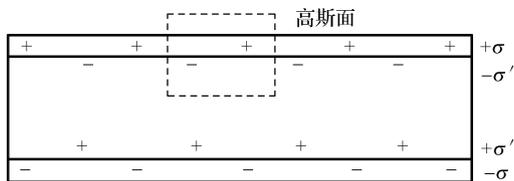


图 8-31 有电介质时的高斯定理

设极板上自由电荷的面密度为 σ , 极化电荷的面密度为 σ' , 自由电荷和极化电荷在两平板间激发的电场强度和极化电场强度分别为 $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ 和 $E' = \sigma'/\epsilon_0$, 将此 E_0 和 E' 代入式(8.35)得

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

从而可得

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\sigma$$

由于 $q_0 = \sigma s$, $q' = \sigma' s$, 上式也可写成

$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q_0 \quad (8.38)$$

将式(8.38)代入式(8.37)有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

或

$$\oint_S \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

令

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (8.39)$$

\mathbf{D} 叫做电位移矢量, 其单位为 $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$, 相对介电常数 ϵ_r 与真空介电常数 ϵ_0 的乘积叫做介电常数 ϵ , 即 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, 上式可写成

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0 \quad (8.40)$$

式中 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$ 是通过闭合高斯面 S 的电位移矢量通量。

式(8.40)虽然是从平行板电容器特例中得出的, 但可以证明在一般情况下也是正确的。有电介质时的高斯定理叙述如下:

在静电场, 通过任意闭合曲面的电位移矢量通量等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。其数学表达式为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0 \quad (8.41)$$

引入电位移这一物理量后, 电介质的高斯定理的数学表达式(8.41)中只有自由电荷一项, 所以用式(8.41)处理电介质中电场的计算比较简单。但要注意, 从表述有电介质时的电场规律来说, \mathbf{D} 只是一个辅助量, 在我们的教学范围内, 描写电场性质的物理量仍然是电场强度 \mathbf{E} 和电势 U , 若把一试验电荷 q_0 放到电场中去, 决定它受力的是电场强度 \mathbf{E} , 而不是电位移 \mathbf{D} 。在有一定对称性的情况下, 可利用式(8.41)先把 \mathbf{D} 求出, 无须知道极化电荷多少, 然后利用式(8.39)求出电场 \mathbf{E} 。

【例 8.13】 图 8-32 由半径为 R_1 的长直圆柱体和同轴的半径为 R_2 的薄导体圆筒组成, 并在直导体与导体圆筒之间充以相对电介常数为 ϵ_r 的电介质, 设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 求电介质中的电场强度和电位移。

【解】 由于电荷分布是均匀对称的, 所以在电介质中的电场是柱对称的, 电场强度的方向沿柱面的矢径方向, 作一与圆柱导体同轴的柱形闭合高斯面, 其半径为任意 $r (R_1 < r < R_2)$, 长为 l , 因为电介质中的电位移 \mathbf{D} 与柱形高斯面的两底面的法线垂直, 所以通过这两底面的电位移通量为零。根据电介质的高斯定理, 有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \lambda l \quad \text{即} \quad D 2\pi r l = \lambda l$$

得

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

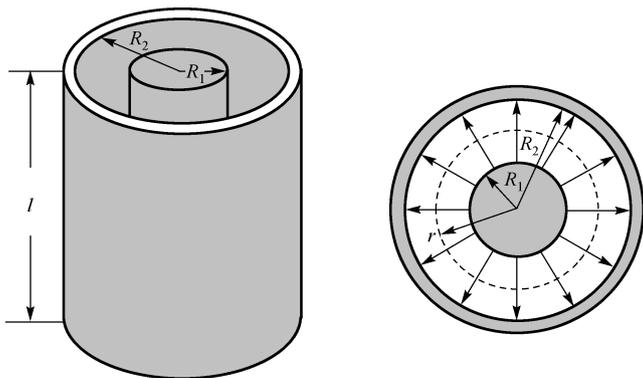


图 8-32 例 8.13 图

由(8.39)即 $E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r}$, 得电介质中的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

8.6 电容器 电场能量

8.6.1 电容器的电容

电容器是组成电路的基本元件之一, 它由被电介质分隔开的两个导体组成, 两个导体为它的极板。如图 8-33 所示, 当电容器的两个极板 A 和 B 分别带有等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 时, 两个极板间的电势差 $U = U_A - U_B$, 电容器的电容定义为: 一个极板所带电量的绝对值 Q 与两个极板间的电势差 U 的比值, 即

$$C = \frac{Q}{U} \tag{8.42}$$

电容器的电容决定于电容器本身的结构, 即两导体的形状、尺寸以及两导体间电介质的种类等, 而与它所带的电量无关。在 SI 制中, 电容的单位是库仑每伏特, 称为法拉, 符号为 F。在实用中法拉单位太大, 常见的电容以微法拉(μF)、皮法拉(pF)为单位, 它们之间的关系为 $1\text{F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}$ 。

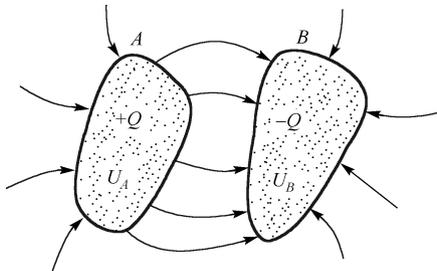


图 8-33 电容器

8.6.2 电容的计算

1. 平行板电容器

最简单的电容器是由靠得很近、相互平行、同样大小的两片金属板组成的平行电容器，如图 8-34 所示。设每块极板的面积为 S ，两极板内表面的距离为 d ，两极板间充以相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。若电容器充电后， A 板带正电 $+Q$ ， B 板带负电 $-Q$ ，其电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ ，即 $\sigma = \frac{Q}{S}$ ，因为板间的距离 d 比起极板的线度要小得多，使边缘附近不均匀电场所导致的误差完全可以忽略，所以两极板间的电场可视为均匀电场，由电介质的高斯定理可得极板间的电位移，即

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sigma S$$

得

$$D = \sigma, E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

此时，两极板间的电势差为

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

于是，根据电容的定义，求得平行板电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (8.43)$$

由上式可知，平行板电容器的电容 C 和极板的面积 S 成正比，和两极板内表面间的距离 d 成反比，与电介质的相对介电常数 ϵ_r 成正比，而和极板上所带的电荷量无关。显然，通过增大极板面积来加大电容是有限制的，通常的做法是改变电容器的形状结构，以及寻找合适的大相对介电常数的电介质材料，或者把电容器组合起来。可以得出，电容器充满电介质后其电容是未充介质时电容的 ϵ_r 倍。

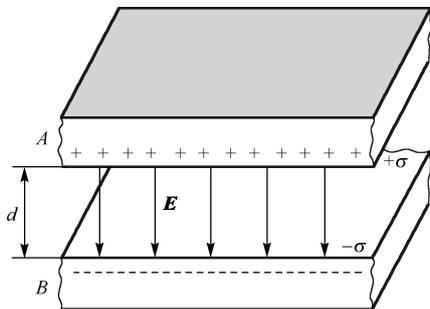


图 8-34 平行板电容器

2. 圆柱形电容器

圆柱形电容器由两个同轴圆柱导体面筒 A 和 B 构成，两柱面之间充以相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。如图 8-35 所示，设两圆柱面的长度为 l ，半径分别为 R_A 和 R_B ，当 $l \gg (R_B - R_A)$ 时，则可把 A 、 B 两个圆柱面间的电场视为无限长圆柱面的电场，在这样的条件下，当两圆柱面带电后，电荷将均匀分布在内外两圆柱面上，这时两圆柱面间的电场具有轴对称性，并且

在很大程度上不受外界的影响。设内外圆柱面各带有 $+q$ 和 $-q$ 的电荷, 这时圆柱面单位长度上的电荷量为 $\lambda = q/l$, 在内圆柱面内和外圆柱面外的场强均为零。应用高斯定理, 可求出在两圆柱面之间距轴线为 $r(R_A < r < R_B)$ 处任意 P 点的电场强度 \mathbf{E} 的大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \frac{1}{r}$$

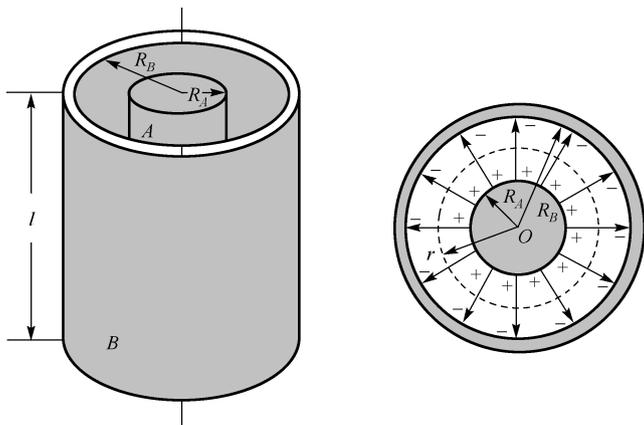


图 8-35 圆柱形电容器

电场强度 \mathbf{E} 的方向垂直于圆柱轴线。设内、外圆柱面的电势分别为 U_A 和 U_B , 则可求得两圆柱面间的电势差为

$$\begin{aligned} U_A - U_B &= \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_B}{R_A} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \ln \frac{R_B}{R_A} \end{aligned}$$

根据电容的定义, 求得圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{l}{\ln(R_B/R_A)} \quad (8.44)$$

可见圆柱形电容器两极板间为真空时, 电容只和它的几何结构有关。由式(8.44)可知, 圆柱形电容器单位长度的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(R_B/R_A)}$$

3. 球形电容器

球形电容器是由半径分别为 R_A 和 R_B 的两个同心的金属球壳所组成的(见图 8-36)。设内球带电 $+q$, 外球带电 $-q$, 内外球壳之间充以相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。这时, 在两球壳之间, 具有球心对称性的电场, 距球心为 $r(R_A < r < R_B)$ 处的 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} \mathbf{r}$$

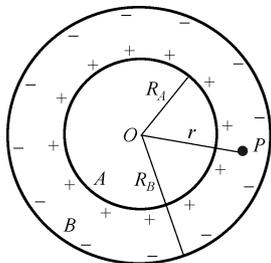


图 8-36 球形电容器

两球壳间的电势差为

$$\begin{aligned}
 U_A - U_B &= \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_A}^{R_B} E dr \\
 &= \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)
 \end{aligned}$$

根据电容的定义,求得球形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (8.45)$$

上式说明了球形电容器的电容也只和它的几何结构有关。结构形状一定的电容器,其电容具有固定值,与它是否带电或所带电荷量的多少无关。

8.6.3 电容器的串联和并联

在实际应用中,常会遇到已有电容器的电容或者耐压值不能满足电路中使用的要求,这时常把若干个电容器适当地连接起来构成一电容器组。电容器的基本连接方式有两种,简述如下。

1. 串联电容器

当 n 个电容器串联时,设其电容值分别为 C_1, C_2, \dots, C_n , 组合的等效电容值为 C 。串联的每对电容器的两个极板上都带有等量异号的电荷量 $+q$ 和 $-q$ 。而电压与电容成反比地分配在各个电容器上,因此,整个串联电容器系统的总电容为

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (8.46)$$

这说明,串联电容器组等效电容的倒数等于电容器组中各电容的倒数之和。

2. 并联电容器

电容器并联时,加在各电容器上的电压是相同的,电量与电容成正比地分配在各个电容器上,因此,整个并联电容器系统的总电容为

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{U} = \frac{U(C_1 + C_2 + \dots + C_n)}{U} \\
 C &= C_1 + C_2 + \dots + C_n
 \end{aligned} \quad (8.47)$$

这说明,当几个电容器并联时其等效电容等于这几个电容器的电容之和。

8.6.4 电容器的电能

如图 8-37 所示,在电容器充电过程中,电子从电容器带正电的极板上被拉到电源,并被电源推到带负电的极板上。完成这个过程要靠电源做功,从而消耗了电源的能量(如化学能),使之转化为电容器存储的电能。设充电过程的某一瞬间,两极板之间的电势差为 U , 极板所带电量的绝对值为 q , 此时若把电荷 $-dq$ 从带正电的极板移到带负电的极板,外力克服静电力所做的功为

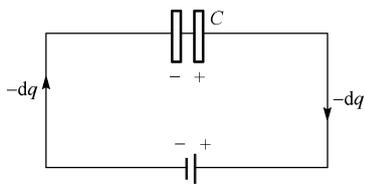


图 8-37 电容器充电

$$dW = U dq = \frac{q}{C} dq \quad (8.48)$$

从两极板不带电到两极板分别带 $\pm Q$ 电量的过程中,外力所做的总功为

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \quad (8.49)$$

我们知道,功是能量变化的量度,该功将使电容器的能量增加,也就是电容器存储的电能,于是有

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \quad (8.50)$$

从上述讨论可见,在电容器的带电过程中,外力通过克服静电力所做的功,把非静电能转换为了电容器的电能。无论电容器的结构如何,这一结果都正确。

电容器中存储有电能,如果把一个已充电的电容器的两个极板用导线短路,则可以看到放电的火花,利用放电火花的热能,可以熔焊金属,这就是所谓的“电熔焊”。利用已充电的电容器在极短的时间内放电,可得到较大的功率,这在激光和受控热核反应中有重要的应用。

8.6.5 静电场的能量 能量密度

在恒定状态下,电荷和电场总是同时存在相伴而生的,使我们无法分辨电能是与电荷还是与电场相关联,然而电磁波可以在空间传播,电场可以脱离电荷而传播,因此电场能量是定域在电场中的。既然电场能量分布在电场中,电场能量一定与描述电场性质的特征量 \mathbf{E} 有某种联系。电容器的能量存储在哪里呢?下面仍以平行板电容器为例进行讨论。

设平行板电容器两个极板的面积为 S ,分别带有等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$,内表面间的距离为 d ,两个极板间充满了相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。根据式(8.49),电容器中存储的电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right)^2 Sd$$

由于两个极板间的电场为

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

所以有

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 V$$

式中 $V = Sd$ 为极板间电场所占空间的体积,因为平行板电容器极板间电场是均匀的,所以平行板电容器的电场能量均匀地分布在它的电场中,因此单位体积内电场内所具有的能量为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \quad (8.51)$$

上式称为电场能量密度,此结论虽然是通过平行板电容器推导出来的,但它却是普遍成立的,当电场不均匀时,总能量 W_e 应该是能量密度的体积分

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 dV \quad (8.52)$$

式中的积分遍及电场分布的空间。

8.7 电 流 稳恒电场

8.7.1 电 流 电 流密度

电流是大量电荷作定向运动形成的。一般来说,电荷的携带者可以是自由电子、质子、正负离子,这些带电粒子称为载流子。由带电粒子定向运动形成的电流叫做传导电流,而带电物体作机械运动时形成的电流叫做运流电流。在金属导体中,载流子为自由电子,它作定向移动的方向是由低电势到高电势,但在历史上,人们把正电荷从高电势向低电势移动的方向规定为电流的方向,因而电流的方向与负电荷的移动方向恰好相反。

1. 电流强度

单位时间内通过某横截面的电量称为电流强度,即

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \text{单位(SI): 安培(A)}$$

如果导体中的电流不随时间变化,这种电流叫做恒定电流。

2. 电流密度矢量

电流强度只能从整体上反映导体内电流的大小。当遇到电流在粗细不均匀的导线或大块导体中流动的情况时,导体的不同部分电流的大小和方向都可能不一样,如图 8-38 所示。为了细致描述导体内各点电流的分布情况,引入一个新物理量——电流密度 \mathbf{j} 。电流密度是矢量,电流密度的大小和方向规定如下:导体中任意一点电流密度 \mathbf{j} 的方向为该点电场的方向; \mathbf{j} 的大小等于通过与该点场强方向垂直的单位面积的电流强度。如图 8-39 所示,即可表示为

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{n} \quad \text{单位: 安培每平方米(A/m}^2\text{)}$$

式中 \mathbf{n} 是与电场方向垂直的面积 dS_{\perp} 的法线方向单位矢量,它与电场 \mathbf{E} 的方向相同。

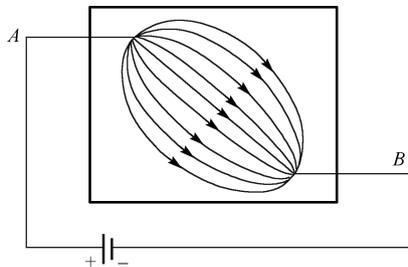


图 8-38 电流在大块金属中的分布

如果面元 dS 的法线方向 \mathbf{n} 与导体内某点处 \mathbf{j} 的方向成 θ 角, dS 在垂直于 \mathbf{j} 的方向上投影面积为 dS_{\perp} , 如图 8-40 所示, 则 $dS_{\perp} = dS \cos\theta$, 通过 dS 的电流为

$$dI = j \cos\theta dS = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

而通过导体中任一面积的电流为

$$I = \int_S j \cos\theta dS = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.53a)$$

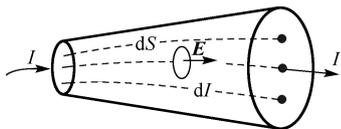


图 8-39 电流密度矢量的引出

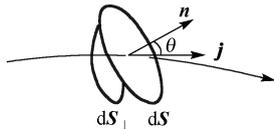


图 8-40 说明电流密度的矢量性

8.7.2 稳恒电场

式(8.53a)表示通过某一面积的电流就是通过该面积的电流密度的通量。而通过一个封闭曲面 S 的电流可以表示为

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.53b)$$

由 \mathbf{j} 的定义可知, 式(8.53b)实际上表示净流出封闭曲面的电流也就是单位时间从封闭曲面向外流出的正电荷的电量。根据电荷守恒定律, 通过封闭曲面流出的电量应等于封闭曲面内电荷 q 的减少。因此式(8.53b)应该等于 q 的减少率, 即

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (8.54)$$

这一关系式称为电流的连续性方程。

导体内各处的电流密度都不随时间变化的电流叫稳恒电流。稳恒电流的一个重要性质就是通过任一封闭曲面的稳恒电流等于零, 即

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (8.55)$$

通过任意封闭曲面的电流等于零, 即任意一段时间内通过此封闭曲面流出和流入的电量相等, 而这一封闭曲面内的总电量应不随时间改变。在导体内各处都可作一个任意形状和大小的封闭曲面, 由此可以分析出: 在稳恒电流情况下, 导体内电荷的分布不随时间改变。不随时间改变的电荷分布产生不随时间改变的电场, 这种电场称为稳恒电场。导体内恒定的不随时间改变的电荷分布就像固定的静止电荷分布一样, 因此稳恒电场与静电场有许多相似之处。例如, 它们都服从高斯定理和场强环路积分为零的环路定理。若以 \mathbf{E} 表示稳恒电场的电场强度, 则也应有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8.56)$$

根据稳恒电场的保守性, 在稳恒电场中也可以引入电势的概念。

稳恒电场和静电场是有重要区别的。其根本原因是产生静电场的电荷始终是固定不动的。因此, 在有电荷定向运动的情况下, 即使在导体内部, 稳恒电场也不等于零, 导体内任意两点电势不等; 而静电场中的导体处于静电平衡时, 导体内的电场为零, 导体是等势体。稳恒电场的存在总要伴随着能量的转换, 如电流做功就是电能转变为其他形式的能量, 而维持静电场不需要能量的转换。

8.7.3 电动势

只要在导体两端维持恒定的电势差, 导体中就会有稳恒电流, 怎样才能维持恒定的电势差呢? 我们以带电电容器放电时产生的电流为例来讨论。

如图 8-41 所示, 当用导线把充电的电容器两极板 A 、 B 连接起来时, 就有电流从 A 板通过导线流向 B 板, 但该电流不是稳定的, 因为两个极板上的正负电荷逐渐中和而减少, 极板间的电势差也逐渐减小而直至为零, 电流也就停止了。因此, 单纯依靠静电力的作用, 在导体两端不可能维持恒定的电势差, 也就是不可能获得稳恒电流。

为了获得稳恒电流, 必须有一种本质上完全不同于静电场的力把如图 8-42 中由极板 A 经导线流向极板 B 的正电荷再送回到极板 A , 从而使两极板间保持恒定的电势差来维持由 A 到 B 的稳恒电流。能把正电荷从电势较低的点(如电源负极板)送到电势较高的点(如电源正极板)的作用力称为非静电力, 记为 \mathbf{F}_k 。提供非静电力的装置叫做电源。

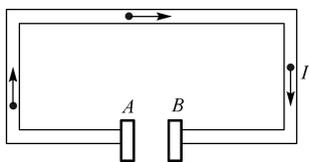


图 8-41 电容器的放电

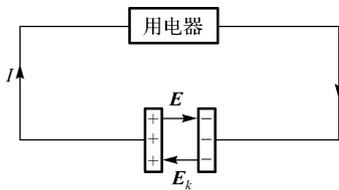


图 8-42 电源

作用在单位正电荷上的非静电力称为非静电场场强, 记为 \mathbf{E}_k , 且

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{F}_k}{q}$$

一个电源的电动势 ϵ 定义为把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时, 电源中的非静电力所做的功, 即

$$\epsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \quad (8.57)$$

电动势与电势一样, 也是标量。规定自负极经电源内部到正极的方向为电动势的正方向。

由于电源外部 \mathbf{E}_k 为零, 所以电源电动势又可定义为把单位正电荷绕闭合回路一周时, 电源中非静电力所做的功, 即

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \quad (8.58)$$

式(8.58)对非静电力作用在整个回路上的情况(如电磁感应)也适用。这时电动势 ϵ 的方向与回路中电流的方向一致。

本章小结

一、库仑定律和静电力叠加原理

1. 库仑定律: 在真空中, 两个静止点电荷之间的相互作用力的大小与这两个点电荷所带电量的乘积成正比, 与它们之间距离的平方成反比; 作用力的方向沿着这两个点电荷之间的连线。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$$

$$2. \text{ 静电力叠加原理: } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_{i0}$$

二、电场强度和场强叠加原理

1. 电场强度: 电场中某点电场强度 \mathbf{E} 等于单位试验电荷 q_0 在该点所受的电场力 \mathbf{F} 。

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

$$2. \text{ 点电荷的电场强度: } \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

3. 场强的叠加原理

$$\text{分离点电荷系的场强: } \mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{r}_{i0}$$

$$\text{电荷连续分布带电体的场强: } \mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0$$

三、电势能和电势

1. 电势能: 试验电荷 q_0 在电场中某点的电势能, 在数值上等于把电荷从该点处移动到零电势能处静电力所做的功。

$$W_P = \int_P^{(0)} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

2. 电势: 静电场中某点的电势等于单位正电荷放在该点处时的电势能, 也等于单位正电荷从该点经过任意路径到无限远处时电场力所做的功。

$$U_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

3. 电势的叠加原理:

$$\text{分离电荷系电场中的电势: } U = \sum_{i=1}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

$$\text{电荷连续分布的带电体电场中的电势: } U = \int dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

$$4. \text{ 电场力的功: } A = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q(U_a - U_b)$$

$$5. \text{ 点电荷的电势: } U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ (设 } U_{\infty} = 0)$$

$$6. \text{ 均匀带电球面的电势: 设 } U_{\infty} = 0, U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ (球内及球面上), } U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ (球外)}$$

四、高斯定理

1. 电场强度通量: 电场中穿过任意一个曲面的电场线数目称为穿过该面的电通量。

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \text{ (任意一曲面)}$$

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \text{ (任意一闭合曲面)}$$

2. 高斯定理: 在真空中的静电场中, 通过任一闭合曲面的电场强度通量等于该闭合曲面

所包围的所有电荷的代数和除以 ϵ_0 。

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

3. 几种典型电荷系的电场分布公式

真空中无限长的均匀带电直线: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

均匀带电球面: $E = 0$ (球面内), $E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (球面外)

均匀带电球体: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ (球体内), $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (球体外)

无限大均匀带电平面外: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

无限长均匀带电柱面: $E = 0$ (柱面内), $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ (柱面外)

五、静电场的环路定理

在静电场中, 电场强度 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的环流为零。

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

六、导体的静电平衡条件

1. 电场表述: (1) 导体内部电场强度处处为零; (2) 导体表面附近电场强度的方向处处与导体表面垂直且 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 。
2. 电势表述: (1) 导体是个等势体; (2) 导体表面是等势面。

七、有电介质时的高斯定理

在静电场中, 通过任意闭合曲面的电位移矢量通量等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$$

对各向同性电介质: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$

八、电容器的电容

1. 孤立导体的电容: $C = \frac{Q}{U}$
2. 电容器的电容: $C = \frac{q}{U_A - U_B}$
3. 几类典型电容器的电容公式(设极板间充满介质)
平行板电容器: $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$

$$\text{圆柱形电容器: } C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln(R_B/R_A)}$$

$$\text{球形电容器: } C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_A R_B}{R_B - R_A}$$

4. 电容器的串联和并联

$$\text{串联: } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

$$\text{并联: } C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

九、电场能量和能量密度

$$1. \text{ 电容器的储能: } W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}qU = \frac{q^2}{2C}$$

2. 电场能量密度: 单位体积内的电场能量

$$\omega_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (D \text{ 为电位移矢量})$$

$$\text{对各向同性电介质: } \omega_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

$$3. \text{ 电场的能量: } W_e = \int_V \omega_e dV = \int_V \frac{1}{2}DE dV = \int_V \frac{1}{2}\epsilon E^2 dV \quad (\text{含介质})$$

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV \quad (\text{真空中})$$

十、稳恒电场与电动势

1. 稳恒电场: 不随时间改变的电荷分布产生不随时间改变的电场。稳恒电场的性质与静电场相同, 但是存在稳恒电流的导体不处于静电平衡状态, 所以导体内部稳恒电场不为零。

$$2. \text{ 电动势定义: } \epsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{沿闭合回路的电动势: } \epsilon = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

习 题 8

一、填空题

8.1 真空中静电场的环路定理的数学表示式为 _____。该式的物理意义是 _____。该定理表明, 静电场是 _____ 场。

8.2 在点电荷系的电场中, 任一点的电场强度等于 _____, 这称为场强叠加原理。

8.3 静电场的高斯定理表明静电场是 _____ 场。

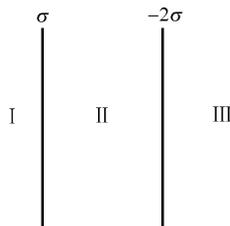
8.4 如题 8-4 图, 两块“无限大”的带电平行平板, 其电荷面密度分别为 $\sigma(\sigma > 0)$ 和 -2σ 。试写出各区域的电场强度 \mathbf{E} 。

I 区 E 的大小 _____, 方向 _____。

II 区 E 的大小 _____, 方向 _____。

III 区 E 的大小 _____, 方向 _____。

8.5 静电场中 A 、 B 两点的电势为 $U_A > U_B$, 则在正电荷由 A 点移至 B 点的过程中电场力做功, 电势能 _____。



题 8-4 图

二、选择题

8.6 下列说法正确的是()

- A. 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强一定为零。
- B. 闭合面内的电荷代数和不为零时, 闭合面上各点场强一定处处不为零。
- C. 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强不一定处处为零。
- D. 闭合面上各点场强均为零时, 闭合面内一定处处无电荷。

8.7 下列说法正确的是()

- A. 电场强度为零的点, 电势也一定为零。
- B. 电场强度不为零的点, 电势也一定不为零。
- C. 电势为零的点, 电场强度也一定为零。
- D. 电势在某一区域内为常量, 则电场强度在该区域内必定为零。

8.8 一空心导体球壳, 其内外半径分别为 R_1 和 R_2 , 带电量 q , 当球壳中心处再放一电量为 q 的点电荷时, 则导体球壳的电势(设无穷远处为电势零点)为()。

- A. $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$
- B. $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$
- C. $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 R_1}$
- D. $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 R_2}$

8.9 将充过电的平行板电容器的极板间距离增大, 则()。

- A. 极板上的电荷增加
- B. 电容器的电容增大
- C. 两极板间场强不变
- D. 电容器储存的能量不变

三、计算题

8.10 在边长为 a 的正方形的四角, 依次放置点电荷 q , $2q$, $-4q$ 和 $2q$, 其中心放一正的单位点电荷, 求这个电荷受力的大小和方向。

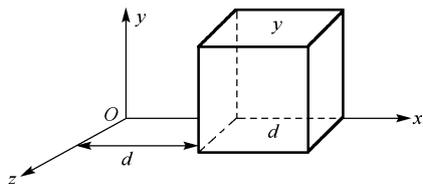
8.11 求电矩为 $p=ql$ 的电偶极子, 在靠近 $+q$ 的一侧的轴线延长线上任一确定点 P 的场强。已知 P 点到偶极子中心的距离为 r 。

8.12 长 $l=15.0$ cm 的直导线 AB 上均匀地分布着线密度 $\lambda=5.0 \times 10^{-9}$ C · m⁻¹ 的正电荷。试求: (1) 在导线的延长线上与导线 B 端相距 $a_1=5.0$ cm 处 P 点的场强; (2) 在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d_2=5.0$ cm 处 Q 点的场强。

8.13 题 8-13 图中, 电场强度的分量为 $E_x=bx^{1/2}$, $E_y=E_z=0$, 试计算: (1) 通过立方体的总电通量; (2) 立方体内的总电荷量。

8.14 一个半径为 R 的均匀带电半圆环, 电荷线密度为 λ , 求环心处 O 点的场强。

8.15 均匀带电球壳内半径 10 cm, 外半径 20 cm, 电荷体密度为 1×10^{-9} C · m⁻³, 求距球心 5 cm、15 cm、50 cm 各点的电场强度。



题 8-13 图

8.16 半径为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$) 的两无限长同轴圆柱面, 单位长度上分别带有电量 λ 和 $-\lambda$, 试求: (1) $r < R_1$; (2) $R_1 < r < R_2$; (3) $r > R_2$ 处各点的场强。

8.17 两个无限大的平行平面都均匀带电, 电荷的面密度分别为 σ_1 和 σ_2 , 试求空间各处场强。

8.18 一电偶极子由 $q = 1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ 的两个异号点电荷组成, 两电荷距离 $d = 0.2 \text{ cm}$, 把该电偶极子放在 $1.0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ 的外电场中, 求外电场作用于电偶极子上的最大力矩。

8.19 一电子绕一带均匀电荷的长直导线以 $2 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的匀速率作圆周运动。求带电直线上的线电荷密度(电子质量 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 电子电量 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$)。

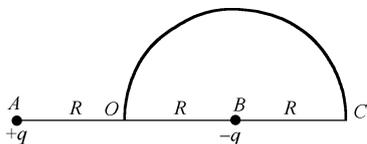
8.20 两点电荷 $q_1 = 1.5 \times 10^{-8} \text{ C}$, $q_2 = 3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$, 相距 $r_1 = 42 \text{ cm}$, 要把它们之间的距离变为 $r_2 = 25 \text{ cm}$, 需做多少功?

8.21 如题 8-21 图所示, 在 A、B 两点处放有电量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的点电荷, A、B 间距离为 $2R$ 。现将另一正试验点电荷 q_0 从 O 点经过半圆弧移到 C 点, 求移动过程中电场力做的功。

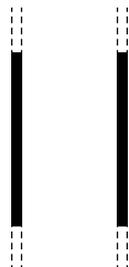
8.22 两个同心球面的半径分别为 R_1 和 R_2 , 各自带有电荷 q_1 和 q_2 。求: (1) 各个区域电势的分布, 并画出分布曲线; (2) 两球面上的电势差为多少?

8.23 一半径为 R 的无限长带电细棒, 其内部电荷均匀分布, 电荷体密度为 ρ , 现取棒表面为零电势, 求空间电势分布并画出电势分布曲线。

8.24 证明: 对于两个无限大的平行平面带电导体板(如题 8-24 图)来说, (1) 相向的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而符号相反; (2) 相背的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而符号相同。



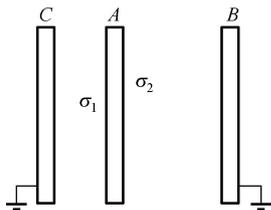
题 8-21 图



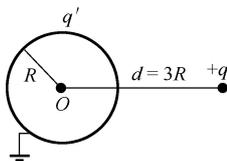
题 8-24 图

8.25 如题 8-25 图所示, 三个平行金属板 A、B 和 C 的面积都是 200 cm^2 , A 和 B 相距 4.0 mm , A 与 C 相距 2.0 mm 。B、C 都接地。如果使 A 板带正电 $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, 略去边缘效应, 问 B 板和 C 板上的感应电荷各是多少? 以地的电势为零, 则 A 板的电势是多少?

8.26 如题 8-26 图所示, 半径为 R 的金属球离地面很远, 并用导线与地相联, 在与球心相距为 $d = 3R$ 处有一点电荷 $+q$, 试求金属球上的感应电荷的电量。



题 8-25 图

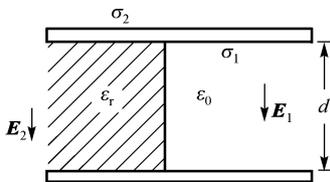


题 8-26 图

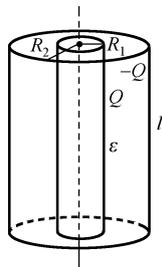
8.27 在半径为 R_1 的金属球之外包有一层外半径为 R_2 的均匀电介质球壳，介质相对介电常数为 ϵ_r ，金属球带电 Q 。试求：(1)电介质内、外的场强；(2)电介质层内、外的电势；(3)金属球的电势。

8.28 如题 8-28 图所示，在平行板电容器的一半容积内充入相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。试求有电介质部分和无电介质部分极板上自由电荷面密度的比值。

8.29 如题 8-29 图所示，两个同轴的圆柱面，长度均为 l ，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$)，且 $l \gg R_2 - R_1$ ，两柱面之间充有介电常数 ϵ 的均匀电介质。当两圆柱面分别带等量异号电荷 Q 和 $-Q$ 时，求：(1)在半径 r 处 ($R_1 < r < R_2$) 厚度为 dr 、长为 l 的圆柱薄壳中任一点的电场能量密度和整个薄壳中的电场能量；(2)电介质中的总电场能量；(3)圆柱形电容器的电容。



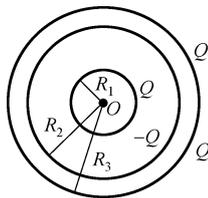
题 8-28 图



题 8-29 图

8.30 C_1 和 C_2 两电容器分别标明“200 pF、500 V”和“300 pF、900 V”，把它们串联起来后等值电容是多少？如果两端加上 1000 V 的电压，是否会击穿？

8.31 如题 8-31 图所示，半径为 $R_1 = 2.0$ cm 的导体球，外套有一同心的导体球壳，壳的内、外半径分别为 $R_2 = 4.0$ cm 和 $R_3 = 5.0$ cm，当内球带电荷 $Q = 3.0 \times 10^{-8}$ C 时，求：(1)整个电场存储的能量；(2)如果将导体壳接地，计算存储的能量；(3)此电容器的电容值。



题 8-31 图

第 9 章

稳恒磁场

在静止电荷的周围存在着电场，静止电荷的相互作用是通过电场来传递的。如果电荷在运动，那么在它周围不仅有电场，而且有磁场。电流间(包括运动电荷间)的相互作用也是通过场来传递的，这种场称为磁场。磁场也是物质的一种形态，它只对运动电荷有力的作用，对静止电荷则毫无影响。因此，运动电荷与运动电荷之间、电流与电流之间、电流(或运动电荷)与磁铁之间的相互作用，都可以看成是它们中任意一个所激发的磁场对另一个施加作用力的结果。最有实际意义的是电荷在导体中做恒定流动(稳恒电流)时在它周围所激发的磁场，这时场中各点的磁感应强度不随时间而变化，就形成一个稳恒磁场。本章讨论稳恒电流激发磁场的规律和性质。首先给出描述磁场的物理量磁感应强度，然后着重讨论电流激发磁场的规律即毕奥-萨伐尔定律，反映磁场性质的基本定理——高斯定理和安培环路定理，磁场对运动电荷和电流的作用力——洛伦兹力和安培力，最后介绍磁场中的磁介质。

9.1 磁场 磁感应强度

9.1.1 基本磁现象

人们发现磁现象要比发现电现象早很多，我国是最早发现和应用磁现象的国家，在公元前几百年人们就发现天然磁石(Fe_3O_4)吸引铁的现象。东汉时期的王充指出古代的“司南勺”是个指南器，11世纪初，我国已经将指南针用于航海。北宋的沈括发现地磁偏角。11世纪末，指南针传入欧洲，指南针是我国古代发明之一，对世界文明的发展有重大贡献。

现在所用的磁铁多半是人工制成的，如用铁、钴、镍等合金制成的永久磁铁。无论是天然磁石或是人造磁铁，都具有吸引铁、钴、镍等物质的特性，这种特性称为磁性。进一步研究发现，条形磁铁的两端磁性最强，而中部几乎无磁性，磁铁两端磁性最强的区域称为磁极。若将一条形磁铁悬挂起来，则静止时磁铁会自动地转向南北方向，指北的一极称为北极(用N表示)，指南的一极称为南极(用S表示)。两块磁铁的磁极之间存在的这种相互作用力，称为磁力。同号磁极之间相互排斥，异号磁极之间相互吸引。虽然两磁极之间的相互作用力的规律与两个点电荷之间的相互作用力相似，但两者却有一个重要的区别，那就是在自然界中正负电荷可以独立存在，如电子和质子，但不存在独立的N极和S极，任一磁铁，不管把它分割得多小，每一小块磁铁仍然具有N和S两极。

直到1820年以前，人们虽然也在自然现象中观察到闪电能使钢针磁化或使磁针退磁等

现象,但没能把电现象和磁现象联系起来,因此,长期以来,人们普遍认为电现象和磁现象是互不关联的。1820年,丹麦物理学家奥斯特发现放在载流导线周围的小磁针会发生偏转;同年安培发现放在磁铁附近的载流导线也会受到力的作用而发生运动,随后又发现载流导线之间或载流线圈之间也有相互作用,并总结出两电流之间的作用力和两磁铁之间的作用力遵从相似的规律;这时人们才知道磁现象与电荷的运动是密切相关的。1822年,安培提出了有关物质磁性本质的假说,它认为一切磁现象的根源是电流,磁铁的磁性是由于其中存在着微小的环形电流,称为分子电流。当这些分子电流有规律地排列起来,在宏观上物质便对外显示出磁性,分子电流相当于基元磁铁,物质的磁性就决定于物质中分子电流对外界的磁效应的总和。因为基元磁铁的两个磁极对应于分子回路电流的正反两个面,这两个面显然是无法单独存在的,因而两种磁极也不能单独存在。安培的假说与现代对物质磁性的理解是相符的,近代理论表明,原子核外电子绕核的运动和电子自旋等运动就构成了等效的分子电流。由此可知,实验和近代理论都证实了一切磁现象起源于电荷的运动。

9.1.2 磁场 磁感应强度

1. 磁场

从静电场的研究中我们知道,静止电荷周围的空间存在着电场,静止电荷间的相互作用是通过电场来传递的。一切磁现象都是由运动电荷或电流产生的,就是说在运动电荷的周围会产生一种称为磁场的特殊物质,磁场的基本性质就是它对任何进入场中的运动电荷、载流导体或永久磁体有力的作用,这种作用是通过磁场来传递的,因此,运动电荷与运动电荷之间、电流与电流之间、电流(或运动电荷)与磁铁之间的相互作用,都可以看成是它们中任意一个所激发的磁场对另一个施加作用力的结果,可以形象的表示为

$$\text{电流} \longleftrightarrow \text{磁场} \longleftrightarrow \text{电流}$$

与静电场类似,磁场也是物质的一种形态,它的物质性表现在磁场具有一定的能量,同时,磁场也是一个矢量场,在磁场中任意一点处,它都具有一定的大小和方向。

2. 磁感应强度

在静电场中,我们曾根据试验电荷在电场中的受力情况引入电场强度来描述电场的性质,磁场的重要特性之一就是处于其中的运动电荷施加作用力,我们能否根据这一特性定义一个矢量来描述磁场的性质?

实验表明,磁场作用在运动电荷上的力的大小和方向不仅与运动电荷所带的电量有关,而且还与运动电荷的速度有关,如图9-1所示。

(1)当运动试验电荷 q 的速度 v 的方向与该点小磁针N极的指向平行时,运动电荷所受磁场力为零,即 $F=0$,如图9-1(a)所示。

(2)当运动试验电荷 q 的速度 v 的方向与该点小磁针N极的指向不平行时,运动电荷将受的磁场力 F 的作用。 F 的方向总是垂直于 v 的方向和该点小磁针N极的指向组成的平面;改变 q 的符号,则 F 的方向反向,如图9-1(b)所示。

(3)当运动试验电荷 q 的速度 v 的方向与该点小磁针N极的指向垂直时,运动电荷所受的磁场力最大,用 F_{\max} 表示, F_{\max} 正比于运动电荷电量 q 与速率 v 的乘积。如图9-1(c)所示。

根据上述规律,磁感应强度 B 的大小和方向定义为:

(1)磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为运动电荷所受的最大磁力 F_{\max} 与运动试验电荷的电量 q 和 v 的乘积的比值,即

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (9.1)$$

该比值与运动试验电荷 q 和速率 v 无关,仅由该点磁场的性质决定。

(2)如图 9-1(a)所示,正电荷 q 以速度 v 经过磁场中某点,若它不受磁场力作用(即 $\mathbf{F} = 0$),规定此时正电荷的速度方向为磁感应强度 \mathbf{B} 的方向。这个方向与将小磁针置于此处时 N 极的指向是一致的。

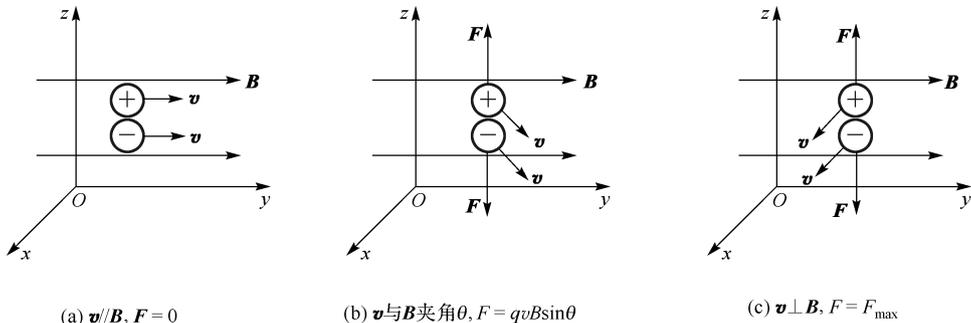


图 9-1 运动电荷在磁场受力

在国际单位制中,磁感应强度 \mathbf{B} 的单位是 T,称为特斯拉,即 $1\text{T} = 1\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。磁感应强度的单位在工程上还习惯用高斯, $1\text{T} = 10^4\text{Gs}$ 。

3. 洛伦兹力

从磁感应强度 \mathbf{B} 的定义和图 9-1 所示还可以知道,运动电荷 q 在磁场中所受力 \mathbf{F} 与运动电荷的速度 \mathbf{v} 和磁感应强度 \mathbf{B} 间的矢量关系式为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

此力 \mathbf{F} 称为洛伦兹力,如果 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 之间的夹角为 θ ,则 \mathbf{F} 的大小为 $F = qvB\sin\theta$ 。

\mathbf{F} 的方向垂直于 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 组成的平面,且符合右手螺旋关系,即右手四指由 \mathbf{v} 经小于 180° 的角度弯向 \mathbf{B} ,此时,大拇指的指向就是正电荷所受力的方向,对于正电荷 $q > 0$, \mathbf{F} 的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向相同,对于负电荷 $q < 0$, \mathbf{F} 的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向相反。当 $\theta = 0$ 或 π ,即 $\mathbf{v} // \mathbf{B}$ 时, $\mathbf{F} = 0$; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$,即 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ 时, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\max}$ 。

9.2 磁通量 磁场的高斯定理

9.2.1 磁感应线

与静电场中的电场线类似,为了形象地描述磁场的分布,在稳恒磁场中,也可用磁感应线来形象地描绘空间各点磁场的分布。因此,我们规定:磁感应线上任一点的切线方向与该点的磁感应强度方向平行,并在切线上用箭头标出,磁感应线的疏密程度则表示该点磁感应强度的大小。在实验上很容易把磁感应线显示出来,在水平放置的玻璃板上,撒上铁屑,使

导线穿过玻璃板并通以电流，铁屑便在磁场作用下变成小磁针，轻轻地敲击玻璃板，铁屑就会有规则地排列起来，显示出磁感应线的分布图像。图 9-2 所示是几种不同形状的电流所激发的磁场的磁感应线图。

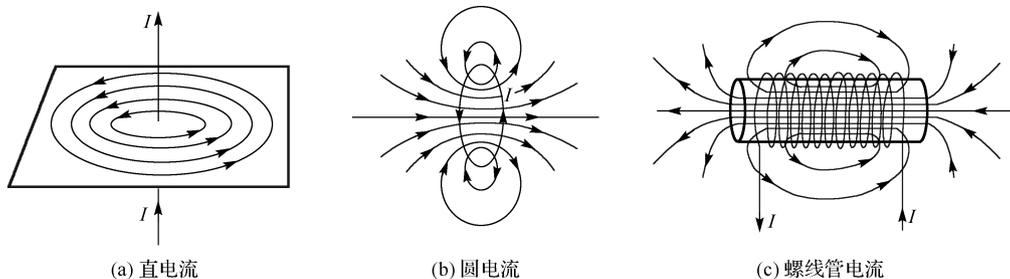


图 9-2 几种不同形状电流磁场的磁感应线

从磁感应线的图示中，可以得到磁感应线的重要特性：(1) 磁场中某点磁场的方向是确定的，磁场中任意两条磁感应线不会相交，磁感应线的这一特性和电场线相同。(2) 磁感应线都是闭合曲线，没有起点和终点，且磁感应线的环绕方向和电流流向形成右手螺旋的关系(如图 9-3 所示)。磁感应线的这个特性和静电场中的电场线不同，静电场中的电场线起始于正电荷，终止于负电荷。

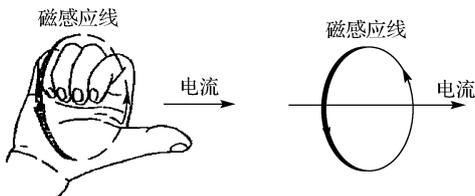


图 9-3 磁感应线环绕方向与电流方向的关系

9.2.2 磁通量 磁场的高斯定理

如何表示磁场的强弱呢？我们规定：通过磁场中某点处垂直于 \mathbf{B} 矢量的单位面积上的磁感应线数目等于该点 \mathbf{B} 的数值。因此， \mathbf{B} 大的地方，磁感应线就密集； \mathbf{B} 小的地方，磁感应线就稀疏。

在磁场中，通过磁场中某一给定曲面的总磁感应线数叫做通过该曲面的磁通量，用 Φ_m 表示。如图 9-4 所示，在磁感应强度 \mathbf{B} 的磁场中，曲面上取面积元 dS ， dS 的单位法线方向 \mathbf{e}_n 与该点处磁感应强度方向之间的夹角为 θ ，则通过面积元 dS 的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cos\theta dS$$

或写成矢量标积的形式

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.2)$$

所以，在非均匀磁场中，通过任意曲面 S 的磁通量为

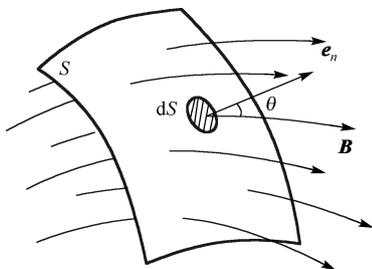


图 9-4 磁通量

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S B \cos\theta dS = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.3)$$

对闭合曲面来说,一般规定由里向外为法线的正方向,这样,磁感应线从闭合曲面穿出处的磁通量为正,穿进处的磁通量为负。由于磁感应线是闭合线,因此穿进闭合曲面的磁感应线数必然等于穿出闭合曲面的磁感应线数,所以通过任一闭合曲面的总磁通量必等于零,即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.4)$$

上式称为磁场的高斯定理,它是表明磁场性质的重要定理,是电磁场理论的基本方程之一,它与静电学中的高斯定理相对应。但这两个方程有本质的差别,反映出磁场和静电场是两类不同特性的场,通过任意闭合曲面的电场强度通量可以不为零,而通过任意闭合曲面的磁通量必为零。

在国际单位制中,磁通量的单位叫做韦伯,符号为 Wb。

9.3 毕奥-萨伐尔定律

9.3.1 毕奥-萨伐尔定律

1. 毕奥-萨伐尔定律

在计算连续分布的带电体在空间某点的电场强度 \mathbf{E} 时,采取的方法是先把带电体分割成无限多个电荷微元 dq ,然后求出每个电荷元在该点所激发的电场强度 $d\mathbf{E}$,则带电体在该点的总电场强度 \mathbf{E} 为所有电荷元在该点的电场强度 $d\mathbf{E}$ 的叠加。与此类似,我们也可以把任意形状的载流导线看成是无穷多个小微元 $d\mathbf{l}$,把 $I d\mathbf{l}$ 称为电流微元,其中矢量 $d\mathbf{l}$ 的方向与导线中电流的方向一致,任意形状的载流导线在真空中某点的磁感应强度 \mathbf{B} 等于导线上每个电流元 $I d\mathbf{l}$ 在该点所激发的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的矢量叠加。

载流导线中任一电流元 $I d\mathbf{l}$ 在真空中任一点 P 处产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 所遵循的规律,称为毕奥-萨伐尔定律,表述如下。

如图 9-5 所示,任意一电流元 $I d\mathbf{l}$ 在真空中给定点 P 所产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元的大小 $I d\mathbf{l}$ 成正比,与电流元和电流元到 P 点的矢径 \mathbf{r} 之间的夹角 α 的正弦成正比,与 r^2 的平方成反比。 $d\mathbf{B}$ 的方向垂直于 $I d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{r} 组成的平面,指向为由 $I d\mathbf{l}$ 经小于 180° 角转向 \mathbf{r} 时右螺旋前进的方向,即

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2} \quad (9.5)$$

μ_0 称为真空中的磁导率,其值为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ 。

把式(9.5)写成矢量式为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (9.6)$$

式(9.6)称为真空中的毕奥-萨伐尔定律,是计算电流磁场的基本公式。

由叠加原理,任意形状的载流导线在 P 点所产生的磁感应强度 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (9.7)$$

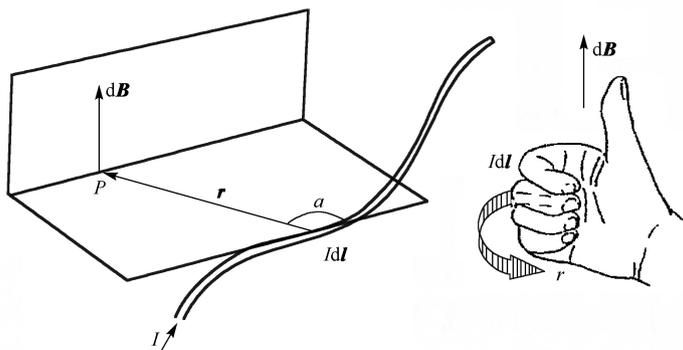


图 9-5 电流元所激发的磁感应强度

必须指出, 毕奥-萨伐尔定律是根据大量实验事实进行分析后得出的结果, 但在实验上我们无法得到电荷能在其中作恒定运动的电流元, 所以式(9.6)不能直接用实验来验证。但我们把式(9.7)应用到各种形状的电流分布时, 计算得到的磁感应强度和实验测得的结果相符, 这就间接证明了式(9.6)的正确性, 同时也证明了和场强 \boldsymbol{E} 一样, 磁感应强度 \boldsymbol{B} 也遵守叠加原理。

2. 运动电荷的磁场

按经典电子理论, 导体中的电流就是大量带电粒子的定向运动。由此可知, 所谓电流激发磁场, 实质上就是运动电荷在其周围空间产生磁场的宏观表现。下面将从毕奥-萨伐尔定律出发导出一个运动电荷的磁场表达式。

设在导体的单位体积内有 n 个可以做自由运动的带电粒子, 每个粒子带有电荷量 q (为简单起见, 这里讨论正电荷), 以速度 \boldsymbol{v} 沿电流元 $I d\boldsymbol{l}$ 的方向作匀速运动而形成导体中的电流, 如图 9-6 所示。如果电流元的截面为 S , 那么单位时间内通过截面 S 的电荷量为 $qnvS$, 即电流 I 为

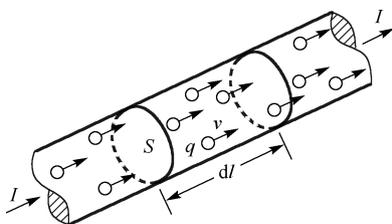


图 9-6 电流元中的运动电荷

$$I = qnvS$$

将上式代入毕奥-萨伐尔定律, 即式(9.5), 并注意到 $I d\boldsymbol{l}$ 的方向和 \boldsymbol{v} 相同, 则得到

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(qnvS) d\boldsymbol{l} \sin(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})}{r^2}$$

在电流元 $I d\boldsymbol{l}$ 内有 $dN = nSdl$ 个带电粒子以速度 \boldsymbol{v} 运动着, $d\boldsymbol{B}$ 就是这些运动电荷所激发的磁场, 将 I 、 dN 代入毕奥-萨伐尔定律, 我们就可以得到每一个以速度 \boldsymbol{v} 运动的带电量为 q 的粒子所产生的磁感应强度 \boldsymbol{B} 的大小为

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{r^2}$$

式中 \mathbf{r} 是运动电荷所在点指向场点的矢量, \mathbf{B} 的方向垂直于 \mathbf{v} 和 \mathbf{r} 所组成的平面, 如图 9-7 所示。如果运动电荷是正电荷, 那么 \mathbf{B} 的指向符合右手螺旋定则; 如果运动电荷带负电荷, 那么 \mathbf{B} 的指向与之相反(如图 9-7 所示)。用矢量式表示, 运动电荷所产生的磁感应强度 \mathbf{B} 为

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (9.8)$$

从式(9.8)可看出一个事实, 两个等量异号的电荷作相反运动时, 其磁场相同。因此, 金属导体中假定正电荷运动的方向作为电流的流向所激发的磁场, 与金属中实际上是电子作反向运动所激发的磁场是相同的。进一步的理论表明, 只有当电荷运动的速度远小于光速 ($v \ll c$) 时, 才可近似得到与恒定电流元的磁场相对应的式(9.8), 当带电粒子的速度 v 接近光速 c 时, 它就不再成立。

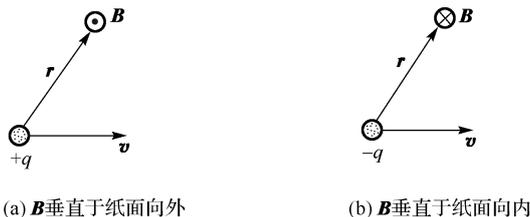


图 9-7 运动电荷的磁场方向

9.3.2 毕奥-萨伐尔定律的应用

1. 载流长直导线的磁场

如图 9-8 所示, 设有一长为 L 的载流直导线 AB , 其中通有电流为 I 。计算离直导线距离为 r_0 的任意一点 P 处的磁感应强度时, 先在载流直导线 AB 上任取一电流元 $I dl$, 根据毕奥-萨伐尔定律, 此电流元在给定点 P 处的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

$d\mathbf{B}$ 的方向垂直于电流元 $I dl$ 与矢量 \mathbf{r} 所决定的平面, 即垂直纸面向里, 图中用 \otimes 表示。从图中可以看出, 直导线上各个电流元在 P 点产生的 $d\mathbf{B}$ 的方向都相同, 因此 P 点的总磁感应强度 \mathbf{B} 的大小就等于各个电流元在 P 点的磁感应强度之和, 用标量积分表示, 有

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

式中的 l 、 r 和 θ 都是变量, 但它们是有联系的, 必须统一到同一变量才能积分。由图 9-8 可见

$$l = -r_0 \cot\theta, \quad r = \frac{r_0}{\sin\theta}$$

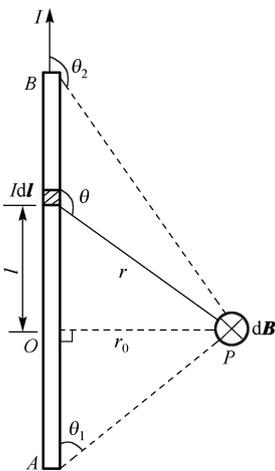


图 9-8 载流长直导线的磁场

$$dl = r_0 d\theta / \sin^2\theta$$

统一到变量 θ 积分, 将这些关系式代入上式, 可得

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \quad (9.9)$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别为直线的始点 A 和终点 B 处电流流向与该处到 P 点的矢量 \mathbf{r} 之间的夹角。由上式积分得

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (9.10)$$

对于“无限长”载流直导线, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, 因此由上式得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (9.11)$$

这个结论与毕奥-萨伐尔早期的实验结果相符。

2. 载流圆线圈轴线上的磁场

设真空中有圆形线圈 L , 半径为 R , 通以电流 I , 如图 9-9 所示。在圆形载流线圈上任取一电流元 $I dl$, 按毕奥-萨伐尔定律, 该电流元在 P 点的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

上式中, 电流元 $I dl$ 与电流元到轴线上 P 点的矢量 \mathbf{r} 之间的夹角 θ 为 90° , 所以

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

因为每一个电流元 $I dl$ 在 P 点产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的方向各不相同, 因此总磁感应强度不能直接由 $d\mathbf{B}$ 获得。为了计算总的磁感应强度, 将 $d\mathbf{B}$ 分解为平行于轴线的分矢量 $d\mathbf{B}_{//}$ 与垂直于轴线的分矢量 $d\mathbf{B}_{\perp}$, 由于圆形电流线圈具有对称性, 任一直径两端的电流元在 P 点的磁感应强度的垂直轴线分量 $d\mathbf{B}_{\perp}$ 大小相等, 方向相反, 因此, 载流圆线圈上电流在 P 点的各垂直分量 $d\mathbf{B}_{\perp}$ 相互抵消, 所以 P 点的总磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为圆线圈上各电流元的平行分量 $d\mathbf{B}_{//}$ 的代数和, 即

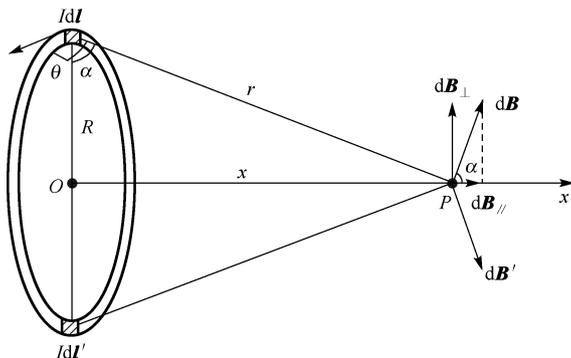


图 9-9 圆电流轴线上的磁场

$$B_{//} = \int_L dB_{//} = \int_L dB \cos\alpha$$

由于 $\cos\alpha = R/r$, 且对给定点 P 来说, r 、 R 和 I 都是常量, 所以将 $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$ 代入得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl}{r^2} \cos\alpha = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$$

因为

$$r^2 = R^2 + x^2$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9.12)$$

式中 $S = \pi R^2$ 为圆的面积。 \mathbf{B} 的方向垂直于圆电流平面, 与圆电流环绕方向构成右手螺旋关系, 沿 x 轴正方向。

下面讨论两个特殊点处的情况:

(1) 当 $x = 0$, 即在圆心处, 磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (9.13)$$

(2) 当 $x \gg R$, 即在远离圆心处, 轴线上各点的磁感应强度的大小近似为

$$B \approx \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3} \quad (9.14)$$

引入载流线圈的磁矩 $\mathbf{P}_m = IS\mathbf{n}$, 则式(9.14)可写为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3} \mathbf{n} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{P}_m}{x^3} \quad (9.15)$$

式(9.15)和电偶极子在轴线上的场强相似。

3. 载流直螺线管内部的磁场

直螺线管是指均匀地绕在直圆柱面上的螺旋线圈, 如图 9-10(a) 所示。设螺线管的半径为 R , 电流为 I , 总长度为 L , 单位长度内的匝数为 n 。若线圈用细导线绕得很密, 则每匝线圈可视为圆形线圈。下面计算此螺线管轴线上任一场点 P 的磁感应强度 \mathbf{B} 。如图 9-10(b) 所示, 在距 P 点 l 处取一小段 dl , 则该小段上有线圈 ndl 匝, 对点 P 而言, 这一小段上的线圈等效于电流为 $In dl$ 的一个圆形电流, 应用式(9.12), 可知该小段上的圆形电流在 P 点所激发的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 In dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

式中 l 是 P 点到螺线管上 dl 处这一小段线圈的长度, 磁感应强度的方向与圆电流构成右手螺旋关系, 即沿轴线向右。因为螺线管的各小段在 P 点所产生的磁感应强度的方向都相同, 因此整个载流螺线管在 P 点所产生的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 In dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

设螺线管轴线与从 P 点到 dl 处所引矢径 \mathbf{r} 之间的夹角为 β , 则

$$l = R \cot\beta$$

$$dl = -R \csc^2\beta d\beta$$

因为

$$R^2 + l^2 = r^2 \quad \sin^2\beta = \frac{R^2}{r^2}$$

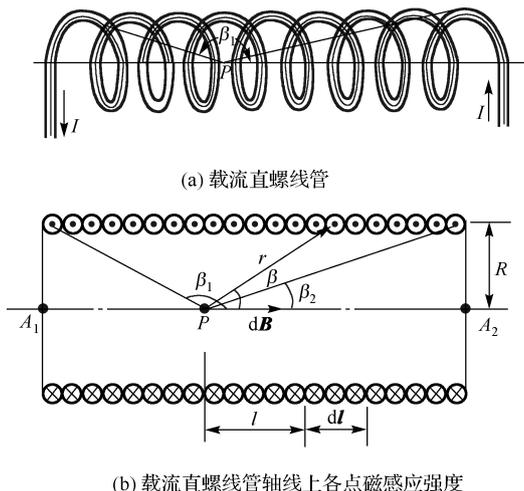


图 9-10 载流直螺线管轴线上各点磁感应强度的计算

即

$$R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \beta} = R^2 \csc^2 \beta$$

所以

$$B = \int \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 n dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(-\frac{\mu_0}{2} n I \sin \beta \right) d\beta = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

式中 β_1 和 β_2 分别表示 P 点到螺线管两端的连线与轴之间的夹角。由上式可知：

(1) 若 $R \ll L$ ，即对无限长螺线管，此时 $\beta_1 \rightarrow \pi$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ，则有

$$B = \mu_0 n I$$

即无限长载流直螺线管轴线上各点的磁场是匀强磁场。

(2) 对长载流直螺线管的端点，如在 A_1 点， $\beta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ，则 A_1 点处的磁感应强度为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

长直螺线管端点轴线上的磁感应强度恰是内部磁感应强度的一半。

9.4 安培环路定理

9.4.1 安培环路定理

在研究静电场时，我们在静电场的环路定理中曾指出：电场线是有头有尾的，电场强度 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的积分等于零，即 \mathbf{E} 的环流 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ，这是静电场的一个重要特性。知道静电场是一个保守力场，并由此引入电势这个物理量来描述静电场。那么，磁场中的磁感应强度 \mathbf{B} 沿任意闭合路径的积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 是否等于零？磁场是否是保守场。

安培环路定理表述如下：在真空中的稳恒磁场中，磁感应强度 \mathbf{B} 沿任何闭合曲线的线积分（也称 \mathbf{B} 矢量的环流），等于真空中的磁导率 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数

和,即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad (9.16)$$

式中电流 I 的正负规定如下: 当穿过回路 L 的电流方向与回路的环绕方向满足右手螺旋法则关系, 即右手四指弯曲方向为回路的环绕方向, 拇指指向电流方向, 此时电流为正, 反之为负。如果电流不穿过回路, 则对上式右侧无贡献, 如图 9-11 所示。根据上面的规定, 这时

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

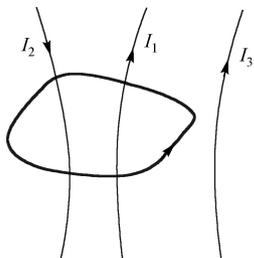


图 9-11 安培环路定理的应用

安培环路定理可以通过毕奥-萨伐尔定律严格证明, 因其数学复杂, 现通过无限长载流直导线周围的磁场予以说明。

如图 9-12(a)所示, 已知长直载流导线周围的磁感应线是一组以导线为中心的同心圆。在直载流导线周围的磁场中, 取一平面与长直导线垂直, 以平面与导线的交点 O 为圆心, 在平面上作任意半径为 r 的包围电流的闭合圆形回路, 如图 9.12(b)所示。由式(9.11), 回路上任一点的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

若选定回路的环绕方向为逆时针, 则闭合圆周的环绕方向和电流服从右手螺旋关系, 环路上每一点处 \mathbf{B} 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向相同, \mathbf{B} 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角 $\theta = 0$, \mathbf{B} 沿闭合回路的线积分为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B \cos\theta dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl = \mu_0 I$$

若选闭合回路的环绕方向为顺时针, 回路上每一点处 \mathbf{B} 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向相反, \mathbf{B} 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角 $\theta = \pi$, \mathbf{B} 沿闭合回路的线积分为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B \cos\theta dl = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl = -\mu_0 I$$

实际上, 对于闭合回路为任意形状, 而且回路中包围有任意电流的情况, 安培环路定理都是成立的。以上计算结果表明, \mathbf{B} 矢量的环流与闭合曲线的形状无关, 它只和闭合曲线内所包含的电流有关。

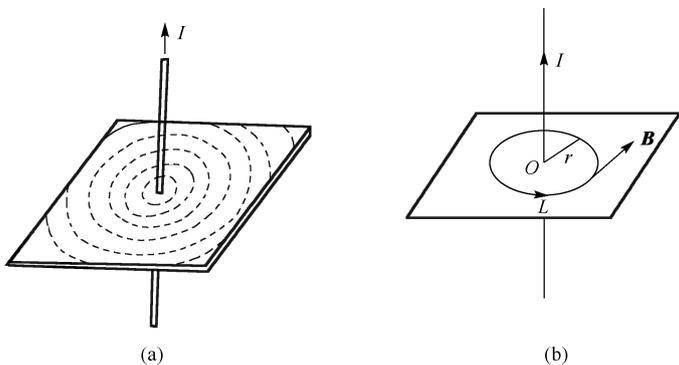


图 9-12 安培环路定理的证明

以上结果虽然是从长直载流导线的磁场的特例导出的,但其结论具有普遍性。对安培环路定理的理解应注意以下几点:(1)式(9.16)右端的 I 只包括穿过闭合回路 L 的电流;(2)式(9.16)左端的磁感应强度 \mathbf{B} 是空间所有电流(无论是否穿过回路)所激发的磁感应强度的矢量和;(3) \mathbf{B} 的环流 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 只和穿过回路的电流有关,而与未穿过回路的电流无关;另外,定理仅适用于闭合的载流导线,而对于任意设想的一段载流导线是不成立的。

由安培环路定理还可以看出,由于 \mathbf{B} 矢量的环流不一定等于零,所以稳恒磁场的基本性质与静电场是不同的,静电场是保守场,稳恒磁场是非保守场。

9.4.2 安培环路定理的应用

在静电场中利用高斯定理可以方便地计算出某些具有对称性的带电体的电场分布,同样利用安培环路定理也可以方便地计算出某些具有一定对称性的载流导线的磁场分布。求解的方法一般包含两步:首先根据电流的对称性分析磁场分布的对称性;然后再应用安培环路定理计算磁感应强度的大小,此方法的关键是选取合适的闭合回路 L (也称安培回路)以便使积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 中的 \mathbf{B} 能以标量的形式从积分号中提出来。下面举几个例子来说明如何利用安培环路定理计算磁场分布。

1. 直圆柱形载流导体内外的磁场

设圆柱截面的半径为 R , 恒定电流 I 沿轴线方向流动,并呈轴对称分布,当所考察的场点 P (或 Q) 离导线的距离比 P (或 Q) 点离导线两端的距离小很多时,可以把导线看做是无限长的,在该区域内,磁场对圆柱形轴线具有对称性,磁感应线是在垂直轴线平面内以轴线为中心的同心圆,如图 9-13(a)所示。过 P 点(或 Q 点)取一半径为 r 的磁感应线为积分回路,由于线上任一点的 \mathbf{B} 的量值相等,方向与该点的 $d\mathbf{l}$ 的方向一致,所以 \mathbf{B} 矢量的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r$$

如果 $r > R$ (图中 P 点),全部电流 I 穿过积分回路,由安培环路定理得

$$B2\pi r = \mu_0 I$$

即

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (9.17)$$

由此可见长圆柱形载流导线外的磁场与长直载流导线激发的磁场相同。

如果 $r < R$,即在圆柱形导线内部(图中 Q 点),考虑两种可能的电流分布:(1)当电流均匀分布在圆柱形导线表面层时,则穿过积分回路的电流为零,由安培环路定理给出 $B2\pi r = 0$,即 $B = 0$,柱内任一点的磁感应强度为零;(2)当电流均匀分布在圆柱形导线截面上时,穿过积分回路的电流应是 $\frac{1}{\pi R^2} \pi r^2$,所以应用安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

由此算出导线内 Q 点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (9.18)$$

可见在圆柱形导线内部,磁感应强度与离开轴线的距离 r 成正比。图 9-13(b)、(c)分别绘出了电流作面分布和体分布时的磁感应强度与离轴线距离 r 的关系曲线。

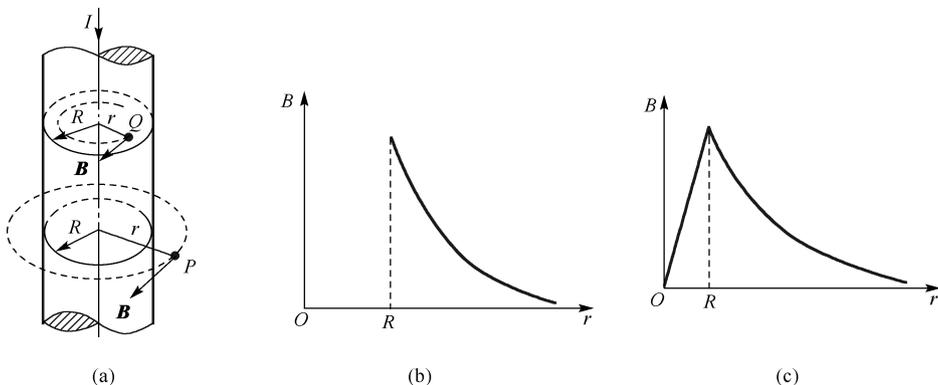


图 9-13 圆柱形电流的磁场的计算

2. 载流长直螺线管内的磁场

设有绕得很均匀紧密的长螺线管,通有电流 I 。由于螺线管相当长,所以管内中间部分的磁场可以看成是无限长螺线管内的磁场,这时,再根据电流分布的对称性,可确定管内的磁感应线是一系列与轴线平行的直线,而且在同一磁感应线上各点的 \mathbf{B} 相同。在管的外侧,磁场很弱,可以忽略不计。

为了计算管内中间部分的一点 P 的磁感应强度,可以通过 P 点作一矩形的闭合回路 $ABCD$,如图 9-14 所示。在线段 CD 上,以及在线段 BC 和 DA 的位于管外部分,因为在螺线管外, $\mathbf{B} = 0$ 。在 BC 和 DA 的位于管内部分,虽然 $\mathbf{B} \neq 0$,但 $d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{B} 垂直,即

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

线段 AB 上各点磁感应强度大小相等,方向都与积分路径 $d\mathbf{l}$ 一致,即从 A 到 B 。所以 \mathbf{B} 矢量沿闭合回路 $ABCD$ 的线积分为

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{AB} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{AB} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot AB \end{aligned}$$

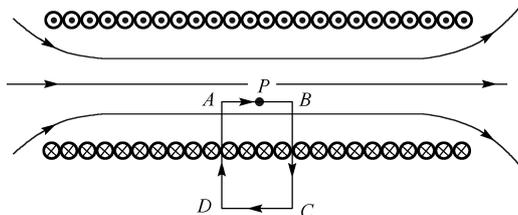


图 9-14 长螺线管内磁场的计算

设螺线管的长度为 l , 共有 N 匝线圈, 则单位长度上有 $\frac{N}{l} = n$ 匝线圈, 通过每匝线圈的电流为 I , 所以回路 $ABCD$ 所包含的电流总和为 $ABnI$, 根据右手螺旋法则应为正值。于是, 由安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot AB = \mu_0 \cdot ABnI$$

所以

$$B = \mu_0 nI$$

或

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (9.19)$$

由于矩形回路是任取的, 不论 AB 段在管内任何位置, 式(9.23)都成立。因此, 无限长螺线管内任一点的 B 值均相同, 方向平行于轴线, 即无限长螺线管内中间部分的磁场是一个均匀磁场。上式与根据毕奥-萨伐尔定律算出来的结果相同, 但应用安培环路定理的计算方法比较简便。

3. 载流螺绕环内的磁场

绕在环形管上的一组圆形电流形成螺绕环, 如图 9-15 所示。如环上的线圈绕得很紧密, 则磁场几乎全部集中在螺绕环内, 环外磁场接近于零。由于对称性的缘故, 环内磁场的磁感应线都是一些同心圆, 圆心在通过环心垂直于环面的直线上。在同一条磁感应线上各点磁感应强度的量值相等, 方向处处沿圆的切线方向, 并和环面平行。

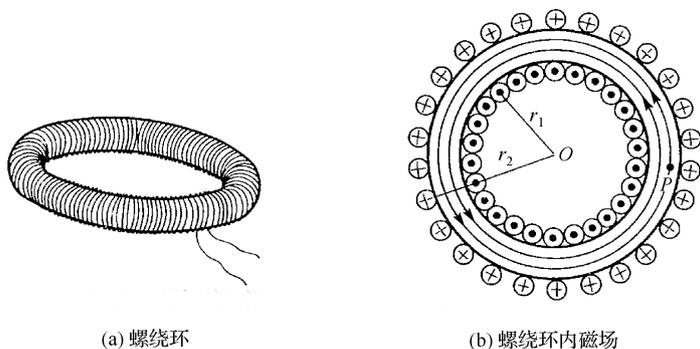


图 9-15 螺绕环内磁场的计算

为了计算管内某一点 P 的磁感应强度, 可选择通过 P 点的磁感应线 L 作为积分回路, 由于线上任一点磁感应强度 \mathbf{B} 的大小相等, 方向都与 $d\mathbf{l}$ 同向, 故得 \mathbf{B} 矢量的环流

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_L dl = B2\pi r$$

式中 r 为回路半径。设环上线圈的总匝数为 N , 电流为 I , 则由安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r = \mu_0 NI$$

计算出 P 点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当环形螺线管的截面积很小时, 管的孔径 $r_2 - r_1$ 比环的平均半径 r 小得多, 如图 9.15(b) 所示, 管内各点磁场强弱实际上相同。因而可以取圆环平均长度为 $l = 2\pi r$, 则环内各点的磁感

应强度的量值为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI \quad (9.20)$$

式中 n 为螺绕环单位长度上的匝数, \mathbf{B} 的方向与电流流向成右手螺旋关系。

9.5 载流导线在磁场中所受的作用力

9.5.1 安培力

1. 安培力

导线中的电流是由载流子定向运动形成的, 当把载流子置于磁场中时, 运动的载流子就受到磁力的作用而侧向漂移, 与晶格上的正离子碰撞把力传给了导线, 所以载流导线在磁场中也要受到磁力的作用, 通常把这个力称为安培力。

如图 9-16 所示, 在载流导线上取一电流元 $I d\mathbf{l}$, 设导线的横截面积为 S , 单位体积中的载流子数为 n , 每个载流子所带电量为 q , 载流子的平均漂移速度为 \mathbf{v} 。由于每个载流子受到的洛伦兹力都为 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 而在 $d\mathbf{l}$ 中共有 $nSd\mathbf{l}$ 个载流子, 所以电流元 $I d\mathbf{l}$ 所受的磁场力为

$$d\mathbf{F} = nSd\mathbf{l}q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.21)$$

由于 \mathbf{v} 的方向和 $d\mathbf{l}$ 的方向相同, 而 $I = nqvS$, 所以上式可写为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (9.22)$$

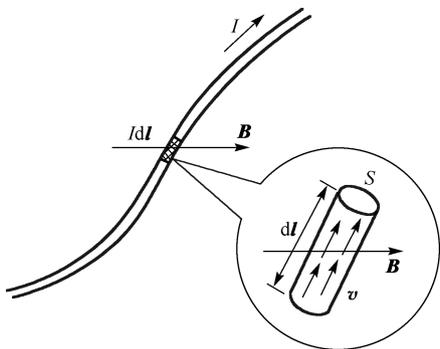


图 9-16 磁场对电流元的作用

上式称为安培定律, 利用安培定律可计算任意一段给定载流导体在磁场中所受到的安培力。具体地说, 把导线分割成无限多的电流元, 整个导线所受的安培力为作用在各个电流元上的安培力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (9.23)$$

由于单独的电流元不能获取, 因此无法用实验直接证明安培定律。但是用式(9.23), 我们可以计算各种形状的载流导线在磁场中所受的安培力, 结果都与实验相符合。例如, 长为 l 的直导线中通有电流 I , 位于磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 若电流的 I 方向与 \mathbf{B} 的夹角为 θ , 如图 9-17(a) 所示, 因为各电流元所受磁力的方向一致, 可采用标量积分, 所以这段载流直导线所受的安培力大小为

$$F = \int_0^l IB \sin\theta dl = IBl \sin\theta \quad (9.24)$$

F 的方向垂直纸面向内。当导线电流方向与磁场方向平行时,导线所受安培力为零;当导线电流方向与磁场方向垂直时,导线所受的力为最大, $F_{\max} = BIl$, 力 F_{\max} 的方向既与磁场垂直又与导线垂直,如图 9-17(b)所示。

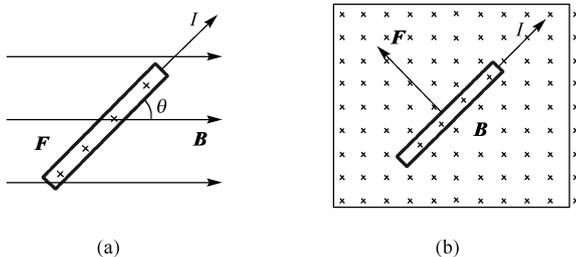


图 9-17 均匀磁场中一段载流直导线所受安培力

2. 无限长两平行载流直导线间的相互作用力 电流单位“安培”的定义

设有两根相距为 a 的无限长平行直导线,分别通有同方向的电流 I_1 和 I_2 ,现在计算两根导线每单位长度所受的磁场力。如图 9-18 所示,在导线 2 上取一电流元 $I_2 dl_2$,由毕奥-萨伐尔定律可知,载流导线 1 在 $I_2 dl_2$ 处产生的磁感应强度 B_1 的大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

B_1 的方向,如图 9-18 所示,垂直于两导线所在的平面。由安培定律得,电流元 $I_2 dl_2$ 所受安培力大小为

$$dF_2 = B_1 I_2 dl_2 \sin(I_2 dl_2, B_1) = B_1 I_2 dl_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

dF_2 的方向在平行两导线所在的平面内,垂直于导线 2,并指向导线 1。所以,载流导线 2 每单位长度所受安培力大小为

$$\frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (9.25)$$

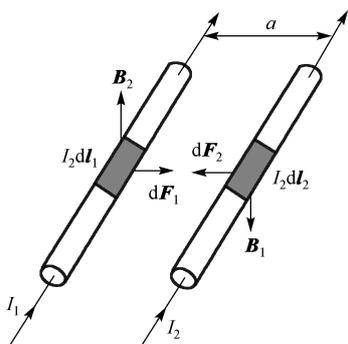


图 9-18 载流平行直导线间的相互作用

同理可得载流导线 1 每单位长度所受的安培力大小为

$$\frac{dF_1}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

方向指向导线 2。由此可知,两平行直导线中的电流流向相同时,两导线通过磁场的作用而相互吸引;如果两导线中的电流流向相反时,两导线通过磁场的作用而相互排斥,斥力与引力大小相等。

在国际单位制中,规定电流的基本单位为安培。由式(9.25),安培的定义如下:放在真空中的两条无限长平行直导线,各通有相等的稳恒电流,当两导线相距 1m,每一导线每米长度上受力为 2×10^{-7} N 时,各导线中的电流为 1 A。

【例 9.1】 载有电流 I_1 的长直导线旁边有一与长直导线垂直的共面导线,载有电流 I_2 ,其长度为 l ,近端与长直导线的距离为 d ,如图 9-19 所示。求 I_1 作用在 l 上的力。

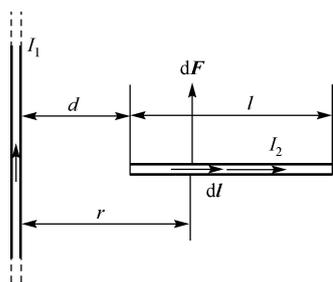


图 9-19

【解】 在 l 上取 dl , 它与长直导线距离为 r , 电流 I_1 在此处产生的磁场方向垂直向内, 大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

dl 受力

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

方向垂直导线 l 向上, 大小为

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dr}{2\pi r}$$

所以, I_1 作用在 l 上的力方向垂直导线 l 向上, 大小为

$$F = \int_l dF = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I_1 I_2 dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

9.5.2 磁场对载流线圈的作用

在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 有一刚性矩形载流平面线圈, 线圈边长分别为 l_1 、 l_2 , 电流为 I , 如图 9-20(a) 所示, 下面用安培定律来研究磁场对载流线圈的作用。当线圈磁矩的方向 \mathbf{e}_n 与磁场 \mathbf{B} 的方向成 θ 角(线圈平面与磁场的方向成 φ 角, $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$) 时, 由安培定律, 导线 NO 和 PM 所受的安培力分别为

$$F_4 = BIl_1 \sin\varphi$$

$$F_3 = BIl_1 \sin(\pi - \varphi) = BIl_1 \sin\varphi$$

这两个力大小相等而方向相反, 并在同一直线上, 所以对整个线圈来讲, 它们的合力及合力矩都为零。而导线 MN 和 OP 所受的安培力的大小分别为

$$F_1 = BIl_2$$

$$F_2 = BIl_2$$

这两个力大小相等, 方向亦相反, 但不在同一直线上, 它们的合力为零但对线圈要产生磁力矩 $M = F_1 l_1 \cos\varphi$, 由于 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, 所以 $\cos\varphi = \sin\theta$, 则有

$$M = F_1 l_1 \sin\theta = BIl_2 l_1 \sin\theta \quad (9.26)$$

式中 $l_1 l_2 = S$ 表示线圈平面的面积。 IS 为线圈的磁矩 P_m , $\mathbf{P}_m = IS\mathbf{e}_n$, \mathbf{e}_n 为线圈平面的单位正法线矢量。上式可表示为

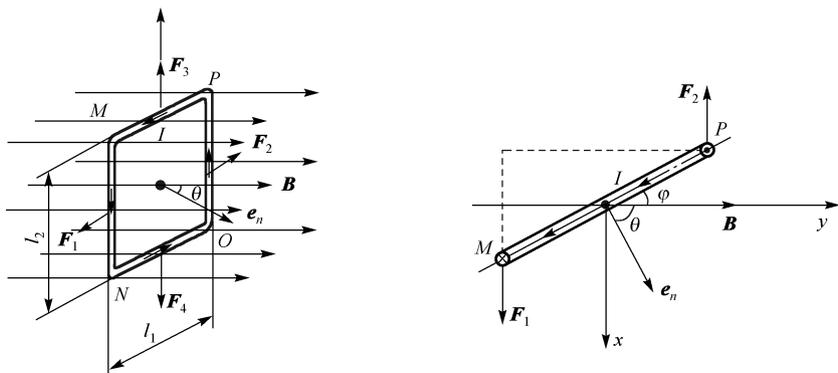


图 9-20 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的力矩

$$\mathbf{M} = I \mathbf{S} \mathbf{e}_n \times \mathbf{B} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \quad (9.27a)$$

那么线圈所受磁力矩的大小为

$$M = N I S e_n \times B \quad (9.27b)$$

式中 $\mathbf{P}_m = N I S \mathbf{e}_n$ 是线圈磁矩的大小, 磁矩是矢量, 所以式(9.26)写成矢量式为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \quad (9.27c)$$

磁矩 \mathbf{M} 的方向与 $\mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$ 的方向一致, 就是载流线圈平面法线的正方向。

式(9.26)和式(9.27)不仅对矩形线圈成立, 对于在均匀磁场中任意形状的载流平面线圈也同样成立。甚至对带电粒子闭合回路的运动以及带电粒子的自旋所具有的磁矩, 计算在磁场中所受的磁力矩作用时均可用上述公式。

下面讨论几种特殊情况:

(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 亦即线圈平面与磁场方向相互平行时, \mathbf{P}_m 与 \mathbf{B} 垂直, 线圈所受的磁力矩最大, 这一磁力矩有使 θ 减少的趋势。

(2) 当 $\theta = 0$, 亦即线圈平面与磁场方向相互垂直时, 线圈磁矩 \mathbf{P}_m 的方向与磁场 \mathbf{B} 的方向相同, 线圈所受的磁力矩为零, 此时线圈处于稳定平衡状态的位置。

(3) 当 $\theta = \pi$, 此时线圈平面虽然也与 \mathbf{B} 垂直, 但 \mathbf{P}_m 的方向与磁场方向反向, 线圈所受磁力矩也等于零, 但这一平衡位置不稳定, 外界使线圈稍受扰动, 它就会在磁力矩的作用下偏离这一位置, 直到 \mathbf{P}_m 转向 \mathbf{B} 的方向(即线圈达到稳定的平衡状态)时为止。

从上面的讨论可知, 平面载流刚性线圈在均匀磁场中, 由于只受磁力矩作用, 因此只发生转动, 而不会发生整个线圈的平动。

磁场对载流线圈作用力矩的规律是制成各种电动机和电流计的基本原理。

9.5.3 磁力的功

1. 载流导线在磁场中运动时磁力所做的功

设有一载流的闭合回路 $ABCD$ 置于磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 如图 9.21 所示, 其中 AB 边可沿 DA 和 CB 滑动, 电流 I 保持不变, 电路中 AB 长为 l 。按安培定律, 则 AB 边所受的安培力 \mathbf{F} 的大小为

$$F = BIl$$

\mathbf{F} 的方向向右, 如图 9-21 所示。在恒力 \mathbf{F} 的作用下, 可滑动的 AB 边将从初始位置移动到 $A'B'$, 即向右移 AA' 距离, 磁力 \mathbf{F} 所做的功为

$$A = FAA' = BILAA' = BI\Delta S = I\Delta\Phi \quad (9.28)$$

上式说明, 当载流导线在磁场中运动时, 如果电流保持不变, 则磁力所做的功等于电流乘以通过回路所环绕的面积内磁通量的增量。

2. 载流线圈在磁场中转动时磁力所做的功

设有一载流线圈 $ABCD$ 在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中转动, 如图 9-22 所示, 线圈面积为 S , 通有电流 I 。线圈所受的磁力矩

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \\ M &= P_m B \sin\varphi = ISB \sin\varphi \end{aligned}$$

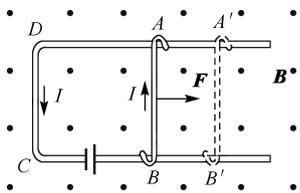


图 9-21 磁力所做的功

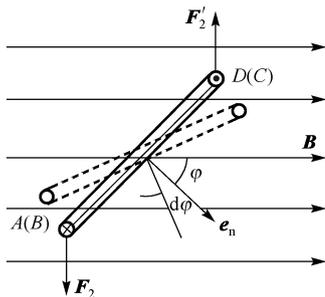


图 9-22 磁力矩所做的功

设线圈转过极小的角度 $d\varphi$, 使 $\mathbf{e}_n(\mathbf{P}_m)$ 与 \mathbf{B} 之间的夹角从 φ 增为 $\varphi + d\varphi$, 在此转动的过程中, 磁力矩做负功, 为

$$\begin{aligned} dA &= -Md\varphi = -BIS\sin\varphi d\varphi \\ &= BISd(\cos\varphi) \\ &= Id(BS\cos\varphi) = Id\Phi \end{aligned} \quad (9.29)$$

当上述线圈从 φ_1 转到 φ_2 的过程中, 维持线圈内电流不变, 则磁力矩所做的总功为

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi \quad (9.30)$$

式中 Φ_1 和 Φ_2 分别表示线圈在 φ_1 和 φ_2 时, 通过线圈的磁通量。

可以证明, 一个任意的平面闭合回路在磁场中改变位置或改变形状时, 如果维持线圈上的电流不变, 则磁力或磁力矩所做的功都可表示为

$$A = I\Delta\Phi$$

即磁力或磁力矩所做的功等于电流乘以通过载流线圈的磁通量的增量, 这是磁力做功的一般表达式。

如果电流随时间而改变, 这时磁力所做的总功用积分计算:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Id\Phi \quad (9.31)$$

这是计算磁力做功的一般公式。

根据磁矩为 \mathbf{P}_m 的载流线圈在均匀磁场中受到磁力矩的作用, 可以引入线圈磁矩与磁场的相互作用能的概念, 设 φ 表示 \mathbf{P}_m 与 \mathbf{B} 之间的夹角, 此夹角由 φ_1 增大到 φ_2 过程中, 外力需

克服磁力矩做的功为

$$A_{\text{外}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_m B \sin\varphi d\varphi = P_m B (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

此功就等于磁矩 P_m 与磁场相互作用能的增量。通常以 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ 时的位置为相互作用能零值的位置。这样,由上式可得,在均匀磁场中,当磁矩与磁场方向间的夹角为 φ ($\varphi = \varphi_2$) 时,磁矩与磁场的相互作用能为

$$W_m = -P_m B \cos\varphi = -\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{B}$$

由此可见,磁矩与磁场平行时,相互作用能有极小值 $-P_m B$; 磁矩与磁场反平行时,相互作用能有极大值 $P_m B$ 。

9.6 带电粒子在磁场中的运动

9.6.1 带电粒子在磁场中的运动规律

当带电粒子 q 以速度 v 进入磁感应强度为 B 的均匀磁场,它所受的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.32)$$

下面分三种情况讨论粒子在磁场中的运动。

(1) 当带电粒子的运动方向与磁感应强度的方向平行,即 $\mathbf{v} // \mathbf{B}$, 磁场对带电粒子的作用力等于零。粒子将以原来的速度 v 作匀速直线运动。

(2) 当带电粒子的运动方向与磁感应强度的方向垂直,即 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, 如图 9-23 所示,此时洛伦兹力 \mathbf{F} 的方向始终与速度 v 垂直,故带电粒子将在 \mathbf{F} 与 \mathbf{v} 所组成的平面内作匀速圆周运动。洛伦兹力即为向心力,其运动方程为

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

可得带电粒子在磁场中作圆周运动的回旋半径为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (9.33)$$

粒子在圆周轨道上运动一周所需的时间,即回旋周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (9.34)$$

T 的倒数即粒子在单位时间内绕圆周轨道转过的圈数,即带电粒子的回旋频率为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (9.35)$$

由(9.34)和(9.35)两式可以看出,带电粒子在垂直于磁场方向的平面内作圆周运动时,回旋周期 T 和回旋频率 ν 只与磁感应强度 B 及粒子本身的质量 m 有关,而与粒子的速率及回旋半径无关。也就是说,同种粒子在同样的磁场中运动时,快速粒子在半径大的圆周上运动,慢速粒子在半径小的圆周上运动,但它们绕行一周所需的时间都相同。这是带电粒子在磁场中作圆周运动的一个显著特征。回旋加速器就是根据这一特征设计制造的。

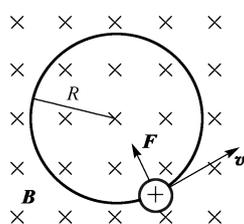


图 9-23 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ 时的运动

(3)当带电粒子的运动方向与磁感应强度的方向之间的夹角为任意角 θ , 如图 9-24 所示, 将 v 分解为与 B 平行的速度分量 $v_{//} = v\cos\theta$ 和与 B 垂直的速度分量 $v_{\perp} = v\sin\theta$, 若只有 $v_{//}$ 分量, 带电粒子将沿 B 的方向或其反方向作匀速直线运动; 若只有 v_{\perp} 分量, 带电粒子将在垂直于 B 的平面内作匀速圆周运动; 当两个分量同时存在时, 带电粒子同时参与这两种运动, 它将沿螺旋线向前运动, 螺旋线的半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

回旋周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (9.36)$$

粒子回转一周所前进的距离叫做螺距, 其值为

$$d = v_{//} T = \frac{2\pi mv\cos\theta}{qB} \quad (9.37)$$

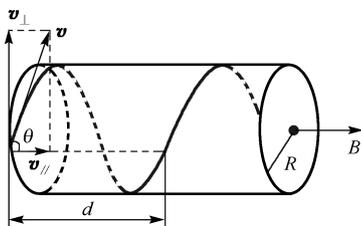


图 9-24 螺旋运动

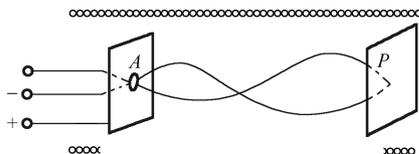


图 9-25 磁聚焦

如图 9-25 所示, 若从均匀磁场中某点 A 发射一束很窄的带电粒子流, 它们的速率 v 都很相近, 且与 B 的夹角 θ 都很小, 尽管 $v_{\perp} = v\sin\theta \approx v\theta$ 会使各个粒子沿不同半径的螺旋线运动, 但是 $v_{//} = v\cos\theta \approx v$ 却近似相等, 由式(9.37)决定的螺距 d 也近似相等, 所以各个粒子经过距离 d 后又重新会聚在同一点 P, 这个现象与光束通过光学透镜聚焦的现象很相似, 故称之为磁聚焦现象, 磁聚焦在电子光学中有着广泛的应用。

9.6.2 霍尔效应

将一导体板放在垂直于板面的磁场 B 中, 如图 9-26(a)所示。当有电流 I 沿着垂直于 B 的方向通过导体时, 在金属板上下两表面 M、N 之间就会出现横向电势差 U_H 。这一现象称为霍尔效应。电势差 U_H 称为霍尔电势差(或叫霍尔电压)。实验表明, 霍尔电势差 U_H 与电流 I 和磁感应强度 B 的大小成正比, 与导体板的厚度 d 成反比, 即

$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad (9.38)$$

式中 R_H 是仅与导体材料有关的常数, 称为霍尔系数。

霍尔电势差的产生是由于运动电荷在磁场中受洛伦兹力作用的结果。因为导体中的电流是载流子定向运动形成的。如果作定向运动的带电粒子是负电荷, 则它所受的洛伦兹力 f_m 的方向如图 9-26(b)所示, 结果使导体的上表面 M 聚集负电荷, 下表面 N 聚集正电荷, 在 M、N 两表面间产生方向向下的电场, 当这个电场对带电粒子的电场力 f_e 正好与磁场 B 对带

电粒子的洛伦兹力 f_m 相平衡时, 达到稳定状态, 此时上、下两面的电势差 $U_M - U_N$ 就是霍尔电势差 U_H 。

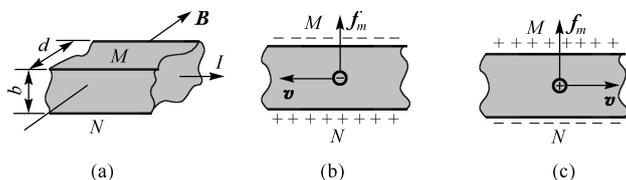


图 9-26 霍尔效应

设在导体内载流子的电量为 q , 平均定向运动速度为 v , 它的磁场中所受的洛伦兹力大小为

$$f_m = qvB$$

如果导体板的宽度为 b , 当导体上、下两表面间的电势差为 $U_M - U_N$ 时, 带电粒子所受的电场力大小为

$$f_e = qE = q \frac{U_M - U_N}{b}$$

由平衡条件有

$$qvB = q \frac{U_M - U_N}{b}$$

则导体上、下两表面间的电势差为

$$U_H = U_M - U_N = bvB$$

设导体内载流子数密度为 n , 于是 $I = nqvbd$, 以此代入上式可得

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d} \quad (9.39)$$

将上式与式(9.38)比较, 得霍尔系数

$$R_H = \frac{1}{nq} \quad (9.40)$$

上式表明, 霍尔系数的数值决定于每个载流子所带的电量 q 和载流子的浓度 n , 其正负取决于载流子所带电荷的正负, 若 q 为正, 则 $R_H > 0$, $U_M - U_N > 0$; 若 q 为负, 则 $R_H < 0$, $U_M - U_N < 0$, 由实验测定霍尔电势差或霍尔系数后, 就可判定载流子带的是正电荷还是负电荷。也可用此方法来判定半导体是空穴型的(p型)还是电子型的(n型)。此外, 根据霍尔系数的大小, 还可测定载流子的浓度。

一般金属导体中的载流子就是自由电子, 其浓度很大, 所以金属材料的霍尔系数很小, 相应的霍尔电压也很弱。但在半导体材料中, 载流子浓度 n 很小, 因而半导体材料的霍尔系数与霍尔电压比金属大得多, 故实用中大多采用半导体霍尔效应。

近年来, 霍尔效应已在测量技术、电子技术、自动化技术、计算技术等各个领域中得到越来越普遍的应用。例如我国已制造出多种半导体材料的霍尔元件, 可以用于电子计算机中的计算元件等。

9.6.3 回旋加速器

在原子核物理与高能物理的研究中, 常用回旋加速器来加速质子(${}^1_1\text{H}$)、氘核(${}^2_1\text{D}$)或氦核

(α 粒子)等带电粒子。回旋加速器的结构如图 9-27 所示, A、B 是置于高度真空室中的两个金属半圆形盒, 常称为 D 形电极。两电极间接上交流电源, 则在两 D 形电极之间的缝隙处, 产生一定频率的交变电场。把两个电极放在电磁铁的两个磁极之间, 在垂直于电极板平面的方向上有一恒定的均匀磁场作用。盒中心 P 为带电粒子源。由于金属 D 形盒的屏蔽作用, 盒内无电场。设在某一时刻, 缝隙处的电场正好由 B 指向 A, 则 P 处的带电粒子将被加速进入盒 A, 而进入盒内时仅受均匀磁场作用作匀速圆周运动, 其半径为

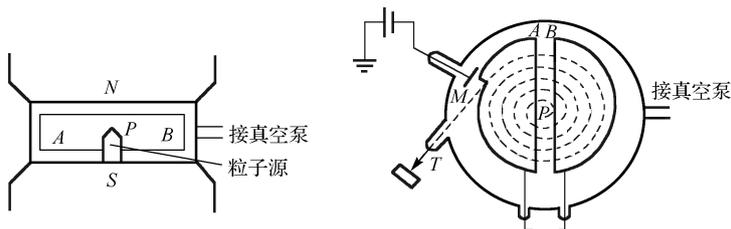


图 9-27 回旋加速器示意图

$$R = \frac{v}{\left(\frac{q}{m}\right)B} \tag{9.41}$$

式中 v 是粒子进入盒内的速率, $\frac{q}{m}$ 是粒子的荷质比, B 是磁感应强度的大小。粒子在一个电极内运动所需时间 τ 为

$$\tau = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B} \tag{9.42}$$

当粒子运动的速度远小于光速时, 带电粒子的质量 m 随速度的改变可以忽略不计。因此 τ 为恒量。如果电源的频率 $\nu = \frac{1}{2\tau}$, 那么当粒子从 A 盒出来到达缝隙时, 缝隙中的场强方向恰已反向, 因而粒子被加速, 以较大的速度进入 B 盒, 并在 B 盒内以相应的较大半径作圆弧运动。经过 τ 秒后, 又回到缝隙再次被加速进入 A 盒。这样, 粒子可以受到一个固定频率电源的多次加速, 粒子速度越来越大, 轨道半径也将逐渐增大, 形成图中虚线所示的运动轨道。最后用致偏电极 M 将粒子引出, 从而获得高能粒子束, 以便进行实验工作, 如果在粒子被引出前最后一圈的半径为 R , 按式(9.41)可知, 引出粒子的速度大小为

$$v = \frac{qBR}{m}$$

而粒子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2m}B^2R^2 \tag{9.43}$$

用回旋加速器可能获得的质子的最大能量约为 30 MeV, 氦核的最大能量约为 100 MeV, 可见用回旋加速器能获得的粒子能量值有一定界限。这是因为如果粒子速度达到很大值, 相对论效应就不能忽略, 即质量与速度 v 值有关:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.44}$$

式中 m_0 为粒子的静止质量, c 为真空中光速。可以看出, 随着粒子运动速度的增大, 半周期 $\tau = \frac{\pi m}{qB}$ 不再是恒量, 与振荡器所施加的交变电场变化的周期步调不一致, 这就引起粒子通过 A 、 B 两极间的缝隙时受到的加速作用减弱, 甚至反而受到电场减速。为了获得更高能量的粒子, 必须使交变电场的频率同步变化, 即要相应地降低交变电压频率, 采用的变频频率为

$$\nu = \frac{1}{2\tau} = \frac{qB}{2\pi m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

根据这一原理设计的加速器称为同步回旋加速器。目前欧洲最大的同步加速器使加速质子的能量达 4000 亿电子伏特。1988 年在兰州近代物理研究所建成了我国最大的重离子加速器, 标志着我国的回旋加速技术已进入国际先进行列。

9.7 磁介质中的磁场

9.7.1 磁介质 磁化强度

1. 磁介质

前面讨论了电流在真空中所激发磁场的性质和规律, 而在实际情形中, 电流的周围会有各种各样的物质, 这些物质与磁场是会有相互影响的, 处于磁场中的物质要被磁场磁化, 一切能够磁化的物质称为磁介质, 而磁化了的磁介质也要激起附加磁场, 对原磁场产生影响。

2. 磁介质的分类

实验表明, 不同的物质对磁场的影响差异很大。若均匀磁介质处于磁感应强度为 \mathbf{B}_0 的外磁场中, 磁介质要被磁化, 从而产生磁化电流。磁化电流也要激发磁感应强度为 \mathbf{B}' 的附加磁场, 则磁介质中的总磁感应强度 \mathbf{B} 是 \mathbf{B}_0 和 \mathbf{B}' 的叠加, 即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \quad (9.45)$$

对不同的磁介质, \mathbf{B}' 的大小和方向可能有很大的差别。

实验指出, 就磁性来说, 物质可分为三类:

(1) 抗磁质: 这类磁介质在外磁场中, 其附加磁感应强度 \mathbf{B}' 与 \mathbf{B}_0 方向相反, 因而总磁感应强度的大小 $B < B_0$ 。例如汞、铜、铋、氢、锌、铅等。

(2) 顺磁质: 这类磁介质在外磁场中, 其附加磁感应强度 \mathbf{B}' 和 \mathbf{B}_0 同方向, 因而总磁感应强度的大小 $B > B_0$ 。例如锰、铬、铂、氧等。

(3) 铁磁质: 这类磁介质在外磁场中, 其附加磁感应强度 \mathbf{B}' 和 \mathbf{B}_0 方向相同, 且 $B \gg B_0$, 因而总磁感应强度的大小 $B \gg B_0$ 。例如铁、镍、钴、钆等。

抗磁质和顺磁质的磁性都很弱, 统称为弱磁质, 铁磁质的磁性都很强。

3. 抗磁质与顺磁质的磁化

下面用分子电流学说来说明顺磁性和抗磁性的磁化现象。

分子中每个电子都绕核作轨道运动, 从而使之有轨道磁矩; 此外, 电子本身还有自旋, 因而也具有自旋磁矩。分子内所有电子全部磁矩的矢量和, 称为分子的固有磁矩, 简称分子

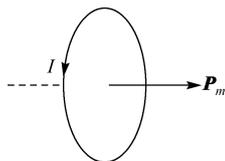


图 9-28 分子圆电流与分子磁矩

磁矩, 用 P_m 表示。分子磁矩可用一个等效圆电流 I 来表示。这就是安培当年为解释磁性起源而设想的分子电流的现代解释, 如图 9-28 所示。

在顺磁质中, 虽然每个分子都具有磁矩 P_m , 在无外磁场作用时, 各分子磁矩 P_m 的取向是无规的, 因而顺磁质中任一宏观小体积内, 所有分子磁矩的矢量和为零, 致使顺磁质对外不显磁性, 处于未被磁化状态。如图 9-29(a) 所示。

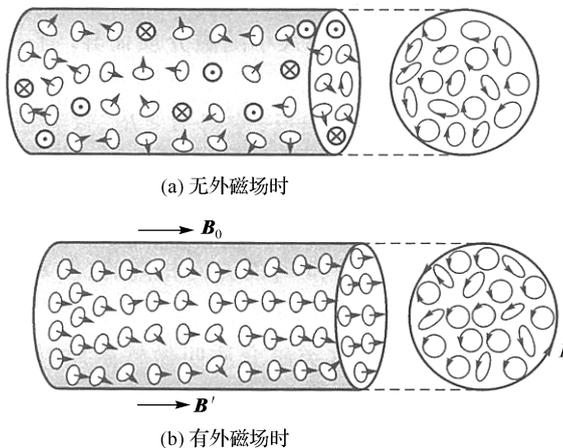


图 9-29 分子圆电流与分子磁矩的取向

而顺磁质处在外磁场中时, 各分子磁矩都要受到磁力矩的作用, 在磁力矩作用下, 各分子磁矩的取向都具有转到与外磁场方向相同的趋势, 如图 9-29(b) 所示, 这样顺磁质就被磁化了。显然, 在顺磁质中因磁化而出现的附加磁感应强度 B' 与外磁场的磁感应强度 B_0 的方向相同, 于是在外磁场中, 顺磁质的磁感应强度 B 的大小为

$$B = B_0 + B'$$

对抗磁质来说, 无外磁场作用时, 虽然分子中每个电子的轨道磁矩与自旋磁矩都不等于零, 但分子中全部电子的轨道磁矩与自旋磁矩的矢量和却等于零, 即分子的固有磁矩为零, 即 $P_m = 0$, 所以在没有外磁场时, 抗磁质并不显现出磁性。但在外磁场作用下, 分子中每个电子的轨道运动和自旋运动都将发生变化, 从而引起附加磁矩 ΔP_m 。附加磁矩 ΔP_m 的方向必与外磁场 B_0 的方向相反, 如图 9-30 所示。设电子以半径 r 、角速度 ω 绕核作逆时针轨道运动, 电子的磁矩 P_m' 的方向与外磁场的磁感应强度 B_0 的方向相反, 可以证明, 电子在洛伦兹力 F 的作用下, 其附加磁矩 $\Delta P_m'$ 与 B_0 的方向相反。由于分子中每个电子的附加磁矩 $\Delta P_m'$ 都与外磁场的磁感应强度 B_0 的方向相反, 所有的分子的附加磁矩 ΔP_m 的方向也与 B_0 的方向相反, 因此, 在抗磁质中, 就要出现与外磁场 B_0 方向相反的附加磁场 B' , 于是抗磁质内的磁感应强度 B 的值为

$$B = B_0 - B'$$

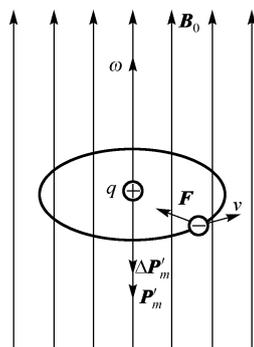


图 9-30 电子的进动

4. 磁化强度

我们将磁介质中单位体积内分子磁矩的矢量和来表示介质的磁化程度, 叫做磁化强度, 用符号 \mathbf{M} 表示, 在均匀磁介质中取小体积 ΔV , 在此体积内的分子磁矩的矢量和为 $\sum \mathbf{P}_m$, 那么磁化强度为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{P}_m}{\Delta V} \quad (9.46)$$

在国际单位制中, 磁化强度的单位为安培每米, 符号为 $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

9.7.2 磁介质中的安培环路定理 磁场强度

1. 磁化强度与磁化电流的关系

磁介质被磁化时, 磁化强度与磁化电流也有着密切的关系。为此我们用一简例来进行讨论。

如图 9-31(a)所示, 设有一无限长载流直螺线管, 管内充满均匀的顺磁介质, 螺线管线圈内的电流为 I 。电流 I 在螺线管内激发的磁感应强度为 \mathbf{B}_0 ($\mathbf{B}_0 = \mu_0 n I$), 而磁介质在磁场 \mathbf{B}_0 中被磁化, 从而磁介质内的分子磁矩在 \mathbf{B}_0 的作用下作有规则排列, 如图 9-31(b)所示。从图中可以看出, 在磁介质内部任意位置处的分子电流是成对的, 而且方向相反, 结果互相抵消, 只有在截面边缘处, 分子电流未被抵消, 形成与截面边缘重合的圆电流 I_s , 这个电流称为磁化面电流。

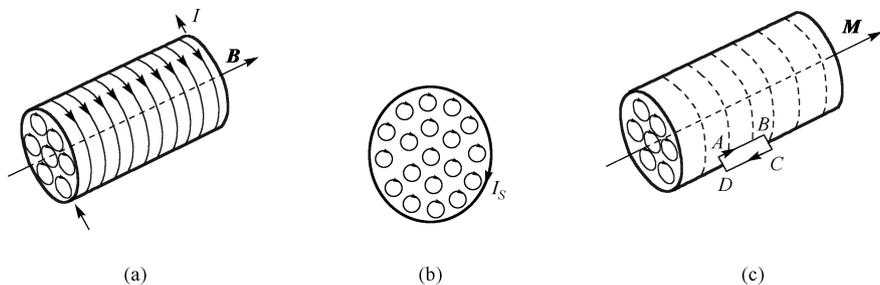


图 9-31 充满磁介质的长直螺线管

对磁介质整体来说, 分子电流沿着圆柱面垂直其母线方向流动, 称为磁化面电流。因为是顺磁质, 磁化面电流与螺线管上导线中的电流 I 方向相同, 如图 9-31(b)所示。如果是抗磁质, 则两者方向相反。

设 j_s 为圆柱形磁介质表面上“每单位长度的磁化电流”(即磁化电流面密度), S 为磁介质的截面, l 为所选取的一段磁介质的长度。在 l 长度上, 磁化电流 $I_s = l j_s$, 因此在这段磁介质总体积 Sl 中的总磁矩为

$$\sum \mathbf{P}_m = I_s \mathbf{S} = j_s l \mathbf{S}$$

按定义, 磁介质的磁化强度大小为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{P}_m}{\Delta V} = \frac{j_s S l}{S l} = j_s \quad (9.47)$$

上式表明, 磁化强度 \mathbf{M} 在量值上等于磁化面电流密度。 \mathbf{M} 是矢量, \mathbf{j}_s 也是矢量, 它们之间的关系写成矢量式有

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}_0 \quad (9.48)$$

\mathbf{n}_0 是介质表面外法线方向的单位矢量。

下面我们进一步讨论在一定范围内, 磁化强度与磁化电流之间的关系。如图 9-31(c) 所示, 在圆柱形磁介质的边界附近, 取一长方形的闭合回路 $ABCD$, AB 在磁介质内部, 它平行于柱体轴线, 长度为 l , 而 BC 、 AD 两边则垂直于柱面。现在, 在磁介质内部各点处 \mathbf{M} 都沿 AB 方向, 大小相等, 在柱外各点处 $\mathbf{M} = 0$ 。所以, 磁化强度 \mathbf{M} 对图 9-31(c) 中的闭合回路的线积分为

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = M \overline{AB} = Ml$$

将式(9.47)即 $M = j_s$ 代入后得

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = j_s l = I_s \quad (9.49)$$

这里, $j_s l = I_s$ 就是通过闭合回路 $ABCD$ 的总磁化电流。式(9.49)虽然是从均匀磁介质及长方形闭合回路的简单特例导出的, 但却是在任何情况下都普遍适用的关系式。

2. 有磁介质时的安培环路定理

当电流的磁场中存在磁介质时, 空间中任一点的磁感应强度 \mathbf{B} 等于导线中传导电流激发的磁场与磁介质磁化后磁化电流所激发的附加磁场的矢量和。把真空中磁场的安培环路定理推广到有磁介质存在的恒定磁场中去, 如果考虑到磁化电流对磁场的贡献, 则安培环路定理应写成

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I + I_s) \quad (9.50)$$

式中 \mathbf{B} 为磁介质中的总磁感应强度, 等式右边括号内的两项电流是穿过回路所围面积的总电流, 即传导电流 $\sum I$ 和磁化电流 I_s 的代数和。

将式(9.49)代入上式, 则有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I + \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l})$$

或

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

我们以 $\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)$ 定义一个新的辅助矢量 \mathbf{H} , 且令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (9.51)$$

\mathbf{H} 称为磁场强度, 于是得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (9.52)$$

这就是有磁介质时的安培环路定理, 它说明: 磁场强度沿任意闭合回路的线积分(即 \mathbf{H} 的环流)等于该回路所包围的传导电流的代数和。

3. \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 的关系

对于各向同性的均匀磁介质, 满足 $\mathbf{M} \propto \mathbf{H}$ 的磁介质称为线性磁介质。于是有

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (9.53)$$

比例系数 χ_m 是个无单位的量, 叫做磁介质的磁化率, 它是随磁介质的性质而异的。将上式代入式(9.51), 则得

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (9.54)$$

令 $\mu_r = 1 + \chi_m$, 且称 μ_r 为磁介质的相对磁导率, 于是式(9.54)可写为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (9.55)$$

其中 $\mu_0 \mu_r = \mu$, 并称 μ 为磁导率,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.56)$$

在真空, $\mathbf{M} = 0$, 故 $\chi_m = 0$, $\mu_r = 1$, $\mu = \mu_0$, 因此, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 。

对于各向同性的均匀磁介质, 如磁介质为顺磁质, 由实验知道 $\chi_m > 0$, 故 $\mu_r > 1$; 对于抗磁质, $\chi_m < 0$, 故 $\mu_r < 1$ 。

通过以上的讨论使我们知道, 引入磁场强度 \mathbf{H} 这个物理量以后, 能够比较方便地处理有磁介质的磁场问题, 就像引入电位移 \mathbf{D} 后, 能够比较方便地处理有电介质的静电场问题一样, 特别是当均匀磁介质充满整个磁场, 且磁场分布又具有某些对称性的情况, 我们可用磁介质的安培环路定理先求出磁场强度 \mathbf{H} 的分布, 再根据 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 得出介质中磁场的磁感应强度的分布, 在整个过程中可不考虑磁化电流。

【例 9.2】 如图 9-32 所示, 有两个半径分别为 r 和 R 的“无限长”的同轴圆筒形导体, 在它们之间充以相对磁导率 μ_r 的磁介质, 当两圆筒有相反方向的电流 I 时, 试求: (1) 介质中任意点 P 的磁感应强度的大小; (2) 圆柱体外面一点 Q 的磁感应强度。

【解】 (1) 这两个“无限长”的同轴圆筒, 当有电流通过时, 它们的磁场是柱对称分布的, 设磁介质中点 P 到轴线 OO' 的垂直距离为 d_2 , 并以 d_1 为半径作一圆形闭合回路, 根据有介质时的安培环路定理, 有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \int_0^{2\pi d_1} dl = H 2\pi d_1$$

所以
$$H = \frac{I}{2\pi d_1}$$

由 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 可得点 P 的磁感应强度的大小为

$$B_1 = \mu H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi d_1} = \frac{\mu I}{2\pi d_1}$$

(2) 设从点 Q 到轴线 OO' 的垂直距离为 d_1 , 并以 d_2 为半径作一圆形闭合回路, 显然此闭合回路包围的传导电流的代数和为零, 即 $\sum I = 0$, 根据有磁介质时的安培环路定理可求得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \int_0^{2\pi d_2} dl = 0$$

所以
$$H = 0$$

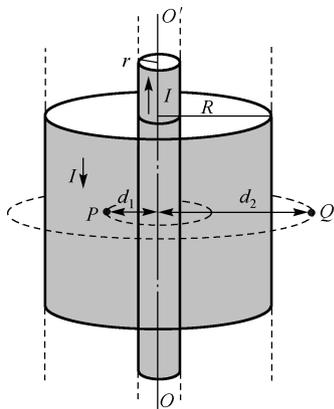


图 9-32

由 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, 可得点 Q 的磁感应强度的大小为 $B = 0$

9.7.3 铁磁质

铁磁质是一类磁介质, 也是最有用的磁介质, 在实际中经常使用它, 在电磁铁、电机、变压器和电表的线圈中都要放置铁磁性物质。铁、镍、钴和它们的一些合金均属于铁磁质。

1. 磁畴

铁磁性不能用一般顺磁质的磁化理论来解释。因为铁磁质的单个原子或分子并不具有任何特殊的磁性。如铁原子和铬原子的结构大致相同, 原子的磁矩也相同, 但铁是典型的铁磁质, 而铬是普通的顺磁质。可见, 铁磁质并不是与原子或分子有关的性质, 而是和物质的固体结构有关的性质。

从物质的原子结构观点来看, 铁磁质内电子间因自旋引起的相互作用是非常强烈的, 在这种作用下, 铁磁质的内部形成一些微小的自发磁化区域, 叫做磁畴。每一个磁畴中, 各个电子自旋磁矩排列得很整齐, 因此它具有很强的磁性。现代理论和实验都证明在铁磁质内存在的磁畴的体积约为 $10^{-12} \sim 10^{-9} \text{ m}^3$, 其中含有 $10^{17} \sim 10^{20}$ 个原子。无外磁场作用时, 同一磁畴内的分子磁矩方向一致, 各个磁畴的磁矩方向杂乱无章, 磁介质的总磁矩为零, 宏观上对外不显磁性, 如图 9-33(a) 所示。

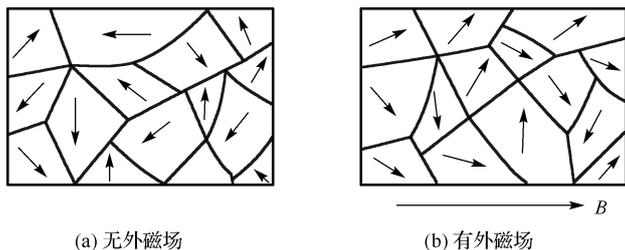


图 9-33 磁畴

当加有外磁场时, 各磁畴的磁矩在外场的作用下都趋向于沿外磁场方向排列, 如图 9-33(b) 所示, 使整个磁畴趋向外磁场方向, 所以铁磁质在外磁场中的磁化程度非常大, 它所建立的附加磁感应强度 \mathbf{B}' 比外磁场的磁感应强度 \mathbf{B}_0 。在数值上一般要大几十倍到数千倍, 甚至达数百万倍。

从实验我们还知道, 铁磁质的磁化和温度有关, 随着温度的升高, 它的磁化能力逐渐减小, 当温度升高到某一温度时, 铁磁性就完全消失, 铁磁质退化成顺磁质, 这个温度叫做居里温度或叫居里点, 这是因为铁磁质中自发磁化区域因剧烈的分子热运动而遭破坏, 磁畴也就瓦解了的缘故。

2. 磁化曲线 磁滞回线

前面说过, 顺磁质的磁导率很小, 但是一个常量, 不随外磁场的改变而变化, 故顺磁质的 \mathbf{B}' 与 \mathbf{H} 的关系是线性关系, 如图 9-34 所示。但铁磁质却不一样, 不仅它的磁导率比顺磁质的磁导率大得多, 而且, 当外磁场改变时, 它的磁导率 μ 还随磁场强度 \mathbf{H} 的改变而变化。图 9-35 中的 ONP 线段是从实验得出的某一铁磁质开始磁化时的 $B-H$ 曲线, 也叫初始磁化曲线。从曲线中可以看出 B 与 H 之间是非线性关系, 当 H 从零(即点 O)逐渐增大时, B 急剧

地增大,这是因为磁畴在磁场作用下迅速沿外磁场方向排列的缘故;当达点 N 以后,再增大 H 时, B 增加得就比较慢;当达到点 P 以后,再增加外磁场强度 H 时, B 的增加就十分缓慢,呈现出磁化已达饱和的程度,点 P 所对应的 B 值一般叫做饱和磁感应强度 B_m ,这时,铁磁质中,几乎所有磁畴都已沿着外磁场方向排列,这时的磁场强度用 $+H_m$ 表示。

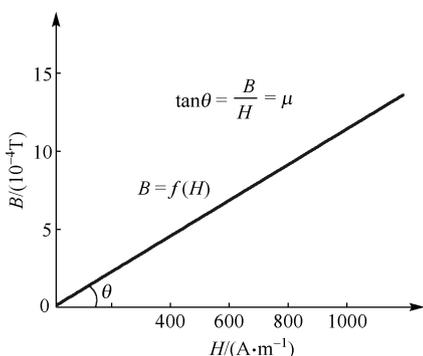
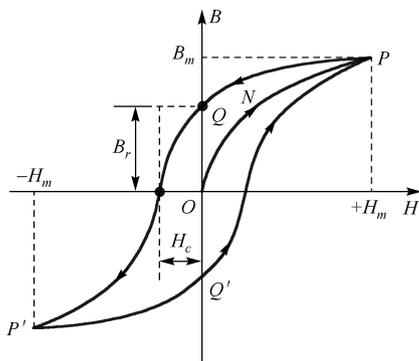
图 9-34 顺磁质的 $B-H$ 曲线

图 9-35 磁滞回线

当磁场强度达到 $+H_m$ 后就开始减小 H , 那么, 在 H 减小的过程中, $B-H$ 曲线是否按原来的起始磁化曲线退回呢? 实验表明, 当外磁场由 $+H_m$ 逐渐减小时, 磁感应强度 B 并不沿起始磁化曲线 ONP 减小, 而是沿图 9-35 中另一条曲线 PQ 比较缓慢地减小, 这种 B 的变化落后于 H 的变化的现象, 叫磁滞现象, 简称磁滞。

由于磁滞的缘故, 当磁场强度减小到零, 即 $H=0$ 时, 磁感应强度 B 没有回到零, 磁介质中还保留一定的磁感应强度 B_r , B_r 称为剩余磁感应强度, 简称剩磁。这是铁磁质所特有的性质。如果一铁磁质有剩磁存在, 就表明它已经被磁化过了。由图可以看出, 随着反向磁场的增加, B 逐渐减小, 当达到 $H=-H_c$ 时, B 等于零, 这时铁磁质的剩磁就消失了, 铁磁质就不显磁性。通常把 H_c 叫做矫顽力, 它表示铁磁质抵抗去磁的能力。当反向磁场继续不断增强到 $-H_m$ 时, 材料的反向磁化同样能达到饱和点 P' , 此后, 反向磁场逐渐减弱到零, $B-H$ 曲线便沿 $P'Q'$ 变化, 以后, 正向磁场增加到 $+H_m$ 时, $B-H$ 曲线就沿 $Q'P$ 变化, 从而完成一个循环。所以, 由于磁滞, $B-H$ 曲线就形成一个闭合曲线, 这个闭合曲线叫做磁滞回线。研究磁滞现象不仅可以了解铁磁质的特性, 而且也有使用价值, 因为铁磁质材料往往是应用于交变磁场中的。需要指出, 铁磁质在交变磁场中被反复磁化, 磁阻效应是要损耗能量的, 而所损耗的能量与磁滞回线所包围的面积有关, 面积越大, 能量的损耗越多。

3. 铁磁质的分类及其应用

从铁磁质的性质和应用方面来看, 按矫顽力的大小可将铁磁质分为软磁材料、硬磁材料和矩磁材料。图 9-36 给出了三种不同铁磁材料的磁滞回线。

软磁材料的矫顽力 H_c 小, 磁滞回线狭长, 如图 9-36(a) 所示, 这种材料磁滞特性不显著, 容易磁化, 也容易退磁, 适合在交变电磁场中工作, 如各种电感元件、变压器、镇流器、继电器、交流电动机、交流发电机等电器中的铁芯。一旦切断电流后, 剩磁很小。常用的金属软磁材料有工程纯铁、硅钢、坡莫合金等, 还有非金属软磁铁氧体, 如锰锌铁氧体、镍锌铁氧体等。

硬磁材料的矫顽力 H_c 较大, 磁滞回线肥大, 如图 9-36(b) 所示, 其磁滞特性非常显著。

这种材料一旦磁化后,会保留较大的剩磁,且不易退磁,故适合于作永久磁体,用于磁电体式电表、永磁扬声器、拾音器、电话、录音机、耳机等电器设备。常见的金属硬磁材料有碳钢、钨钢、铝镍钴合金等。

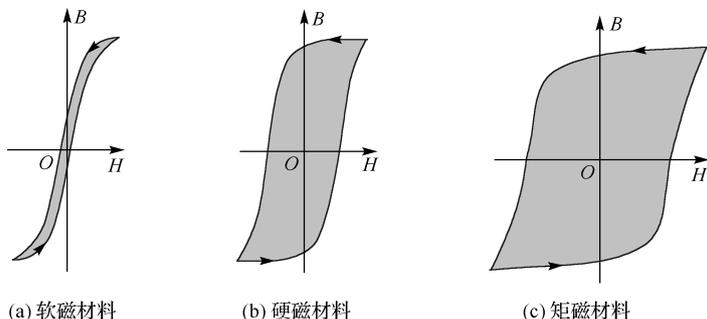


图 9-36 不同铁磁质的磁滞回线

还有一种铁磁质叫矩磁材料,其特点是剩磁很大,接近于饱和磁感应强度 B_m ,而矫顽力小,其磁滞回线接近于矩形,如图 9-36(c)所示。当它被外磁场磁化时,总是处在 B_r 或 $-B_r$ 两种不同的剩磁状态。因此适用于计算机中,作储存记忆元件。通常计算机中采用二进制,只有“1”和“0”两个数码,因此可用矩磁材料的两种剩磁状态分别代表两个数码,起到“记忆”的作用。目前常用的矩磁材料有锰-镁铁氧体和锂-锰铁氧体等。

本章小结

一、磁感应强度

磁感应强度可由试验电荷在磁场中所受的最大磁场力 F_{\max} 来定义。

$$\text{磁感应强度 } \mathbf{B} \text{ 的大小: } B = \frac{F_{\max}}{qv}$$

磁感应强度 \mathbf{B} 的方向: 方向为该点小磁针 N 极的指向。

二、磁通量 磁场的高斯定理

1. 磁通量: 在磁场中穿过任意曲面的磁感应线数目称为穿过该曲面的磁通量。

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

2. 磁场的高斯定理: 通过任意闭合曲面的磁通量为零。

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

三、毕奥-萨伐尔定律

1. 真空中毕奥-萨伐尔定律:
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

由叠加原理,任意形状的载流导线所产生的磁感应强度:

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

2. 几种典型稳恒电流的磁场:

(1) 无限长载流长直导线的磁场: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$

(2) 圆环电流圈圆心处的磁场: $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

(3) 无限长直螺线管内的磁场: $B = \mu_0 nI$

3. 运动电荷的磁场: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$

四、安培环路定理

在真空中的稳恒磁场中, 磁感应强度 \mathbf{B} 沿任何闭合回路的线积分(也称 \mathbf{B} 矢量的环流), 等于真空的磁导率 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和。

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

五、磁场对载流导线的作用力——安培力

安培定律: 电流元 $I d\mathbf{l}$ 在磁场 \mathbf{B} 中所受的磁场力

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

磁场对载流导线的作用力又称安培力: $\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

六、磁场对载流线圈的作用

1. 载流线圈的磁矩: $\mathbf{P}_m = IS\mathbf{n}$

2. 载流线圈在均匀磁场中受的磁力矩: $\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$

3. 磁力的功: $A = \int_{\Phi_{1m}}^{\Phi_{2m}} I d\Phi = I(\Phi_{2m} - \Phi_{1m}) = I\Delta\Phi$

七、磁场对运动带电粒子的作用力

1. 洛伦兹力: $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

2. 带电粒子在均匀磁场中的运动规律

回旋半径: $R = \frac{mv}{qB}$

回旋周期: $T = \frac{2\pi m}{qB}$

螺旋运动的螺距: $d = v_{//} \cdot T = \frac{2\pi m v_{//}}{qB}$

3. 霍尔效应: 导体板放在垂直于它的磁场中, 当有电流 I 通过它时, 在导体板上下两表面产生横向电势差的现象。

霍尔电势差: $U_H = R_H \frac{IB}{d}$, 霍尔系数: $R_H = \frac{1}{nq}$

八、磁介质

1. 磁介质及其分类

磁介质：放在磁场中经磁化后能反过来影响原来磁场的物质。

顺磁质： $\mu_r > 1, B > B_0$

抗磁质： $\mu_r < 1, B < B_0$

铁磁质： $\mu_r \gg 1, B \gg B_0$

2. 磁化强度：
$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{P}_m}{\Delta V}$$

3. 磁化强度与磁化电流的关系：
$$\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}_0 \quad \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_s$$

九、有磁介质时的安培环路定理

1. 磁场强度：
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

2. 安培环路定理：
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i$$

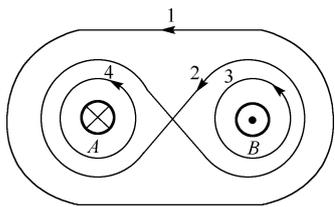
对各向同性的磁介质：
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

习 题 9

一、填空题

9.1 在安培环路定理 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 中, $\sum I_i$ 是指_____； \mathbf{B} 是指_____，它是由_____决定的。

9.2 真空中有一电流元 $I d\mathbf{l}$ ，在由它起始的矢径 \mathbf{r} 的端点处的磁感应强度的数学表达式为_____。



题 9-3 图

9.3 如题 9-3 图所示，两根通有电流为 I ，流向相反的导线 A、B，在四个环路中 \mathbf{B} 矢量的环流分别为： $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} =$ _____， $\oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} =$ _____， $\oint_{L_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} =$ _____， $\oint_{L_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} =$ _____。

9.4 载有一定电流的圆线圈在周围空间产生的磁场与圆线圈半径 R 有关，(1)圆线圈中心(即圆心)的磁场_____。(2)圆线圈轴线上各点的磁场_____。

9.5 已知载流圆线圈中心处的磁感应强度为 B_0 ，此圆线圈的磁矩与一边长为 a 通过电流为 I 的正方形线圈的磁矩之比为 2:1，载流圆线圈的半径为_____。

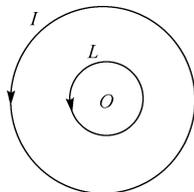
二、选择题

9.6 一运动电荷 q , 质量为 m , 以初速 v_0 进入均匀磁场中, 若 v_0 与磁场的方向夹角为 α , 则()。

- A. 其动能改变, 动量不变
B. 其动能、动量都改变
C. 其动能不变, 动量改变
D. 其动能、动量都不变

9.7 如题 9-7 图所示, 在一圆形电流 I 所在平面内, 选取一个同心圆形闭合回路 L , 则由安培环路定理可知()。

- A. $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 且环路上任意点 $B = 0$
B. $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 且环路上任意点 $B \neq 0$
C. $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 且环路上任意点 $B \neq 0$
D. $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 且环路上任意点 $B = \text{常量}$



题 9-7 图

9.8 下列说法正确的是()。

- A. 若 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 则在回路 L 上必定 B 是处处为零
B. 若 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 则回路 L 必定不包围电流
C. 若 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 则回路 L 所包围传导电流的代数和必定为零
D. 回路 L 上各点的 \mathbf{B} 仅与回路 L 所围的电流有关

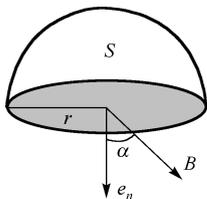
9.9 在下列矢量场中, 属于保守力场的是()。

- A. 静电场
B. 涡旋电场
C. 稳恒磁场
D. 变化的磁场

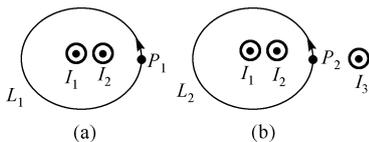
9.10 如题 9-10 图所示, 在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S , S 边线所在平面的法线方向单位矢量 \mathbf{e}_n 与 \mathbf{B} 的夹角为 α , 则通过半球面 S 的磁通量为()。

- A. $\pi r^2 B$
B. $2\pi r^2 B$
C. $-\pi r^2 B \sin \alpha$
D. $-\pi r^2 B \cos \alpha$

9.11 在题 9-11 图(a)和(b)中, 有一半半径相同的圆形回路 L_1 和 L_2 , 圆周内有电流 I_1 和 I_2 , 其分布相同, 且均在真空中, 但在(b)图中 L_2 回路外有电流 I_3 , P_1 、 P_2 为两圆形回路上的对应点, 则()。



题 9-10 图



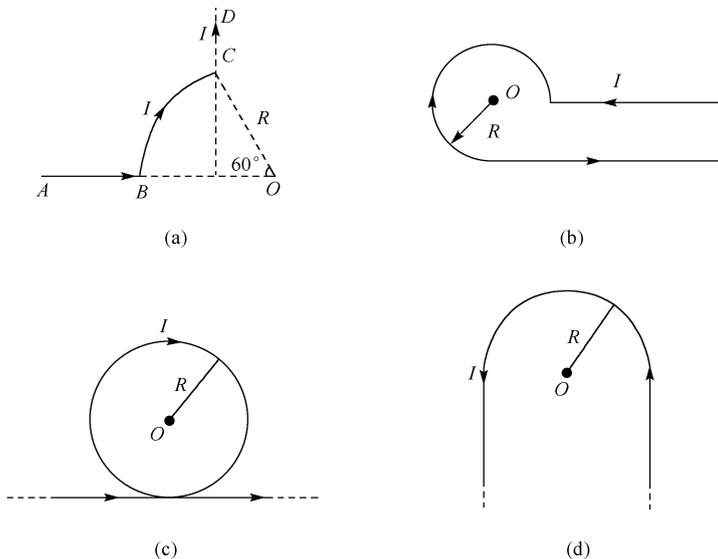
题 9-11 图

- A. $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}; B_{P_1} = B_{P_2}$

- B. $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}; B_{P_1} = B_{P_2}$
 C. $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}; B_{P_1} \neq B_{P_2}$
 D. $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}; B_{P_1} \neq B_{P_2}$

三、计算题

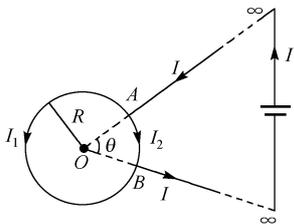
9.12 无限长载流导线在平面内分布,如题 9-12 图(a)、(b)、(c)、(d)所示,电流均为 I ,问 O 点的磁感应强度各为多少?



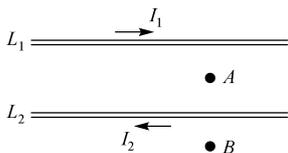
题 9-12 图

9.13 如题 9-13 图所示,两根导线沿半径方向引向铁环上的 A 、 B 两点,并在很远处与电源相连。已知圆环的粗细均匀,求环中心 O 的磁感应强度。

9.14 如题 9-14 图所示,在真空中,有两根互相平行的无限长直导线 L_1 和 L_2 ,相距 0.1 m ,通有方向相反的电流, $I_1 = 20 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, A 、 B 两点与导线在同一平面内。这两点与导线 L_2 的距离均为 5.0 cm 。试求 A 、 B 两点处的磁感应强度,以及磁感应强度为零的点的位置。



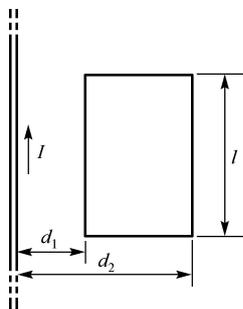
题 9-13 图



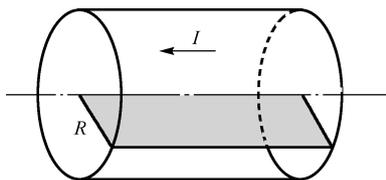
题 9-14 图

9.15 如题 9-15 图所示, 载流长直导线的电流为 I , 试求通过矩形面积的磁通量。

9.16 电流 I 均匀流过半径为 R 的圆形长直导线, 试计算单位长度导线通过题 9-16 图所示剖面的磁通量。



题 9-15 图

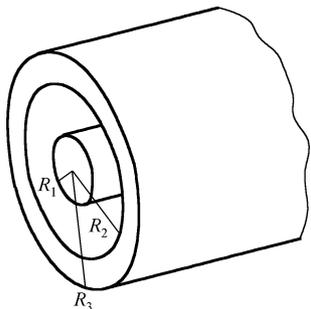


题 9-16 图

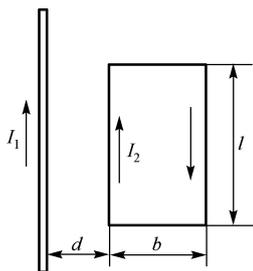
9.17 已知 10 mm^2 裸铜线允许通过 50 A 电流而不至于导线过热, 电流在导线横截面上均匀分布, 求导线内、外磁感应强度的分布。

9.18 有一同轴电缆, 由一导体圆柱和一同轴的导体圆管构成, 其尺寸如题 9-18 图所示。两导体中的电流均为 I , 但电流的流向相反, 导体的磁性可不考虑。设电流都是均匀地分布在导体的横截面上, 试计算以下各处的磁感应强度的大小: (1) $r < R_1$; (2) $R_1 < r < R_2$; (3) $R_2 < r < R_3$; (4) $r > R_3$ 。画出 $B-r$ 曲线。

9.19 如题 9-19 图所示, 一根长直导线载有电流 $I_1 = 30 \text{ A}$, 矩形回路载有电流 $I_2 = 20 \text{ A}$, 计算作用在回路上的合力和合力矩。已知 $d = 1.0 \text{ cm}$, $b = 8.0 \text{ cm}$, $l = 0.12 \text{ cm}$ 。



题 9-18 图



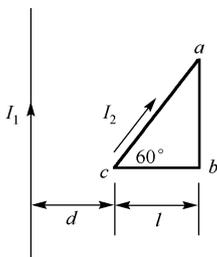
题 9-19 图

9.20 如题 9-20 图所示, 一无限长直导线通有电流 I_1 , 附近有一直角三角形回路, 回路中通以电流 I_2 , 回路与长直导线共面。求电流 I_1 的磁场分别作用在三角形回路上各边的安培力。

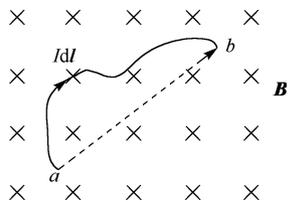
9.21 如题 9-21 图所示, 在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 垂直于磁场方向的平面内有一段载流弯曲导线, 电流为 I , 求其所受的安培力。

9.22 如题 9-22 图所示。电子在 $B = 70 \times 10^{-4} \text{ T}$ 的匀强磁场中作圆周运动, 圆周半径 $r = 3.0 \text{ cm}$ 。已知 \mathbf{B} 垂直于纸面向外, 某时刻电子在 A 点, 速度 \mathbf{v} 向上。(1) 试画出该电子运动的轨道; (2) 求该电子速度 \mathbf{v} 的大小; (3) 求该电子的动能 E_k 。

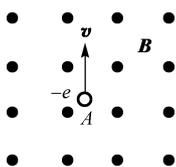
9.23 题 9-23 图中的三条线表示三种不同磁介质的 $B-H$ 关系曲线, 虚线是 $B = \mu_0 H$ 关系曲线。试指出哪一条表示顺磁质? 哪一条表示抗磁质? 哪一条表示铁磁质?



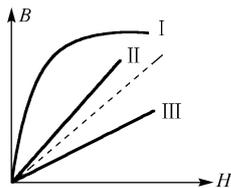
题 9-20 图



题 9-21 图



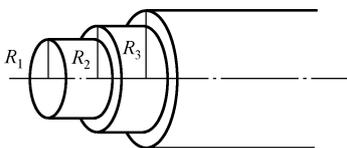
题 9-22 图



题 9-23 图

9.24 螺绕环中心周长 $L = 10 \text{ cm}$, 环上线圈匝数 $N = 200$ 匝, 线圈中通有电流 $I = 100 \text{ mA}$ 。(1)当管内是真空时, 求管中心的磁场强度 H 和磁感应强度 B_0 ; (2)若环内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁性物质, 则管内的 B 和 H 各是多少?

9.25 一根长直同轴电缆, 内、外导体间充满磁介质, 如题 9-25 图所示, 磁介质的相对磁导率为 $\mu_r (\mu_r < 1)$, 导体的磁化可以略去不计, 电缆沿轴向有稳恒电流 I 通过, 内外导体上电流的方向相反, 求空间各区域的磁感应强度。



题 9-25 图

第 10 章

电磁感应和电磁波

电流能够激发磁场，能否利用磁场来产生电流呢？许多人在这方面做了大量实验，1831年英国实验物理学家法拉第发现了电磁感应现象及其规律，即利用磁场产生电流的现象，并总结出电磁感应规律。电磁感应现象的发现是电磁学发展史上又一个重要成就，它揭示了自然界电现象和磁现象之间的内在联系和相互转化的关系，促进了电磁理论的发展，为麦克斯韦电磁场理论的建立奠定了坚实的基础。电磁感应现象的发现还标志着新的技术革命和工业革命的即将到来，使现代电力工业、电工和电子技术得以建立和发展。

本章主要在电磁感应现象的基础上讨论电磁感应定律，研究产生感应电动势的两种情况即动生电动势和感生电动势，介绍自感和互感，磁场的能量以及麦克斯韦关于感生电场和位移电流的假设，并简要介绍电磁振荡和电磁波的基本概念。

10.1 电磁感应定律

10.1.1 电磁感应现象

电磁感应定律是建立在广泛的实验基础上的，因此，在讨论定律之前，我们通过几个典型的电磁感应实验现象来说明什么是电磁感应现象，以及产生电磁感应的条件。

如图 10-1 所示，一个线圈与电流计的两端接成闭合回路，因为这个电路中没有电源，所以电流计指针不会发生偏转，当用一条形磁铁棒的 N 极(或 S 极)插入线圈时，可以观察到电流计指针发生偏转，表明线圈中有电流通过，这种电流称为感应电流。如果把磁铁棒从线圈中抽出，电流计指针又发生偏转，但这时电流计指针偏转的方向与磁铁棒插入线圈时相反，这表明线圈中的感应电流与磁铁棒插入线圈时的流向相反。如果我们固定磁铁棒，而把线圈推向或拉离磁体棒，可以观察到与上面一样的现象。实验表明：只有当磁铁棒与线圈间有相对运动时，线圈中才会出现感应电流，相对运动的速度越大，感应电流越大。用一通有电流的线圈代替磁铁棒时，结果相同。

如图 10-2 所示，线圈 A 与线圈 B 绕在同一环形铁芯上，B 与开关 S 和电源相连接，A 接有电流计，在开关 S 闭合和打开的瞬时，可以观察到与线圈 A 连接的电流计的指针将发生偏转，线圈中都出现感应电流，但电流的流向相反，实验表明：只有在线圈 B 中的电流发生变化时，才能在线圈 A 中出现感应电流。再观察一个演示实验，如图 10-3 所示，将一根与电流计连成闭合回路的金属棒放置在磁铁的两极之间，实验表明，当棒在两极之间的

磁场中垂直于磁场的方向运动时，电流计指针就会发生偏转，即在回路中出现感应电流。

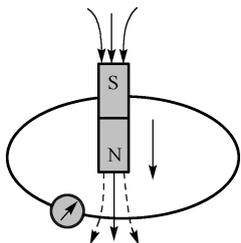


图 10-1 磁铁棒与线圈有相对运动时的电磁感应现象

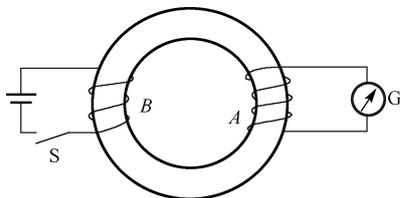


图 10-2 线圈中电流改变时的电磁感应现象

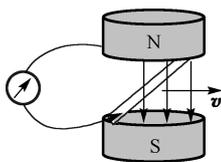


图 10-3 金属棒在磁场中运动时的电磁感应现象

棒运动得越快，电流计指针的偏转角也越大；当棒停止运动，电流计的指针也停止偏转，回路中没有感应电流。

从以上实验中可以看出，无论是使闭合回路保持不动，而使穿过闭合回路的磁场发生变化；或者是磁场保持不变，而使闭合回路(或线圈)在磁场中运动，都可以在闭合回路(或线圈)中引起电流，这就是说，不管是磁铁棒与线圈作相对运动，还是相对静止的两个线圈中一个电流发生变化，它们的

共同点是：它们都使穿过闭合回路(或线圈)所围面积内的磁通量发生了变化。由此可得：当穿过一个闭合导体回路所包围的面积磁通量发生变化时，不管这种变化是由什么原因引起的，在导体回路中就会产生电流。这种现象称为电磁感应现象。回路中所出现的电流叫感应电流。回路中出现电流，表明回路中有电动势存在，这种在回路中由于磁通量的变化而引起的电动势叫感应电动势。

10.1.2 楞次定律

1833年，楞次概括了大量实验结果，得出了确定感应电流方向的法则，称为楞次定律，表述为：当穿过闭合导线回路所包围面积的磁通量发生变化时，在回路中就有感应电流，此闭合回路中感应电流的方向，总是使感应电流所激发的磁场来阻止引起感应电流的磁通量的变化。或表述为：感应电流的效果，总是反抗引起感应电流的原因。

在上述实验的图 10-1 中，当磁铁棒以 N 极插向线圈或线圈向磁棒的 N 极运动时，通过线圈的磁通量增加，感应电流所激发的磁场方向则要使通过线圈面积的磁通量反抗线圈内磁通量的增加，所以线圈中感应电流所产生的磁感应线的方向与磁棒的磁感应线的方向相反。再根据右手螺旋定则，可确定线圈中感应电流的方向。当磁铁棒拉离线圈或线圈背离 N 极运动时，通过线圈面积的磁通量减少，感应电流的磁场则要使通过线圈面积的磁通量去补偿线圈内磁通量的减少，因而，它所产生的磁感应线的方向与磁棒的磁感应线的方向相同，感应电流的方向与上面相反。其他两个实验也可以用同样的分析方法来确定感应电流的方向，读者可自行分析。

楞次定律实质上是能量守恒定律的一种体现。在上述例子中可以看到，当磁铁棒的 N 极向线圈运动时，线圈中感应电流所激发的磁场分布相当于在线圈朝向磁铁棒一面出现 N 极，它阻碍磁铁棒作相对运动。因此，在磁铁棒向前运动的过程中，外力必须克服斥力做功；当

磁铁棒背离线圈运动时,则外力必须克服引力做功。这时,给出的能量转化为线圈中感应电流的电能,并转化为电路中的焦耳-楞次热。反之,如果设想感应电流的方向不是这样的,它的出现不是阻止磁铁棒的运动而是使它加速运动,那么只要我们把磁铁棒稍稍推动一下,线圈中出现的感应电流将使它动得更快,于是又增长了感应电流,这个增长又促进相对运动更快,如此不断地相互反复加强,所以只要在最初使磁铁棒作微小移动中做出微小的功,就能获得极大的机械能和电能,这显然是违背能量守恒定律的。所以,感应电流的方向遵从楞次定律的事实表明楞次定律本质上就是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体表现。

10.1.3 法拉第电磁感应定律

法拉第对电磁感应现象做了定量的研究,总结出了电磁感应的基本定律,也称为法拉第电磁感应定律,表述如下:

当穿过闭合回路所包围面积的磁通量发生变化时,不论这种变化是什么原因引起的,回路中都会产生感应电动势,且感应电动势与磁通量对时间的变化率成正比。定律可表示为

$$\epsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (10.1)$$

式中的负号反映了感应电动势的方向,它是楞次定律的数学表示。

在判断感应电动势的方向时,应先规定回路 L 的绕行方向。如图 10-4(a)所示,当回路中磁感应线的方向和所规定的绕行正方向满足右手螺旋关系时,磁通量 Φ_m 是正值,这时,如果穿过回路的磁通量增大,即 $\frac{d\Phi_m}{dt} > 0$,则 $\epsilon < 0$,这表明此时感应电动势 ϵ 的方向和 L 的绕行正方向相反;如图 10-4(b)所示,如果穿过回路的磁通量减小,即 $\frac{d\Phi_m}{dt} < 0$,则 $\epsilon > 0$,这表明此时感应电动势 ϵ 的方向和 L 的绕行正方向相同。对于磁通的其他变化情况可做同样的讨论,用这种方法确定感应电动势方向的方法和用楞次定律确定的方向完全一致,但在实际问题中用楞次定律来确定感应电动势的方向比较简便。

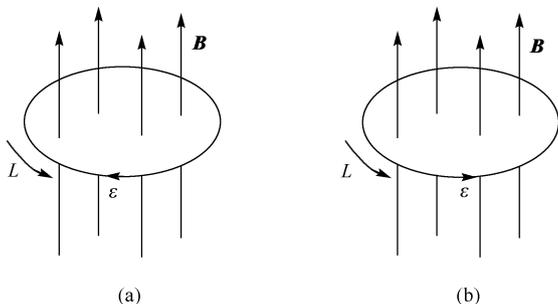


图 10-4 ϵ 的方向和 Φ_m 的变化关系

应该指出,式(10.1)中的 Φ_m 是穿过单匝回路所围面积的磁通量,如果回路由 N 匝密绕线圈组成,而穿过每匝线圈的磁通量都等于 Φ_m ,那么每匝中都将产生感应电动势 $\frac{d\Phi_m}{dt}$,则 N 匝线圈中的总电动势应为各匝中电动势的总和,即

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(N\Phi_m)}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} \quad (10.2)$$

习惯上,把 $N\Phi_m$ 称为线圈的磁通量匝数或磁链,用 ψ 来表示,则 $\psi = N\Phi_m$ 。对此,电磁感应定律可写成

$$\epsilon = -\frac{d\psi}{dt} \quad (10.3)$$

如果闭合回路的电阻为 R ,则在回路中的感应电流为

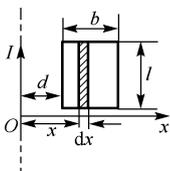
$$I_i = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{d\Phi_m}{R dt} \quad (10.4)$$

利用式 $I = \frac{dq}{dt}$,可算出在 t_1 和 t_2 这段时间内通过回路中的感应电荷量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_{1m}}^{\Phi_{2m}} d\Phi_m = \frac{1}{R} (\Phi_{2m} - \Phi_{1m}) \quad (10.5)$$

式中 Φ_{1m} 、 Φ_{2m} 分别是 t_1 、 t_2 时刻通过回路所包围面积的磁通量。比较式(10.4)和式(10.5)表明,感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关,变化率越大,感应电流越强;但回路中的感应电荷量只与回路中磁通量的变化量有关,而与磁通量随时间的变化率(即变化的快慢)无关。从式(10.5)可以看出,如果测出感应电荷量,而回路的电阻又已知时,就可以计算磁通量的变化量。常用的磁通计就是根据这个原理而设计的。

【例 10.1】 一长直导线中通有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$, 式中 I_0 是电流振幅, ω 是角频率, I_0 和 ω 都是常量。长直导线旁有一共面的矩形线圈。已知线圈长为 l , 宽为 b , 线圈近直线的一边离直导线的距离为 d (见图 10-5)。求任一瞬时线圈中的感应电动势。



【解】 设在某一瞬时,距直导线为 x 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

选顺时针的转向作为矩形线圈的绕行正方向,则通过图中阴影面积 $dS = l dx$ 的磁通量为

$$d\Phi = B dS \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

在该瞬时 t , 通过整个线圈所围面积的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I_0 l \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$$

由于电流随时间变化,通过线圈面积的磁通量也随时间变化,故线圈内的感应电动势为

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} \frac{d}{dt} (\sin \omega t) = -\frac{\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} \cos \omega t$$

从上式可知,线圈内的感应电动势随时间按余弦规律变化,其方向也随余弦值的正负做逆时针、顺时针转向的变化。

10.2 动生电动势和感生电动势

法拉第电磁感应定律告诉我们,只要通过回路所围面积中的磁通量发生变化,回路中就

会产生感应电动势。由式 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 可知,使磁通量发生变化的方法是多种多样的,但从本质上讲,可归纳为两类:一类是磁场保持不变,导体回路或导体在磁场中运动而引起的感应电动势,称为动生电动势;另一类是导体回路不动,磁感应强度发生变化而引起的感应电动势,称为感生电动势。我们将分别讨论这两类情况下感应电动势的本质以及电磁感应定律在各种特殊情形中的应用。

10.2.1 动生电动势

首先讨论磁场不变,导体在磁场中运动或回路的形状和位置变动而产生的动生电动势。

如图 10-6 所示,一个由导线做成的回路 $ABCD$,其中长度为 l 的导线段 AB 在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中以速度 \mathbf{v} 向右作匀速直线运动,为简单计,假定 AB 、 \mathbf{v} 和 \mathbf{B} 三者互相垂直。导体在磁场中运动切割磁感应线而产生的电动势,可用金属电子理论来解释,当导线 AB 以速度 \mathbf{v} 向右运动时,导线内每个自由电子也就获得向右的定向速度 \mathbf{v} ,由于导线处在磁场中,每个自由电子都受到洛伦兹力 \mathbf{F}_m 的作用,

$$\mathbf{F}_m = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

式中 $(-e)$ 为电子的电荷量。 \mathbf{F}_m 的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向相反,沿导线从 A 指向 B ,这个洛伦兹力 \mathbf{F}_m 就是非静电力,电子在力 \mathbf{F}_m 的作用下,将沿导线从 A 向 B 端移动,结果在 B 端积累了负电, A 端则积累了正电,从而在导线内建立起静电场,当作用在电子上的静电场力 \mathbf{F}_e 与洛伦兹力 \mathbf{F}_m 相平衡(即 $\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = 0$)时, A 、 B 两端间便有稳定的电势差,在回路中出现逆时针方向的感应电流。这段运动导体棒相当于一个电源,它的非静电力就是洛伦兹力。

电动势定义为单位正电荷从负极通过电源内部移到正极的过程中,非静电力所做的功。在动生电动势的情形中,作用在单位正电荷的非静电力 \mathbf{F}_e 就是洛伦兹力 \mathbf{F}_m ,如以 \mathbf{E}_k 表示非静电力的电场强度,则有

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{F}_m}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

或

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

于是动生电动势为

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.6)$$

在图 10-6 所示情况下,若 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$,则有 $\varepsilon = Blv$;若导体顺着磁场方向运动, $\mathbf{v} // \mathbf{B}$,则有 $\varepsilon = 0$,没有动生电动势产生。因此,可以形象地说“当导体切割磁力线时产生动生电动势”。应当注意,上式只能用来计算均匀磁场中导线以恒定速度垂直于磁场运动时产生的动生电动势。

对于普遍情况,在任意的稳恒磁场中,一个任意形状的导体线圈 L 可以是闭合的,也可以是不闭合的,当线圈发生形变时,线圈上任意一小段 $d\mathbf{l}$ 可能有一定的速度 \mathbf{v} ,一般地不同 $d\mathbf{l}$ 的速度 \mathbf{v} 不同,这时整个线圈中产生的动生电动势为

$$\varepsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (10.7)$$

式(10.7)提供了计算动生电动势的方法。

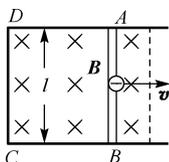


图 10-6 动生电动势

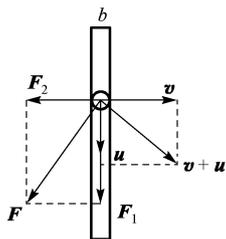


图 10-7 洛伦兹力不做功

我们知道,洛伦兹力总是垂直于电荷的运动速度,因此洛伦兹力对运动电荷永不做功,然而,这里又说动生电动势是由洛伦兹力做功引起的,两者是否矛盾?其实并不矛盾,我们这里的讨论只计及洛伦兹力的一部分。下面对图 10-7 中导体内的电子所受的洛伦兹力做全面的分析。在运动导体中自由电子不但具有导体本身的速度 v ,而且还具有相对于导体的定向运动速度 u ,正是由于电子的此一运动构成感应电流,因此,电子所受到的总洛伦兹力为

$$F = -e(u + v) \times B = -eu \times B - ev \times B = F_1 + F_2$$

这个力 F 与合成速度 $V = (u + v)$ 垂直,总洛伦兹力不对电子做功。然而 F 的一个分量

$$F_1 = -e(v \times B)$$

却对电子做正功,形成动生电动势;而另一个分量

$$F_2 = -e(u \times B)$$

它的方向沿 v ,它是阻碍导体运动的,从而做负功。可以证明,两个分量所做功的代数和等于零。因此,洛伦兹力的作用并不是提供能量,而是传递能量,即外力克服洛伦兹力的一个分量 F_2 所做的功通过另一个分量 F_1 转化为感应电流的能量。洛伦兹力起到了能量转化的作用,但前提是运动导体中必须有能自由移动的电子。

【例 10.2】 如图 10-8 所示,铜棒 OA 长 $L = 50 \text{ cm}$,在方向垂直纸面向内的匀强磁场 $B = 0.09 \text{ T}$ 中,沿逆时针方向绕 O 轴转动,角速度 $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$,求铜棒中动生电动势的大小和指向。如果是半径为 50 cm 的铜盘以上述角速度转动,求盘中心和边缘之间的电势差。

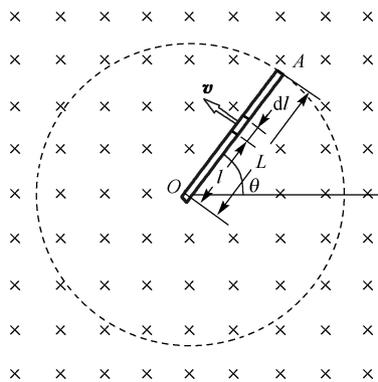


图 10-8 铜棒中动生电动势的计算

【解】 当铜棒作匀速转动时,铜棒上各点的速度不相同,因此必须划分小段来考虑。在铜棒上距 O 点为 l 处取长度元 dl ,其速度 $v = \omega l$ 。根据直导线中动生电动势的公式(10.7), dl 上的动生电动势为

$$d\epsilon_i = Bvdl = B\omega l dl$$

各小段上的 $d\epsilon_i$ 的指向相同,所以铜棒中总的动生电动势为

$$\epsilon_i = \int_0^L B\omega l dl = \frac{B\omega L^2}{2} = \frac{0.01 \times 100\pi \times (0.5)^2}{2} \text{ V} = 0.39 \text{ V}$$

由图可知, $v \times B$ 的方向由 A 指向 O ,故 $d\epsilon_i$ 的指向从 A 到 O , O 点与 A 点之间的电势差为

$$U_O - U_A = 0.39 \text{ V}$$

此题还有另一解法。设铜棒在 Δt 时间内所转过的角度为 $\Delta\theta$ ，则在这段时间内铜棒所切割的磁感应线数等于它扫过的扇形面积内所通过的磁通量，即

$$\Delta\Phi = B \frac{1}{2} L L \Delta\theta = \frac{1}{2} B L^2 \Delta\theta$$

所以铜棒中的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} B L^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} B L^2 \omega$$

结果与上一解法完全一致。

如果是铜盘转动，可以把铜盘想象成由无数根并联的铜棒组合而成，每根铜棒都类似于 OA，因这些铜棒是并联的，所以铜盘中心与边缘之间的电势差仍等于每根铜棒的电势差

$$U_O - U_A = 0.39 \text{ V}$$

如果把 O 点和 A 点与外电路接通，则在磁场中转动的铜棒就能对外供应电流，这就是一种简易发电机的模型。

【例 10.3】 如图 10-9 所示，一长直导线中通有电流 $I = 100 \text{ A}$ ，在其附近有一长 $l = 0.2 \text{ m}$ 的金属棒 AB，以 $v = 2 \text{ m/s}$ 的速度平行于长直导线作匀速运动，如棒的近导线一端距离导线 $d = 0.1 \text{ m}$ ，求金属棒中的动生电动势。

【解】 由于金属棒处在通电导线的非均匀磁场中，因此必须将金属棒分成很多长度元 dx ，这样在每一个 dx 处的磁场可以看做是均匀的，其磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

式中 x 为长度元 dx 与长直导线之间的距离，根据动生电动势的公式，可知 dx 小段上的动生电动势为

$$d\varepsilon = -Bv dx = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} v dx$$

由于所有长度元上产生的动生电动势的方向都是相同的，所以金属棒中的总电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\int d\varepsilon = \int_d^{d+l} -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} v dx \\ \varepsilon_{AB} &= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l}{d}\right) = -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi} \times 2 \times \ln 3 = -4.4 \times 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

ε 的指向是从 B 到 A 的，也就是 A 点的电势比 B 点高。

10.2.2 感生电动势

上面讨论了导线或线圈在磁场中运动时产生的动生电动势，其非静电性力起源于洛伦兹力，电磁感应现象又表明：当导线回路固定不动，而磁通量的变化完全由磁场的变化引起时，导线回路内也将产生数值等于 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的感应电动势，这种由于磁场变化引起的感应电动势，称为感生电动势。产生感生电动势的非静电力，不可能用洛伦兹力来解释。麦克斯韦分析了这

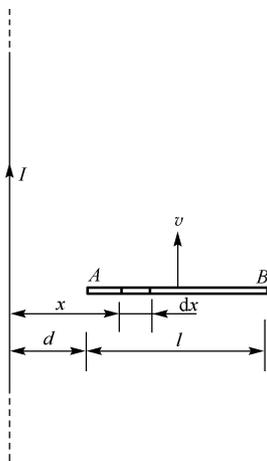


图 10-9

个事实后提出:变化的磁场在其周围空间激发了一种电场,这种电场称为感生电场或涡旋电场。

当闭合导体处在变化的磁场中时,在磁场周围激发了感生电场,正是由于这种电场的存在,从而在导体回路中引起感生电动势和感应电流。如用 \mathbf{E}_k 表示感生电场,则当回路固定不动,回路中磁通量的变化由磁场的变化引起,根据电动势的定义和法拉第电磁感应定律,感生电动势为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (10.8)$$

式(10.8)反映出变化的磁场能激发电场。这是法拉第电磁感应定律的积分形式。

再从场的观点来看,场的存在并不取决于空间有无导体回路存在,变化的磁场总是在空间激发电场,因此,式(10.8)回路是否由导体构成,也不管闭合回路是处在真空或介质中都是适用的。也就是说,如果有导体回路存在时,感生电场的作用便驱使导体中的自由电荷作定向运动,从而显示出感应电流;如果不存在导体回路,就没有感应电流,但是变化的磁场所激发的电场还是客观存在的。

这样,在自然界中存在着以两种不同方式激发的电场,所激发的电场的性质也截然不同。由静止电荷所激发的电场是保守力场(无旋场),在该场中电场强度沿任一闭合回路的线积分恒等于零,即

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

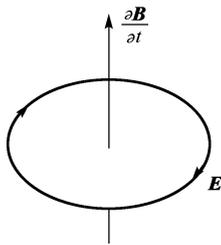


图 10-10 \mathbf{E} 线和 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 成左旋系统

电场线永远不会形成闭合线。但变化磁场所激发的感生电场沿任一闭合回路的线积分一般不等于零,而是满足式(10.8),也就是说,感生电场不是保守力场,其电场线既无起点也无终点,永远是闭合的,像漩涡一样。因此,通常把感生电场称为有旋电场。因为式(10.8)中规定面元 $d\mathbf{S}$ 的法向与回路绕行方向成右手螺旋关系,所以式中的负号给出 \mathbf{E} 线的绕行方向和所围的 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 的方向成左螺旋关系,如图 10-10 所示。

【例 10.4】 半径为 R 的无限长螺线管内部的磁场 \mathbf{B} 随时间线性变化 ($\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \text{常量}$) 时,求管内外的感生电场 \mathbf{E} 。

【解】 由场的对称性,变化磁场所激发的感生电场的电场线在管内外都是与螺线管同轴的同心圆, \mathbf{E} 处处与圆线相切,如图 10-11(a)所示,且在同一条电场线上 \mathbf{E} 的大小处处相等。任取一电场线作为闭合回路,选取回路的正方向是顺时针,则由式(10.8)可求出离轴线为 r 处的感生电场 \mathbf{E}_k 的大小为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L E dl = 2\pi r E = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

或
$$E = - \frac{1}{2\pi r} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中的 S 是以所取回路为边线的任意曲面。

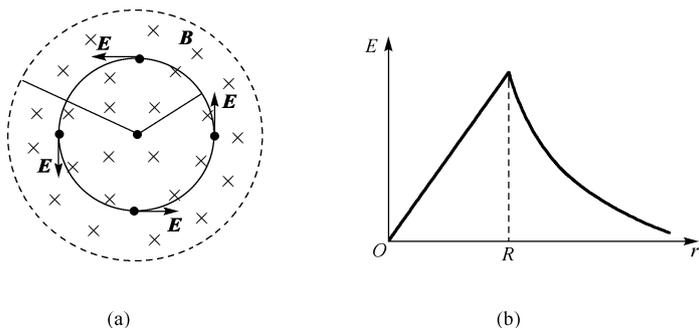


图 10-11 螺线管内外的感生电场

(1) 当 $r < R$, 即所考查的场点在螺线管内时, 我们选回路所围的圆面积作为积分面, 在这个面上各点的 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 相等且和面法线的方向平行, 故上式右边的面积分为

$$\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

由此可得 $r < R$ 处的感生电场为

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

\mathbf{E} 的方向沿圆周切线, 指向与圆周内的 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 成左旋关系。负号表示感生电场所产生的磁场是反抗磁场的变化, 图 10. 11(a) 所示 \mathbf{E} 的方向相应于 $\frac{d\mathbf{B}}{dt} > 0$ 的情况。

(2) 当 $r > R$, 即所考查的场点在螺旋管外时, 右边的面积分包容螺线管的整个截面, 因只有管内的 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 不为零, 显然

$$\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

于是可得管外各点的感生电场为

$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

图 10-11(b) 画出了螺线管内外感生电场 E 随离轴线距离 r 的变化曲线。

10.2.3 涡电流

前面讨论感应电动势和感应电流时考虑的都是由导线组成的闭合回路, 但是在一些电路设备中常常遇到大块的金属体在磁场中运动, 或者处在变化着的磁场中, 在这块导体中也会激起感应电流, 这种在大块导体内流动的感应电流, 称为涡电流, 简称涡流。

如图 10-12 所示, 当绕在一圆柱形铁芯上的线圈中通有交变电流时, 铁芯内变化的磁感应强度 B 在铁芯内激发感生电场, 结果在垂直于磁场的平面内产生绕轴流动的环形感应电流, 即涡电流。

由于大块铁芯的电阻很小, 涡电流可以很大, 在铁芯内将放出大量的焦耳-楞次热, 这就是感应加热的原理。因为感生电动势与磁通量的变化率成正比, 而磁通量的变化率与外加交

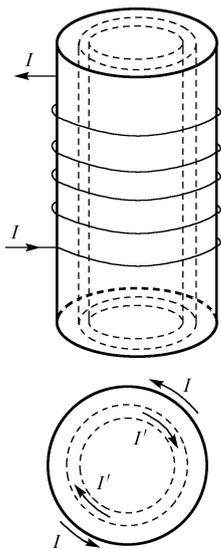


图 10-12 涡电流

变电流的频率成正比,所以涡电流 I 应与外加交变电流的频率成正比,涡电流 I 所产生的焦耳-楞次热与外加交变电流的频率的平方成正比。当我们使用频率高达几百赫甚至几千赫的交变电流时,铁芯内由于涡电流将放出巨大的热量,可以利用它来冶炼金属。例如,在冶金工业中,熔化容易氧化的或难熔的金属(如钛、钽、铌、钼等),以及冶炼特种合金材料,常常采用这种感应加热的方法。又如,现代厨房电器之一——电磁灶的加热原理也是利用感应电流在铁锅底部形成交变磁场,使铁锅底部产生涡电流而发热,再使热量由食物的表面传到食物内部,从而达到煮熟食物的目的。电磁灶所用频率仅为 30 kHz,与普通广播频率差不多,对人体不会有任何危害。

在真空技术上,也利用感应加热的方法,隔着管子的玻璃加热被抽空的仪器(如电子管、示波管、显像管等)的金属部分,使其温度升高,放出吸附在金属表面上的少许气体,被抽气机抽出。

涡电流产生的热效应虽然有着广泛的应用,但是在有些情况下也有很大的弊害。例如,变压器或其他电机的铁芯常常因涡电流产生无用的热量,不仅消耗了部分电能,降低了电机的效率,而且会因铁芯严重发热而不能正常工作。

为了减小涡流损耗,一般变压器、电机及其他交流仪器的铁芯不采用整块材料,而是用互相绝缘薄片(如硅钢片)或细条叠合而成,使涡流受绝缘的限制,只能在薄片范围内流动,于是增大了电阻,减小了涡电流,使损耗降低,如图 10-13 所示。

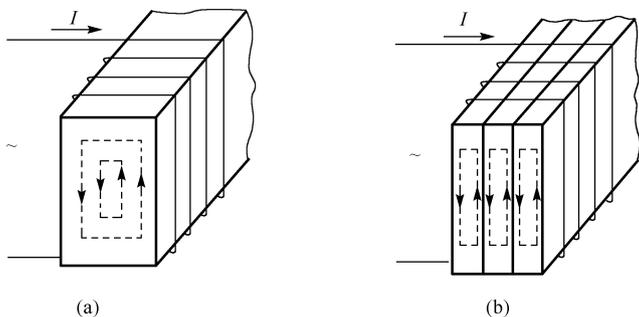


图 10-13 变压器铁芯中的涡电流

在另一些场合,可利用涡电流产生阻尼作用。为了说明这一点,我们进行下列实验,设有一金属片做成的摆,悬挂于电磁铁的两极之间,使它能在两极之间摆动,如图 10-14 所示。如果电磁铁的线圈中不通电,则两极间无磁场,金属摆在摆动过程中只受到空气的阻尼和转轴处的摩擦力作用,摆动不会马上停止。当电磁铁的线圈中通有电流时两极间便有强大的磁场,当金属摆在磁场中摆动时产生了涡电流,根据楞次定律,磁场对涡电流的作用要阻碍摆和磁场的相对运动,因此金属摆受到一个阻尼力的作用,就像在黏性介质中摆动一样,会很快地停下来。这种阻尼起源于电磁感应,称为电磁阻尼,在各种仪表中电磁阻尼已被广泛应用。例如,在很多电表常常把线圈绕在一闭合的铝框上,当线圈在磁场中摆动时,在闭合铝框中就产生了涡电流,框架便受到磁场的阻尼作用,使线圈能很快地稳定在平衡位置上。

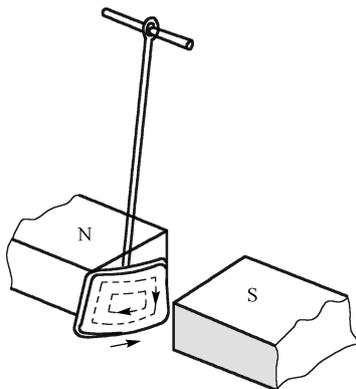


图 10-14 阻尼摆

10.3 自感和互感

10.3.1 自感电动势 自感

当导体回路的电流发生变化时,该电流所激发的通过自身回路所围面积的磁通量也会发生变化,按照法拉第电磁感应定律,在回路中会产生感应电动势,这种由于回路中电流发生变化,从而在自身回路中引起感应电动势的现象称为自感现象,所产生的感应电动势称为自感电动势。

自感现象可以通过如图 10-15 所示的实验来演示,当迅速地把开关 S 断开时,可以看到灯泡先是猛然一亮,然后再逐渐熄灭。这是因为当切断电源时,线圈中产生感应电动势,虽然电源已切断,但线圈 L 和灯泡 A 组成了闭合回路,感应电动势在这个回路中引起感应电流。

设通过导体回路的电流为 I ,根据毕奥-萨伐尔定律,此电流在空间任意一点激发的磁感应强度都与 I 成正比,因此穿过回路本身所围面积的磁通量也与 I 成正比,即

$$\Phi = LI \quad (10.9)$$

式中 L 为比例系数,称为自感,实验表明,自感与回路形状、大小及周围介质的磁导率有关。由式(10.9)可以看出,如果 I 为单位电流,则 $L = \Phi$ 。可见,某回路的自感,在数值上等于回路中的电流为一个单位时,穿过此回路所围面积的磁通量。

当回路为 N 匝线圈时,式(10.9)应改写为

$$\Psi = N\Phi = LI \quad (10.10)$$

这时, N 匝线圈的自感,在数值上等于线圈中的电流为一个单位时,穿过此线圈中的磁通匝数。

根据法拉第电磁感应定律,由式(10.9)可求得自感电动势

$$\epsilon_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}\right)$$

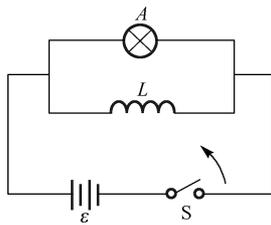


图 10-15 自感现象

如果回路形状、大小及周围介质的磁导率都不随时间变化,则 L 为一常量,故

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (10.11)$$

由上式可以看出,自感的意义也可以这样来理解:某回路的自感,在数值上等于回路中的电流随时间的变化率为一个单位时,在回路中所引起的自感电动势的绝对值。

式(10.11)反映了自感电动势与电流变化率之间的关系,其中的负号是楞次定律的数学表示,表示自感电动势将反抗回路中电流的改变,也就是说,当线圈回路中的 $\frac{dI}{dt} > 0$ 时, $\epsilon_L < 0$ 即自感电动势与电流方向相反;反之,当 $\frac{dI}{dt} < 0$ 时, $\epsilon_L > 0$, 即自感电动势与电流方向相同。

在国际单位制中,自感的单位为亨利,用符号 H 表示。由式(10.9)可知, $1\text{H} = 1 \text{Wb}/\text{A}$ 。由于亨利的单位比较大,常用毫亨(mH)与微亨(μH)作为自感单位。 $1 \text{mH} = 10^{-3} \text{H}$, $1 \mu\text{H} = 10^{-6} \text{H}$ 。

在工程技术和日常生活中,自感现象的应用是很广泛的,如无线电技术和电工中使用的扼流圈,在日光灯上装置的镇流器等就是利用自感效应的常见实例。但是在有些情况下,自感会带来危害,必须采取措施予以防止,如自感与电容组成的谐振电路和滤波器等,在供电系统中切断载有强大电流的电路时,由于电路中自感元件的作用,开关触头处会出现强烈的电弧,容易危及设备及人身安全,为了避免事故,必须使用“灭弧”的装置。

【例 10.5】 设有一长密绕直螺线管,长为 l ,截面积为 S ,管上绕线圈的总匝数为 N 。管中介质的磁导率为 μ ,试求其自感。

【解】 对于一根密绕长直螺线管,当通有电流 I 时,可以忽略漏磁和管两端磁场的不均匀性,把管内的磁场近似地看成是均匀分布的,此时线圈内各点的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

\mathbf{B} 的方向与螺线管的轴线平行,则穿过螺线管每匝线圈的磁通量都等于

$$\Phi = BS = \frac{\mu N I}{l} S$$

穿过 N 匝线圈的磁通匝链数为

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu N^2 I S}{l}$$

由 $N\Phi = LI$, 得

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$

设螺线管单位长度的匝数为 n ,螺线管的体积为 V ,有 $n = \frac{N}{l}$ 和 $V = lS$,故上式为

$$L = \mu n^2 V$$

可见,要获得较大自感的螺线管,通常采用较细导线制成的绕组,以增加单位长度上的匝数 n ;并选取较大磁导率 μ 的磁介质放在螺线管内,以增加其自感。从此例题可以明显看出,螺线管的自感只与自身条件有关。

【例 10.6】 如图 10-16 所示,由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆,其间充

满磁导率 μ 的磁介质, 电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流 I 大小相等而方向相反。设内、外圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2 , 求电缆单位长度的自感。

【解】 应用安培环路定理, 可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间磁感应强度都为零。在内外两圆筒之间, 离开轴线距离为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

在内外圆筒之间, 取如图所示的截面, 通过长为 l 的面积元 $l dr$ 的磁通量为

$$d\Phi = Bl dr = \frac{\mu Il}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

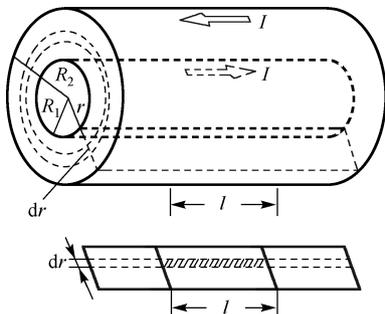


图 10-16 电缆的自感

通过两圆筒之间 l 长的截面的总磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu Il}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于 $\Phi = LI$, 可知单位长度电缆的自感为

$$L = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

10.3.2 互感电动势 互感

当线圈中的电流发生变化时, 不仅使得线圈本身要产生自感电动势, 而且使得穿过邻近线圈的磁通量也要发生变化, 根据电磁感应定律, 邻近线圈中也会有相应的感应电动势产生, 这种现象称为互感现象, 由此产生的电动势称为互感电动势。

图 10-17 所示是两个邻近的线圈 1 和 2, 分别通有电流 I_1 和 I_2 , 设两个线圈的位置固定不变, 周围磁介质的磁导率也不改变, 若线圈 1 中电流 I_1 所激发的磁场穿过线圈 2 的磁通量是 Φ_{21} , 根据毕奥-萨伐尔定律, 在空间任意一点, I_1 所建立的磁感应强度都与 I_1 成正比, 因此, I_1 的磁场穿过线圈 2 的磁通量也必然与 I_1 成正比, 所以有

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

式中 M_{21} 是比例系数。

同理, 线圈 2 中电流 I_2 所激发的磁场穿过线圈 1 的磁通量 Φ_{12} 应与 I_2 成正比, 所以有

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$

式中 M_{12} 是比例系数。

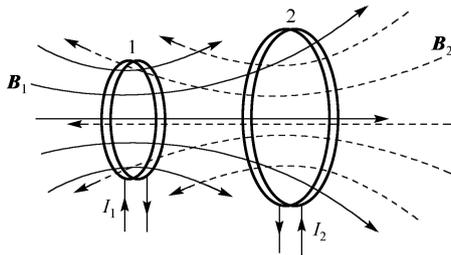


图 10-17 互感

比例系数 M_{21} 和 M_{12} 应与两个线圈的形状、大小、匝数、相对位置及周围磁介质的磁导率有关, 所以把它叫做两线圈的互感。理论和实验证明, 在两个线圈的形状、大小、匝数、相对位置及周围磁介质的磁导率都保持不变时, M_{21} 和 M_{12} 是相等的, 如果令 $M_{21} = M_{12} = M$, 则上述两式可简化为

$$\Phi_{21} = MI_1, \quad \Phi_{12} = MI_2 \quad (10.12)$$

从上面两式可以看出, 两个线圈的互感 M 在数值上等于其中一个线圈中的电流为一单位时, 穿过另一个线圈所围面积的磁通量。

由此可得, 当线圈 1 中的电流 I_1 发生变化时, 根据电磁感应定律, 在线圈 2 中引起的互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (10.13)$$

同理, 当线圈 2 中的电流 I_2 发生变化时, 根据电磁感应定律, 在线圈 1 中引起的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (10.14)$$

从上面两式可以看出, 互感 M 的意义也可以这样来理解: 两个线圈的互感 M , 在数值上等于其中一个线圈中的电流随时间的变化率为一个单位时, 在另一个线圈中所引起的互感电动势的绝对值。另外还可以看出, 当一个线圈中的电流随时间的变化率一定时, 互感越大, 在另一个线圈中引起的互感电动势就越大; 反之, 互感越小, 在另一个线圈中引起的互感电动势就越小。所以互感式表明相互感应强弱的一个物理量。互感的单位和自感的相同, 都是亨利(H)。

式(10.13)中的负号表示在一个线圈中引起的互感电动势要反抗另一个线圈中电流的变化。

互感现象是在一些电器及电子线路中时常遇到的现象, 有些电器利用互感现象把电能从一个回路输送到另一个回路中去, 例如变压器及感应圈等。有时互感现象也会带来不利的一面, 例如收音机各回路之间、电话线与电力输送线之间会因互感现象产生有害的干扰, 了解互感现象的物理本质, 就可以设法改变电器间的布置, 以尽量减小回路间相互磁耦合的影响。互感通常用实验方法来测定, 只是某些简单的情况才可以用计算的方法求得。

【例 10.7】 如图 10-18 所示, 两个同轴的密绕长直螺线管 C_1 、 C_2 , 长度均为 L , 截面半径都是 r , 匝数分别为 N_1 和 N_2 , 试计算它们的互感。

【解】 从题意知, 这两个同轴的密绕长直螺线管 C_1 、 C_2 是半径相等的密绕螺线管, 而且它们的形状、大小、磁介质及相对位置均固定不变。设电流 I_1 通过螺线管 C_1 , 此螺线管内的

磁感应强度为

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

由 I_1 所激发的磁场通过 C_2 每匝线圈的磁通量为

$\mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 \pi r^2$, 所以通过 C_2 线圈 N_2 匝的磁链数为

$$\Phi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} I_1 \pi r^2$$

当 C_1 中电流 I_1 变化时, 在 C_2 线圈回路中将产生互感电动势

$$\epsilon_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

将上式改写成下列形式:

$$\epsilon_{21} = - M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (10.15)$$

式中 $M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r^2$ 。

同样, 当 C_2 线圈中所通有的电流 I_2 变化时, 在 C_1 线圈回路中也将产生互感电动势

$$\epsilon_{12} = - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r^2 \frac{dI_2}{dt} = - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (10.16)$$

式(10.15)和式(10.16)是互感电动势与电流变化率之间的关系, 而且 $M_{21} = M_{12} =$

$\mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r^2$ 。所以, 两个同轴的密绕长直螺线管 C_1 、 C_2 的互感为

$$M = M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi r^2$$

可以证明, 对于任意形状的两个回路, 总是有 $M_{21} = M_{12}$ 的关系, 它反映了两个相邻回路各在另一回路中产生互感电动势的能力。互感和自感一样只和两个回路的形状、相对位置及周围介质的磁导率有关, 而与电流无关。

10.4 磁场的能量

根据载流线圈所存储的磁能是存储在线圈的磁场中的观点, 我们分别讨论自感线圈和长直密绕螺线管的储能, 得出计算磁能密度和磁场能量的基本关系。

在图 10-15 所示的实验中, 当开关 S 断开后, 灯泡先是猛然一亮, 然后再逐渐熄灭。在这个过程中, 电源已不再向灯泡供给能量, 那么这个能量从哪里来的呢? 由于使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势产生的电流, 而这个电流随着线圈中的磁场的消失而逐渐消失, 所以可以认为使灯泡闪亮的能量原来存储在通有电流的线圈中, 确切地说存储在在线圈的磁场中, 这种能量叫磁场能量。

设有一个自感为 L 的线圈与电源接通, 线圈中通有电流 I 时所存储的磁场能量应该等于该电流消失时自感电动势所做的功, 此功计算如下。以 $i dt$ 表示在短路后某一时间 dt 内通过灯泡的电量, 则在这段时间内自感电动势所做的功为

$$dA = - \epsilon_L i dt = - L \frac{di}{dt} i dt = - L i di$$

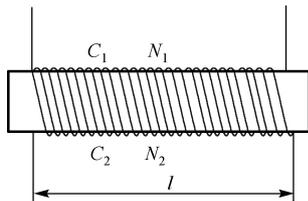


图 10-18 两个共轴螺线管的互感

电流由起始值 I 减小到零时, 自感电动势所做的总功为

$$A = \int dA = - \int_I^0 Li di = \frac{1}{2} LI^2$$

自感系数为 L 的线圈通有电流 I 时所具有的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (10.17)$$

这就是自感磁能公式。

式(10.17)是用线圈的自感及其中电流表示的磁能, 由于磁能是定域在磁场中的, 通常我们还可以把磁能用描述磁场本身的物理量 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 来表示。

为了简单起见, 我们以长直螺线管为例进行讨论。考虑一个很长的直螺线管, 管内充满磁导率为 μ 的均匀磁介质, 当螺线管通有电流 I 时, 由前几章中知螺线管内的磁感应强度 $B = \mu n I$, 它的自感系数 $L = \mu n^2 V$, 因此, 螺线管内的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V$$

因为螺线管内磁场是均匀分布的, 所以, 螺线管内磁场能流密度为

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH \quad (10.18)$$

ω_m 表示磁场中单位体积空间的能量, 称为磁场能量密度。磁场能量密度的公式虽是从螺线管中均匀磁场的特例导出的, 但它是适用于各种类型磁场的普遍公式。如果知道磁场能量密度及均匀磁场所占空间, 可用上式计算出磁场的总磁能。倘若磁场是不均匀的, 那么可以把磁场划分为无数体积元 dV , 在每个小体积内, 磁场可以看成是均匀的, 因此式(10.18)就能表示这些体积元内的磁场能量密度, 于是体积为 dV 的磁场能量为

$$dW_m = \omega_m dV = \frac{1}{2} BH dV \quad (10.19)$$

任意场空间总的磁场能量为

$$W_m = \int_V \omega_m dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV \quad (10.20)$$

因为式(10.17)和式(10.20)是相等的, 所以

$$\frac{1}{2} LI^2 = \int_V \frac{1}{2} BH dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

如果能求出电流回路的磁场能量, 根据此式就可求出回路的自感 L 。

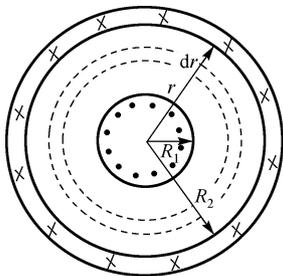


图 10-19 同轴电缆的横截面

【例 10.8】 一根很长的同轴电缆, 如图 10-19 所示, 由半径为 R_1 的圆柱体与内半径为 R_2 的同心圆柱壳组成, 电缆中央的导体上载有稳定电流 I , 再经外层导体返回形成闭合回路。试计算: (1) 长为 l 的一段电缆内的磁场中所储藏的能量; (2) 该段电缆的自感。

【解】 (1) 由安培环路定理可知, 在内外导体间的区域内离轴线距离为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在电缆外面, $B=0$, 在内外导体的内部也都存在磁场, 同样可由安培环路定理求得。适当选择电缆尺寸, 使绝大部分磁能储藏在两个导体之间的空间内, 则此空间中离轴线距离为 r 的磁能密度为

$$\omega_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在半径为 r 与 $r + dr$, 长 l 的圆柱壳空间之内的磁能

$$dW_m = \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr l = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

对上式积分可得储藏在内外导体间空间内的总磁能

$$W_m = \int_V \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 由磁能公式 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 可求出长为 l 的同轴电缆的自感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

10.5 位移电流 麦克斯韦方程组

前面我们讨论过变化的磁场激发电场的问题, 变化的电场能否激发磁场呢?

10.5.1 位移电流

1. 位移电流

我们曾讨论了稳恒电流的磁场的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 = \int_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} \quad (10.21)$$

这个定理表明, 真空中的磁感应强度沿任一闭合回路的环流等于此闭合回路所包围的传导电流的代数和, $\sum I_0$ 是穿过以闭合回路 l 为边界的任意曲面 S 的传导电流, 等于传导电流密度 \mathbf{j}_0 在 S 面上的通量。在非稳恒电流的情况下, 这个定律是否仍然适用呢? 为了讨论这个问题, 可以先从电流的连续性问题谈起。

为了考查在非稳恒条件下, 安培环路定理是否仍然成立, 我们分析如图 10-20 所示的电容器充放电电路。电容器的充放电过程显然是非稳恒过程, 导线中的电流是随时间变化的, 并且在两极板之间的绝缘介质中没有传导电流。如果我们围绕导线取一闭合回路 l , 并以 l 为边界作两个曲面 S_1 和 S_2 , 其中 S_1 与导线相交, 而 S_2 穿过两极板之间的绝缘介质, 则有

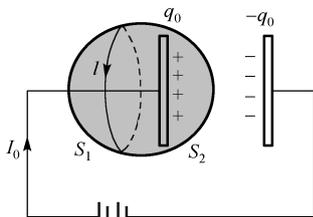


图 10-20 电容器充放电电路

$$\int_{S_1} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = I_0 \quad (10.22a)$$

$$\int_{S_2} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (10.22b)$$

就是说,电容器的存在破坏了电路中传导电流的连续性,使得以同一闭合回路 l 所作的不同曲面 S_1 和 S_2 上穿过的电流不同,从而式(10.21)失去了意义。因此,在非稳恒磁场的情况下安培环路定理式(10.21)不再适用,必须以新的规律来代替它。

在图 10-20 的电容器充电过程中,传导电流在电容器极板上终止的同时,将在极板表面引起自由电荷的积累,即正极板 $+q_0$ 增加、负极板 $-q_0$ 增加。从而引起两极板之间的电场随之变化。因此穿过任意闭合曲面 S 的传导电流密度的通量 $\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}$ 就是流出 S 面的电流,它应当等于 S 面内部自由电荷在单位时间的减少率,即

$$\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_0}{dt} \quad (10.23)$$

其中 S 是由 S_1 和 S_2 构成的闭合曲面, q_0 是累积在闭合面 S 内的极板上的自由电荷,即图 10-20 所示的正极板表面的自由电荷。

另一方面,根据麦克斯韦的假设,对此非稳恒电场高斯定理仍然成立,则有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

对此式两边求微商,得

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq_0}{dt}$$

把此式代入式(10.23),得

$$\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可将此式改写为

$$\oint_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

或

$$\int_{S_1} \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (10.24)$$

由此可见,在非稳恒条件下,尽管传导电流密度 \mathbf{j}_0 不一定连续,但 $\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 这个量永远是连续的。并且 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 具有电流密度的性质,麦克斯韦把它称为位移电流密度 \mathbf{j}_D ,即

$$\mathbf{j}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (10.25)$$

而把 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 称为位移电流 I_D ,即

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} \quad (10.26)$$

并把传导电流 I_0 与位移电流 I_D 合在一起称为全电流 I ,即全电流 I 为

$$I = I_0 + I_D = \int_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (10.27)$$

在图 10-20 所示的电路中,电容器极板表面中断了的传导电流 I_0 被绝缘介质中的位移电流 $I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$ 接续,二者合在一起保持全电流的连续性。在一般情况下,电介质中的电流主要

是位移电流, 传导电流可忽略不计, 但在超高频电流情况下, 导体内的传导电流和位移电流均起作用, 不可忽略。

因为在电介质中 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 所以位移电流密度 \mathbf{j}_D 为

$$\mathbf{j}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

上式中右边第二项来自交变电路中电介质的反复极化, 若在真空中, 这一项等于零。因此, 真空中位移电流密度为

$$\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

它是位移电流的基本组成部分, 说明真空中的位移电流或曰“纯粹”的位移电流本质上是变化的电场, 而与电荷的定向运动无关。

2. 全电流的安培环路定理

在引进了位移电流的概念之后, 麦克斯韦为了把安培环路定理推广到非稳恒情况下也适用的普遍形式, 用全电流代替式(10.21)右边的传导电流, 得到

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.28)$$

即在普遍情况下, 磁场强度 \mathbf{H} 沿任一闭合回路 l 的积分等于穿过以该回路为边界的任意曲面的全电流, 这就是麦克斯韦的全电流定律。

麦克斯韦的位移电流假设的实质在于, 它说明了位移电流与传导电流一样都是激发磁场的源, 其核心是变化的电场可以激发磁场。但是, 位移电流与传导电流仅仅在激发磁场这一点上是相同的。本质上位移电流是变化着的电场, 而传导电流则是自由电荷的定向运动。此外, 传导电流在通过导体时会产生焦耳热, 而导体中的位移电流则不会产生焦耳热。高频情况下介质的反复极化会放出大量热, 这是位移电流热效应的原因。但这与传导电流通过导体时放出的焦耳热不同, 遵从完全不同的规律。

10.5.2 麦克斯韦方程组

前面我们分别介绍了麦克斯韦关于涡旋电场和位移电流这两个假设, 涡旋电场假设指出了变化的磁场激发涡旋电场, 位移电流的假设又指出了变化的电场激发变化的磁场, 这两个假设揭示了电场和磁场之间的内在联系。存在变化电场的空间必然存在变化磁场, 同样, 存在变化磁场的空间也必然存在变化电场, 变化电场和变化磁场密切地联系在一起, 组成了一个统一的电磁场, 这就是麦克斯韦关于电磁场的基本概念。

通过前面研究静电场和稳恒磁场, 我们得到如下规律: 麦克斯韦把电磁现象的普遍规律概括为四个方程式, 通常称之为麦克斯韦方程组。

(1) 静电场的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n q_i$$

(2) 静电场的环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

(3) 稳恒磁场的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(4) 稳恒磁场的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0$$

对于一般电磁场, 在麦克斯韦引入涡旋电场和位移电流两个重要概念后, 得到电磁场的四个基本方程。

(1) 电场的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0 \quad (10.29a)$$

(2) 电场的环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.29b)$$

(3) 磁场的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (10.29c)$$

(4) 磁场的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.29d)$$

这四个方程就是麦克斯韦方程组的积分形式。

麦克斯韦方程组的积分形式既全面反映了电场和磁场的基本性质, 又把电磁场作为一个整体, 用统一的观点阐明了电场和磁场之间的联系。因此, 麦克斯韦方程组是对电磁场基本规律所做的总结性、统一性的简明而完美的描述。麦克斯韦电磁场理论的建立是 19 世纪物理学发展史上又一个重要的里程碑, 正如爱因斯坦所说: “这是自牛顿以来物理学所经历的最深刻和最有成果的一项真正观念上的变革”。所以人们常称麦克斯韦是电磁学上的牛顿。

10.6 电磁振荡 电磁波

10.6.1 振荡电路 电磁波的产生和传播

麦克斯韦在 1864 年预言了电磁波的存在。1888 年赫兹利用振荡器和谐振器在实验中证实了电磁波的存在。电磁波是电磁振荡在空间的传播, 它是发射台通过天线辐射出来的。原则上, 任何一个 LC 共振电路都可以作为发射电磁波的振源。然而, 要想有效地把电路中的电磁能发射出去, 除了必须有不断的能量补给之外, 还必须具备以下条件:

(1) 振荡频率 ν_0 必须足够高。由于电磁波在单位时间内辐射的能量是与频率的四次方成正比的, 而且

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

因此为了有效地把电路中的电磁能发射出去, 必须尽量减小 L 和 C 的值, 以提高电场振荡频率 ν_0 。

(2) 电路必须开放。LC 振荡电路是集中性元件的电路, 电场和电能都集中在电容元件中,

磁场和磁能都集中在电感元件中，为了把电磁能有效地发射出去，必须把电容加以改造，以便使电磁场能够充分地分布在空间中。

为此设想把 LC 振荡电路按图 10-21(a)、(b)、(c)、(d) 顺序逐步加以改造，通过减小电容器极板面积、增大两极板间的距离和减少线圈匝数，使 C 和 L 越来越小，最后演化成直线型振荡电路，电流在其中往复振荡，两端出现正负交替的等量异号电荷，此电路称为振荡偶极子或偶极子。发射台的天线要比偶极子复杂得多，但发射的电磁波都可以看成是偶极子所发射的电磁波的叠加。

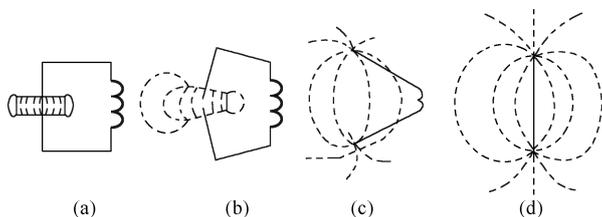


图 10-21 从 LC 振荡电路到振荡电偶极子

设振荡偶极子的电偶极矩的大小随时间的余弦或正弦规律变化，即

$$p = p_0 \cos \omega t$$

在偶极子中心附近的近场区内，即偶极子离中心的距离 r 远小于电磁波波长 λ 的范围内，电磁波传播速度有限性的影响可以忽略，电场的瞬时分布与静态偶极子的电场很相近，设 $t = 0$ 时偶极子的正负电荷都在中心，然后分别作简谐振动；于是，起始于正电荷终止于负电荷的电场线的形状也随时间变化，图 10-22 定性地画出了在偶极子附近，一条电场线从出现到形成闭合圈，然后脱离电荷并向外扩张的过程，当然，在电场变化的同时也产生了磁场，磁场线是以偶极子为轴的疏密相间的同心圆，电场线与磁场线互相套合，以一定的速度由近及远向外传播。

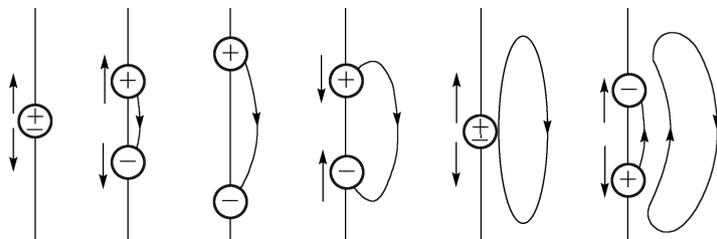


图 10-22 振荡电偶极子附近电场线变化过程示意图

在偶极子振荡足够远的地方，即 $r \gg \lambda$ 的波场区，电场和磁场的变化比较简单，电场线都是闭合的，如图 10-23(a) 所示，当距离 r 增大时，波面逐渐趋于球形，电场强度 \mathbf{E} 趋于切线方向，也就是说，在波场区内 \mathbf{E} 垂直于矢径 \mathbf{r} ，磁场线的分布如图 10-23(b) 所示，它们是一些以偶极子轴线为轴的同心圆，磁感应强度 \mathbf{B} 同时与 \mathbf{E} 、 \mathbf{r} 垂直。

1865 年，麦克斯韦由电磁场理论预见了电磁波的存在，二十多年后，德国物理学家赫兹于 1888 年通过实验证实了电磁波的存在。

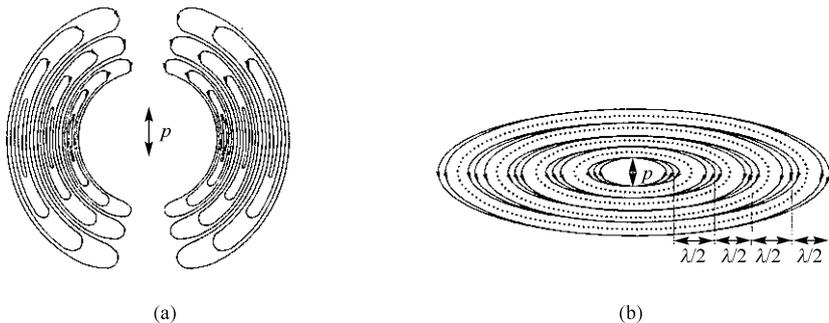


图 10-23 波场区内的电场线和磁场线

10.6.2 平面电磁波的基本性质

在远离波源的自由空间中传播的电磁波可近似看成平面波,其电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 在时刻 t 的量值可表示为

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (10.30a)$$

$$H = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (10.30b)$$

u 是电磁波的传播速度, E_0 与 H_0 分别为电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 的幅值。

自由空间传播的平面电磁波具有以下性质:

(1) 电磁波是横波。令 \mathbf{k} 为沿电磁波传播方向的单位矢量, 则 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 均与 \mathbf{k} 垂直, 即 $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ 。

(2) 电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量相互垂直, 即 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$

(3) \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 同相位, 并在任何时刻、任何地点, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 和 \mathbf{k} 三个矢量总构成右旋关系, 即 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向总是沿着 \mathbf{k} 的传播方向, 即波速 u 的方向, 如图 10-24 所示。

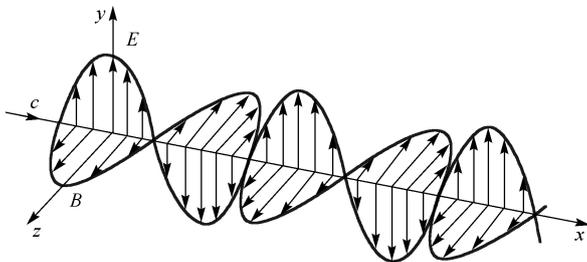


图 10-24 平面电磁波的电场和磁场

(4) 在同一点 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的量值间关系为 $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu_r} H_0$ 。

(5) 电磁波的传播速度为 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$, 即 u 只由媒质的介电常数和磁导率决定。在真

空中 $\epsilon_r = \mu_r = 1$, 故

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

将 ϵ_0 、 μ_0 的值代入上式得

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.9979 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

此理论计算结果和实验已测定的真空中的光速符合得相当好, 由此, 麦克斯韦得出结论: 光波是一种电磁波。

10.6.3 电磁波谱

实验表明, 电磁波谱的范围很广, 波长没有上下限的限制, 从无线电波、红外线、可见光、紫外线到 X 射线和 γ 射线等都是电磁波, 它们的本质完全不同, 只是波长(或频率)有很大的差异, 由于波长不同, 它们有不同的特性, 而且产生的方式也各不相同, 为了便于比较, 人们按照它们的波长(或频率)大小依次排列成表, 叫电磁波谱。表 10-1 列出了各种电磁波的波长范围、应用及其主要产生方式。

表 10-1 电磁波的波长范围、应用及其主要产生方式

电磁波谱			应用	电磁辐射的产生方式
频率/Hz	辐射	波长/m		
10^{25}	γ 射线	10^{-17}	癌症治疗	由原子核衰变时发出或高能粒子与原子核碰撞所产生
10^{23}		10^{-15}		
10^{21}		10^{-13}		
10^{19}	X射线	10^{-11}	材料探伤 X射线诊断	用高速电子流轰击原子中的内层电子所产生
10^{17}	紫外线	10^{-9}	原子结构识别 人类的视觉	由炽热物体、气体放电或其他光源激发分子或原子等微观客体所产生
10^{15}	可见光	10^{-7}		
10^{13}	红外线	10^{-5}		
10^{11}	微波	10^{-3}	微波炉等	由电子线路中电磁振荡所激发
10^9		10^{-1}		
10^7	无线电波	10^1	雷达 电视 调频、调幅收音机 长波段收音机 导航	
10^5		10^3		
10^3		10^5		
10^1		10^7		

本章小结

一、法拉第电磁感应定律

1. 法拉第电磁感应定律: 当穿过闭合回路所包围面积的磁通量发生变化时, 不论这种变化是什么原因引起的, 回路中都会产生感应电动势, 且感应电动势与磁通量对时间的变化率成正比。

$$\epsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{负号为楞次定律的数学表示})$$

如果回路由 N 匝密绕线圈组成, 则通过线圈的磁通量用磁链 $\Psi = N\Phi$ 表示, 则

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

2. 感应电流: $I_i = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}$

3. 感应电荷: $q = \frac{1}{R} (\Phi_{2m} - \Phi_{1m})$

二、动生电动势与感生电动势

1. 动生电动势: $\epsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{F}_m}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

2. 感生电动势: $\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$, \mathbf{E}_k 为感生电场强度

三、自感与互感

1. 自感现象: 导体回路中由于自身电流的变化, 而在自己回路中引起感应电动势的现象称为自感现象, 所产生的感应电动势称为自感电动势。

$$\text{自感电动势: } \epsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{自感系数: } L = \frac{\Psi}{I}$$

2. 互感现象: 当线圈中的电流发生变化时, 在邻近线圈中产生感应电动势, 这种现象称为互感现象, 产生的电动势称为互感电动势。

$$\text{互感电动势: } \epsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}, \epsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\text{互感系数: } M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

四、磁场能量密度和磁场能量

1. 自感磁能: $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

2. 磁场能量密度: $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$

3. 磁场能量: $W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV$

五、位移电流

1. 位移电流密度: $\mathbf{j}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$

2. 位移电流: $I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$

六、麦克斯韦方程组

1. $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$ (电场的高斯定理)
2. $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ (法拉第电磁感应定律)
3. $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (磁场的高斯定理)
4. $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ (全电流的安培环路定理)

七、平面电磁波的性质

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

$$H = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

- (1) 电磁波是横波。 $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ 。
- (2) 电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量相互垂直, 即 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ 。
- (3) \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 同相位, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 和 \mathbf{k} 三个矢量总构成右旋关系, 即 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向总是沿着的传播方向, 即波速 u 的方向。
- (4) $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r} E = \sqrt{\mu_0 \mu_r} H$ 。
- (5) 电磁波的传播速度为 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, ($c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$)。

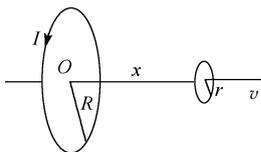
习 题 10

一、填空题

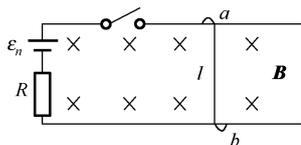
10.1 动生电动势和感生电动势的非静电力分别是_____和_____。

10.2 两个共轴圆线圈, 其相对位置如题 10-2 图所示, 大线圈中的电流为 I , 当小线圈以速率 v 沿轴向远离大线圈运动时, 其中的感应电动势 $\epsilon_i =$ _____。

10.3 一载流回路置于均匀磁场 \mathbf{B} 中, 如题 10-3 图所示, 当回路接通后 ab 将受磁力作用向_____运动, 运动的最大速率 $v_m =$ _____, 此时回路电流 $I =$ _____。



题 10-2 图



题 10-3 图

10.4 两长直密绕螺线管,长度及线圈匝数相同,半径及磁介质不同,设其半径之比为 $r_1:r_2=1:2$,磁导率之比为 $\mu_1:\mu_2=2:1$,则其自感系数之比 $L_1:L_2=$ _____,通以相同的电流时所储的磁能之比 $W_1:W_2=$ _____。

10.5 麦克斯韦电磁理论中提出了涡旋电场和位移电流的假设。涡旋电场由 _____ 产生;位移电流由 _____ 产生。

二、选择题

10.6 电子在均匀磁场中作圆周运动,其周期为 T ,其他条件不变,磁感应强度增大一倍时,其周期变为()。

- A. $2T$ B. T C. $0.5T$ D. $4T$

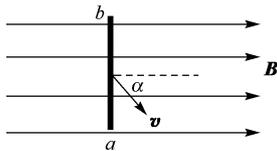
10.7 将形状完全相同的铜环和木环静止放置在交变磁场中,并假定通过两环面的磁通量随时间的变化率相等,不计自感,则()。

- A. 铜环中有感应电流,木环中无感应电流
B. 铜环中有感应电流,木环中有感应电流
C. 铜环中感应电场大,木环中感应电场小
D. 铜环中感应电场小,木环中感应电场大

10.8 在如题 10-8 图的均匀磁场中,长度为 L 的直导线 ab 在垂直于纸的平面内与 \mathbf{B} 成 α 角度,以速度 v 移动,直导线 ab 中的电动势为()。

- A. BLv
B. $BLv \sin\alpha$
C. $BLv \cos\alpha$

D. 0



题 10-8 图

10.9 在感应电场中电磁感应定律可写成 $\oint \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$,式中 \mathbf{E}_k 为感应电场强度。此式表明()。

- A. 闭合曲线 l 上 \mathbf{E}_k 处处相等
B. 感应电场是保守场
C. 感应电场的电力线不是闭合曲线
D. 在感应电场中不能像对静电场那样引入电势的概念

10.10 对于单匝线圈取自感系数的定义式为 $L = \frac{\Phi}{I}$,当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变,且无铁磁性物质时,若线圈中的电流变小,则线圈的自感系数 L ()。

- A. 变大,与电流成反比关系 B. 变小
C. 不变 D. 变大,但与电流不成反比关系

10.11 关于电磁波下述说法错误的是()。

- A. 电磁波是横波,电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 的方向与电磁波的传播方向垂直
B. 电磁波中磁场和电场的变化是同相的
C. 电磁波传播的同时伴随着能量的传播

D. 电磁波中电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 的方向也相互垂直, 传播方向、电场方向和磁场方向三者形成左手关系。

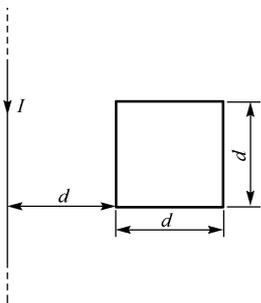
三、计算题

10.12 一铁芯上绕有线圈 100 匝, 已知铁芯中磁通量与时间的关系为 $\Phi = 8.0 \times 10^{-5} \sin 100\pi t$, 式中 Φ 的单位为 Wb, t 的单位为 s, 求在 $t = 1.0 \times 10^{-2}$ s 时, 线圈中的感应电动势。

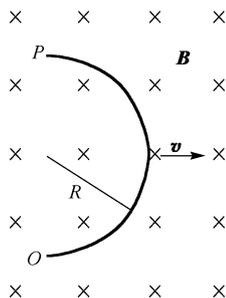
10.13 一半径 $r = 10$ cm 的圆形回路放在 $B = 0.8$ T 的均匀磁场中. 回路平面与 \mathbf{B} 垂直。当回路半径以恒定速率 $\frac{dr}{dt} = 80$ cm \cdot s $^{-1}$ 收缩时, 求回路中感应电动势的大小。

10.14 载流长直导线中的电流以 $\frac{dI}{dt}$ 变化率增长, 若有一边长为 d 的正方形线圈与导线处于同一平面内, 如题 10-14 图所示, 求线圈中的感应电动势。

10.15 如题 10-15 图所示, 把一半径为 R 的半圆形导线 OP 置于磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 当导线 OP 以匀速率 v 向右移动时, 求导线中感应电动势的大小, 哪端电势高?



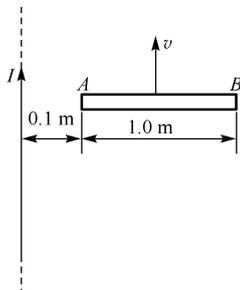
题 10-14 图



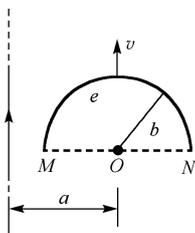
题 10-15 图

10.16 如题 10-16 图所示, 金属杆 AB 以匀速率 $v = 2.0$ m/s 平行于一长直导线移动, 此导线通有电流 $I = 40$ A, 求杆中的感应电动势, 杆的哪端电势较高?

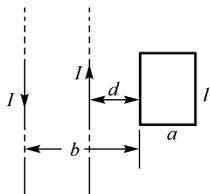
10.17 如题 10-17 图所示, 载有电流 I 的长直导线附近, 放一导体半圆环 MN 与长直导线共面, 且端点 MN 的连线与长直导线垂直。半圆环的半径为 b , 环心 O 与导线相距 a 。设半圆环以速度 v 平行导线平移。求半圆环内感应电动势的大小和方向及 MN 两端的电势差 $U_M - U_N$ 。



题 10-16 图



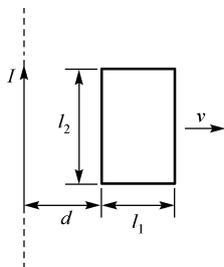
题 10-17 图



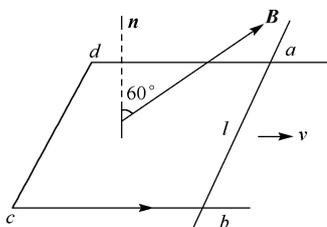
题 10-18 图

10.18 如题 10-18 图所示, 在两平行载流的无限长直导线的平面内有一矩形线圈。两导线中的电流方向相反、大小相等, 且电流以 $\frac{dI}{dt}$ 的变化率增大, 求: (1) 任一时刻线圈内所通过的磁通量; (2) 线圈中的感应电动势。

10.19 如题 10-19 图所示, 长直导线旁放一矩形导体线圈, 两者共面。该线圈在垂直于导线方向以速率 v 向右移动。求在图示位置处线圈中的感应电动势的大小和方向。



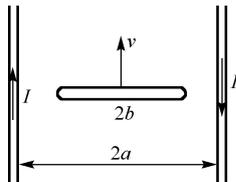
题 10-19 图



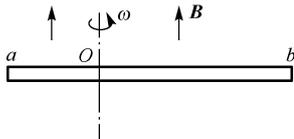
题 10-20 图

10.20 长度为 l 的金属杆 ab 以速率 v 在导电轨道 $abcd$ 上平行移动。已知导轨处于均匀磁场 \mathbf{B} 中, \mathbf{B} 的方向与回路的法线成 60° 角。如题 10-20 图所示, \mathbf{B} 的大小为 $B = kt$ (k 为常数)。设 $t=0$ 时杆位于 cd 处, 求任一时刻 t 导线回路中感应电动势的大小和方向。

10.21 如题 10-21 图所示, 长度为 $2b$ 的金属杆位于两无限长直导线所在平面的正中间, 并以速度 v 平行于两直导线运动。两直导线通以大小相等、方向相反的电流 I , 两导线相距 $2a$ 。试求金属杆两端的电势差及其方向。



题 10-21 图

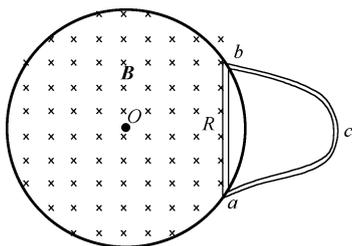


题 10-22 图

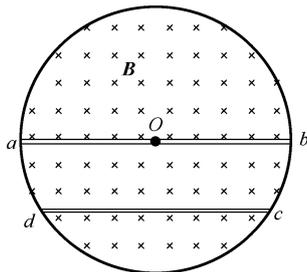
10.22 导线 ab 长为 l , 绕过 O 点的垂直轴以匀角速 ω 转动, $aO = \frac{l}{3}$, 磁感应强度 \mathbf{B} 平行于转轴, 如题 10-22 图所示。试求: (1) a 、 b 两端的电势差; (2) a 、 b 两端哪一点电势高?

10.23 半径为 R 的直螺线管中, 有 $\frac{dB}{dt} > 0$ 的磁场, 一任意闭合导线 $abca$, 一部分在螺线管内绷直成 ab 弦, a 、 b 两点与螺线管绝缘, 如题 10-23 图所示。设 $ab = R$, 试求闭合导线中的感应电动势。

10.24 如题 10-24 图所示, 在垂直于直螺线管管轴的平面上放置导体 ab 于直径位置, 另一导体 cd 在一弦上, 导体均与螺线管绝缘。当螺线管接通电源的一瞬间管内磁场如题 10-24 图示方向。试求: (1) ab 两端的电势差; (2) cd 两点电势高低的情况。



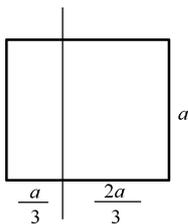
题 10-23 图



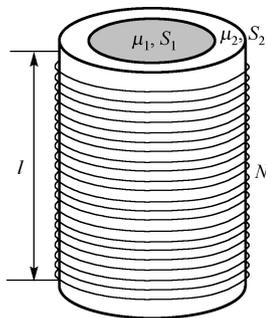
题 10-24 图

10.25 一无限长的直导线和一正方形的线圈如题 10-25 图所示放置(导线与线圈接触处绝缘)。求线圈与导线间的互感系数。

10.26 如题 10-26 图所示,螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱体,其截面积分别为 S_1 和 S_2 , 磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 , 管长为 l , 匝数为 N , 求螺线管的自感(设管的截面积很小)。



题 10-25 图



题 10-26 图

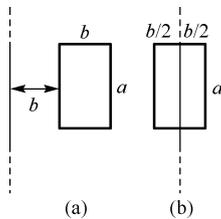
10.27 一矩形线圈长为 $a = 20$ cm, 宽为 $b = 10$ cm, 由 100 匝表面绝缘的导线绕成, 放在一无限长导线的旁边且与线圈共面。求题 10-27 图中所示(a)和(b)两种情况下, 线圈与长直导线间的互感。

10.28 两根平行长直导线, 横截面的半径都是 a , 中心相距为 d , 两导线属于同一回路。设两导线内部的磁通可忽略不计, 证明这样一对导线长度为 l 的一段自感为

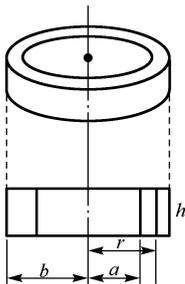
$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

10.29 一矩形截面的螺绕环, 如题 10-29 图所示, 共有 N 匝。试求: (1) 此螺线环的自感系数; (2) 若导线内通有电流 I , 环内磁能为多少?

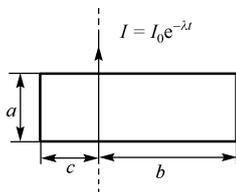
10.30 如题 10-30 图所示, 一无限长直导线通有电流 $I = I_0 e^{-\lambda x}$ (式中 I_0, λ 为恒量), 和直导线在一平面内有一矩形线框, 其边长与长直导线平行, 线框尺寸及位置且 $b/c = 3$ 。试求: (1) 直导线与线框间的互感系数; (2) 线框中的互感电动势。



题 10-27 图



题 10-29 图



题 10-30 图

10.31 一无限长圆柱形直导线，其截面各处的电流密度相等，总电流为 I 。求导线内部单位长度上所存储的磁能。

10.32 圆柱形电容器内、外导体截面半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$)，中间充满介电常数为 ϵ 的电介质，当两板间的电压随时间的变化为 $\frac{dU}{dt} = k$ 时 (k 为常数)，求介质内距圆柱轴线 r 处的位移电流密度。

10.33 试证平行板电容器的位移电流可写成 $I_D = C \frac{dU}{dt}$ ，式中 C 为电容器的电容， U 是电容器两极板的电势差。如果不是平行板电容器，以上关系还适用吗？

第四篇

波动光学篇

光学是物理学中最古老的学科之一。光学的发展已经有三千多年的历史，一直可以追溯到公元前一千多年。世界上最早的关于光学知识的文字记载，见于我国的《墨经》(公元前四百多年)。但直到 17 世纪前半叶，人们对于光的认识仅限于光的直线传播及光的反射、折射现象，而未涉及光是什么这个问题。

17 世纪下半叶，牛顿提出光的微粒说：光由微小的物质颗粒组成，粒子在均匀媒质中按力学定律作匀速直线运动。光微粒极轻，因此地球对它的引力根本表现不出来。根据微粒说，牛顿很容易地解释了反射定律(粒子与壁的弹性碰撞)，但解释折射定律便显得牵强。10 年之后，惠更斯提出了光的波动说，他把光看成是机械振动在一种假想的特殊物质(以太)中的传播，并由此解释了一些常见的光的现象。但在说明光的直线传播时，波动说也遇到了困难。

19 世纪初，英国人杨(T. Young, 1773—1829)通过杨氏双缝干涉实验，观察到了干涉现象，为波动说提供了充分的实验依据。十几年后，法国人菲涅耳(A. J. Fresnel, 1788—1827)在阿喇艾(D. Arago, 1786—1853)的支持和合作下，完成了光的波动说理论，波动说逐渐代替了微粒说。

19 世纪中叶，麦克斯韦在电磁场理论的基础上提出了光的电磁波理论，人们逐渐认识到光是波长在 390~760 nm 范围内的电磁波。应用麦克斯韦电磁波理论可以普遍解释光在两种媒质分界面上发生的反射、折射现象，也能满意地解释光的干涉、衍射和偏振等光学现象。

到 19 世纪末和 20 世纪初，当科学实验研究深入到微观领域时，在一些新的实验事实(如黑体辐射、光电效应、共振荧光灯)面前，光的电磁理论遇到了无法克服的困难，这使光学的概念发生了从连续到量子化的飞跃。1905 年，爱因斯坦提出了光子假说，圆满地解释了光与物质相互作用时表现出粒子性的实验事实。从此，光的量子说登上了历史舞台。面对这两种都有坚实实验基础的波动说和粒子说，人们认识到，光具有波粒二象性。

光的干涉、衍射和偏振现象在现代科学技术中的应用十分广泛，如长度的精密测量、光谱学的测量与分析、光测弹性研究、晶体结构分析等。20 世纪 60 年代激光的发现使光学的发展又获得了新的活力，开拓了光学研究和应用的新领域，如全息技术、信息光学、集成光学、光纤通信以及强激光下的非线性光学效应研究等，推动了现代科技的新发展。

本篇只是从波动的角度研究光的性质，分别介绍光的干涉、衍射和偏振等特性。

第 11 章

光的干涉

光是一种电磁波。通常意义上的光是指可见光，相应地真空中的波长在 760 nm 到 390 nm 之间。不同波长的可见光给人以不同颜色的感觉，波长从大到小给出从红到紫的各种颜色。

作为电磁波，光波也服从波的叠加原理。满足一定条件的两束光叠加时，在叠加区域光的强度或明暗有稳定的分布，这种现象称为光的干涉。

本章主要讲述光的干涉规律，如光的干涉条件和明暗条纹分布等。这些规律对机械波和物质波都同样适用。

11.1 光 波

11.1.1 光源

任何能发射光波的物体都可称为光源。同时，能够反射别的物体发出的光波的物体也可看做是光源，称为次级光源。各种光源的激发方式不同：有利用热能激发引起发光的热光源，有利用电能激发引起发光的电致发光，有利用光激发引起发光的光致发光，有利用化学反应而引起发光的化学发光。此外，还有利用受激辐射的激光光源。

光源的发光是其中大量分子或原子进行的一种微观过程。普通光源的发光机理是处于激发态的原子(或分子)的自发辐射，即光源中的原子从外界吸收了能量而处于激发态，处于激发态的原子极不稳定，它会自发地回到能量较低的低激发态或基态以保持系统的稳定，这个过程中原子将多余的能量以电磁波(光波)的形式向外辐射，这一跃迁过程所经历的时间很短，约为 $10^{-8} \sim 10^{-10}$ s，这也是一个原子(或分子)一次发光所持续的时间。可见原子发射的是一段长度有限、频率一定和振动方向一定的光波，通常称为光波列。每个原子发光是间歇的，一个原子经过一次发光后，只有重新获得足够能量后才会再次发光。因此，原子的发光是断续的，即原子的各次发光是完全独立、互不相关的，各次发出的光波列的频率和振动方向可能不同，而且它们每次何时发光是完全不确定的。在普通光源中，各个原子的激发和辐射彼此独立，是一种随机过程，不同原子在同一时刻所发出的波列在频率、振动方向和位相上也各自独立(如图 11-1 所示)。因此，普通光源发出的光波是光源中许多原子所发出的相互独立的光波列组成的。

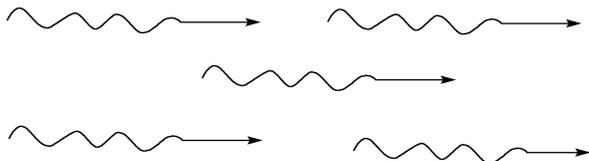


图 11-1 普通光源的各原子或分子所发出的彼此完全独立的光波波列

11.1.2 光的单色性与颜色

由于普通光源发出的光波列长度有限,根据傅里叶分析可知,一列有限长的周期性波列是由无数列振幅不同、频率连续变化的简谐波叠加而成的。所以它的频率就有一定大小的频宽,即有一定大小的谱线宽度。因此,普通光源发出的光波是含有很多不同波长的复合光,称为复色光。含有单一波长的光称为单色光。然而,严格的单色光在实际中是不存在的。在实际应用中,常用各种方法将光波波长限制在很窄的范围内,这种光称为准单色光。在此范围内,各种频率所对应的强度不同,由强度—波长曲线可以直观地表示出两者的关系,该曲线也称为光谱曲线(或称谱线),如图 11-2 所示。强度等于最大强度的一半的波长范围 $\Delta\lambda$ 叫做谱线宽度, $\Delta\lambda$ 越小,光的单色性越好。普通单色光源,如钠光灯、镉灯等、汞灯等,谱线宽度的数量级为 $0.1 \sim 10^{-3}$ nm,激光的谱线宽度只有 10^{-9} nm,甚至更小。

在各种波长 λ 的电磁波中,能为人类的眼睛所感受的,只是 $\lambda = 390 \sim 760$ nm 的狭小范围。该波段内的电磁波称为可见光。在可见光范围内,不同波长的光会引起不同的颜色感觉。表 11.1 即各种颜色与真空中的波长(频率)的对照。由表可见,波长从小到大呈现出从紫到红的各种颜色。

表 11.1 光的颜色与频率、波长对照表

光 色	波长范围(nm)	频率范围(Hz)
红	760~622	$3.9 \times 10^{14} \sim 4.7 \times 10^{14}$
橙	622~597	$4.7 \times 10^{14} \sim 5.0 \times 10^{14}$
黄	597~577	$5.0 \times 10^{14} \sim 5.5 \times 10^{14}$
绿	577~492	$5.5 \times 10^{14} \sim 6.3 \times 10^{14}$
青	492~450	$6.3 \times 10^{14} \sim 6.7 \times 10^{14}$
蓝	450~435	$6.7 \times 10^{14} \sim 6.9 \times 10^{14}$
紫	435~390	$6.9 \times 10^{14} \sim 7.7 \times 10^{14}$

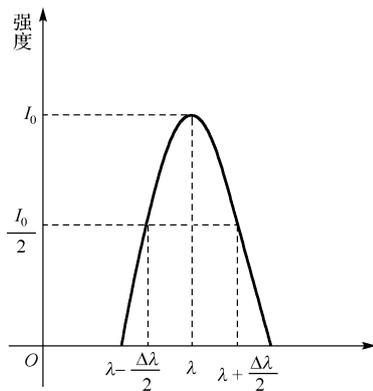


图 11-2 谱线及其宽度

11.2 光的相干性 光程差

11.2.1 光的相干性

干涉现象是波动过程的基本特征之一,在讨论机械波时已知两列波相遇发生干涉现象的条件是:振动频率相同、振动方向相同和相位差恒定。但在实验中发现,从两个独立的同频率的单色普通光源发出的光相遇,却不能得到干涉图样。下面对此做一简单的分析。

对于光波而言,振动的是电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} , 其中能引起人的视觉和感光仪器感光的是 \mathbf{E} , 故通常把 \mathbf{E} 称为光矢量。设两个振动方向相同、频率相同的单色光在空间某一点相遇, 它们的光矢量的大小分别为

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad E_2 = E_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

叠加后合成的光矢量的大小为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.1)$$

式中, $E_0 = \sqrt{E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ 。

在观测时间内, 平均光强 I 正比 E_0^2 的时间平均值, 即

$$I \propto \overline{E_0^2} = \overline{E_{10}^2} + \overline{E_{20}^2} + 2E_{10}E_{20} \overline{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (11.2)$$

如果这两束同频率的单色光是分别由两个独立的普通光源发出的, 由于光源中原子或分子发光的独立性和随机性, 两光波间的相位差 $\Delta\varphi$ ($\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$) 也将随机地变化, 并等概率地取 $0 \sim 2\pi$ 间的所有值, 因此, 在所观测的时间内 $\overline{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0$, $\overline{E_0^2} = \overline{E_{10}^2} + \overline{E_{20}^2}$, 即

$$I = I_1 + I_2 \quad (11.3)$$

上式表明两束光重合后的光强等于两束光分别照射时的光强 I_1 和 I_2 之和, 把这种情况称为光的非相干叠加。

如果这两束光来自同一光源且使它们的相位差始终保持恒定, 则其合成后的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (11.4)$$

此时 $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ 将不随时间而变, $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ 被称为干涉项, 这种情况称为光的相干叠加。

由式(11.4)可知, 由于两束光间存在着相位差, 合成后的光强不仅取决于两束光的光强 I_1 和 I_2 , 还与两束光之间的相位差 $\Delta\varphi$ 有关。当两束光在空间不同位置相遇时, 由于这些位置离光源的距离不同, 因此其相位差 $\Delta\varphi$ 也将不同, 在空间各个不同点处的光强将发生连续变化, 即光强在空间重新分布。

当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, 这些位置的光强最强, 称为干涉相长。当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, 这些位置的光强最弱, 称为干涉相消。如果 $I_1 = I_2$, 那么合成后的光强为 $I = 2I_1(1 + \cos\Delta\varphi) = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$, 光强 I 随相位差 $\Delta\varphi$ 而变化, 这就是光的干涉现象。

综上所述, 两束相干光必须满足振动频率相同、振动方向相同和相位差恒定的条件。因此, 利用普通光源获得相干光通常把光源上同一点发出的光通过某些装置分成两部分(或大部分), 然后再使这两部分叠加起来。由于这两部分光的相应部分实际上都来自同一发光原子的同一次发光, 所以它们满足相干条件而成为相干光。实现普通光波干涉的方法可分成两大类: 一种叫分波阵面法。由于同一波阵面上各点的振动具有相同相位, 所以同一波阵面上取出的两部分可以作为相干光源。例如, 杨氏双缝实验等用了这种方法。另一种叫分振幅法。就是当一束光投射到两种介质的分界面上时, 一部分反射、一部分透射, 分成两部分或

若干份,例如薄膜干涉实验就用了这种方法。在实验中,为了获得明显清晰的干涉现象,参与叠加的两束光除了满足相干条件外,两束光的强度也不能相差太大。

对于波列长度很长的新型激光光源,可实现两个独立光源的光波干涉。

11.2.2 光程和光程差

1. 光程和光程差

以上在讨论光的干涉现象时,干涉项中的相位差 $\Delta\varphi$ 起着重要的作用。由波动部分知识我们知道,该相位差除了与光源的初始相位差 $\Delta\varphi_0$ 有关外,还与光在传播过程中的相位延迟所对应的相位差有关。如果所有的干涉过程始终只发生在同一种介质中,则

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_n}(r_2 - r_1) = \varphi_{20} - \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda_n}(r_2 - r_1) \quad (11.5)$$

式中 φ_{10} 和 φ_{20} 分别是两束相干光源的初相位, r_1 和 r_2 分别为两光束从光源到相遇点的波程。 λ_n 为光在介质中的波长,与介质的折射率 n 有关。如果光在到达干涉区域前经过了多种介质,在波程差的基础上来计算相位差就比较麻烦,因为这将涉及光在各种介质中的波长。因此,我们引入光程和光程差的概念,这对分析相位关系将带来极大方便。

设有一频率为 ν 的单色光,它在真空中的波长为 λ ,传播速度为 c ,当它在折射率为 n 的介质中传播时,传播速度为 $u = c/n$,所以在此介质中的波长 $\lambda_n = \frac{u}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda}{n}$,由于光每向前传播一个波长的距离,相位变化为 2π 。因此,在折射率为 n 的介质中,如果光通过的几何路程为 x ,则相位的变化应为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda_n} = 2\pi \frac{nx}{\lambda} \quad (11.6)$$

式(11.6)表明,光波在介质中传播时,相位的变化不仅与光波传播的几何路程和真空中的波长有关,还有介质的折射率有关。即光波在真空中传播 nx 的路程与光波在折射率为 n 的介质中传播 x 的路程所引起的相位变化相同。所以,我们将折射率 n 和几何路程 x 的乘积 nx 称为光程。

设两相干光源 S_1 和 S_2 初相位相同,经过路程 r_1 和 r_2 到达空间某点 P 相遇,如图 11-3 所示。若 S_1P 和 S_2P 分别在折射率为 n_1 和 n_2 的介质中传播,则这两相干波在 P 点的光程差(用 Δ 表示)为

$$\Delta = n_2 r_2 - n_1 r_1$$

因此,有了光程的概念,我们就可以把单色光在不同介质中的传播路程都折算为光在真空中的传播路程。这样,相位差可以用光程差来表示,它们的关系是

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \quad (11.7)$$

所以,如果两相干光源的初相位差为零,则根据干涉原理,当

$$\Delta = \pm k\lambda, k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.8)$$

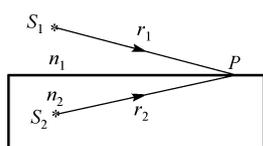


图 11-3 光程差的计算

时, $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$, 两束光干涉相长, 出现明纹; 当

$$\Delta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.9)$$

时, $\Delta\varphi = \pm (2k + 1)\pi$, 干涉相消, 出现暗纹。

2. 等光程性

在干涉和衍射实验中, 常用薄透镜将平行光线会聚成一点, 使用透镜后会不会使平行光的光程发生变化呢?

我们知道, 当平行光束通过透镜后, 将汇聚于焦平面上成一亮点。如图 11-4 所示, 这是由于平行光束波阵面上各点(图中 A、B、C、D、E 各点)的相位相同, 而到达焦平面后相位仍然相同, 因而干涉加强。虽然光线从这些点到点 F 的几何路程并不相等, 但把它们折算成光程, 通过计算可以证明两者的光程是相等的。因此, 透镜可以改变光线的传播方向, 但不附加光程差。这就是透镜的等光程性。

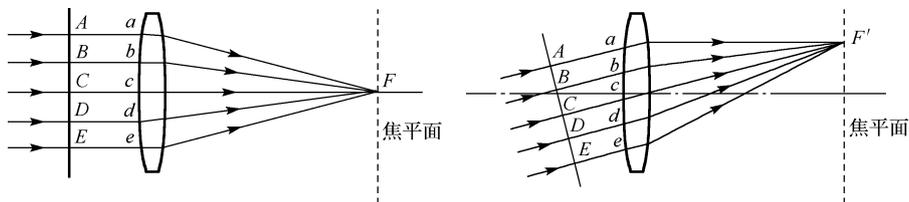


图 11-4 平行光经透镜会聚的等光程性

在波动部分我们知道, 当波从波疏介质入射到波密介质界面反射时, 反射波有相位突变, 即有半波损失, 这对光波同样适用。因此, 我们在讨论干涉问题时要考虑反射光的半波损失问题。

11.3 杨氏双缝干涉

11.3.1 杨氏双缝干涉

托马斯·杨(T. Young)在 1801 年成功地做了一个判定光的性质的关键性实验——光的干涉实验。他让太阳光通过一针孔, 再通过离该针孔一段距离的两个针孔, 在两针孔后的屏幕上得到干涉图样。继而发现, 用相互平行的狭缝代替针孔, 得到更明亮的干涉条纹。这些干涉实验统称为杨氏实验。就这样, 杨首次通过实验肯定了光的波动性, 同时还由此实验测出了光的波长。

杨氏双缝干涉实验装置如图 11-5 所示。在波长为 λ 的单色光源后放一狭缝 S, 相当于一个线光源。H 为一遮光屏, 其上开有两条平行的狭缝 S_1 和 S_2 , S_1 和 S_2 与光源 S 等距, 两缝之间的距离为 d 。E 是与 H 平行的接收屏, 它与 H 之间的距离为 D , 则在屏幕上出现一系列明暗相间的干涉条纹。由于 S_1 和 S_2 是从 S 发出的同一波阵面上的两部分, 所以把这种获得相干光的方法称为分波阵面法。

下面利用振动叠加原理来定量分析双缝干涉实验中的强度分布。设实验装置置于空气

中,如图 11-5 所示,在观察屏上取坐标 Ox ,坐标原点 O 与 S_1 和 S_2 的距离相等, P 为屏上距原点 O 为 x 的任意一点。由于 S_1 和 S_2 同相位,因此从它们发出的光波的初相位相同,即初相位差为零,则到达 P 点的两光波间的光程差为

$$\Delta = r_2 - r_1 \quad (11.10)$$

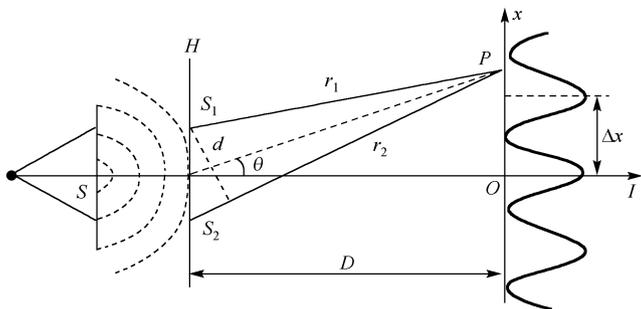


图 11-5 杨氏双缝干涉实验

设 P 点与 S_1S_2 的中心连线与 SO 之间的夹角为 θ ,即 P 的角位置。通常情况下 $D \gg d$, $D \gg x$,即 θ 很小, $\sin\theta \approx \tan\theta$,所以

$$\Delta = r_2 - r_1 \approx d\sin\theta \approx d\tan\theta = \frac{dx}{D} \quad (11.11)$$

根据光的干涉条件,当光程差为波长的整数倍即 $\Delta = \frac{dx}{D} = \pm k\lambda$ 时,两光波干涉相长,接收屏上 P 点处为明纹;当光程差为半波长的奇数倍即 $\Delta = \frac{dx}{D} = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 时,两光波干涉相消,接收屏上 P 点处为暗纹。其中 k 为干涉级次, $k=0$ 对应的明条纹称为零级明纹或中央明纹, $k=1,2,\dots$ 相应的条纹的分别称为第一级、第二级……明(暗)纹。光程差为其他值的点,光强介于最明和最暗之间。

由式(11.11)即明暗纹条件可得,各级明纹中心离 O 点的距离为

$$x = \pm k \frac{D\lambda}{d} \quad (11.12)$$

各级暗纹中心离 O 点的距离为

$$x = \pm(2k+1) \frac{D\lambda}{2d} \quad (11.13)$$

则两相邻的明纹或暗纹的间距都为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \quad (11.14)$$

所以,干涉条纹是等间距分布的。

由以上分析可知,双缝干涉条纹有以下特点:

(1)中央明纹两侧,对称地分布着明、暗相间的直条纹。

(2)相邻两明(暗)的间距相等。条纹间距 Δx 与入射波长 λ 及缝屏间距 D 成正比,与双缝间距 d 成反比。

(3)如用白光照射,屏幕上除中央明纹因各单色光重合而显示白色外,其他各级条纹由于各单色光出现明纹位置不同,而形成彩色条纹。

同时,实验上常根据测得的 Δx 、 d 和 D 的值计算单色光的波长。

【例 11.1】 在杨氏双缝实验中,用波长 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ 的钠光灯作单色光源,屏与双缝之间的距离为 $D = 1 \text{ m}$,则:(1)当双缝间距为 1 mm 时,两相邻明纹中心间距是多少?(2)当双缝距离为 1 mm 时,第四级暗纹离中央明纹的距离为多少?

【解】 (1)当 $d = 1 \text{ mm}$ 时,相邻明条纹的间距为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ mm}} \times 589.3 \times 10^{-6} \text{ mm} = 0.589 \text{ mm}$$

(2)当 $d = 1 \text{ mm}$ 时,由双缝干涉暗纹条件 $x = \pm (2k+1) \frac{D\lambda}{2d}$,可得

$$\begin{aligned} x &= (2k+1) \frac{D\lambda}{2d} = (2 \times 4 + 1) \times \frac{1000 \text{ mm}}{2 \times 1 \text{ mm}} \times 589.3 \times 10^{-6} \text{ mm} \\ &= 2.652 \text{ mm} \end{aligned}$$

【例 11.2】 以单色光照射到相距为 0.2 mm 的双缝上,双缝与屏幕的垂直距离为 1 m 。(1)从第一级明纹到同侧的第四级明纹间的距离为 7.5 mm ,求单色光的波长;(2)若入射光的波长为 600 nm ,中央明纹中心距离最邻近的暗纹中心的距离是多少?

【解】 (1)根据双缝干涉明纹中心的条件

$$x_k = \pm \frac{D}{d} k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

把 $k = 1$ 和 $k = 4$ 代入上式,得

$$\Delta x_{14} = x_4 - x_1 = \frac{D}{d} (k_4 - k_1) \lambda$$

$$\text{所以, } \lambda = \frac{d}{D} \frac{\Delta x_{14}}{(k_4 - k_1)}$$

已知 $d = 0.2 \text{ mm}$, $\Delta x_{14} = 7.5 \text{ mm}$, $D = 1 \text{ m}$,代入上式,得

$$\lambda = \frac{d}{D} \frac{\Delta x_{14}}{(k_4 - k_1)} = 500 \text{ nm}$$

在历史上,一些光的波长就是首先利用杨氏双缝干涉测得的。

(2)中央明纹与相邻暗纹中心的距离应等于半个条纹的间距,所以,所求距离为

$$\Delta x' = \frac{1}{2} \frac{D}{d} \lambda = 1.5 \text{ mm}$$

11.3.2 应用分波阵面法的其他干涉实验

历史上,有很多利用分波阵面的方法获得干涉现象的实验,这些实验的基本思想与杨氏双缝干涉实验类似。

杨氏双缝实验中要求小孔或狭缝都足够小,才能在屏幕上出现清晰的干涉条纹,但这时通过狭缝的光太弱,因而干涉条纹不够明亮且边缘效应往往会对实验产生影响。1818年,菲涅耳(A. J. Fresnel)通过很多实验,提出了一种新的获得相干光的方法,此实验称为菲涅耳双

镜实验。菲涅耳双镜是两个夹角很小的平面镜，如图 11-6 所示，从线光源 S 发出的光波，经平面镜 M_1 和 M_2 反射后，分成向不同方向传播的两部分，这两部分光可分别看做是由两个虚光源 S_1 和 S_2 发出的相干光，由于 M_1 和 M_2 的夹角很小，所以 S_1 和 S_2 的距离也很小，如同杨氏双缝实验，在两波交替区域内产生干涉图样。

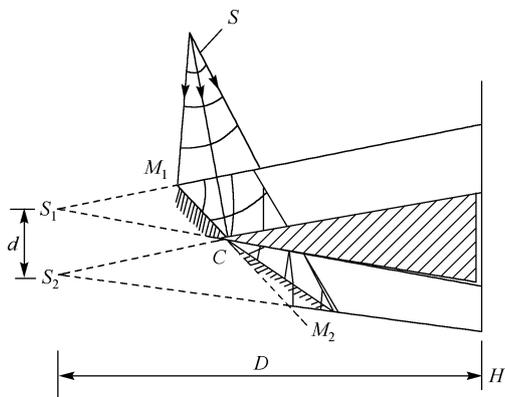


图 11-6 菲涅耳双镜实验

洛埃德(H. Lloyd)于 1834 年提出了一种更简单的观察干涉现象的实验装置。如图 11-7 所示， M 为一块平板玻璃，用做反射镜。 S_1 为一线光源，从光源发出的光波，一部分掠射(即入射角接近 90°)到玻璃平板上，经玻璃表面反射到达屏上；另一部分直接射到屏上，两部分光也是相干光，它们同样是用分波阵面法得到的。反射光可看成虚光源 S_2 发出的。 S_1 和 S_2 构成一对相干光源，则关于双缝实验的分析也同样适用于此实验装置，在屏上可以观察到明暗相间的干涉条纹。

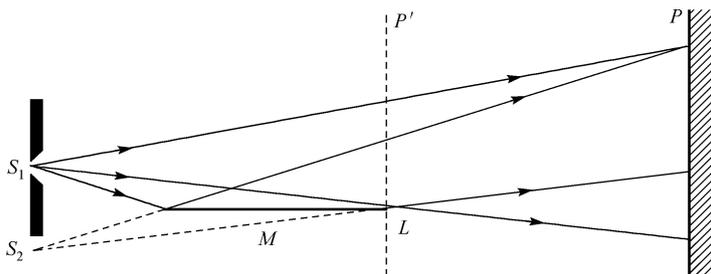


图 11-7 洛埃德镜实验

在洛埃德镜实验中发现，当把观察屏移到和反射镜边缘 L 接触时，这时从 S_2 发出的光到达 L 的光程相等，该处应该出现明条纹，但实验结果却是暗纹，其他的条纹也有相应的变化。这说明镜面反射的光和直接射到屏上的光在 L 处的相位相反，即相位差为 π 。这是因为玻璃与空气相比，玻璃是光密介质，而光线由光疏介质射向光密介质表面反射时，反射波的相位与入射波的相位间会产生 π 的相位突变，这一变化导致反射光的光程在反射过程中附加了半个波长，即有半波损失。因此，以后讨论光波叠加时，若有半波损失，在计算光程差时必须计及，否则会得出与实际情况不同的结果。

11.4 薄膜干涉

薄膜干涉在日常生活和生产技术中都经常遇到,如阳光照射下的油膜、肥皂膜以及许多昆虫(如蜻蜓、蝴蝶等)翅膀上所呈现出来的彩色花纹,这是一种光波经薄膜上下两个表面反射后相互叠加所形成的干涉现象,称为薄膜干涉。在高温下金属表面被氧化而形成氧化层,例如从车床上切削下来的钢铁碎屑上,也能看到由薄膜干涉而呈现美丽的蓝色。薄膜干涉时,由于反射波和透射波的能量是由入射波的能量分出来的,因此形象地说,入射波的振幅被“分割”成若干部分,所以把这种获得相干光的方法称为分振幅法。

薄膜干涉不仅与薄膜的表面形状有关,如膜的厚度是否均匀、表面本身是否平整等,同时还与光的照射方式密切相关,如所用的光源是否可以看做是点光源,光的入射角度如何等。正是由于形成薄膜的条件丰富多样,导致了薄膜干涉情况的复杂性。由于条件不同,所产生的干涉条纹形状各异,能产生干涉的区域也各不相同,可能在薄膜表面,也可能在无穷远处,也可能在空间某一特定区域。在实际中,比较简单而应用较多的是厚度均匀的薄膜在无穷远处形成的等倾干涉条纹和厚度不均匀的薄膜表面上出现的等厚干涉条纹。

11.4.1 等倾干涉

考虑点光源照射到表面平整、厚度均匀的薄膜上产生的干涉条纹。如图 11-8 所示,在折射率为 n_1 的均匀介质中,有一厚度均匀的折射率为 n_2 ($n_1 > n_2$) 的介质薄膜,其厚度为 e ,设单色光源上一点 S 发出光线 1,以入射角 i 斜入射到薄膜上 A 点,光线在 A 点将分成反射和折射两部分,折射的部分在膜的下表面反射后又能从上表面射出,分别为图 11-8 中的光线 2 和 3,光线 2 和 3 经透镜会聚于屏幕 P ,这两条光线是同一入射光的两部分,因经历了不同的路径而有恒定的相位差,因此它们是相干光。下面利用光程差的概念来分析薄膜干涉加强和减弱的条件。

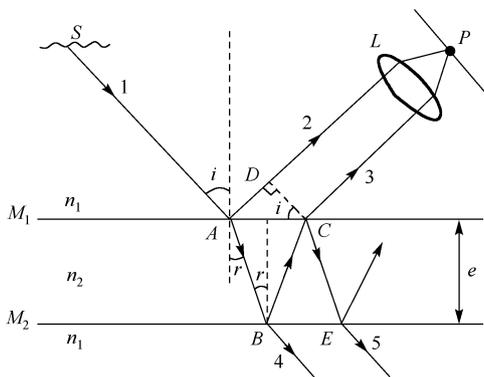


图 11-8 薄膜干涉

作 $CD \perp AD$, 则 CP 和 DP 的光程相等。光线 2 和光线 3 的光程差为

$$\Delta = n_2(AB + BC) - n_1AD + \frac{\lambda}{2} \quad (11.15)$$

上式中出现的 $\frac{\lambda}{2}$ 是因为光在薄膜下表面反射时出现了半波损失而附加的光程差。由图 11-8

可知, $AB = BC = \frac{e}{\cos r}$, $AD = AC \sin i = 2e \tan r \sin i$, $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, 代入上式有

$$\Delta = 2n_2 AB - n_1 AD + \frac{\lambda}{2} = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \quad (11.16)$$

因此, 当光程差为波长的整数倍时, 即

$$\Delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.17)$$

两反射光干涉相长, 出现明纹, k 为明条纹的级次。

当光程差为半波长的奇数倍时, 即

$$\Delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (11.18)$$

两反射光干涉相消, 出现暗纹, k 为暗条纹的级次。

由上面分析可知, 对于厚度均匀的薄膜, 光程差是由入射角 i 决定的, 凡以相同的倾角入射的光, 经膜的上下表面反射后产生的相干光具有相同的光程差, 则对应干涉图样中的同一级干涉条纹, 因此将这类干涉条纹称为等倾干涉条纹。

同理, 透射光中也有干涉现象, 式(11.16)对透射光仍然适用, 但应注意, 透射光之间的附加光程差与反射光之间的附加光程差产生的条件刚好相反, 当反射光之间有 $\frac{\lambda}{2}$ 的附加光程差时, 透射光之间没有, 反之亦然。所以对同样的入射光而言, 当反射光干涉加强时, 透射光干涉减弱, 而反射光干涉减弱时, 透射光干涉加强。

在实验上获得等倾干涉条纹的装置如图 11-9 所示, 从光源 S 发出的光入射到半透半反射的平面镜 M 上, 被 M 反射的部分光射向薄膜, 再被薄膜上、下表面反射, 透过 M 和透镜 L 会聚到光屏上。 S 发出的沿不同方向传播的光只要以相同入射角 i 入射到薄膜表面上的光线应该在同一圆锥面上, 它们的反射光在屏上会聚在同一圆周上。因此, 整个干涉图样是由一些明暗相间的同心圆环组成的。

由式(11.16)可知, 对同一个薄膜, 当入射角 i 越大时, 光程差 Δ 越小, 对应的干涉级次越低。由图 11-9 可见, 半径越大的圆环对应的 i 也越大。所以等倾干涉图样中心处的干涉级次最高, 越向外干涉级次越低。此外, 从中央向外各相邻明纹或相邻暗纹的间距也不同, 中央的环纹间的距离较大, 环纹较稀疏, 越向外, 环纹间的距离越小, 环纹越密集, 如图 11-10 的照片所示。

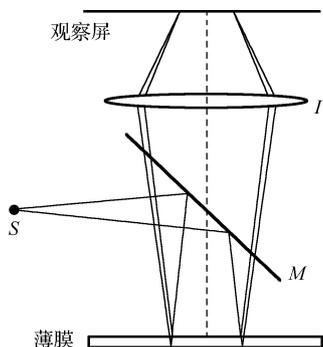


图 11-9 等倾干涉实验装置

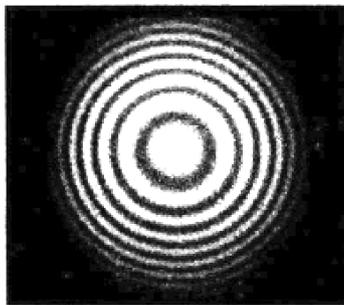


图 11-10 等倾干涉条纹

以上讨论的都是单色光的干涉情况。通常,在实际生活中所用的光源一般是复色光源,显然所看到的图样将是彩色的。

【例 11.3】 一油轮漏出的油(折射率 $n_1=1.20$)污染了某海域,在海水($n_2=1.30$)表面形成一层薄薄的油污。(1)如果太阳正位于海域上空,一直升飞机的驾驶员从机上向正下方观察,他所正对的油层厚度为 460 nm,则他将观察到油层呈什么颜色?(2)如果一潜水员潜入该区域水下,并向正上方观察,又将看到油层呈什么颜色?

【解】 根据题意,太阳垂直照射在海面上,驾驶员和潜水员所看到的分别是反射光的干涉结果和透射光的干涉结果。

(1)由于油层的折射率 n_1 小于海水的折射率 n_2 ,但大于空气的折射率,所以在油层上、下表面反射的太阳光均发生 π 的相位突变。两反射光之间的光程差为

$$\Delta_r = 2en_1 = k\lambda$$

当 $\Delta_r = k\lambda$, 即 $\lambda = \frac{2n_1e}{k}$, $k=1,2,\dots$ 时,反射光干涉相长,把 $n_1=1.2$, $e=460$ nm 代入,得干涉相长的光波波长为

$$k=1, \quad \lambda_1 = 2n_1e = 1104 \text{ nm}$$

$$k=2, \quad \lambda_2 = n_1e = 552 \text{ nm}$$

$$k=3, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}n_1e = 368 \text{ nm}$$

其中,波长为 $\lambda_2 = 552$ nm 的绿光在可见光范围内,而 λ_1 和 λ_3 则分别在红外线和紫外线的波长范围内,所以,驾驶员看到的油膜呈绿色。

(2)此题中两透射光的光程差为

$$\Delta_t = 2en_1 + \lambda/2$$

当 $\Delta_t = k\lambda$, $k=1,2,\dots$ 时,得

$$k=1, \quad \lambda_1 = \frac{2n_1e}{1-1/2} = 2208 \text{ nm}$$

$$k=2, \quad \lambda_2 = \frac{2n_1e}{2-1/2} = 736 \text{ nm}$$

$$k=3, \quad \lambda_3 = \frac{2n_1e}{3-1/2} = 441.6 \text{ nm}$$

$$k=4, \quad \lambda_4 = \frac{2n_1e}{4-1/2} = 315.4 \text{ nm}$$

其中波长为 $\lambda_2 = 736$ nm 的红光和 $\lambda_3 = 441.6$ nm 的紫光在可见光范围内,而 λ_1 是红外线, λ_4 是紫外线,所以,潜水员看到的油膜呈紫红色。

11.4.2 增透膜和增反膜

在比较复杂的光学系统中,由于存在着多个透镜,光在这些透镜的表面反射将导致光能量的严重损失。为了减少入射光在透镜表面反射时所引起的损失,常在镜面上镀一层厚度均匀的透明薄膜(常用的如氟化镁 MgF_2 , 它的折射率 $n=1.38$, 介于玻璃和空气之间),利用薄膜的干涉效应使反射光减到最小,这样的薄膜称为增透膜。同样,在某些场合下,需要提高

反射率,如激光器谐振腔的反射镜,其反射率要达到 99% 以上。为此目的,同样可以在镜片表面镀膜以增加反射率,这样的薄膜称为增反膜。

如图 11-11 所示,设膜的厚度为 e ,光垂直入射时薄膜两表面反射光的光程差等于 $2n_2e$,由于在膜的上下表面反射时都有相位突变,结果没有附加的相位差,于是两反射光干涉相消时应满足关系

$$2n_2e = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

膜的最小厚度应为(相应于 $k = 0$)

$$e = \frac{\lambda}{4n_2}$$

由于反射光相消,因而透射光加强。同理可知,如果 $2n_2e = k\lambda (k = 1, 2, \dots)$,则反射光加强,成为增反膜。

在镀膜工艺中,常把 ne 称为薄膜的光学厚度,镀膜时控制厚度 e ,使膜的光学厚度等于入射波长的 $1/4$ 。单层增透膜只能使某个特定波长 λ 的光尽量减小反射。对于相近波长的其他反射光也有不同程度的减弱,但不是减到最弱,对于一般的照相机和目视光学仪器,常选人眼最敏感的波长 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 作为“控制波长”,使膜的光学厚度等于此波长的 $1/4$ 。在白光下观看此薄膜的反射光,黄绿色光最弱,红光蓝光相对较强一些,因此表面呈蓝紫色。

通常,为了使较宽波长范围的光都能达到增反的目的,采用在表面上交替镀多层高、低折射率膜的方法。

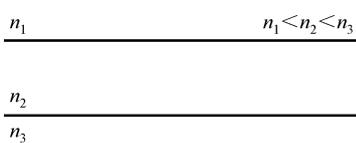


图 11-11 增透膜和增反膜

11.4.3 等厚干涉

当用平行光照射到表面平整、厚度不均匀的薄膜上时,产生的干涉条纹将出现在薄膜的上表面,通常我们在肥皂膜、油膜表面看到的就是这一类干涉条纹。在实验室中,通常利用平行光垂直入射获得此类干涉条纹,最常见的是劈尖干涉和牛顿环的干涉。

1. 劈尖干涉

如图 11-12 所示,两块平面玻璃片,一端相互叠合,另一端夹一细丝或薄纸片,这时两玻璃片之间形成的空气薄膜称为空气劈尖。两玻璃片的交线称为棱边,在平行于棱边的任一直线上,劈尖的厚度相同。

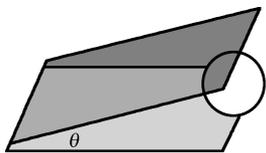


图 11-12 劈尖

实验时使平行单色光垂直入射到两玻璃片时,在空气劈尖膜的上下表面产生的反射光可以在膜的上表面处相遇而产生干涉。由于劈尖的夹角 θ 很小,可以近似把在上下表面反射的两束光看做均沿垂直劈面向上传播。由此可得两反射光之间的光程差为

$$\Delta = 2e + \frac{\lambda}{2} \quad (11.19)$$

式中 e 是薄膜上某一位置处的厚度; $\frac{\lambda}{2}$ 是两反射光线之一在反射时由于半波损失而产生的附加光程差。

由干涉条件可知,当

$$\Delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.20)$$

时, 两反射光干涉相长, 得到明条纹。当

$$\Delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.21)$$

时, 两反射光干涉相消, 得到暗条纹。

由以上分析可知, 对应于同一级次, 无论是明条纹还是暗条纹能都对应着一定的薄膜厚度 e , 即厚度相同的地方对应同一级次的干涉条纹, 因此称为等厚干涉。

由于劈尖的等厚线是一些平行于棱边的直线, 所以等厚条纹是一些与棱边平行的明暗相间的直条纹。在棱边处 $e = 0$, 光程差等于 $\frac{\lambda}{2}$, 所以应看到暗纹, 而事实正是如此, 这也是“相位突变”的又一个有力证据, 此暗纹称为零级暗条纹。由上面的分析可知, 条纹的级次随膜厚的增加而增加。若相邻两干涉明(或暗)条纹所对应的厚度分别为 e_k 和 e_{k+1} , 则相邻两明(或暗)条纹所对应的薄膜厚度之差为

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2} \quad (11.22)$$

相邻两明(或暗)条纹的间距为

$$l = \frac{e_{k+1} - e_k}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \approx \frac{\lambda}{2\theta} \quad (11.23)$$

因此, 干涉条纹是等间距的, 而且夹角 θ 越小, 干涉条纹间距越大; 夹角 θ 越大, 条纹越密。当 θ 大到一定程度后, 条纹就密不可分了。所以干涉条纹只能在劈尖夹角很小时才能看到。

由以上分析可知, 如果已知劈尖的夹角, 则可以通过测干涉条纹的间距来获得单色光的波长。同样, 如果已知单色光的波长, 则可以测出微小的角度。在工程上, 常利用这一原理测定细丝的直径、薄片的厚度等。利用等厚干涉原理还可以检测物体表面的平整度。如在凹凸不平的玻璃板上放一块光学平板玻璃, 根据所显示的等厚干涉条纹的形状和间距, 能够判断其表面的情况。

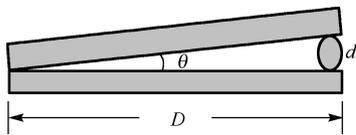


图 11-13 金属丝直径测定

【例 11.4】 把金属细丝夹在两块平玻璃之间, 形成空气劈尖。如图 11-13 所示, 金属丝和棱边间距为 $D = 28.880 \text{ mm}$ 。用波长 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ 的钠黄光垂直照射, 测得 30 条明纹之间的总距离为 4.295 mm , 求金属丝的直径。

【解】 由图示的几何关系可知 $d = D \tan\theta$, 相邻两明

纹间距和劈尖夹角的关系为 $l = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$ 。

因为 θ 很小, 所以 $\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{2L}$,

于是有 $d = D \frac{\lambda}{2L} = 28.880 \times \frac{589.3 \times 10^{-9}}{2 \times \frac{4.295}{29}} = 5.746 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 。

2. 牛顿环

牛顿环装置如图 11-14 所示, 曲率半径为 R 的平凸透镜置于平板玻璃上, 两者间形成厚

度不均匀的空气膜。当单色平行光垂直入射时，可以形成一组等厚干涉条纹。条纹是以接触点 O 为圆心的一组间距不等的同心圆环，称为牛顿环，如图 11-15 所示。

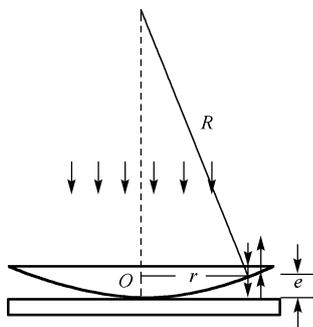


图 11-14 牛顿环装置

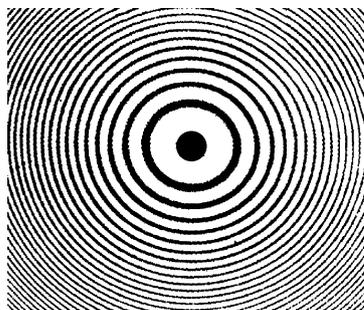


图 11-15 牛顿环干涉图样

由于透镜的曲率半径很大，因此在空气膜上下表面反射的两束光的光程差与劈尖膜的情形相似，可表示为

$$\Delta = 2e + \frac{\lambda}{2} \quad (11.24)$$

当 $\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ ($k = 1, 2, \dots$) 时，两反射光干涉相长，得到明条纹。当 $\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ ($k = 1, 2, \dots$) 时，两反射光干涉相消，得到暗条纹。

在接触中心点 O ，由于膜厚为零，由上面的暗条纹条件可知，牛顿环的中心是一个暗斑，由中心沿半径向外，由于膜厚的变化是非线性的，因此条纹将呈内疏外密分布。由图 11-14 可以看到

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2Re - e^2 \approx 2eR$$

所以 $e = \frac{r^2}{2R}$ 。

由此得牛顿环明纹和暗纹的半径分别为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \text{ 明纹} \quad (11.25)$$

$$r = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \text{ 暗纹} \quad (11.26)$$

对于第 k 级和第 $k + m$ 级的暗环，

$$r_k^2 = kR\lambda, r_{k+m}^2 = (k+m)R\lambda, r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda$$

由此可得透镜的曲率半径

$$R = \frac{1}{m\lambda} (r_{k+m}^2 - r_k^2) = \frac{1}{m\lambda} (r_{k+m} - r_k)(r_{k+m} + r_k)$$

在实验室中，通常通过测量明环或暗环的直径来测量透镜的曲率半径，同时还常用牛顿环测量光波的波长。在工业上则利用牛顿环来检测透镜的质量。

【例 11.5】 为测量油膜折射率，在平面玻璃片上放一油滴，并展开成圆形油膜，在波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的单色光垂直入射下，从反射光中可观察到油膜所形成的干涉条纹。已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.50$ ，油膜的折射率 $n_2 = 1.20$ ，问：当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距

$h = 8.0 \times 10^2 \text{ nm}$ 时,干涉条纹是如何分布的?可看到几条明纹?明纹所在处的油膜厚度为多少?

【解】 这一实验原理和前面讲的劈尖和牛顿环类似。不过,此实验中光在空气-油以及油-玻璃的界面反射时均有相位突变,因此产生明纹处油膜的厚度 d 满足的条件为 $2n_2e = k\lambda, k = 0, 1, 2, \dots$ 。

由此可得

$$\begin{aligned} k = 0, e_0 &= 0 \\ k = 1, e_1 &= 2.5 \times 10^2 \text{ nm} \\ k = 2, e_2 &= 5.0 \times 10^2 \text{ nm} \\ k = 3, e_3 &= 7.5 \times 10^2 \text{ nm} \\ k = 4, e_4 &= 1.0 \times 10^3 \text{ nm} \\ &\dots \end{aligned}$$

由于厚度 e 相同的地方干涉情况相同,所以从反射光中干涉到的条纹为明暗相间的同心圆环,当 $h = 8.0 \times 10^2 \text{ nm}$ 时,可观察到四条明纹,油膜外缘处 $d=0$,为零级亮条纹中心。

由油膜中心厚度、干涉条纹数和光波长可进一步测出油膜的折射率。

11.5 迈克耳孙干涉仪

为了研究光速问题,迈克耳孙(A. A. Michelson)根据干涉原理,在 1881 年精心设计了一种装置,后人称之为迈克耳孙干涉仪。迈克耳孙干涉仪既可以用来观察各种干涉现象及其条纹变动的情况,也可以用来对长度及光谱线的波长和精细结构等进行精密的测量。迈克耳孙干涉仪是很多近代干涉仪的原型。为此,迈克耳孙获得 1907 年的诺贝尔物理学奖。所以,了解它的基本结构和原理是很有意义的。

迈克耳孙干涉仪的基本思想是分振幅方法,基本结构和光路图如图 11-16 所示。 M_1 和 M_2 是两块平面反射镜,其中 M_2 是固定的, M_1 用螺旋控制,可以前后移动。 G_1 和 G_2 是两块材料相同、厚薄均匀且相等的平行玻璃片。在 G_1 的一个表面上镀有半透明的薄银层(图中粗线标注),使照射在 G_1 上的光强,一半反射,一半透射。 G_1 、 G_2 这两块平行玻璃片与 M_1 和 M_2 成 45° 角。

来自光源的光线,一部分在穿过薄银层及 G_2 后,向 M_1 传播,如图所示光线 1,经过 M_1 反射后,再穿过 G_2 ,经薄银层反射,向 E 处传播,如图所示光线 $1'$;另一部分光在薄银层上反射,向 M_2 传播,如图中光线 2,经过 M_2 反射后,再穿过 G_1 向 E 处传播,如图中的光线 $2'$ 。 M'_1 是 M_1 对 G_1 反射所成的虚像,光线 $1'$ 犹如反射自 M'_1 。显然, $1'$ 、 $2'$ 是两束相干光,在 E 处可以看到干涉条纹。玻璃片 G_2 起补偿光程的作用,使分束后的光线 1 和光线 2 一样两次通过平板玻璃,从而保证光线 $1'$ 和 $2'$ 会聚时的光程差与 G_1 的厚度无关。

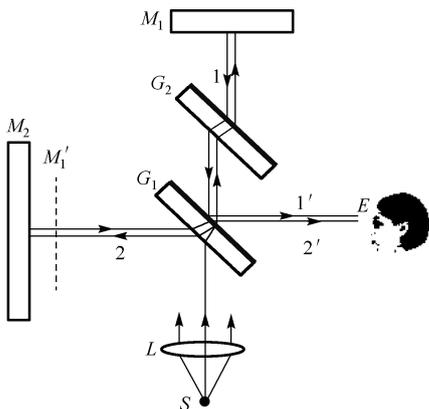


图 11-16 迈克耳孙干涉仪结构图

当 M_1 和 M_2 相互严格垂直时, M'_1 和 M_2 之间形成厚度均匀的空气膜, 这时可以观察到等倾干涉现象。当 M'_1 和 M_2 之间不严格垂直时, M'_1 和 M_2 之间形成空气劈尖, 可以观察到等厚干涉现象。

迈克耳孙干涉仪可精确测定微小位移。当 M_1 的位置发生微小变化时, M'_1 和 M_2 之间的空气劈尖保持夹角不变, 但厚度发生变化。在 E 处可观察到等厚干涉条纹的平移。当 M_1 (M'_1) 的位置变化了半个波长时, 视场中某一处将移过一个明(或暗)条纹。当连续移过 N 个干涉条纹时, M_1 移动的距离为 $\Delta N \frac{\lambda}{2}$, 即

$$\Delta d = \Delta N \frac{\lambda}{2} \quad (11.27)$$

若已知光源的波长, 利用上式可以测定长度; 若已知长度, 则可以利用上式来测波长。迈克耳孙曾用自己的干涉仪测定了镉的红色谱线的波长。

【例 11.6】 当把折射率为 $n=1.40$ 的薄膜放入迈克耳孙干涉仪一臂时, 如果产生 7 条纹的移动, 求薄膜的厚度(已知钠光的波长为 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$)。

【解】 设未放入薄膜时光程差为零, 放入薄膜后光程差 $\Delta = 2(n-1)d = \Delta k\lambda$, 故

$$d = \frac{\Delta k\lambda}{2(n-1)} = \frac{7 \times 589.3 \times 10^{-9}}{2(1.4-1)} = 5.154 \times 10^{-6} \text{ m}$$

本章小结

一、光的干涉

1. 光的相干条件: 两列光波频率相同, 振动方向相同, 相位差恒定。
2. 获取相干光的方法: 将同一光源同一点发出的光波分成两束, 在空间经过不同路径传播后再使它们相遇。分法有两种, 分波阵面法和分振幅法。
3. 光程: 光在折射率为 n 的媒质中经过的几何路程为 x , 则相应的光程为 nx 。

相位差 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{光程差}$ (λ 为光在真空中的波长)

光由光疏媒质入射到光密媒质而在界面上反射时, 发生半波损失, 这损失相当于 $\lambda/2$ 的光程。

4. 干涉明暗纹的条件

两束相干光在空间某点相遇, 明纹中心位置满足

相位差 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$

对应光程差 $\Delta = \pm k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$

暗纹中心位置满足

相位差 $\Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi$

对应光程差 $\Delta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$ 为干涉级次

二、杨氏双缝干涉(分波阵面法)

明纹中心位置 $x = \pm k \frac{D}{d} \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$

暗纹中心位置 $x = \pm (2k + 1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$

条纹间距相等, 相邻明纹中心(或暗纹中心)间的距离

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

三、薄膜干涉

入射光在薄膜上表面由于反射和折射而“分振幅”, 在上、下表面反射的光为相干光。两束相干光的光程差由几何路程差和反射时的半波损失情况共同决定。

1. 等倾干涉: 薄膜厚度均匀。以相同倾角 i 入射的光的干涉情况相同。干涉条纹是同心圆环。

对明环: $\Delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, (k = 1, 2, 3, \dots)$

对暗环: $\Delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, 2, \dots)$

2. 等厚干涉: 光线垂直入射时, 薄膜等厚处干涉情况相同。

对明纹 $\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda (k = 1, 2, \dots)$

对暗纹 $\Delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} (k = 0, 1, 2, \dots)$

透明介质劈尖在空气中时, 干涉条纹是等间距直条纹。

对牛顿环, 干涉图样为明暗相间的同心圆环。

四、迈克耳孙干涉仪

采用分振幅法使两个相互垂直(或不严格垂直)的平面镜形成一等效薄膜, 产生双光束干涉, 干涉条纹移动一条, 相当于薄膜厚度 d 改变 $\lambda/2$, 即

$$\Delta d = \Delta N \frac{\lambda}{2} \quad (\Delta N \text{ 为条纹移动数})$$

习 题 11

一、选择题

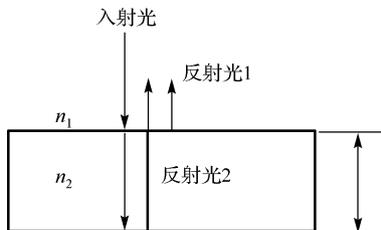
11.1 在相等的时间内, 一束波长为 λ 的单色光在空气和玻璃中()。

- A. 传播的路程相等, 走过的光程不相等 B. 传播的路程相等, 走过的光程相等
C. 传播的路程不相等, 走过的光程不相等 D. 传播的路程不相等, 走过的光程相等

11.2 双缝间距为 2 mm, 双缝与屏幕相距 300 cm, 用波长为 6000 nm 的光照射时, 屏幕上干涉条纹的相邻两明纹的距离是()。

- A. 4.5 mm B. 0.9 mm C. 3.12 mm D. 4.15 mm

11.3 单色平行光垂直照射在薄膜上,经上下两表面反射的两束光发生干涉,如题 11.3 图所示,若薄膜厚度为 e ,且 $n_1 < n_2$, λ_1 为入射光在 n_1 中的波长,则两束反射光的光程差为()。



题 11.3 图

- A. $2n_2e$ B. $2n_2e - \frac{\lambda_1}{2n_1}$ C. $2n_2e - \frac{1}{2}n_1\lambda_1$ D. $2n_2e - \frac{1}{2}n_2\lambda_1$

11.4 劈尖干涉中干涉条纹是等间距分布的,但牛顿环干涉条纹不是等间距分布的,这是()。

- A. 因它的条纹是环形 B. 因各干涉环对应的厚度不相等
C. 因平凸透镜与平玻璃间有空气 D. 因平凸透镜曲面上各点的斜率不相等

11.5 在迈克耳孙干涉仪的一支光路中,放入一片折射率为 n 的透明介质薄膜后,测出两束光的光程差的改变量为一个波长 λ ,则薄膜的厚度是()。

- A. $\frac{\lambda}{2}$ B. $\frac{\lambda}{2n}$ C. $\frac{\lambda}{n}$ D. $\frac{\lambda}{2(n-1)}$

二、填空题

11.6 光程差是把光在介质中通过的路程差按_____相同折合到真空中的路程差。

11.7 获得相干光的途径一般有两种,其中杨氏双缝干涉用到的是_____,薄膜干涉用到的是_____。

11.8 在劈尖的干涉实验中,相邻明纹的间距_____(相等或不等),当劈尖的角度增加时,相邻明条纹的间距将_____(增加或减小),当劈尖内介质的折射率增加时,相邻明纹间的距离将_____(增加或减小)。

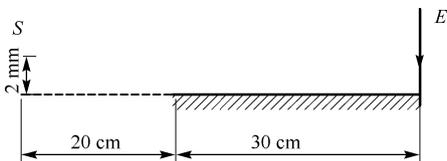
三、计算题

11.9 在杨氏双缝实验中,双缝间距 $d = 0.20$ mm,缝屏间距 $D = 1.0$ m,试求:(1)若第二级明条纹离屏中心的距离为 6.0 mm,计算此单色光的波长;(2)相邻两明条纹间的距离。

11.10 用波长 550 nm 的单色光垂直照射到相距为 1 mm 的双缝上,已知屏幕到双缝的距离为 2 m,求中央明纹两侧的第八级明纹之间的距离。

11.11 在双缝装置中,用一很薄的云母片 ($n = 1.58$) 覆盖其中的一条缝,结果使屏幕上的第七级明条纹恰好移到屏幕中央原零级明纹的位置。若入射光的波长为 5500 Å,求此云母片的厚度。

11.12 洛埃德镜干涉装置如题 11.12 图所示, 镜长 30 cm, 狭缝光源 S 在离镜左边 20 cm 的平面内, 与镜面的垂直距离为 2.0 mm, 光源波长 $\lambda = 7.2 \times 10^{-7}$ m, 试求位于镜右边缘的屏幕上第一条明条纹到镜边缘的距离。

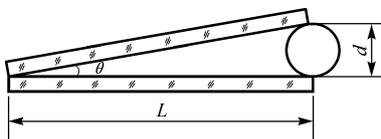


题 11.2 图

11.13 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上, 油膜覆盖在玻璃板上。油的折射率为 1.30, 玻璃的折射率为 1.50, 若单色光的波长可由光源连续可调, 可观察到 5000 \AA 与 7000 \AA 这两个波长的单色光在反射中消失。试求油膜层的厚度。

11.14 在折射率 $n_1 = 1.52$ 的镜头表面涂有一层折射率 $n_2 = 1.38$ 的 MgF_2 增透膜, 如果此膜适用于波长 $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ 的光, 问膜的厚度应取何值?

11.15 如题 11.15 图所示, 波长为 6800 \AA 的平行光垂直照射到 $L = 0.12$ m 长的两块玻璃片上, 两玻璃片一边相互接触, 另一边被直径 $d = 0.048$ mm 的细钢丝隔开。求: (1) 两玻璃片间的夹角 θ ; (2) 相邻两明条纹间空气膜的厚度差是多少? (3) 相邻两暗条纹的间距是多少? (4) 在这 0.12 m 内呈现多少条明条纹?



题 11.15 图

11.16 有一玻璃劈形膜, 玻璃的折射率为 1.50, 劈形膜的夹角为 5.0×10^{-5} rad, 用单色光正入射, 测得干涉条纹中相邻暗纹间的距离为 3.64×10^{-3} m, 求此单色光的波长。

11.17 (1) 若用波长不同的光观察牛顿环, $\lambda_1 = 6000 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 4500 \text{ \AA}$, 观察到用 λ_1 时的第 k 个暗环与用 λ_2 时的第 $k+1$ 个暗环重合, 已知透镜的曲率半径是 190 cm。求用 λ_1 时第 k 个暗环的半径。(2) 又如在牛顿环中用波长为 5000 \AA 的第 5 个明环与用波长为 λ_2 的第 6 个明环重合, 求未知波长 λ_2 。

11.18 当牛顿环装置中的透镜与玻璃之间的空间充以液体时, 第十个亮环的直径由 $d_1 = 1.40 \times 10^{-2}$ m 变为 $d_2 = 1.27 \times 10^{-2}$ m, 求液体的折射率。

11.19 利用迈克耳孙干涉仪可测量单色光的波长。当 M_1 移动距离为 0.322 mm 时, 观察到干涉条纹移动数为 1024 条, 求所用单色光的波长。

11.20 把折射率为 $n = 1.632$ 的玻璃片放入迈克耳孙干涉仪的一条光路中, 观察到有 150 条干涉条纹向一方移过。若所用单色光的波长为 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, 求此玻璃片的厚度。

第 12 章

光的衍射

在波动部分我们介绍过，波的衍射是波在其传播路径上如果遇到障碍物，它能绕过障碍物的边缘而进入几何阴影内传播的现象。光作为电磁波也能产生衍射现象。

本章讨论光的衍射现象的规律。所讲内容不只是说明光能绕过障碍物边缘传播，而且根据叠加原理说明了在光的衍射现象中光的强度分布。为简单起见，本章只讨论远场衍射，即夫琅禾费衍射，包括单缝衍射和光栅衍射。最后介绍有很多实际应用的 X 射线衍射。

12.1 光的衍射 惠更斯-菲涅耳原理

12.1.1 光的衍射现象

除了干涉之外，衍射也是波动所特有的现象。光具有衍射现象，再次有力地说明了光的波动性。

波在传播中遇到障碍物，发生偏离直线传播（并非指反射和折射）的现象，称为衍射现象。如窗户内外的人，虽然彼此看不见，但都能听到对方的谈话声，水波能绕过水面上的障碍物传播。无线电波能绕过山的障碍，使山区能接受到电台的广播。光波同样存在着衍射现象，但由于一般障碍物或空隙的线度都远大于光的波长，因此光的衍射现象通常不易观察到。当光在传播过程中遇到尺寸比光的波长大得不多的障碍物时，它就不再遵循直线传播的规律而会传到障碍物的阴影区并形成明暗变化的光强分布，这就是光的衍射现象。

如图 12-1(a)所示，一束平行光通过狭缝 K 时，当缝宽比波长大很多时，屏幕 P 上的光斑随缝 K 的宽度减小而减小，这体现了光的直线传播特征。当缝 K 的宽度减小到可与光波波长相比拟的时候，屏幕上会出现如图 12-1(b)所示的明暗相间的衍射条纹。因此，衍射现象的显著与否取决于波长与障碍物开口尺度的比值。

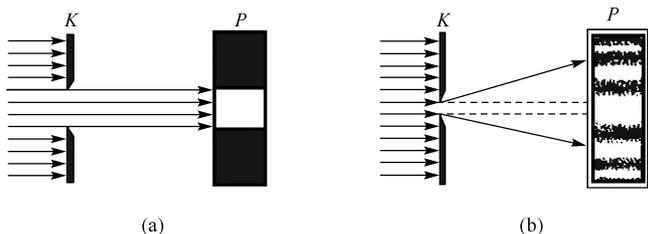


图 12-1 光的衍射现象

12.1.2 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯原理定性地解释了波的衍射，但不能定量地给出衍射波在空间各点的强度分布。菲涅耳在惠更斯原理的基础上，补充了描述次波的基本特征——相位和振幅的定量表达式，并引入了“次波相干叠加”的原理，从而发展成为惠更斯-菲涅耳原理。原理表述如下。

如图 12-2 所示，给定波阵面 S 上，每一面元 dS 发出的次波，在波阵面前方某点 P 所引起的光振动的振幅的大小与面元面积 dS 成正比，与面元到 P 点的距离 r 成反比，随面元法线与 r 间的夹角 θ 增大而减小。当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ 时，振幅为零，点 P 处光振动的相位，由 dS 到 P 点的光程决定。由此，点 P 处的光矢量的大小由以下面积分决定，即

$$E = C \int \frac{K(\theta)}{r} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \right] dS \quad (12.1)$$

式中， C 是比例常数， $K(\theta)$ 是随 θ 增大而减小的倾斜因子， T 和 λ 分别是光波的周期和波长。

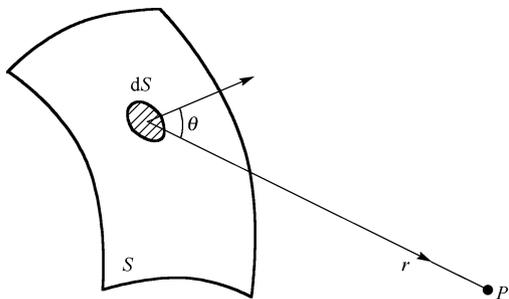


图 12-2 惠更斯-菲涅耳原理

式(12.1)的积分一般比较复杂，只对少数简单情况可求得解析解，不过，现在可用计算机进行数值运算求解。

借助惠更斯-菲涅耳原理可以解释和描述光束通过各种形状的障碍物时所产生的衍射现象。在讨论时，通常按光源和考察点到障碍物距离的不同情况，把衍射现象分为两类。第一类是障碍物离光源和考察点的距离都是有限的，或其中之一距离是有限的，这一类称为菲涅耳衍射，又称近场衍射，如图 12-3(a)所示。

第二类是光源和考察点到障碍物的距离可以认为无限远，即实际上使用的是平行光束，这种特殊的衍射情况，称为夫琅禾费衍射，又称远场衍射，如图 12-3(b)所示。在实验中，夫琅禾费衍射可用两个会聚透镜来实现，如图 12-3(c)所示，由于大多数光学仪器中出现的主要是夫琅禾费衍射，而且这类衍射的分析和计算都比菲涅耳衍射简单，因此本章只讨论夫琅禾费衍射。

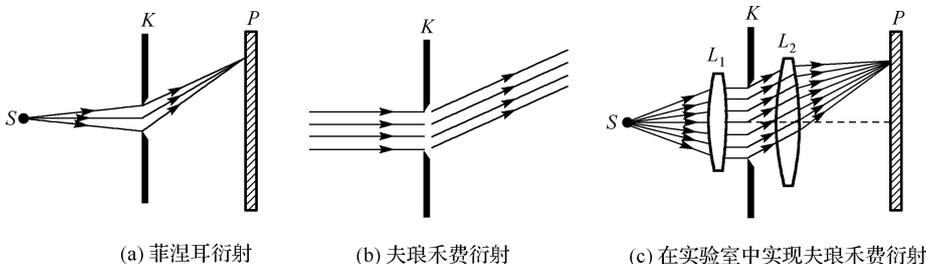


图 12-3 衍射分类

12.2 单缝衍射

单缝夫琅禾费衍射的实验装置如图 12-4 所示, 单色线光源 S 放在透镜 L_1 的焦平面上, 经透镜 L_1 形成一束平行光。这束平行光垂直照射在与线光源平行的单缝 K 上, 一部分光穿过单缝, 再经过透镜 L_2 , 在 L_2 的焦平面处的屏幕 P 上将出现一组明暗相间的平行直条纹。

下面用菲涅耳半波带法对单缝衍射进行分析。

如图 12-5 所示, 设单缝 K 的宽度为 a (如图中的 AB , 为方便说明, 将缝放大), 在平行单色光的垂直照射下, 单缝所在处的平面 AB 也就是入射光束的一个波阵面。根据惠更斯原理, 波阵面上的每一点都可以发射次波, 并以球面波的形式向各方向传播。则每一个子波源向各个可能的方向发出无穷多条光线, 这些光线都称为衍射光线。如图 12-5 中 A 点上的 1、2、3 光线就代表该点发出的任意三个方向的光线。而波阵面上各点发出的各条衍射光, 则相互构成各个方向的平行光束。如图 12-5 中的光线 1、1'、1'' 等构成一束平行光, 光线 2、2'、2'' 等构成另一束平行光, 以此类推。

每一个方向的平行光与原入射方向间的夹角用 φ 表示, 称为衍射角。根据几何光学原理, 各平行光束经过透镜 L_2 后, 会聚于焦平面 P 上的不同位置处。由于每一束平行光中所包含的光线都来自同一光源 S , 根据惠更斯-菲涅耳原理, 各平行光线相互干涉, 因而在屏幕上形成明暗条纹。

先考虑沿入射方向传播的一组衍射光(1), 如图 12-6 所示, 这些衍射光从 AB 面发出时相位相同, 而通过透镜到达 P_0 点的各衍射光光程相等, 所以, 它们经透镜会聚于 P_0 点时仍保持相同的相位而相互加强。于是, P_0 点处出现明条纹, 这条明纹又称为中央明纹。

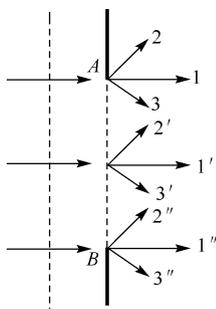


图 12-5 半波带法分析单缝衍射

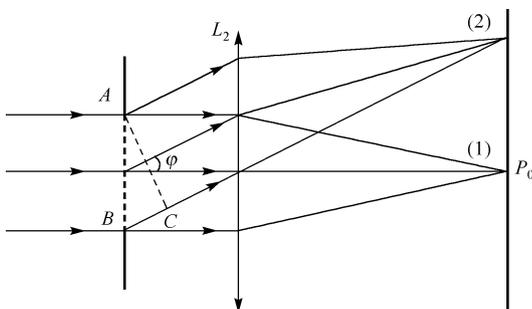


图 12-6 单缝衍射条纹分布

下面来看一束衍射角为 φ 的衍射光线(2), 它们经透镜后会聚于屏幕上的 P 点。但单缝 AB 上各点发出的衍射光到达 P 点的光程各不相同, 因此各子波在 P 点的相位也各不相同。如过 A 作平面 AC 与衍射光线(2)垂直, 则 AC 面上各点到达 P 点的光程都相等。因此各衍射光到达 P 点时的相位差就由面 AB 到面 AC 的光程差决定。如图 12-6 所示, 单缝边缘 A 、 B 两点衍射光间的光程差为 $BC = a \sin \varphi$, 这是沿 φ 角方向各衍射光线之间的最大光程差。用菲涅耳半波带法分析, 屏幕上不同点的强度分布, 正是取决于该最大光程差。

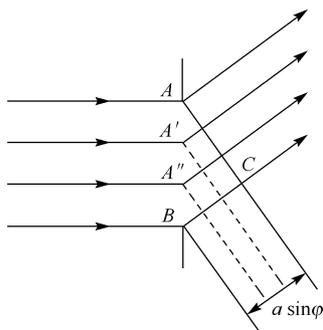


图 12-7 菲涅耳半波带法

菲涅耳半波带法将波阵面 AB 分割成许多面积相等的波带来研究, 即将 BC 用一系列平行于 AC 的平面来划分, 这些平面中两相邻平面间的距离等于入射单色光波长的一半 ($\frac{\lambda}{2}$), 如图 12-7 所示, 这些平面将波阵面 AB 分为 AA' , $A'A''$, $A''B$ 等整数个面积相等的波带, 根据惠更斯-菲涅耳原理, 这些波带所发出的子波强度近似相等, 且相邻两个波带上对应点所发出的子波射线, 到达 P 点处的光程差均为 $\frac{\lambda}{2}$, 因此把波带称

为半波带。于是, 相邻的两个半波带上的各子波将两两成对地在 P 点处相干抵消。因此, 如果 BC 是半波长的偶数倍, 则可将单缝上的波面 AB 分成偶数个半波带, 于是在 P 点出现暗条纹; 如果 BC 是半波长的奇数倍, 则可将单缝上的波面 AB 分成奇数个半波带, 相邻两半波带上对应各子波干涉相消, 只剩一个半波带的光线没被抵消, 于是 P 点出现明纹。对同一缝宽而言, 半波带数目越多, 每个半波带的面积就越少, 其中所含的子波数就越少, 且此时衍射角也越大, 子波的振幅越小, 所以明条纹的亮度就越小, 而且都比中央明纹的亮度小得多。若对应于某个衍射角 φ , AB 不能被分成整数个半波带, 则屏幕上的对应点将介于明暗之间。

综上所述, 当波长为 λ 的平行单色光垂直单缝入射时, 单缝衍射明暗纹的条件是

$$a \sin \varphi = \begin{cases} 0 & \text{中央明纹中心} \\ \pm k \lambda & \text{暗条纹中心} \\ \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{明条纹中心} \end{cases} \quad (12.2)$$

式中 $k = 1, 2, 3, \dots$ 为条纹级次, 正、负号表示衍射条纹对称分布于中央明纹的两侧。即单缝衍射条纹是在中央明纹两侧对称分布着明暗相间条纹的一组衍射图样, 由于明条纹的亮度随级次 k 的增大而减小, 明暗条纹的区别越来越不明显, 所以一般只能看到中央明纹附近的若干条明、暗条纹。

通常把 $k = \pm 1$ 时的两条暗纹对透镜 L_2 所张的角度称为中央明纹的角宽度, 而 $k = 1$ 时的暗纹对应的衍射角称为半角宽度 φ_0 , 由于衍射角很小, $\sin \varphi \approx \tan \varphi$, 由式(12.2)可知

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{a} \quad (12.3)$$

利用图 12-6 的几何关系, 以 f 表示透镜 L_2 的焦距, 则可求出中央明纹的线宽度为

$$\Delta x_0 = 2f \tan \varphi_0 = 2 \frac{\lambda}{a} f \quad (12.4)$$

则其他任意两相邻明条纹的角宽度近似为

$$\Delta \varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{(k+1)\lambda}{a} - \frac{k\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a} \quad (12.5)$$

其线宽度为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{a} f \quad (12.6)$$

可见, 所有其他明纹都有同样的宽度, 而中央明纹的宽度是其他明纹宽度的两倍。

由以上诸式可以看出, 当单缝宽度 a 很小时, 图样较宽, 光的衍射效应明显。当 a 变大

时, 条纹相应变窄而密集, 当 $a \gg \lambda$ 时, 各级衍射条纹都在中央明纹附近分辨不清, 只能观测到一条亮纹, 光可看成直线传播。而当缝宽 a 一定时, 对同一级衍射条纹, 入射光的波长越长, 衍射角越大。因此, 若以白光入射, 中央明纹仍是白色, 但其两侧则依次呈现为一系列由紫到红的彩色条纹, 也称为衍射光谱。

单缝衍射的规律在实际生活中的应用较多, 如利用单缝衍射测量物体之间的微小间隔和位移, 用于测量细微物体的线度, 测量光波的波长等。

【例 12.1】 波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的单色光垂直入射到缝宽 $a = 0.2 \text{ mm}$ 的单缝上, 缝后用焦距 $f = 40 \text{ cm}$ 的会聚透镜将衍射光会聚于屏幕上, 求: (1) 中央明条纹的角宽度和线宽度; (2) 第一级明条纹的位置以及对应该衍射角缝处波面可以分为几个半波带? (3) 第一级明条纹的宽度。

【解】 (1) 第一级暗条纹对应的衍射角 φ_0 为

$$\sin\varphi_0 = \frac{\lambda}{a} = \frac{6 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} = 3 \times 10^{-3}$$

因为 $\sin\varphi_0$ 很小, 则中央明条纹的角宽度为

$$2\varphi_0 \approx 2\sin\varphi_0 = 6 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

中央明条纹的线宽度为

$$\Delta x_0 = 2f \tan\varphi_0 \approx 2f \sin\varphi_0 = 2f\varphi_0 = 2 \times 0.4 \times 3.0 \times 10^{-3} = 2.4 \text{ mm}$$

(2) 第一级明条纹对应的衍射角 φ 满足

$$\sin\varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2a} = \frac{3 \times 6 \times 10^{-7}}{2 \times 2 \times 10^{-4}} = 4.5 \times 10^{-3}$$

所以第一级明条纹中心到中央明纹中心的距离为

$$x_1 = f \tan\varphi \approx f \sin\varphi = 0.4 \times 4.5 \times 10^{-3} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.8 \text{ mm}$$

对应于该衍射角, 单缝处波面可分的半波带数为

$$(2k+1) = 3$$

(3) 设第二级暗条纹到中央明纹中心的距离为 x_2 , 对应的衍射角为 φ_2 , 则第一级明条纹的线宽度为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = f \tan\varphi_2 - f \tan\varphi_1 = f \frac{\lambda}{a} = \frac{6.0 \times 10^{-7} \times 0.4}{2.0 \times 10^{-4}} = 1.2 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.2 \text{ mm}$$

12.3 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

12.3.1 圆孔衍射

当光波入射到小圆孔时, 也会产生衍射现象。光学仪器中所用的孔径光阑、透镜的边框等都相当于一个透光的圆孔, 在成像问题中常要涉及圆孔衍射问题。

在单缝夫琅禾费衍射实验装置中, 若用一小圆孔代替单缝, 用单色光垂直照射小圆孔 S

时,在透镜 L 的焦平面处的屏幕 E 上可以观察到圆孔夫琅禾费衍射图样,其中央为一亮圆斑,周围为一组明暗相间的同心圆环,如图 12-8 所示。中央亮斑较亮,其光强约为整个入射光强的 80% 以上,叫做爱里(Airy)斑。若爱里斑的直径为 d ,其半径对透镜 L 光心的张角 θ 称为爱里斑的半角宽度,根据理论计算,爱里斑的半角宽度 θ 与圆孔直径 D 及入射光波长 λ 的关系为

$$\theta \approx \sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (12.7)$$

而爱里斑的半径为

$$r = f \tan\theta \approx f \sin\theta = 1.22 \frac{f\lambda}{D} \quad (12.8)$$

式中, f 为透镜焦距。由上式可知,圆孔直径 D 越小,或 λ 越大,则衍射现象越明显。

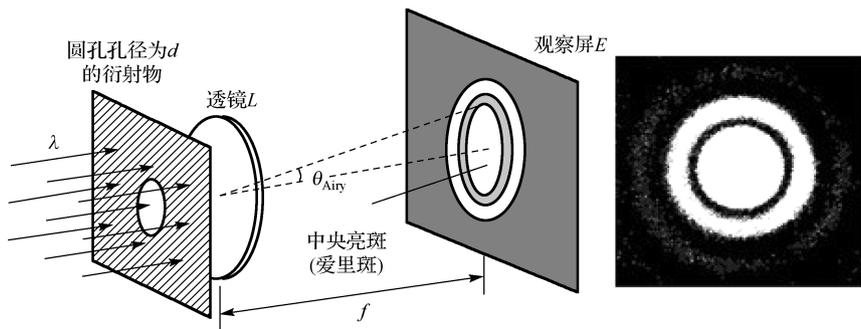


图 12-8 圆孔衍射和爱里斑

12.3.2 光学仪器的分辨率

当我们讨论各种光学仪器的成像问题时,如果仅从几何光学的观点来看,物体通过光学仪器成像时,每一个物点都对应一个像点。但由于光的衍射,像点不仅仅是一个几何的点,而是有一定大小的爱里斑。如果是两个相距很近的物点,其对应的两个爱里斑就可能重叠甚至无法分辨出两个物点的像。因此,光学仪器的分辨能力要受到光的衍射的限制。

例如用透镜观察两点光源 S_1 和 S_2 ,当两点光源相距较远,两个爱里斑的中心距离大于爱里斑的半径,这时,即使两个衍射图样部分重叠,但重叠部分的光强比爱里斑中心处的光强要小,因此,两物点的像是可以分辨的,如图 12-9 所示。如果两点光源靠得很近,两个爱里斑中心距离小于爱里斑的半径,这时两个衍射图样重叠而混为一体,两物点就无法分辨。那么可分辨和不可分辨的标准是什么呢?瑞利指出:对于任何一个光学仪器,如果一个物点衍射图样的爱里斑中心最亮处恰好与另一个物点衍射图样的第一个最暗处相重合,则认为这两个物点恰好可以被光学仪器所分辨。这时,两衍射图样重叠部分中心处的光强约为单个衍射图样的中央最大光强的 80%,通常把这个准则称为瑞利(Rayleigh)判据。而这一临界情况下两个物点 S_1 和 S_2 对透镜光心的张角 θ_0 叫最小分辨角。由式(12.7)可知

$$\theta_0 = 1.22\lambda/D \quad (12.8)$$

最小分辨角 θ_0 的倒数 $1/\theta_0$ 称为光学仪器的分辨率。由上式可知,光学仪器的分辨率与仪器的孔径 D 成正比,与光波的波长 λ 成反比。因此,在天文观测中,常采用孔径很大的望远镜。

而对于显微镜,则尽量采用波长很短的紫光。近代物理实验证明,电子也具有波动性,因此,常利用电子显微镜来观测物体的微观结构。

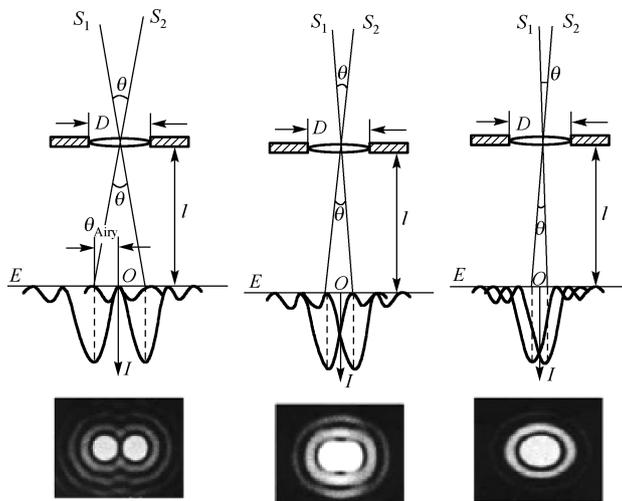


图 12-9 光学仪器的分辨能力

【例 12.2】 设人眼在正常照度下的瞳孔直径约为 3 mm,而在可见光中,人眼最敏感的波长为 550 nm,问:(1)人眼的最小分辨角有多大?(2)若物体放在距人眼 25 cm(明视距离)处,则两物点间距为多大时才能被分辨?

【解】 (1)由于通常情况下,人眼所观察的物体的距离远大于瞳孔直径,故可以近似应用夫琅禾费衍射的结果进行分析。所以由式(12.8)可知,人眼的最小分辨角为

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 1.22\lambda/D = 1.22 \times 5.5 \times 10^{-7} \text{ m} / (3 \times 10^{-3} \text{ m}) \\ &= 2.2 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$

(2)设两物点间的距离为 d ,它们与人眼的距离 $l = 25 \text{ cm}$,此时恰好能被分辨,这时,人眼的最小分辨角 $\theta_0 = d/l$,所以

$$d = \theta_0 l = 25 \text{ cm} \times 2.2 \times 10^{-4} = 0.055 \text{ mm}$$

两物点间的距离大于上述数值时才能清楚分辨。

【例 12.3】 毫米波雷达发出的波束比常用的雷达波束窄,这使得毫米波雷达不易受到反雷达导弹的袭击。

(1)有一毫米波雷达,其圆形天线直径为 55 cm,发射频率为 220 GHz 的毫米波,试计算其波束的角宽度。

(2)将此结果与普通船用雷达发射的波束的角宽度进行比较,设船用雷达波长为 1.57 cm,圆形天线直径为 2.33 m。

【解】 (1)雷达发射的波是由圆形天线发射出去的,可以看成是圆孔的衍射波,其能量主要集中在爱里斑的范围内,故雷达波束的角宽度就是爱里斑的角宽度。

频率为 220 GHz 的雷达波的波长为

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{220 \times 10^9 \text{ Hz}} = 1.36 \times 10^{-3} \text{ m}$$

爱里斑的角宽度

$$\Delta\theta_1 = 2.44 \frac{\lambda_1}{D_1} = 2.44 \times \frac{1.36 \times 10^{-3} \text{ m}}{55 \times 10^{-2} \text{ m}} = 0.00603 \text{ rad}$$

(2)同理可算出船用雷达波束的角宽度为

$$\Delta\theta_2 = 2.44 \frac{\lambda_2}{D_2} = 2.44 \times \frac{1.57 \times 10^{-2} \text{ m}}{2.33 \text{ m}} = 0.0164 \text{ rad}$$

12.4 衍射光栅

由前面对单缝的讨论可知,原则上可以利用单缝衍射来测定入射光波的波长,但在单缝衍射中,如果缝较宽,明纹亮度虽较强,相邻明纹的间隔却很窄而不易分辨;若使缝变窄,明纹间的间隔可加宽,但明纹的亮度却显著减小。这两种情况下都很难精确地测量条纹宽度,从而无法精确地测量光波波长。所以实际中测量光波波长时,往往不是使用单缝,而是利用可以获得又细又亮的明条纹的衍射光栅。

12.4.1 衍射光栅

由大量等宽等间距的平行狭缝组成的光学器件称为光栅。一般常用的光栅是在玻璃上刻划出大量等距离、等宽度的平行直线,刻痕处相当于毛玻璃(不透光),两刻痕间透光,相当于一狭缝。这种利用透射光衍射的光栅称为透射光栅,如图 12-10(a)所示。在光洁度很高的金属表面刻出一系列等间距的平行细槽,就做成了反射光栅,如图 12-10(b)所示。简易的光栅可用照相的方法制造,印有一系列平行而且等间距的黑色条纹的照相底片就是透射光栅。

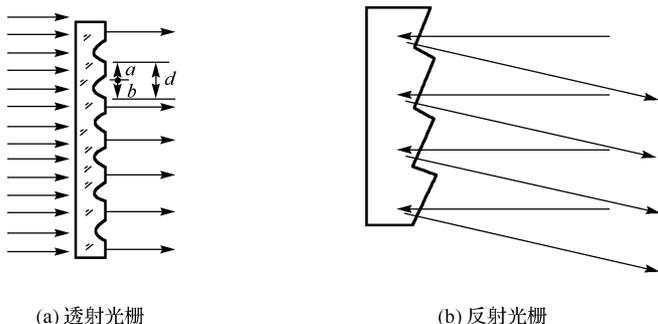


图 12-10 光栅

设透射光栅的总缝数为 N , 缝宽为 a , 刻痕的宽度为 b , 如图 12-10(a)所示, 令 $d=a+b$, 称为光栅常数。实际用的光栅, 在 1 cm 内, 通常有 $10^3 \sim 10^5$ 条刻痕, 所以一般的光栅常数约为 $10^{-6} \sim 10^{-5}$ 的数量级。

如图 12-11 所示, 当一束平行单色光垂直照射到光栅上时, 每一条狭缝都要产生衍射, 而缝与缝之间透过的光又要发生干涉。用透镜 L 把光束会聚到屏幕上, 就会在屏幕上出现如图 12-12 所示的平行于狭缝的明暗相间的光栅衍射条纹, 由于每一条狭缝产生的衍射极大位置相同, 所以随着狭缝的增多, 明条纹的亮度增大, 同时条纹也变细了。

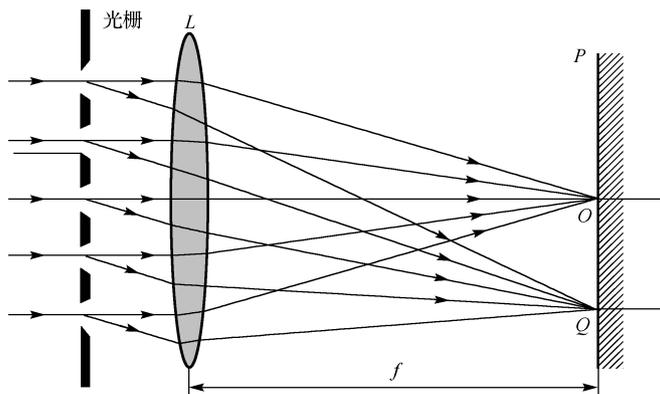


图 12-11 光栅的多光束干涉

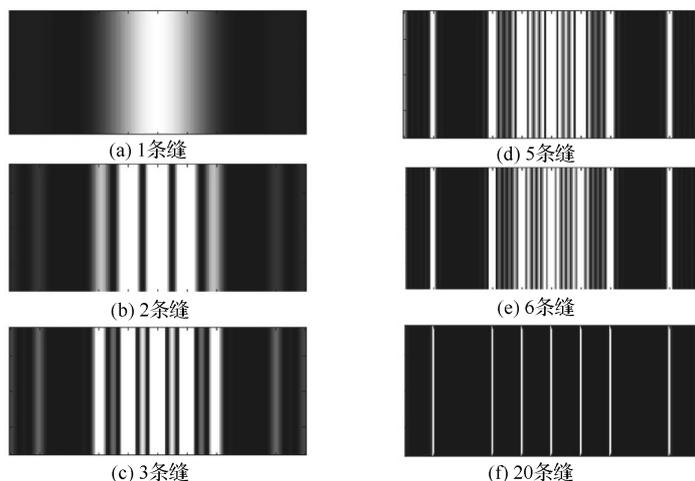


图 12-12 多缝衍射条纹

12.4.2 光栅衍射规律

光栅由大量的平行单缝组成，光通过每一个单缝都会产生衍射。由于各缝的宽度均为 a ，故它们形成的衍射图样都相同，且在屏幕上相互完全重合。同时，各缝发出的衍射光都是相干光，所以缝与缝之间会发生干涉，其干涉条纹的明暗分布取决于相邻两缝到会聚点的光程差。因此，分析屏幕上的光栅衍射条纹既要考虑各单缝的衍射，又要考虑各缝之间的干涉，即考虑单缝衍射和多缝干涉的总效果。

1. 光栅方程

首先考虑多缝干涉的影响，如图 12-13 所示，当一束平行单色光垂直入射光栅时，可以看做各缝共形成 N 个间距都是 d 的同相的子波波源，它们沿每个方向都发出频率相同、振幅相同的光波。这些光波的叠加就形成了多光束干涉。发自各缝的具有相同衍射角 φ 的一组平行光都会聚于屏上同一点 P ，任意相邻两缝发出的光到达 P 点时的光程差都为 $d \sin \varphi$ 。由光

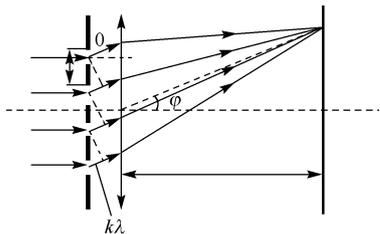


图 12-13 光栅的多光束干涉

的干涉规律可知, 当 φ 满足

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda, k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.9)$$

时, 所有的缝发出的光到达 P 点时都是同相的, 因此在 P 点处干涉相长而形成明条纹。由于 P 点的合振幅是来自每一条缝的光的振幅的 N 倍, 而合光强则是来自一条缝的光强的 N^2 倍, 所以光栅的多光束干涉形成的明条纹的亮度要比一条缝发的光的亮度大得多。因此把这些明条纹相应的光强的极大值称为主极大, 决定主极大位置的

式(12.9)称为光栅方程。

光栅的缝很多还有一个明显的效果: 使主极大明条纹变得很窄。以中央明纹为例, 它出现在 $\varphi = 0$ 处, 在稍微偏过一点的 $\Delta\varphi$ 方向, 如果光栅上的最上面一条缝和最下面一条缝发出的光的光程差等于入射光波波长, 即 $Nd \sin \Delta\varphi = \lambda$ 时, 整个光栅可以近似看做是一个单缝来处理。则整个光栅可以分成两个半波带, 两个半波带内相应的缝发出的光到达屏上时干涉相消, 故光强为零。由于 N 一般很大, 所以 $\sin \Delta\varphi = \lambda / Nd$ 可以很小, 因此 $\Delta\varphi = \sin \Delta\varphi = \lambda / Nd$ 。由它所限制的中央明条纹的角宽度为 $2\Delta\varphi = 2\lambda / Nd$ 。而由光栅方程(12.9)可以求得中央明条纹到第 1 级主明纹的角距离为 $\varphi_1 > \sin \varphi_1 = \lambda / d$ 。因此 φ_1 比 $2\Delta\varphi$ 的 $N/2$ 倍还大。由于 N 很大, 所以中央明纹宽度要比它和第一级主明纹的距离小得多, 对其他主明纹分析结果也一样: 明条纹的宽度比它们的间距小得多。在两个主极大之间也还有总光强为零的位置(如 $Nd \sin \varphi' = \pm k'' \lambda, k'' = 1, 2, \dots, (N-1)\lambda$)。在这些位置之间光强不为零, 但由于在这些区域从各缝发出来的光叠加时总有许多缝的光干涉相消, 所以其总光强比主极大要小得多, 我们称为次明纹。因此, 在主明纹之间实际是一暗区, 主明纹分得很开且很细, 由于光强集中在窄小的区域内, 条纹变得很亮。所以光栅衍射图样的特点是: 在几乎黑暗的背景上呈现一系列又细又亮的明条纹, 而且光栅总缝数 N 越大, 所形成的明条纹也越细越亮。这样的明条纹叫做光谱线。这一结果的光强分布如图 12-14(b)所示。

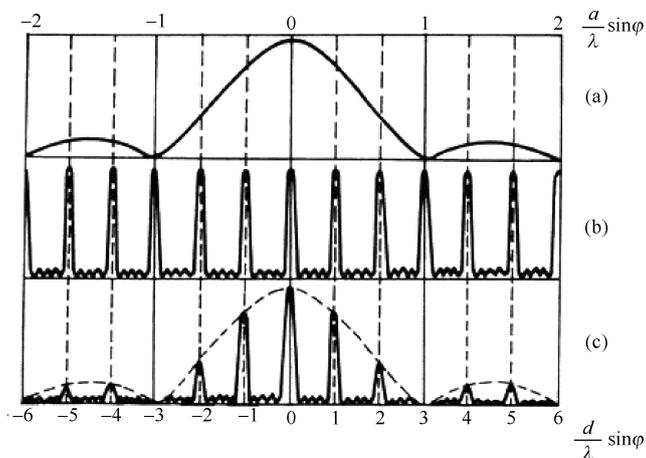


图 12-14 光栅衍射的光强分布

以上讨论多光束干涉时, 是假设各缝在各方向的衍射光的强度都一样而得出的。实际

上, 每条缝发出的衍射光, 在不同的 φ 方向强度是不同的, 如图 12-14(a) 所示, 由于光栅衍射时的不同位置的主明纹是来源于不同光强度的衍射光的干涉叠加, 因此, 多光束干涉的各主明纹要受单缝衍射的调制, 单缝衍射光强大的方向主明纹光强也大, 单缝衍射光强小的方向主明纹光强也小, 如图 12-14(c) 所示。光栅衍射各级明条纹强度的包络线与单缝衍射的强度曲线类似。

2. 缺级

还应指出, 由于单缝衍射的光强分布在某些 φ 值时为零, 所以, 对应这些 φ 值按多光束干涉出现某些级的主极大时, 这些主极大将消失。这种单缝衍射调制的特殊结果叫缺级现象。所缺的级由光栅常数 d 与缝宽 a 的比值决定。因为衍射极小满足

$$a \sin \varphi = \pm k' \lambda$$

如果此时 φ 又满足

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda$$

则 k 级主极大缺级, 两式相除可得 $k = \pm \frac{d}{a} k'$, $k' = 1, 2, 3, \dots$, 即 $\frac{d}{a}$ 为整数式, 对应的 k 级明条纹位置出现缺级现象。

12.4.3 光栅光谱

由光栅方程可知, 如果入射光是复色光, 由于各成分色光的 λ 不同, 除中央零级条纹外, 各成分色光的其他同级明条纹将在不同的衍射角出现。同级的不同颜色的明条纹将按波长顺序排列成光栅光谱, 这就是光栅的分光作用。

不同种类光源发出的光所形成的光谱是各不相同的。炽热固体发射的光的光谱, 是各色光连成一片的连续光谱; 放电光中气体所发出的光谱, 则是有一些具有特定波长的分立明线构成的线状光谱; 也有一些光谱由若干条明带组成, 而每一明带实际上是一些密集的谱线, 这类光谱叫带状光谱, 是由分子发光产生的, 所以叫做分子光谱。

由于不同元素(或化合物)各有自己特定的光谱, 因此物质的光谱可用于研究物质结构, 原子、分子的光谱则是了解原子、分子结构及其运动规律的重要依据。光谱分析是现代物理学研究的重要手段。在工程技术中, 也广泛用于分析、鉴定等方面。

【例 12.4】 波长为 600 nm 的单色光垂直入射到一光栅上, 相邻的两条明纹分别出现在 $\sin \theta = 0.20$ 与 $\sin \theta = 0.30$ 处, 第四级缺级。试问: (1) 光栅常数多大? (2) 狭缝的最小宽度为多大?

【解】 由光栅方程和单缝衍射极小所满足的条件有

$$(a + b) \sin \theta = k \lambda, \quad (a + b) = 4a$$

由此得 $\sin \theta = k \lambda / 4a$

由题意有 $\sin \theta_k = k \lambda / 4a = 0.20$, $\sin \theta_{k+1} = (k + 1) \lambda / 4a = 0.30$, 联立解得

$$a = \frac{\lambda}{4 \times (0.30 - 0.20)} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad (a + b) = 6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

【例 12.5】 设计一平面光栅, 要求当用白光垂直入射时, 能在 30° 的衍射方向上看到 600 nm 波长的第二级主极大, 但在该方向上 400 nm 波长的第三级主极大不出现。

【解】 由光栅方程 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$, 因为在 30° 的方向上看到 600 nm 波长的第二级主极大, 所以有

$$(a+b) = 2 \times 600 \times 10^{-9} / \sin 30^\circ = 24 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

因为在该方向上波长 400 nm 的第三级主极大不出现, 因此有

$$k = \frac{24 \times 10^{-4} \sin 30^\circ}{4 \times 10^{-4}} = 3$$

可见在 30° 的方向应能看到 400 nm 波长的第三级主极大, 为使其不出现, 必须是在该位置上存在缺级现象, 即在 30° 的方向 $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ 和 $a\sin\theta = k'\lambda$ 同时成立, 故

$$k = \frac{a+b}{a}k' = 3$$

以 $(a+b) = 24 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 代入得

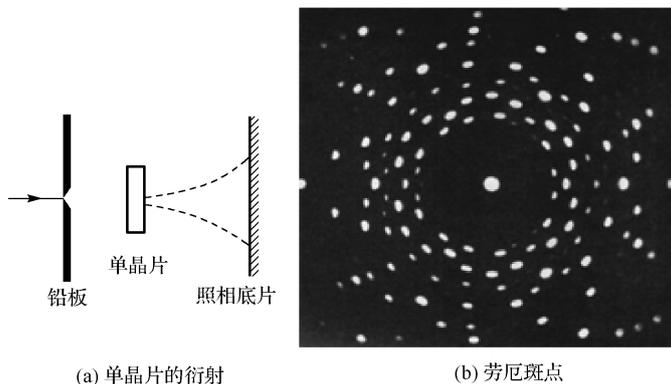
$$a = \frac{24 \times 10^{-4}}{3}k' = 8 \times 10^{-4}k'$$

当 $k' = 1$ 时, $a = 8 \times 10^{-4} \text{ mm}$, $b = 16 \times 10^{-4} \text{ mm}$; 当 $k' = 2$ 时, $a = 16 \times 10^{-4} \text{ mm}$, $b = 8 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 。

12.5 X射线的衍射

X射线是伦琴在 1895 年发现的, 故又称伦琴射线。它是在高速电子撞击某些固体时产生的一种波长很短、穿透力很强的电磁波, 其波长在 0.01 nm 到 0.1 nm 之间。对于这样短的波长, 通常的光学光栅已毫无用处, 而且也无法用机械方法制造出适用于 X射线的

光栅。1912 年德国物理学家劳厄利用薄片晶体作为衍射光栅, 直接观察到了 X射线的衍射图样。实验示意图如图 12.15(a)所示。劳厄所拍摄的第一张 X射线通过晶体后的衍射照片如图 12-15(b)所示。研究表明, 这些具有某种对称性的斑点是由晶体衍射线的主极大形成的, 称为劳厄斑。X射线通过晶体衍射的图样表明, 晶体具有周期性结构, 可以抽象成由许多周期排列的格点组成的点阵。



(a) 单晶片的衍射

(b) 劳厄斑点

图 12-15 X射线衍射

前苏联乌利夫和英国布拉格父子独立的提出了一种研究方法,这种研究方法把晶体的空间点阵简化,当作反射光栅处理。想象晶体是由一系列平行的原子层(称为晶面)所构成的,如图 12-16 所示。各原子层(或晶面)之间的距离为 d ,称为晶面间距。当一束单色平行的 X 射线以掠射角 θ 入射到晶面上时,在符合反射定律的方向上可以得到强度最大的射线。但由于各个晶面上衍射中心发出的子波的干涉,这一强度也随掠射角的改变而改变。由图 12-16 可知,相邻两个晶面反射的两条光线干涉加强的条件为

$$2d\sin\theta = k\lambda, k = 1, 2, 3, \dots \quad (12.10)$$

此式称为布拉格公式。

同一块晶体的空间点阵,从不同方向看去,可以看到离子形成取向不相同,间距也各不相同的许多晶面族。当 X 射线入射到晶体表面上时,对于不同的晶面族,掠射角和晶面间距都不同。只有满足布拉格公式的才会形成劳厄斑点。

布拉格公式是 X 射线衍射的基本规律,它的应用是多方面的。若由别的方法测出了晶面间距 d ,就可以根据 X 射线衍射实验由掠射角 θ 算出入射 X 射线的波长,从而研究 X 射线谱,进而研究原子结构。反之,也可以将已知波长的 X 射线投射到某种晶体的晶面上,由出现最大强度的掠射角 θ 可以算出相应的晶面间距 d 从而研究晶体结构,进而研究材料性能。这些研究在科学和工程技术中有着重要的应用。如对大生物分子 DNA 晶体的成千张 X 射线衍射照片的分析,显示出 DNA 分子的双螺旋结构。

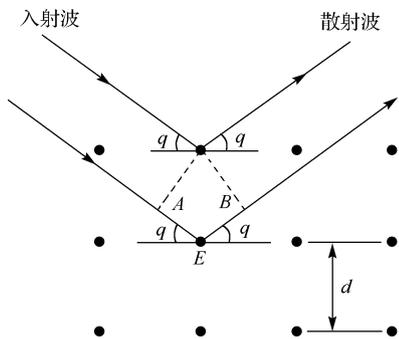


图 12-16 布拉格反射

本章小结

一、惠更斯-菲涅尔原理

波阵面上各点都可以看成子波波源,其后波场中各点波的强度由各子波在该点的相干叠加决定。

二、夫琅禾费衍射

1. 单缝衍射:用半波带法对衍射条纹的分布规律进行解释。

单色光垂直入射时,暗条纹中心位置满足

$$a\sin\varphi = \pm k\lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

明纹中心位置满足

$$a\sin\varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

中央明纹

$$-\lambda < a\sin\varphi < \lambda$$

2. 圆孔衍射:单色光垂直入射时,爱里斑的半角宽度为

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

根据圆孔衍射规律和瑞利判据可得最小分辨角(角分辨率) $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

$$\text{分辨率} \quad R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

三、光栅衍射

光栅衍射图样是单缝衍射和多缝干涉的综合效应。

单色光垂直入射时,谱线(主极大)的位置满足

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

谱线强度受单缝衍射调制,有时有缺级现象。缺级条件为

$$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'}$$

其中 k 为光栅主极大级次, k' 为单缝衍射暗条纹级次。

四、X 射线衍射的布拉格公式

$$2d \sin \theta = k \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

习 题 12

一、选择题

12.1 根据惠更斯-菲涅耳原理,若已知光在某时刻的波阵面为 S ,则 S 的前方某点 P 的光强度决定于波阵面 S 上所有面积元发出的子波各自传到 P 点的()。

- A. 振动振幅之和
B. 光强之和
C. 振动振幅之和的平方
D. 振动的相干叠加

12.2 波长为 λ 的单色平行光垂直入射到一狭缝上,若第一级暗纹的位置对应的衍射角为 $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$,则缝宽的大小为()。

- A. $\lambda/2$ B. λ C. 2λ D. 3λ

12.3 在单缝夫琅禾费衍射实验中,波长为 λ 的单色光垂直入射在宽度为 $a = 4\lambda$ 的单缝上,对应于衍射角为 30° 的方向,单缝处波阵面可分成的半波带数目为()。

- A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

12.4 在单缝夫琅和费衍射实验中,若增大缝宽,其他条件不变,则中央明条纹()。

- A. 宽度变小 B. 宽度变大
C. 宽度不变,且中心强度也不变 D. 宽度不变,但中心强度增大

12.5 以白光垂直照射光栅,所得到的一级光谱按衍射角从小到大的排列的顺序是()。

- A. 紫黄红 B. 红紫黄 C. 黄红紫 D. 红黄紫

二、填空题

12.6 光栅衍射条纹是_____与_____的总效果。

12.7 波长为 600 nm 的单色平行光, 垂直入射到缝宽为 $a = 0.60$ mm 的单缝上, 缝后有一焦距 $f = 60$ cm 的透镜, 在透镜焦平面上观察衍射图样。则中央明纹的宽度为_____, 两个第三级暗纹之间的距离为_____。

12.8 某单色光垂直入射到一个每毫米有 800 条刻线的光栅上, 如果第一级谱线的衍射角为 30° , 则入射光的波长应有_____。

12.9 某天文台的反射式天文望远镜的通光孔径为 2.5 m, 已知波长为 550 nm。则能被它分辨的双星的最小夹角为_____ rad。

三、计算题

12.10 单缝宽 0.10 mm, 透镜焦距为 50 cm, 用 $\lambda = 5000$ Å 的绿光垂直照射单缝。位于透镜焦平面处的屏幕上中央明条纹的宽度和半角宽度各为多少?

12.11 有一单缝, 缝宽 0.30 mm, 缝后透镜焦距为 0.80 m, 用平行橙光 6100 Å 垂直照射单缝。求: (1) 屏幕上中央明纹宽度; (2) 第三级明纹中心到中央明纹中心的距离。

12.12 一单缝夫琅禾费衍射实验中, 缝宽 $a = 5\lambda$, 缝后透镜焦距 $f = 40$ cm, 试求中央条纹和第一级亮纹的宽度。

12.13 用 $\lambda = 5900$ Å 的钠黄光垂直入射到每毫米有 500 条刻痕的光栅上, 问最多能看到第几级明条纹?

12.14 波长为 5000 Å 的平行单色光垂直照射到每毫米有 200 条刻痕的光栅上, 光栅后的透镜焦距为 60 cm。求: (1) 屏幕上中央明条纹与第一级明条纹的间距; (2) 当光线与光栅法线成 30° 斜入射时, 中央明条纹的位移为多少?

12.15 波长 $\lambda = 6000$ Å 的单色光垂直入射到一光栅上, 第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin\varphi = 0.20$ 与 $\sin\varphi = 0.30$ 处, 第四级缺级。求: (1) 光栅常数; (2) 光栅上狭缝的宽度; (3) 在 $90^\circ > \varphi > -90^\circ$ 范围内, 实际呈现的全部级数。

12.16 在夫琅禾费圆孔衍射中, 设圆孔半径为 0.10 mm, 透镜焦距为 50 cm, 所用单色光波长为 5000 Å, 求在透镜焦平面处屏幕上呈现的爱里斑半径。

12.17 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 4.84×10^{-6} rad, 它们都发出波长为 5500 Å 的光, 试问望远镜的口径至少要多大, 才能分辨出这两颗星?

12.18 已知入射的 X 射线束含有从 0.95~1.30 Å 范围内的各种波长, 晶体的晶格常数为 2.75 Å, 当 X 射线以 45° 角入射到晶体时, 问对哪些波长的 X 射线能产生强反射?

第 13 章

光的偏振

前面两章讨论光的干涉和衍射时，并没有追究光是横波还是纵波，这就是说无论是横波还是纵波，都可以产生干涉和衍射现象。电磁波是横波，所以光波中的光矢量的振动方向总是和光的传播方向垂直，光波的这一基本特征就是光的偏振。在垂直于光的传播方向平面内，光矢量还可能有各种不同的振动状态，我们把各种振动状态称为光的偏振态。偏振现象是横波区别于纵波的一个标志。

本章首先介绍各种偏振态的区别，然后说明如何获得和检验线偏振光。再简单介绍晶体的双折射现象。

13.1 自然光和偏振光

13.1.1 自然光

以自发辐射为发光机制的普通光源中，在垂直于光的传播方向平面内，光矢量的振动在各个方向的概率相等，即在所有可能的方向上，光矢量 \mathbf{E} 的振幅都相等，这样的光叫自然光，如图 13-1(a)所示。在任意时刻，我们可以把光矢量分解成两个相互垂直的两个光矢量分量，然后将所有光矢量分量分别叠加起来，成为总光波矢量的两个分量，如图 13-1(b)所示。注意，由于自然光中各光振动之间相互独立，所以总光波矢量的两个分量之间没有固定的相位差。自然光也常用图 13-1(c)所示的方法表示，用点和短线分别表示垂直和平行于纸面的光振动，且点和短线的数量相等，表示没有哪一个方向的光振动占优势。

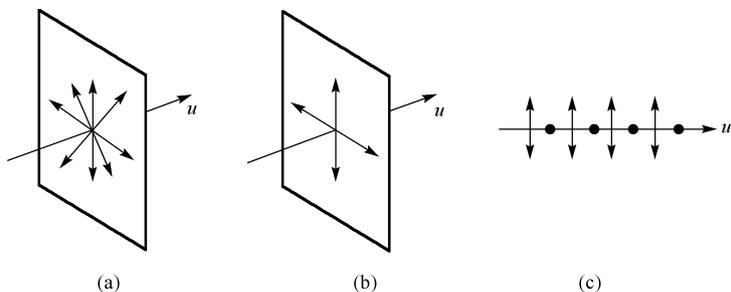


图 13-1 自然光

13.1.2 线偏振光和部分偏振光

如果在实验中,采用某种方法,把自然光中某个方向的振动分量完全消除或移走,只保留另一个垂直方向的光振动,则光矢量的方向只沿某一个固定的方向振动,这样的光称为线偏振光,是完全偏振光的一种,如图 13-2(a)所示。线偏振光的振动方向与传播方向所组成的平面叫振动面,线偏振光的振动面是一个平面,因此也称为平面偏振光。如果只移走了自然光中某一分量的部分光,使得自然光中两个独立的分量不相等,这样的光称为部分偏振光,如图 13-2(b)所示。自然界中我们看到的许多光都是部分偏振光,仰头看到的“天光”和俯首看到的“湖光”都是部分偏振光。

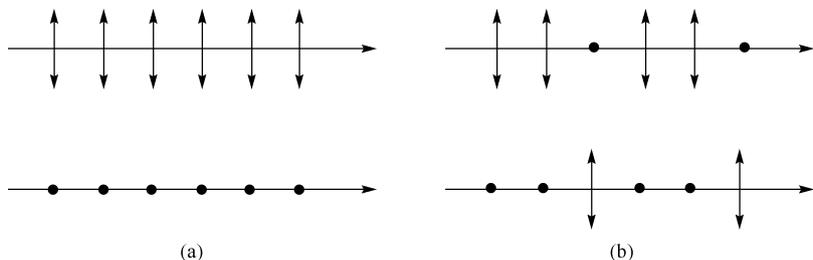


图 13-2 线偏振光和部分偏振光

13.1.3 椭圆偏振光

还有一种完全偏振光叫做椭圆偏振光(包括圆偏振光),这种光的光矢量 E 沿着光的传播方向前进的同时,还绕着传播方向均匀转动。如果光矢量的大小不断改变,使其端点描绘出一个椭圆,这种光就叫椭圆偏振光。如果光矢量的大小维持不变,则这种光叫做圆偏光。根据光矢量旋转方向的不同,这种偏振光又可以分为左旋光和右旋光。若迎着来光方向看过去,光矢量是顺时针方向旋转的,称为右旋椭圆偏振光或圆偏振光,若光矢量是逆时针旋转的,则称为左旋椭圆偏振光或圆偏振光,如图 13-3 所示。

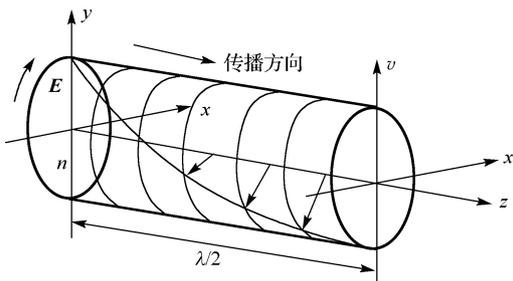


图 13-3 右旋偏振光

根据振动方向相互垂直的两振动合成的规律,椭圆偏振光或圆偏振光可以看成是两个相互垂直而有一定相位差的线偏振光的合成。

13.2 偏振片 马吕斯定律

13.2.1 偏振片的起偏和检偏

获得偏振光的方法有多种,常用的方法是利用偏振片将普通光源发出的自然光变为偏振光。这种从自然光获得偏振光的过程叫起偏,产生起偏作用的装置叫做起偏器。偏振片是一种常用的起偏器,只有沿某个方向的光矢量或光矢量振动沿该矢量的分量才能通过偏振片。

因此,偏振片不但可以用来使自然光变成偏振光,同时还可以用来检验光是否是偏振光,这个检验过程叫做检偏。能够检验光的偏振状态的器件称为检偏器。

通常,偏振片是在透明的基片上蒸镀一层物质(如硫酸钠、氯化硫酸奎宁等)晶粒制成的。它能对入射自然光的光矢量在某方向上的分量有强烈的吸收,而对与该方向垂直的分量吸收很少。因此偏振片只能透过沿某个方向的光矢量或光矢量在该方向的分量。我们把这个透光方向称为偏振片的偏振化方向或透振方向,通常用记号“ \downarrow ”把偏振化方向标示在偏振片上。

两个平行放置的偏振片 P_1 和 P_2 , 它们的偏振化方向如图 13-4 所示, 当自然光垂直入射偏振片 P_1 , 透过的光将成为线偏振光, 其振动方向平行于 P_1 的偏振化方向, 强度为入射自然光强度的一半, 这一过程称为起偏。透过 P_1 的线偏振光再入射到偏振片 P_2 上, 如果 P_2 的偏振化方向与 P_1 平行, 则透过 P_2 的光强最强; 如果两者的偏振化方向相互垂直, 则光强为零, 称为消光。将 P_2 绕光的传播方向慢慢转动, 可以看到透过 P_2 的光随之变化, 如由亮逐渐变暗, 再由暗逐渐变亮, 旋转一周将出现两次光强最大和两次光强为零。如果入射到 P_2 的是自然光, 将不会出现上述情况; 如果入射到 P_2 的是部分偏振光, 将不会出现光强为零的情况。因此这也就成为检验线偏振光的依据。

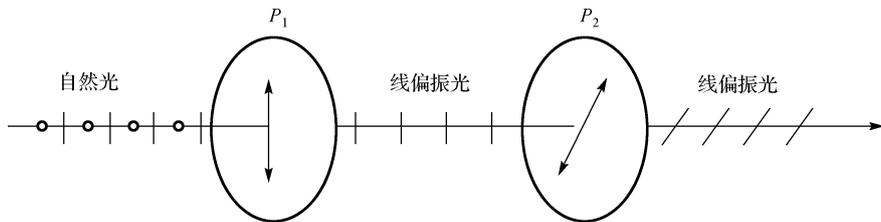


图 13-4 偏振片的起偏和检偏

13.2.2 马吕斯定律

当检偏器的偏振化方向和入射线偏振光光矢量方向之间有一定的夹角时, 由于检偏器只允许线偏振光中与偏振化方向相同的光振动分量通过, 因此出射光强变小。出射光强与入射光强之间到底有什么联系呢? 1809 年, 马吕斯(E. L. Malus)在研究线偏振光透过检偏器后透射光的光强时发现: 如果入射线偏振光的光强为 I_1 , 通过检偏器后, 透射光的光强(不计检偏器对透射光的吸收) I_2 为

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha \quad (13.1)$$

其中 α 是检偏器的偏振化方向和入射线偏振光的振动方向之间的夹角。这就是马吕斯定律。

马吕斯定律的证明如下。如图 13-5 所示, 入射线偏振光的光矢量振幅为 E_1 , 振动方向为 ON , P_2 是检偏器的偏振化方向, 与 ON 之间的夹角为 α , 将入射光振动分解为平行于 P_2 和垂直于 P_2 的两个分量。它们的振幅分别为 $E_1 \cos \alpha$ 和 $E_1 \sin \alpha$, 因为只有平行方向的分量可以透过 P_2 , 所以透射光的振幅 E_2 和光强 I_2 分别为

$$E_2 = E_1 \cos \alpha$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

因此,当 $\alpha = 0^\circ$ 或 180° 时, $I_2 = I_1$,透射光光强最强;当 $\alpha = 90^\circ$ 或 270° 时, $I_2 = 0$,这时没有光从检偏器射出。

偏振片的应用很广,如汽车夜间行驶时,为了避免对方汽车灯光晃眼以保证行车安全,可以在所有汽车的车窗玻璃和车灯前装上与水平方向成 45° 角,而且向同一方向倾斜的偏振片。这样,相向行驶的汽车可以不必熄灯,各自前方的道路仍然照亮,同时也不会被对方车灯晃眼了。

偏振片也可以用于制成太阳镜和照相机的滤光片。如观看立体电影的眼睛的左右两个镜片就是用偏振片做成的,它们的偏振化方向相互垂直。

【例 13.1】 用两个偏振片平行放置作为起偏器和检偏器。当它们偏振化方向间的夹角为 30° 时,一束自然光穿过它们,出射光强为 I_1 ;当它们偏振化方向间的夹角为 60° 时,另一束自然光穿过它们,出射光强为 I_2 ,且 $I_2 = I_1$ 。求两束自然光的强度之比。

【解】 设两束自然光的强度分别为 I_{10} 和 I_{20} ,透过起偏器后,光强分别为 $I_{10}/2$ 和 $I_{20}/2$,根据马吕斯定律,透过检偏器后光强分别为

$$I_1 = \frac{I_{10}}{2} \cos^2 30^\circ$$

$$I_2 = \frac{I_{20}}{2} \cos^2 60^\circ$$

由题意有

$$I_1 = I_2$$

则两束自然光的强度之比为

$$\frac{I_{10}}{I_{20}} = \frac{\cos^2 60^\circ}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1}{3}$$

【例 13.2】 一束光由自然光和线偏振光混合而成。当它垂直通过一偏振片时,透射光的强度随偏振片的转动而变化,其最大光强是最小光强的5倍。问入射光中自然光和线偏振光的强度各占入射光强度的百分之几?

【解】 设自然光和偏振光的强度分别为 I_0 和 I_1 ,自然光通过偏振片后的强度为 $I_0/2$,线偏振光通过偏振片后的强度为 $I_1 \cos^2 \alpha$,则透射偏振光的总强度 I 为

$$I = \frac{I_0}{2} + I_1 \cos^2 \alpha$$

式中 α 为入射偏振光的振动方向与偏振片的偏振化方向间的夹角。

由此得

$$I_{\max} = \frac{I_0}{2} + I_1$$

$$I_{\min} = \frac{I_0}{2}$$

由题意有

$$I_{\max} = 5I_{\min}$$

于是

$$I_1 = 2I_0$$

因此自然光所占百分比为

$$\frac{I_0}{I_0 + I_1} = \frac{1}{3}$$

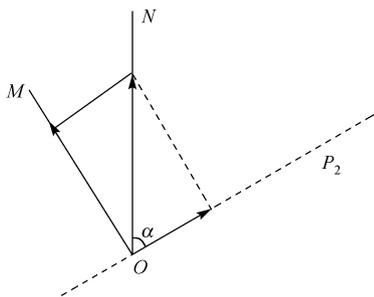


图 13-5 马吕斯定律的证明

线偏振光所占百分比为

$$\frac{I_1}{I_0 + I_1} = \frac{2}{3}$$

13.3 布儒斯特定律

实验表明, 自然光在折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质(如空气和玻璃)的分界面反射和折射时, 反射光和折射光都将成为部分偏振光。在特定情况下, 反射光有可能成为线偏振光。

如图 13-6 所示, i 为入射角, r 为折射角, 入射光为自然光, 我们把自然光分解为两个相互垂直的光振动, 一个与入射面垂直(图中用黑点表示), 一个与入射面平行(图中用短线表示), 实验表明, 在反射光中垂直入射面的振动较强, 而折射光中平行入射面的振动较强, 两者均为部分偏振光。

理论和实验都证明, 反射光的偏振化程度与入射角有关。随着入射角 i 的改变, 反射光的偏振化程度也改变, 当入射角 i_B 满足

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{13.2}$$

时, 反射光中只有垂直入射面的振动, 成为完全偏振光。而折射光仍为部分偏振光。如图 13-7 所示, 式(13.2)是 1815 年由布儒斯特从实验中得出的, 因此称为布儒斯特定律。 i_B 称为布儒斯特角或起偏角。

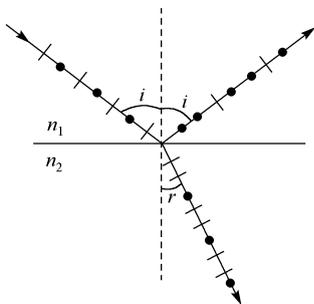


图 13-6 自然光反射和折射后产生的部分偏振光

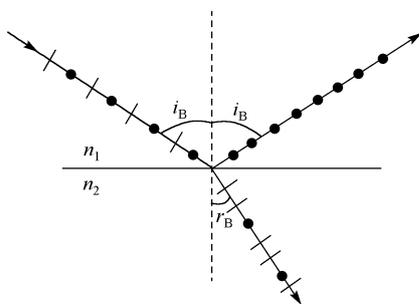


图 13-7 布儒斯特角

由折射定律有

$$\frac{\sin i_B}{\sin r_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

当入射角为起偏角时, 有

$$\tan i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

所以

$$\sin r_B = \cos i_B$$

$$r_B + i_B = \frac{\pi}{2} \tag{13.3}$$

因此, 当入射角为起偏角时, 反射光与折射光相互垂直。

当自然光以起偏角从空气入射到玻璃片上时, 对于一般的光学玻璃, 反射的线偏光的强度约为入射光强度的 7.5%, 大部分光都能透过玻璃。因此, 仅靠自然光在一块玻璃上的反

射来获得线偏振光，其强度是很弱的。但如果将一些玻璃片叠成玻璃片堆，如图 13-8 所示，并以起偏角入射。由于在各个界面上的反射光，都是垂直于入射面的线偏光，所以经过玻璃片堆的反射后，入射光中的绝大部分垂直入射面的光振动都被反射了，因此，在透射光中，就几乎只有平行入射面的光振动，所以透射光也可以近似地看成是线偏振光。所以，利用玻璃片堆在起偏角下的反射和折射，都可以获得偏振光。同样，利用它们也可以检查偏振光。

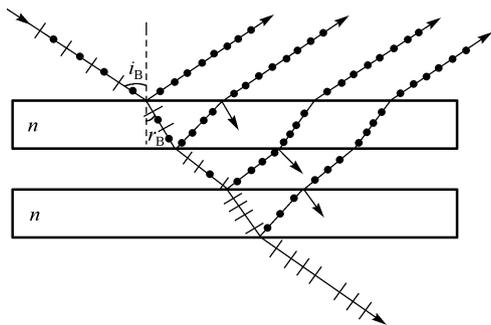


图 13-8 利用玻璃片堆产生线偏振光

【例 13.3】 利用布儒斯特定律可以测定不透明介质的折射率(如珉琅等釉质)，当一束平行自然光从空气中以 58° 角入射到某介质材料表面时，检验出反射光是线偏振光，求该介质的折射率。

【解】 根据布儒斯特定律， $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$ ，所以

$$n_2 = n_1 \tan i_B = \tan 58^\circ = 1.60$$

13.4 光的双折射

我们知道，当光在两种各向同性介质分界面上反射和折射时有光的偏振现象。实验发现，当自然光通过某些晶体(如方解石等)后也可以观察到光的偏振现象，同时还会在晶体内部观察到两束沿不同方向传播的折射光，这种现象称为晶体的双折射。除立方系晶体(如岩盐)外，光线一般进入晶体时，都将产生双折射现象，如图 13-9 所示。显然，晶体越厚，射出的光束分得越开。

实验表明，当改变入射角 i 时，晶体内的两束折射光线中一束遵守折射定律，称为寻常光线(或 o 光)。另一束光不遵守折射定律，其传播速度随入射光的方向变化，且一般情况下，这束折射光不在入射面内，称为非常光线(或 e 光)。用检偏器检验还发现， o 光和 e 光都是线偏振光。

研究发现，晶体内部存在着一个特殊方向，当光沿着这个方向传播时，寻常光线和非常光线的折射率相等，光的传播速度也相等，同时沿这个方向传播时，光将不产生双折射现象，这个特殊方向称

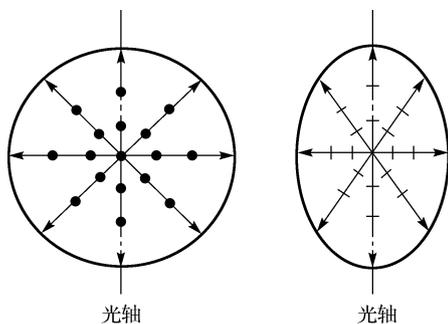


图 13-9 o 光和 e 光的光矢量分布

为晶体的光轴。需要强调的是,光轴并不是某一条特殊的直线,而是一个方向,晶体内所有平行于此方向的直线都是光轴。某些晶体(如方解石、石英等)内只有一个光轴,称为单轴晶体;而一些晶体(如云母、蓝宝石等)内有两个光轴,称为双轴晶体。

晶体中的某条光线与晶体的光轴所组成的平面称为该光线的主平面。 o 光和 e 光各有自己的主平面。实验发现, o 光的光振动垂直于 o 光的主平面, e 光的光振动在 e 光的主平面内。一般情况下, o 光和 e 光的主平面并不重合,它们之间有一个不大的夹角。只有当光线沿光轴和晶体表面法线所组成的平面入射时,这两个平面才严格重合,且就在入射面内,这时, o 光和 e 光的光振动方向相互垂直。这个由光轴和晶体表面法线方向组成的平面称为晶体的主界面,实际应用中,一般都选择光线沿主界面入射,以使双折射现象的研究更为简化。

光在晶体中传播时出现的双折射现象,来源于晶体结构上的各向异性。具体来说是由于介电常数与方向有关,因而导致了在晶体中沿各不同方向传播的光速不同。即光在晶体内传播速度的大小和光矢量与光轴间的相对取向密切相关。如图 13-9 所示,寻常光线在晶体中传播时其光矢量方向始终与光轴垂直,因此其速率在各个方向上相同,在晶体中任意一子波源所发出的子波波面是一球面。非常光线在晶体中传播时其光矢量方向与光轴间的夹角随传播方向而异,因此其速率在各个方向上是不同的,在晶体中任一子波源发出的子波波面是旋转椭球面。两束光只有在沿光轴方向上传播时,它们的速率才是相等的,因此上述两子波波面在光轴上相切。在垂直于光轴的方向上,两束光的速率相差最大。

根据惠更斯原理,可利用作图方法画出 o 光和 e 光在晶体内的传播方向,从而说明光线在单轴晶体中发生的双折射现象。

根据上述球面波和如图 13-10(a)所示,当平行光入射到晶体表面时,在晶体内激发出相应的 o 光和 e 光,其波阵面分别为球面与旋转椭球面,它们在光轴方向上相切。作出某时刻 t 晶体内所有 o 光的子波源发出的子波的公切面(包络面),即为 o 光的波阵面,同样也可作出同一时刻所有 e 光的子波源发出的子波的公切面,得到 e 光的波阵面。从子波源向子波源与公切面的切点作连线,该连线方向就是晶体中 o 光和 e 光的传播方向。

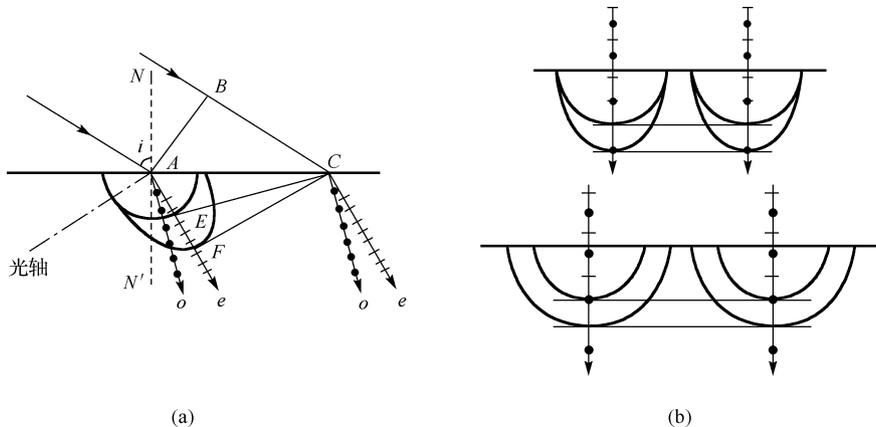


图 13-10 用惠更斯原理解释双折射现象

当按一定方式切割双折射晶体,使光轴与晶体表面平行,并以平行光垂直入射于这些晶体表面时,晶体内光振动方向相互垂直的 o 光和 e 光的传播方向如图 13-10(b)所示。在这两

种情况下,进入晶体后相互垂直的两束光在空间并未分开,但这并不表明此时不存在双折射现象。在这种情况下,相互垂直的两束线偏振光在晶体内的传播速度并不一致,两者的波阵面不重合。经过一定厚度的晶体后,同时出射的这两束线偏振光之间将存在着光程差(或相位差),这一现象在实际应用中很有意义。

设晶体厚度为 d ,则由于 o 光和 e 光的传播速度不同,其折射率不同,因此由晶体出射的两束光之间将存在着一定的光程差 $\Delta = (n_o - n_e)d$,相应的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \quad (13.4)$$

在实验中经常用上述方式切割而成的晶片,称为波片。当波片的厚度 d 一定而使两束出射光之间的相位差为 $\pi/2$,即波片厚度满足 $(n_o - n_e)d = \lambda/4$ 时,称为四分之一波片。当波片的厚度满足为 $(n_o - n_e)d = \lambda/2$ 时,两束出射光间的相位差为 π ,称为二分之一波片。必须注意,无论是四分之一波片还是二分之一波片,都是对一定的波长而言的。

如图 13-11 所示,利用波片可获得椭圆偏振光和圆偏振光,令图中 P 的偏振化方向与波片的光轴成夹角 θ ,这样透过波片的光将是两束振动方向相互垂直、频率相同且有一定相位差的光,此两光振动合成为椭圆偏振光。

当 P 的偏振化方向与光轴方向夹角 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时,则晶体中的 o 光和 e 的振幅相等,此时通过波片后的光称为圆偏振光。

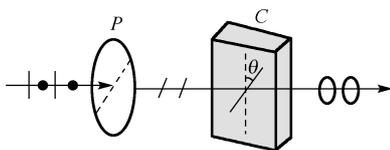


图 13-11 椭圆偏振光的获得

本章小结

一、自然光和偏振光

光是横波,在垂直于光的传播方向的平面内,光振动在各方向振幅都相等的光为自然光;只在某一方向有光振动的光称为线偏振光;各方向光振动都有,但振幅不同的光为部分偏振光。

二、起偏和检偏

自然光通过某种装置成为偏振光叫做起偏,该装置叫起偏器(通常用偏振片)。其只允许某一方向的光振动通过,而与这一方向垂直的光振动则被完全吸收。偏振片也可用做检偏器。

三、马吕斯定律

光强为 I_1 的线偏光通过偏振片后,若不考虑吸收,则透射光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2\alpha$$

上式中 α 是入射线偏振光的振动方向与偏振片的偏振化方向之间的夹角。

四、布儒斯特定律

自然光入射到两种各向同性媒质的分界面时,反射光和折射光都是部分偏振光。在反射光中,若入射角 i_B 满足

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

时,反射光为完全偏振光,其光振动方向垂直入射面。 i_B 称为布儒斯特角。

五、光的双折射

一束自然光进入各向异性晶体后分成两束,叫做光的双折射。其中一束遵循折射定律,折射率不随入射方向改变,称为寻常光线(o 光);另一束不遵守折射定律,折射率随入射方向改变,称为非常光线(e 光),寻常光线和非常光线都是线偏振光,且二者光振动方向相互垂直。

习 题 13

一、选择题

13.1 一束光强为 I_0 的自然光,相继通过三个偏振片 P_1 、 P_2 、 P_3 后,出射光的光强为 $I = \frac{I_0}{8}$,已知 P_1 和 P_3 的偏振化方向相互垂直,若以入射光为轴,旋转 P_2 ,问 P_2 最少要转过多大角度,才能使出射光的光强为零? ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

13.2 一束自然光照射到某种介质表面,当折射角为 $\frac{\pi}{6}$ 时,反射光为完全偏振光,则此介质的折射率为()。

- A. 1.832 B. 1.732 C. 1.632 D. 1.532

13.3 有折射率分别为 n_1 、 n_2 的两种介质,当自然光从第一种介质 n_1 入射到第二种介质 n_2 时,起偏角为 i_0 ;而自然光从第二种介质入射到第一种介质时,起偏角为 i'_0 ;若 $i_0 > i'_0$,则两种介质折射率的大小间的关系为()。

- A. $n_1 > n_2$ B. $n_1 = n_2$ C. $n_1 < n_2$ D. 难以判断

二、填空题

13.4 光的偏振是指_____的现象。

13.5 用相互平行的一束自然光和一束线偏振光构成的混合光垂直照射在一偏振片上,以光的传播方向为轴旋转偏振片时,发现透射光强的最大值为最小值的 5 倍,则入射光中,自然光强 I_0 与线偏振光强 I 之比为_____。

三、计算题

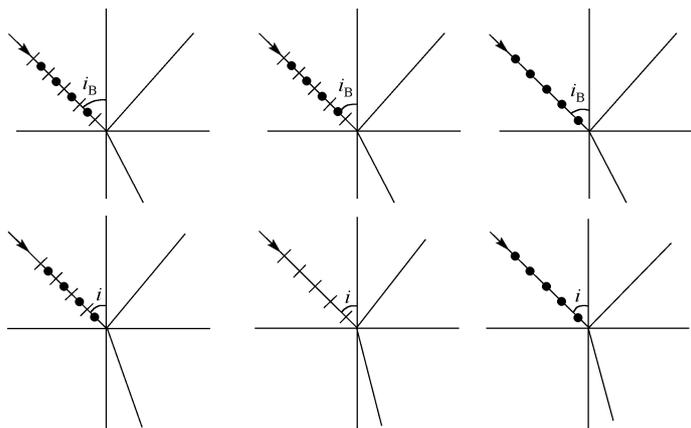
13.6 自然光通过两个偏振化方向间成 60° 的偏振片,透射光强为 I_1 。今在这两个偏振片之间再插入另一个偏振片,它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° 角,则透射光强为多少?

13.7 入射到起偏器的自然光强度为 I_0 ，开始时，起偏器和检偏器的透光轴方向平行。然后使检偏器绕入射光的传播方向转过 130° 、 45° 、 60° ，试分别求出在上述三种情况下，透过检偏器后光的强度是 I_0 的几倍。

13.8 自然光入射到两个重叠的偏振片上。如果透射光强为，(1)透射光最大强度的三分之一，(2)入射光强的三分之一，则这两个偏振片透光轴方向间的夹角为多少？

13.9 一束自然光从空气入射到折射率为 1.40 的液体表面上，其反射光是完全偏振光。试求：(1)入射角等于多少？(2)折射角为多少？

13.10 在如题 13.10 图所示的各种情况中，以非偏振光或偏振光由空气入射到水面时，折射光和反射光各属于什么性质的光？在图中所示的折射光线和反射光线上用点和短线把振动方向表示出来。把不存在的反射线或折射线划掉。图中 $i_B = \arctan n$ ， n 为水的折射率。 $i \neq i_B$ 。

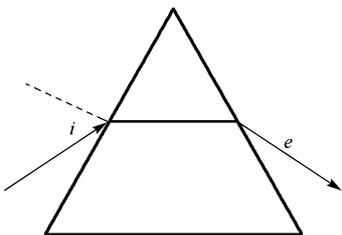


题 13.10 图

13.11 已知从一静水池的表面反射出来的太阳光是线偏振光，此时，太阳在地平线上多大仰角处？

13.12 水的折射率为 1.33，玻璃的折射率为 1.50，当光由水中射向玻璃而反射时，起偏角为多大？当光由玻璃射向水而反射时，起偏角又为多少？这两个起偏角的数值间是什么关系？

13.13 把方解石切割成一个正三角形棱镜。光轴垂直于棱镜的正三角形截面，如题 13.13 图所示。自然光以入射角 i 入射时， e 光在棱镜内的折射射线与棱镜底边平行，求入射角 i ，并画出 o 光的传播方向和光矢量振动方向。



题 13.13 图

第五篇

量子物理

1900年，德国物理学家普朗克为了解决经典理论解释黑体辐射规律的困难，在热辐射的理论中首先引入了分立的“能量子”的假设，成功地解释了黑体辐射规律，标志着量子物理学的诞生。1905年爱因斯坦针对光电效应实验与经典理论的矛盾，提出了光量子的假说，成功地解释了光电效应并在固体比热问题上成功地应用了能量子的概念，进一步促进了量子论的发展。1913年，玻尔在卢瑟福原子的有核模型的基础上应用量子化概念又发展了量子理论，并将其运用到原子内部，成功地揭示了氢原子光谱的规律。1922年康普顿进一步证实了光的量子性，在此基础上，从1924年到1928年期间，一些卓越的物理学家经过艰苦的努力，根据微观粒子显示的波粒二象性，创建了一种新的物理理论——量子力学理论。

量子力学理论是关于微观世界的理论，和相对论一起，已经成为现代物理学的基础。量子力学的建立，开辟了人们认识微观世界的道路，找到了探索原子、分子的微观结构及原子分子水平上物质结构的理论武器，已在现代科学和技术中获得较大的成功，现在从粒子物理到天体物理、从化学到生物和医学、从晶体管到大规模集成电路、从激光到超导材料，几乎一切高新技术都离不开量子理论。

本篇介绍量子理论，主要内容包含黑体辐射、普朗克量子假设、爱因斯坦光量子假设、爱因斯坦光电效应方程；康普顿散射效应；氢原子的玻尔理论；德布罗意假设、波粒二象性；不确定关系；量子力学的波函数、薛定谔方程、一维无限深势阱；原子核物理的基本知识、粒子物理的基本理论；激光、超导、纳米技术等。

第 14 章

量子物理基础

自古以来，人们都认为物质由一些最小的基本单元组成。最初，人们相信原子是构成物质的基本单元，而且这种基本单元是不可分的。1897 年，J. J. 汤姆孙发现电子是比原子更基本的物质单元，后来，又相继发现了中子、质子、介子、超子等粒子。正是这些不连续的基元通过多种多样的组合方式，才得以构成物质世界如此丰富多彩的图景。但是，20 世纪以前，人们从来不曾怀疑过物质的能量是否也是不连续的。在以牛顿为代表的经典电磁理论中，人们一直认为能量是可以连续变化的，物体之间能量的传递也是以连续的方式进行的。这些观念为世人所公认，是不言而喻的。直到 1900 年，普朗克在试图从理论上解释黑体辐射的规律时，才打破了能量连续变化这一传统的观念，提出了能量子的概念，从而开创了物理学革命的新纪元，宣告了量子物理的诞生。

14.1 黑体辐射 普朗克的能量子假设

14.1.1 黑体 黑体辐射

量子的概念最初是普朗克在研究黑体辐射问题时提出来的，炽热的物体发光是人们早已熟知的事实。事实上任何一个物体，在任何温度下都在不断地向周围空间发射着电磁波。其波长是连续变化的，这种由于物体中的分子、原子受到热激发而发射电磁辐射的现象，称为热辐射，另一方面，任何物体在任何温度下都要接受外界射来的电磁波，除一部分反射回外界外，其余部分都被物体所吸收，这就是说，物体在任何时候都存在着发射和吸收电磁辐射的过程。实验表明，不同物体在某一频率范围内发射和吸收电磁辐射的能力是不同的，例如，深色物体吸收和发射电磁辐射的能力比浅色物体要大一些，但是，对同一个物体来说，若它在某频率范围内发射电磁辐射的能力越强，那么，它吸收该频率范围内电磁辐射的能力也越强；反之亦然。

一般来说，入射到物体上的电磁辐射，并不能全部被物体所吸收，物体吸收电磁辐射的能力随物体而异，通常人们认为最黑的煤烟，也只能吸收入射电磁辐射的 95%。我们设想有一种物体，它能吸收一切外来的电磁辐射，这种物体称为黑体（也称绝对黑体），黑体只是一种理想模型，如图 14-1 所示，小孔口表面就可近似地当做黑体。这是因为射入小孔的电磁辐射，要被腔壁多次反射，每反射一次，壁就要吸收一部分电磁辐射能，以致射入小孔的电磁辐射很少有可能从小孔逃逸出来，不妨设想有一个单位的电磁辐射从小孔射入空腔中，在空腔内经 100 次反射后，才从小孔射出来，若每次反射时仅被腔壁吸收 10%，

那么从小孔射出的电磁辐射就只为入射的 $(0.900)^{100} = 2.656 \times 10^{-5}$ 了。

另外,如前所述,此空腔处于某确定的温度时,也应有电磁辐射从小孔发射出来;显然,从小孔发射出来的电磁辐射就可作为黑体的辐射。总之,无论是从吸收还是发射电磁辐射来看,空腔的小孔都可以看成是黑体,实验分析表明,空腔小孔向外发射的电磁辐射是含有各种频率成分的,而且不同频率成分的电磁波的强度也不同,随黑体的温度而异。

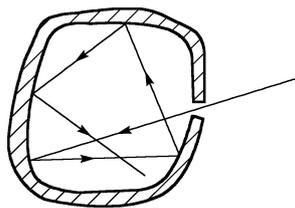


图 14-1 空腔小孔黑体模型

热辐射规律的研究核心是研究电磁辐射的能量随波长分布的规律,为了定量地表明物体热辐射的规律,引入单色辐射出射度(简称单色辐出度),它表示单位时间内,从热力学温度为 T 的黑体表面单位面积上辐射的波长在 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 范围内所辐射的电磁波能量。显然,单色辐出度为黑体的热力学温度 T 和波长 λ 的函数,用 $M_\lambda(T)$ 表示。当电磁波的能量用频率表示时,其单色辐出度亦可用 $M_\nu(T)$ 表示。在单位时间内,从温度为 T 的黑体的单位面积上所辐射出的各种波长的电磁波的能量总和,称为辐射出射度,简称辐出度,用 $M(T)$ 表示,它只是黑体的热力学温度 T 的函数,其值显然可由 $M_\lambda(T)$ 对所有波长的积分求得,即

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_\lambda(T) d\lambda \quad (14.1)$$

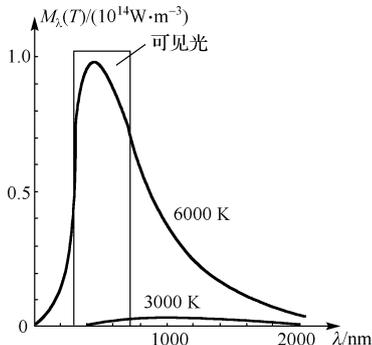
14.1.2 黑体辐射定律

19 世纪末,许多德国的实验和理论物理学家都很关注黑体辐射的研究。有人用精巧的实验测出了黑体的 $M_\lambda(T)$ 和 λ 的关系曲线,就试图从理论上给以解释。1896 年,维恩从经典的热力学和麦克斯韦分布律出发,找到 T 与 λ_m 之间关系,即维恩公式为

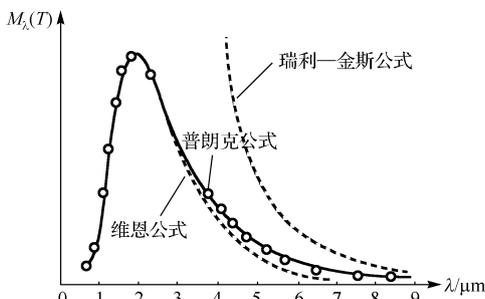
$$\lambda_m T = b \quad (14.2)$$

由图 14-2(a) 可以看到,随着黑体温度的升高,每一曲线的峰值波长 λ_m 与 T^{-1} 成比例地减小。

式(14.2)中 b 为维恩常数,其值为 $2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ 。上式表明,当黑体的热力学温度升高时,在 $M_\lambda(T) - \lambda$ 的曲线上,与单色辐出度 $M_\lambda(T)$ 的峰值相对应的波长 λ 向短波方向移动,这称为维恩位移定律。此公式绘出的曲线在短波波段与实验符合得很好,而在长波波段有明显的差异,如图 14-2(b) 所示,这就是历史上所说的“红外灾难”。



(a) 黑体单色辐出度的实验曲线



(b) 热辐射的理论公式与实验结果的比较(0表示实验结果)

1900年6月瑞利发表了他根据经典电磁学和能量均分定理导出的瑞利-金斯公式

$$M_{\lambda}(T) = C\lambda^{-4}T \quad (14.3)$$

式中, C 为常数。此公式绘出的曲线在长波波段与实验符合得很好, 而在短波波段有明显的差异, 如图 14-2(b) 所示, 这就是历史上所说的“紫外灾难”。可见, 不管是红外灾难还是紫外灾难, 其实质都说明了经典理论具有一定的缺陷。

14.1.3 普朗克假设 普朗克黑体辐射公式

1900年德国物理学家普朗克为了得到与实验曲线相一致的公式, 提出了一个与经典物理概念不同的新假设: 金属空腔壁中电子的振动可视为一维谐振子, 它吸收或者发射电磁辐射能量时, 不是过去经典物理所认为的那样可以连续地吸收或发射能量, 而是以与振子的频率成正比的能量子

$$\varepsilon = h\nu$$

为基本单元来吸收或发射能量。这就是说, 空腔壁上的带电谐振子吸收或发射的能量, 只能是 $h\nu$ 的整数倍, 即

$$\varepsilon = nh\nu \quad (14.4)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ 。普朗克并假设, 比例常数 h 对所有谐振子都是相同的, 后来人们把 h 叫做普朗克常数。

普朗克按照他的量子假设, 从理论上推导出一个与实验符合得很好的公式

$$M_{\lambda}(T)d\lambda = \frac{2\pi hc^3}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (14.5)$$

这就是著名的普朗克黑体辐射公式, 普朗克公式与实验结果的比较, 从图 14-2(b) 中可见, 两者是十分吻合的, 一般计算时, 取 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{S}$ 。

从普朗克公式还可以导出黑体的全部辐射出射度的斯忒藩-玻耳兹曼定律:

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(T)d\lambda = \sigma T^4 \quad (14.6)$$

式中 σ 称为斯忒藩-玻耳兹曼常数, 其值为 $\sigma = 5.67051 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 。

普朗克的能量子假设是对经典物理的重大突破, 从此宣告了量子物理的诞生。

14.2 光电效应

1887年, 赫兹发现了光电效应。18年以后(即1905年), 爱因斯坦发展了普朗克关于能量量子化的假设, 提出了光子概念, 从理论上成功地说明了光电效应实验的规律。为此, 爱因斯坦获得了1921年诺贝尔物理学奖。

14.2.1 光电效应实验规律

图 14-3 是研究光电效应的实验装置示意图。当紫外线照射在金属 K 的表面上时, 如 K 接电源的负极, A 接电源的正极, 则可以观察到电路中有电流。这是由于在光照射到金属 K 上时, 金属中的电子从表面上逸出来, 并在加速电势差 $U = U_A - U_K$ 的作用下, 从 K 到达 A ,

从而在电路中形成电流 I ，称为光电流。在光照射下，电子从金属表面逸出现象，叫做光电效应。逸出的电子，叫做光电子。

如将 K 接正极、 A 接负极，则光电子离开 K 后，将受到电场的阻碍作用。当 K 、 A 之间的反向电势差等于 U_0 时，从 K 逸出的动能最大(即 $E_{k\max}$) 的电子刚好不能到达 A ，电路 K 中没有电流， U_0 叫做遏止电势差，这里，遏止电势差 U_0 与 $E_{k\max}$ 之间有如下关系：

$$E_{k\max} = eU_0$$

式中 e 为元电荷。

从光电效应实验可归纳出如下规律：

1. 对某一种金属，只有当入射光的频率大于某一频率 ν_0 时，电子才能从金属表面逸出，电路中才有光电流。这个频率 ν_0 叫做截止频率(也称红限频率)。如果入射光的频率 ν 小于截止频率(即 $\nu < \nu_0$)，则无论光的强度有多大，都没有光电子从金属表面逸出。表 14-1 给出几种纯金属的截止频率。

表 14-1 几种纯金属的截止频率

金 属	铯	钠	锌	铷	铂
截止频率 ν_0/Hz	4.545×10^{14}	4.39×10^{14}	8.065×10^{14}	1.153×10^{15}	1.929×10^{15}
所在波段	可见光(红)	可见光(绿)	近紫外	远紫外	远紫外

2. 用不同频率的光照射金属的表面时，只要入射光的频率 ν 大于截止频率，遏止电势差(对应于光电子动能的最大值)与入射光频率就具有线性关系，如图 14-4 所示。

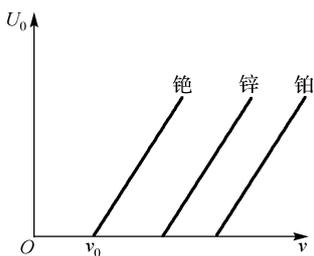


图 14-4 遏止电势差与入射光频率的关系

3. 无论入射光的强度如何，只要其频率大于截止频率，则当光照射到金属表面上时，几乎立即就有光电子逸出，根据测量，从光开始照射金属表面，到光电子首次被发射出来，其时间间隔不超过 10^{-9} s。这就是常说的光电效应的“瞬时性”。

用经典物理中光的电磁波理论说明光电效应的实验规律时，遇到很大困难。这主要表现在，按照经典理论，无论何种频率的入射光，只要其强度足够大，就能使电子具有足够的能量逸出金属。然而实验却指出，若入射光的频率小于截止频率，无论其强度有多大，都不能产生光电效应。此外，按照经典理论，电子逸出金属所需的能量，需要有一定的时间来积累，一直积累到足以使电子逸出金属表面为止。然而，实验却指出，光的照射和光电子的释放，几乎是同时发生的，在 10^{-8} s 这一测量精度范围内观察不到这种滞后现象，即光电效应可认为是“瞬时的”。

14.2.2 光子 爱因斯坦光电效应方程

为了解决光电效应的实验规律与经典物理理论的矛盾，1905 年爱因斯坦对光的本性提出了新的理论。他认为，光束可以看成是由微粒构成的粒子流，这些粒子叫做光量子，以后就称为光子。在真空中，每个光子都以光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 运动。对于频率为 ν 的光束，

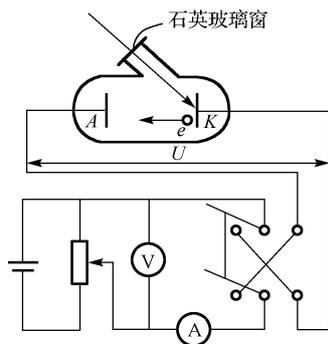


图 14-3 光电效应实验装置图

光子的能量为

$$\varepsilon = h\nu$$

式中 h 为普朗克常数。按照爱因斯坦的光子假设, 频率为 ν 的光束可看成是由许多能量均等于 $h\nu$ 的光子所构成的; 频率 ν 越高的光束, 其光子能量越大; 对给定频率的光束来说, 光的强度越大, 就表示光子的数目越多。由此可见, 对单个光子来说, 其能量决定于频率, 而对一束光来说, 其能量既与频率有关, 又与光子数有关。

爱因斯坦认为, 当频率为 ν 的光束照射在金属表面上时, 光子的能量被单个电子所吸收, 使电子获得能量 $h\nu$ 。当入射光的频率 ν 足够高时, 可以使电子具有足够的能量从金属表面逸出, 逸出时所需要做的功, 称为逸出功 W 。设电子具有初动能 $\frac{1}{2}mv^2$, 由能量守恒定律, 有

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W \quad (14.7)$$

式(14.7)叫做爱因斯坦光电效应方程。表 14-2 给出了几种金属的逸出功的近似值。

表 14-2 几种金属的逸出功

金 属	钠	铝	锌	铜	银	铂
W/eV	1.90~2.46	2.50~3.60	3.32~3.57	4.10~4.50	4.56~4.73	6.30

从爱因斯坦光电效应方程(14.7)可以看出, 当光子的频率为 ν_0 ($W = h\nu_0$) 时, 电子的初动能 $mv^2/2 = 0$, 电子刚好能逸出金属表面, 则 ν_0 为前述的截止频率, 其值为 W/h 。显然, 只有当频率大于 ν_0 的入射光照在金属上时, 电子从金属表面上逸出来, 并具有一定的初动能。如果入射光的频率小于 ν_0 , 电子吸收光子的能量则小于逸出功 W , 在这个情况下, 电子是不能逸出金属表面的, 这与实验结果是一致的。所以, 只要 $\nu > \nu_0$, 电子就会从金属中释放出来而不需要积累能量的时间, 光电子的释放和光的照射几乎是同时发生的, 是“瞬时的”, 没有滞后现象。这与实验结果也是一致的。从式(14.7)还可看出, 光电子动能是与入射光的频率成正比的, 这正说明了遏止电势差 U_0 与频率 ν 成正比的实验结果。

此外, 按照光子假设还可以知道, 光的强度越大, 光束中所含光子的数目就越多。因此, 只要入射光的频率大于截止频率, 随着光子数的增加, 单位时间内吸收光子的电子数也增多, 光电流就增大。所以说, 光电流与入射光的强度成正比, 这也与实验结果相符合。

至此, 我们可以说, 原先由经典理论出发解释光电效应实验所遇到的困难, 在爱因斯坦光子假设提出后, 都顺利地得到了解决。不仅如此, 通过爱因斯坦对光电效应的研究, 还使我们对光的本性在认识上有了一个飞跃。光电效应显示了光的微粒性。这就是说, 某一频率的光束, 是由一些能量相同的光子所构成的光子流。在光电效应中, 当电子吸收光子时, 它吸收光子的全部能量, 而不能只吸收其一部分。光子与电子一样, 也是构成物质的一种微观粒子。

【例 14.1】 设有一半径为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的薄圆片, 它距光源 1.0 m 。此光源的功率为 1 W , 发射波长为 589 nm 的单色光。假定光源向各个方向发射的能量是相同的, 试计算在单位时间内落在薄圆片上的光子数。

【解】 从题意知, 圆片的面积 S 为 $\pi \times (1.0 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = \pi \times 10^{-6} \text{ m}^2$ 。由于光源发射出来的能量在各个方向是相同的, 故单位时间内落在圆片上的能量为

$$E = P \frac{S}{4\pi r^2}$$

其中 r 为光源到圆片的距离, 即 $r=1.0 \text{ m}$, P 为光源的功率, 即 $P=1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ 。于是有

$$E = 2.5 \times 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

故单位时间落在圆片上的光子数为

$$N = \frac{E}{h\nu} = \frac{E\lambda}{hc} = 7.4 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

即每秒钟有 7.4×10^{11} 个光子落在圆片上。

【例 14.2】 已知铝的逸出功为 4.2 eV , 今用 200 nm 的光照射铝的表面, 求: (1) 光电子的最大动能; (2) 遏止电压; (3) 铝的红限波长。

【解】 (1) 由爱因斯坦光电效应方程可得光电子的最大动能为

$$E_{k\max} = h\nu - W = h \frac{c}{\lambda} - W = 2.02 \text{ eV}$$

(2) 由遏止电压与最大动能的关系式 $eU_0 = E_{k\max}$ 可得遏止电压为

$$U_0 = \frac{E_{k\max}}{e} = 2.02 \text{ V}$$

(3) 由红限波长与红限频率的关系式及 $W = h\nu_0$ 可得铝的红限波长为

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{W} = 292 \text{ nm}$$

14.2.3 光的波粒二象性

首先讨论光子的质量、动量和能量。我们知道, 光在真空中的传播速度为 c , 即光子的速度应为 c 。由狭义相对论的动量和能量的关系式

$$E^2 = P^2 c^2 + E_0^2$$

可知, 由于光子的静能量 $E_0 = 0$, 所以光子的能量和动量的关系可写成

$$E = Pc$$

其动量也可写成

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

因此, 对于频率 ν 的光子, 其能量和动量分别为

$$E = h\nu, P = \frac{h}{\lambda} \quad (14.8)$$

从式(14.8)看到, 描述光子粒子性的量 E 、 P 与描述光的波动性的量 ν 、 λ 通过普朗克常数 h 被联系起来, 人们把 h 称为作用量子。

光电效应实验表明, 光由光子组成的看法是正确的, 体现出光具有粒子性。而前面所讲述的光的干涉、衍射和偏振现象, 又明显地体现出光的波动性, 所以说, 光既有波动性, 又具有粒子性, 即光具有波粒二象性, 一般来说, 光在传播过程中, 波动性表现比较显著; 当光和物质相互作用时, 粒子性表现比较显著, 光所表现的这两重性质, 反映了光的本性, 应当指出, 光子具有粒子性并不意味着光子一定没有内部结构, 光子也许由其他粒子组成, 只是迄今为止, 尚无任何实验显露出光子存在的内部结构的迹象, 光的粒子性将在下一节讨论康普顿效应时得到进一步体现。

14.3 康普顿散射效应

在光电效应中,光子与电子作用时,光子被电子所吸收,电子得到光子的全部能量,若被吸收的光子能量大于金属的逸出功,电子就会携带一定的动能逸出金属表面,这些电子是金属中的自由电子。

光子与电子作用的形式还有其他各类,康普顿效应就是其中之一。

1920年,美国物理学家康普顿在观察X射线被物质散射时,发现散射线中含有波长变化了的成分,图14-5是康普顿实验装置的示意图,由单色X射线源R发出的波长为 λ_0 的X射线,通过光阑D成为一束狭窄的X射线,并被投射到散射物质C(如石墨)上,用摄谱仪S可检测到不同散射角 θ 的散射X射线的相对强度I。图14-6是康普顿的实验结果,从实验结果中我们可以看到,在散射X射线中除有与入射波长相同的射线外,还有波长比入射波长更长的射线,这种现象就叫做康普顿效应。我国物理学家吴有训在这方面也作出了卓有成效的贡献。

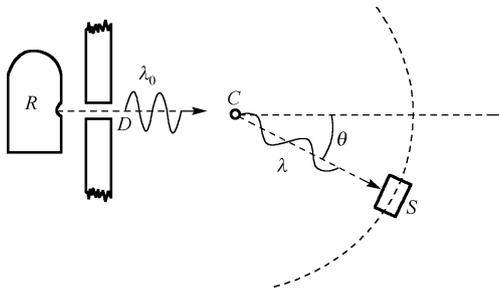


图 14-5 康普顿散射实验装置

然而,经典电磁理论不能对康普顿效应做出合理的解释,这是因为,按照经典电磁理论,

I(相对强度)

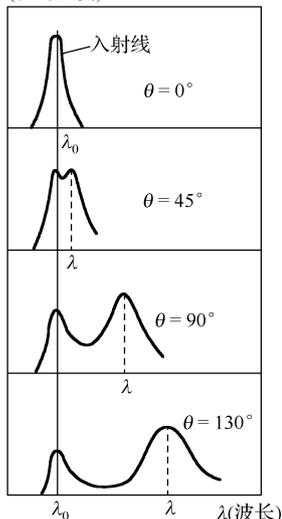


图 14-6 X射线散射实验结果

当单色电磁波作用在尺寸比波长还要小的带电粒子上时,带电粒子将以与入射电磁波相同的频率作用电磁振动,并向各方向辐射出同一频率的电磁辐射,于是经典电磁理论预言,散射辐射具有和入射辐射一样的频率(或波长),对于像可见光这类波长较长的电磁辐射,经典电磁理论的这个预言,是比较符合实际的,在日常可见光谱系中经常可以看到,可见光照射在悬浮于乳胶溶液中的微小粒子时,由微小粒子所散射到各方向的光,其波长与入射光的波长几乎完全一样,然而,在康普顿X射线的散射实验中确实出现了散射光的波长变长的现象,这表明经典理论与康普顿效应是不容的。

怎样正确认识康普顿X射线散射的实验结果呢?1922年康普顿提出按照光子学说,频率为 ν_0 的X射线可看成是由一些能量为 $\epsilon_0 = h\nu_0$ 的光子组成的,并假设光子与受原子束缚较弱的电子或自由电子之间的碰撞类似于完全弹性碰撞,依照这个观点可对康普顿效应作如下解释:当能量为 $\epsilon_0(h\nu_0)$

的入射光子与散射物质中的电子发生弹性碰撞时,电子会获得一部分能量,所以,碰撞后散射光子的能量 $\varepsilon(h\nu)$ 比入射光子的能量 ε_0 要小,因而散射光的频率 ν 比入射光的频率 ν_0 要小,即散射光的波长 λ 比入射光的波长 λ_0 要长一些,这就定性地说明了散射光中会出现波长大于入射光波长的成分的原因,下面来定量地计算波长的变化量,从而看出波长的变化量与哪些因素有关。

图 14-7 表示一个光子和一个束缚较弱的电子作碰撞的情形,由于电子的速度远小于光子的速度,所以可认为电子在碰撞前是静止的,即 $v_0=0$,并设频率为 ν_0 的光子沿 x 轴正向入射,碰撞后,频率为 ν 的散射光子沿着与 x 轴成 θ 角的方向散射,电子则获得了速率 v ,并沿与 x 轴成 φ 角的方向运动,这个电子称为反冲电子。

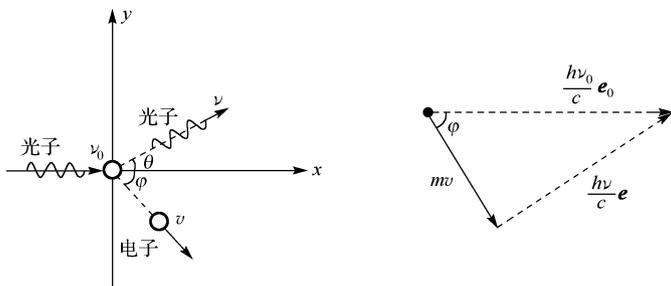


图 14-7 光子与电子的碰撞及动量变化

因为碰撞是弹性的,所以应同时满足能量守恒定律和动量守恒定律,又考虑到所研究的问题涉及光子,故这两定律应写成相对论性的形式,设电子碰撞前后的静止质量和相对论性质量分别为 m_0 和 m ,由狭义相对论的质能关系可知,其相应的能量为 m_0c^2 和 mc^2 ,所以,在碰撞过程中,根据能量守恒定律有

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$$

即

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2 \quad (14.9)$$

而光子在碰撞后所损失的动量便是电子所获得的动量,如图 14-7 所示,设 e_0 和 e 分别为碰撞前后光子运动方向上的单位矢量,于是,根据动量守恒定律可得

$$\frac{h\nu_0}{c}e_0 = \frac{h\nu}{c}e + mv \quad (14.10)$$

由此式有

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu_0}{c}\frac{h\nu}{c}\cos\theta\right)$$

或

$$(m\nu c)^2 = (h\nu_0)^2 + (h\nu)^2 - 2h^2\nu_0\nu\cos\theta \quad (14.11)$$

将式(14-9)两端平方并与式(14-11)相减,得

$$m^2c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\theta) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu)$$

由狭义相对论的质量与速度的关系式,可知电子碰撞后的质量 $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$,这样,上式可化为

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) \quad (14.12a)$$

或

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (14.12b)$$

式中 λ_0 为入射光的波长, λ 为散射光的波长, 式(14-12b)给出了散射光波长的改变量与散射角 θ 之间的函数关系, $\theta=0$ 时, 波长不变; θ 增大时, $\lambda - \lambda_0$ 也随之增加, 这个结论与图 14-7 所表示的实验结果是一致的。

在式(14-12b)中, $h/(m_0 c)$ 是一个常量, 称为康普顿波长, 其值为

$$\frac{h}{m_0 c} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \text{ m} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

由上述讨论可见, 散射波长改变量 $\Delta\lambda$ 的数量级为 10^{-12} m, 对于波长较长的可见光(波长的数量级为 10^{-7} m)以及无线电波等波长更长些的波来说, 波长的改变量 $\Delta\lambda$ 与入射光的波长 λ_0 相比, 要小得多, 例如, $\lambda_0 = 10$ cm 的微波, $\Delta\lambda/\lambda_0 \approx 2.43 \times 10^{-11}$, 因此, 对这些波长较长的电磁波来说, 康普顿效应是难以观察到的, 这时, 量子结果与经典结果是一致的, 只有波长较短的电磁波(如 X 射线, 其波长的数量级为 10^{-10} m), 波长的改变量与入射光的波长才可以相比较, 例如 $\lambda_0 = 10^{-10}$ m, $\Delta\lambda/\lambda_0 \approx 2.43 \times 10^{-2}$, 这时才能观察到康普顿效应。在这种情况下, 经典理论就失效了, 也就是说, 波长比较短的波, 其量子效应较为显著。这也是和实验相符合的。

上面研究的是光子和受原子束缚较弱的电子发生碰撞时的情况, 它只说明散射波中含有波长比入射波长更长的射线, 那么, 如何说明散射波中也有与入射波波长相同的射线呢? 这是因为光子除了与上述那种电子发生碰撞外, 与原子中束缚很紧的电子也要发生碰撞, 这种碰撞可以看做是光子与整个原子的碰撞, 由于原子的质量很大, 根据碰撞理论, 光子碰撞后不会显著地失去能量, 因而散射波的频率几乎不变, 所以在散射波中也有入射波波长相同的射线, 由于轻原子中电子束缚较弱, 重原子中内层电子束缚很紧, 因此原子量小的物质康普顿效应较显著, 原子量大的物质康普顿效应不明显, 这和实验结果也是一致的。

康普顿效应的发现, 以及理论分析和实验结果的一致, 不仅有力地证实了光子学说的正确性, 同时也证实了在微观粒子的相互作用过程中, 同样是严格地遵守能量守恒定律和动量守恒定律的。

【例 14.3】 设有波长 $\lambda_0 = 1.00 \times 10^{-10}$ m 的 X 射线的光子与自由电子作弹性碰撞, 散射 X 射线的散射角 $\theta = 90^\circ$ 。问: (1) 散射波长的改变量 $\Delta\lambda$ 为多少? (2) 反冲电子得到多少动能? (3) 在碰撞中, 光子的能量损失了多少?

【解】 (1) 由式(14-14b)知, $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$ 。代入已知数据, 可得

$$\Delta\lambda = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

(2) 由式(14-11)有

$$mc^2 - m_0 c^2 = h\nu_0 - h\nu$$

其中 $mc^2 - m_0 c^2$ 即为反冲电子的动能 E_k , 故得

$$E_k = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda}$$

即

$$E_k = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \right) = \frac{hc \Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$$

将已知数据代入上式, 得

$$E_k = 4.72 \times 10^{-17} \text{ J} = 295 \text{ eV}$$

(3) 光子损失的能量等于反冲电子所获的动能, 也为 295 eV。

读者可以计算一下, 如果用波长为 $1.88 \times 10^{-12} \text{ m}$ 的 γ 射线与自由电子碰撞, 上述各个问题将是什么结果?

14.4 玻尔的氢原子理论

从以上的讨论中已经知道, 20 世纪初物理学革命的重大成果之一, 就是建立了量子论。1900 年, 普朗克引入了能量子概念, 从而解决了经典理论解释黑体辐射时所遇到的困难, 为量子理论奠定了基础, 继而, 爱因斯坦又提出了光量子学说, 完满地说明了光电效应的实验规律, 为量子理论的发展开创了新的局面。另一方面在 19 世纪 80 年代, 光谱学得到了长足的发展, 特别是 1885 年, 巴耳末把看来似乎毫无规律可言的氢原子可见光部分线光谱, 归结成有规律的公式, 这促使人们意识到光谱规律的实质是显示了原子内部的机理。接着, 在 1897 年, 汤姆孙发现了电子, 这进一步促使人们去探索原子的结构。应当说, 量子论、光谱学、电子的发现这三大线索, 为运用量子论研究原子结构提供了坚实的理论和实验基础, 在所有的原子中, 氢原子是最简单的, 这里就先从氢原子的光谱着手。

14.4.1 氢原子光谱的规律

我们知道, 原子本身的尺度只有 10^{-10} m 的量级, 用常规的方法是探测不到原子本身的大小, 更看不到其内部结构的。在这种情况下, 卢瑟福于 1909 年用放射性元素镭(Ra)发出的高能 α 粒子与原子相互碰撞并探测了 α 粒子的大角散射, 从而确定了原子的核式结构模型, 即认为原子中央是一个几乎占有全部原子质量的带正电荷的核, 电子在核的周围绕核转动。此方法的理论根据是, 具有一定能量的微观粒子(如光子、电子等)与原子碰撞, 通过观测碰撞后所发生的变化, 来间接地确定原子的情况。但 α 粒子的散射实验并不能揭示原子内部更详细结构(如电子在核外如何分布、其运动规律如何等)。但实验知道, 原子又在发光, 不同的原子所发出的光谱特征各不相同。这种方法的理论根据是, 原子本身发光, 通过观测其发光的规律性, 来确定原子内部结构的规律性。下面通过氢原子光谱的研究, 来阐述原子结构的基本知识和量子力学的一些基本概念。

由实验得知, 液体、固体等密集型物质所发出的光是各种波长的连续光谱; 但气体发出的光并不是连续光谱, 而是具有分立频率的线光谱, 如各种原子气体放电发出的原子光谱。我们通常使用的钠(Na)黄光是由分立的波长分别为 589.0 nm 和 589.6 nm 的两条谱线所构成。

氢原子是原子结构中最简单的一个原子, 在很早以前人们就对它发出的光谱进行了实验

研究。氢原子光谱的实验装置如图 14-8 所示,一氢放电管,管内充以压强约为 1 mmHg 的氢气,所有的透光元件都用石英玻璃制作,以便于透过紫外光。图 14-9 是由实验拍摄的,基本上在可见光范围的原子光谱图,实验测得的前几条谱线的波长也在图 14-9 中标出。

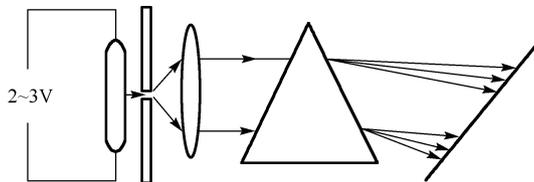


图 14-8 氢原子光谱的实验装置

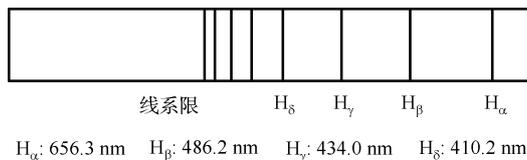


图 14-9 氢原子光谱巴耳末系谱线

实验表明:

- (1)从红光到紫光有一系列分立的谱线;
- (2)红端谱线稀,紫端谱线密,紫外更密;
- (3)存在一个称为线系限的界限,波长小于线系限部分,有一段连续紫外光谱。

英国人巴耳末于 1885 年发现了这些谱线的波长并不是漫无规律的,这些实验测得的波长可用下列简单的经验公式计算:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (14.13)$$

后来瑞典物理学家里德伯将其改写为

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (14.14)$$

其中 $n > m$, $R = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, 称为里德伯常数。

若 $n=1, 2, \dots$ 时,则可算得 H_α 、 H_β 、 H_γ 、 H_δ 等一系列谱线的波长,式(14.13)被后人称为巴耳末公式。式(14-14)被称为里德伯公式,也称为广义巴耳末公式。

$m=1$ 可得莱曼线系, $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n=2, 3, \dots$, 此线系在紫外光区;

$m=2$ 可得巴耳末线系, $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n=3, 4, \dots$, 此线系在可见光区;

$m=3$ 可得帕邢线系, $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n=4, 5, \dots$, 此线系在红外光区;

$m=4$ 可得布拉开线系, $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n=5, 6, \dots$, 此线系在红外光区;

$m=5$ 可得普丰德线系, $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n=6, 7, \dots$, 此线系在红外光区。

由于巴耳末公式是根据实验数据,凭经验凑出来的,但是如此简单的公式却能把大量的

谱线按规律分成许多谱线系，而且算得的值与实验测得的值符合得很好，这在当时确实是一个无人知晓的“谜”，当然谜底很快被丹麦物理学家玻尔所揭晓。

14.4.2 氢原子的玻尔理论

玻尔理论是氢原子结构的早期量子论。上述氢原子光谱的实验规律与经典电磁理论发生了尖锐的矛盾。原子的核式模型指出电子是绕核旋转的，存在着加速度，于是按照经典电磁理论应得到：加速运动的电子要向周围空间辐射电磁波，电磁波的频率等于电子绕核旋转的频率；由于电子转动时辐射电磁波，电子(或原子系统)的能量逐渐减小，运动轨道就越来越小，相应的频率也越来越大，因而得到的结论是电子辐射的电磁波为连续频谱，而且电子能量耗尽时将落在核上，如图 14-10 所示，所以原子系统是不稳定的。这显然与氢原子发出线状光谱的实验事实相违背。针对这种矛盾的情况，玻尔提出了如下的三条基本假设。

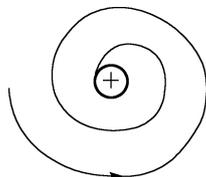


图 14-10 氢原子的经典模型

(1) 定态假设：原子系统存在着一些稳定态称为定态。电子虽然做加速旋转，但不辐射电磁波能量，原子的定态能量只能取一些分立的值 E_1, E_2, \dots, E_n ，而不能取其他的值。

(2) 跃迁假设：只有当原子从一个具有较大能量 E_n 的定态跃迁到另一个较低能量 E_m 的定态时，原子才辐射单色光，其频率为

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} \quad (14.15)$$

其中 h 为普朗克常数。

反之，当原子处于较低能量 E_m 的定态时，若吸收一频率为 ν_{nm} 的光子，可跃迁到较大能量 E_n 的定态。

(3) 角动量量子化假设：在电子绕核旋转的所有轨道中，只有电子的角动量 L 等于 $(h/2\pi)$ 的整数倍的定态轨道才是可能存在的轨道，即

$$L = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (14.16)$$

其中 $n=1, 2, \dots$ 称为主量子数(其他量子数这里不做介绍，可参看其他书籍)。

根据玻尔的假设很容易求得氢原子或者类氢离子的定态并对氢原子光谱的规律性做出解释。

设氢原子或者类氢离子的原子核所带的正电荷为 Ze (Z 为原子序数)，质量为 m 的电子以原子核为中心，作半径为 r 的圆周运动，且速率为 v ，万有引力很小可忽略不计，由于作圆周运动的向心力由原子核对电子的库仑力来提供，则

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r^2} = m \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

由玻尔的角动量量子化假设可知，电子的定态轨道运动应满足

$$mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

联立上述两式，可得

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14.17)$$

注意：由于轨道半径 r 是主量子数 n 的函数，所以这里用 r_n 代替了 r 。从式(14.17)可以看出，轨道半径 r_n 是分立的，称之为轨道量子化。对于氢原子而言， $Z=1$ ，当 $n=1$ 时，将已知值代入上式可得 $r_1=0.0529 \text{ nm}$ ，称之为玻尔第一轨道半径。

又设电子处在第 n 轨道时，电子的速率为 v_n ，原子系统的总能量为 E_n ，则

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z e^2}{4_n}$$

联立电子轨道角动量量子化的条件及式(14.17)，可得

$$E_n = -\frac{m Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (14.18)$$

从式(14.18)可以看出，能量 E_n 也是主量子数 n 的函数，即 E_n 是一系列分立的值，称为能量量子化，并将这些分立的能量值称为能级。原子能级中能量最低的状态称为基态，原子处于这种状态时最为稳定；其他能量大于基态的能级依次称为第一激发态、第二激发态等。对于氢原子而言， $Z=1$ ，当 $n=1$ 时，将已知值代入上式可得 $E_1=-13.6 \text{ eV}$ ，称为氢原子基态能量， $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ ，称为氢原子激发态能量。若氢原子系统中的电子从较高能级 E_n 跃迁到较低能级 E_m 时，则由玻尔的跃迁假设可得跃迁过程中所发射的单色光的频率为

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu_{nm}}{c} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

若令 $R = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ，则上式可写为

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

这正是广义巴耳末公式。

综上所述，玻尔的量子论成功地解释了氢原子或类氢离子的光谱，在一定程度上反映了原子内部结构的规律性，并得到了光谱实验和弗兰克-赫兹实验的证实，为后来的量子理论奠定了基础，玻尔的量子论获得了 1922 年的诺贝尔物理学奖。但是玻尔量子论的缺陷在于量子化不彻底，他只对电子的径向运动采取了量子化，即对电子的轨道半径用量子化来处理，而对于电子绕原子核的运动则用经典力学来处理。因此是半经典的量子论。

【例 14.4】 在基态氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末线系中，观察到了波长较长的两条谱线。试求这两条谱线的波长和外来光的频率。

【解】 由于在巴耳末线系中观察到的是波长较长的两条谱线，因此只能是第 3 能级跃迁到第 2 能级和第 4 能级跃迁到第 2 能级产生的谱线，所以

$$\lambda_{32} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 656.3(\text{nm})$$

$$\lambda_{42} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 486.2(\text{nm})$$

外来单色光的频率必须满足 $h\nu = E_4 - E_1$, $E_4 = \frac{E_1}{4^2}$, $E_1 = -13.6(\text{eV})$,

$$\nu = \frac{E_4 - E_1}{h} = \frac{E_1}{h}\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) = 3.087 \times 10^{15}(\text{Hz})$$

14.4.3 氢原子玻尔理论的困难

氢原子的玻尔理论圆满地解释了氢原子光谱的规律性,从理论上算出了里德伯常数,并能对只有一个价电子的原子或离子,即类氢离子光谱给予说明,他提出的能级概念,不久被弗兰克-赫兹实验所证实。

但是,玻尔的氢原子理论也有一些缺陷,例如,玻尔理论只能说明氢原子及类氢离子的光谱规律,不能解释多电子原子的光谱;对谱线的强度、宽度也无能为力;也不能说明原子是如何组成分子、构成液体和固体的。此外,玻尔的理论还存在逻辑上的缺点,他把微观粒子看成是遵守经典力学的质点,同时,又赋予它们量子化的特征(角动量的量子化、能量量子化),这使得微观粒子是多么的不协调,难怪有人比喻说,玻尔的理论每星期 1、3、5 是经典的,2、4、6 是量子化的。后来,在波粒二象性基础上建立起来的量子力学,以更正确的概念和理论,完满地解决了玻尔理论所遇到的困难。即使如此,玻尔理论对量子力学的发展是有着重大的先导作用和影响,并且由于他所使用的电子轨道能级等纯粒子性的语言较为形象,至今仍为人们所袭用。

14.5 德布罗意波 实物粒子的二象性

14.5.1 德布罗意波

面对经典理论在研究原子、分子等微观体系的运动规律时所遇到的困难,考虑到微观体系特有的量子化规律,在爱因斯坦光子假设的基础上,受到光的波粒二象性的启发,法国物理学家德布罗意于 1923 年提出了一个大胆的假设:不仅光具有波粒二象性,一切实物粒子(如电子、质子、中子、原子等)也具有波粒二象性。他还把表示粒子波动特性的物理量波长 λ 、频率 ν 和表示粒子特性的物理量质量 m 、动量 P 及能量 E 用下式联立起来:

$$\left. \begin{aligned} E &= mc^2 = h\nu \\ P &= mv = \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

式(14.19)称为德布罗意关系式,这种和实物粒子相联系的波称为德布罗意波或物质波。德布罗意这一假设通过实验证实后,获得了 1929 年的物理学诺贝尔奖。这种波既不是机械波,也不是电磁波,而是一种新的波。下面以电子为例加以说明。

设静质量为 m_0 的电子被电场加速,加速电压为 V ,当电子的速度 $v \ll c$ 时,则有

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = eV \text{ 或 } v = \sqrt{\frac{2eV}{m_0}}$$

所以电子的物质波波长为

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h/\sqrt{2em_0}}{\sqrt{V}}$$

其中 $h=6.63 \times 10^{-34}$ J, $e=1.60 \times 10^{-19}$ C, $m_0=9.11 \times 10^{-31}$ kg, 于是计算可得

$$\lambda = \frac{1.23}{\sqrt{V}} (\text{nm})$$

当 $V=100$ V 时, $\lambda=0.123$ nm; 当 $V=10000$ V 时, $\lambda=0.0123$ nm。结果表明: 电子的物质波波长和原子的大小或固体中相邻原子间的距离具有相同的数量级。这一事实启发人们用金属表面上排列规则的原子作为精细的衍射光栅来显示电子的波动性, 很快物质波的预言得到了证实。

14.5.2 德布罗意波的实验证明——汤姆孙电子衍射实验

1927 年戴维逊和革末合作, 用低能电子在镍单晶上的衍射, 观察到了与 X 射线类似的电子衍射现象。同年, 汤姆孙在高能电子束通过薄金属的透射实验中也发现了电子的衍射现象, 如图 14-11 所示。

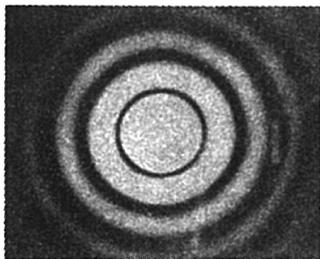


图 14-11 电子的衍射

1961 年, 德国的约恩逊做了电子的单缝、双缝、四缝衍射实验, 得出的明暗条纹更加直接地证明了电子的波动性。除了电子以外, 后来还陆续地用实验证实了中子、质子以及原子和分子等具有波动性, 而且实验中测得的物质波的波长与德布罗意关系或计算的物质波的波长完全符合。

波动性是所有物质的客观属性, 但是对于宏观物体而言, 其物质波的波长比物体本身的尺度小得多, 因此显示不出它的波动性, 物体只表现出其粒子性。如质量为 0.01 kg, 速率为 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的子弹, 其物质波的波长为 2.21×10^{-34} m, 这在实验中是根本测不出来的。原子的物质波波长与原子的尺度可以相比较, 所以原子可以表现出其波动性。

14.5.3 德布罗意波的统计解释

微观粒子的波动性意味着什么? 物质波和粒子的运动又有什么联系? 对此人们曾提出了各种看法和解释。1926 年由玻恩提出的物质波是一种概率波的解释现在已被人们广泛接受。他认为, 电子等微观粒子呈现出来的波动性反映了粒子运动的一种统计规律。在如图 14-12 所示的电子单缝衍射实验中, 电子沿 x 轴方向射向一狭缝, 在缝后放置一感光底片, 以便记录电子落在底片上的位置。实验发现, 不论是让电子一个一个地通过单缝, 还是让这些电子一次通过单缝, 只要电子数是相当多的, 就会在感光底片上得到相同的单缝衍射条纹。条纹的明暗反映了电子到达感光底片的数目多少, 即概率大小。衍射极大处说明电子到达得最多, 电子在此处出现的概率最大; 衍射极小处说明电子到达得最少, 电子在此处出现的概率最小。这样感光底片上某点附近的波的强度自然地与该点附近电子出现的概率成正比, 所以玻恩把物质波称为概率波。因为微观粒子的波动性并不依赖于大量粒子是否同时存在才得以表现, 所以单个微观粒子就具有波动性。

14.6 测不准关系

在经典力学中,质点在任何时刻都有完全确定的位置、动量、能量等,与此不同的是微观粒子具有明显的波动性,以致描述它的某些成对的物理量不可能同时具有确定的量值。例如坐标和动量、能量和时间等,其中对一个量确定得越准确,另一个量的不确定程度就越大。

德国物理学家海森堡根据量子力学提出,如果一个粒子的位置坐标具有不确定量 Δx ,则同一时刻其动量也有一个不确定量 ΔP_x ,且 Δx 与 ΔP_x 的乘积总是不小于 $h/4\pi$,即有

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

为了后边书写方便,通常引入 \hbar ,记为

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457266(63) \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{S)}$$

若计及其他方向,则上式可写为

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta P_x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \cdot \Delta P_y &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta z \cdot \Delta P_z &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (14.20)$$

式(14.20)称为海森堡坐标与动量的不确定关系式。对此我们不做精确推导,下面仅借助于电子单缝衍射实验来粗略地加以推导。

如图 14-12 所示,设单缝的宽度为 a ,电子可以从缝上任何一点通过单缝,因此在电子通过单缝时,其位置的不确定度就是缝的宽度,即 $\Delta y = a$ 。电子沿 y 轴方向的动量 P_y 是多大呢?如果说在缝前 P_y 等于零,在通过缝时, P_y 就肯定不是零了。因为如果是零,电子就要沿原方向前进而不会发生衍射现象。屏上电子沿 y 方向展开,说明电子通过缝时已有了不为零的 P_y 值。忽略次级极大,可以认为电子都落在了中央亮纹内,因而电子在通过缝时,运动方向可以有大到衍射角 φ 的偏转。根据动量矢量的分解可知,一个电子在通过缝时在 y 轴方向动量 P_y 的大小应该满足

$$0 \leq P_y \leq P \sin \varphi$$

这表明,一个电子通过缝时在 y 方向上的动量不确定量为

$$\Delta P_y = P \sin \varphi$$

若考虑到衍射条纹的次级极大,则

$$\Delta P_y \geq P \sin \varphi$$

由单缝衍射公式可知,第一级暗纹中心的角度 φ 由下式确定:

$$a \sin \varphi = \lambda$$

式中 λ 为电子波的波长,根据德布罗意关系式有

$$\lambda = \frac{h}{P}$$

所以有

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{P_a} = \frac{h}{P\Delta y}$$

将此式代入 $\Delta P_y \geq P\sin\varphi$ 中, 可得

$$\Delta y \cdot \Delta P_y \geq h$$

由于测不准关系通常用于数量级的估计, 所以认为上式与式(14.20)没什么区别。

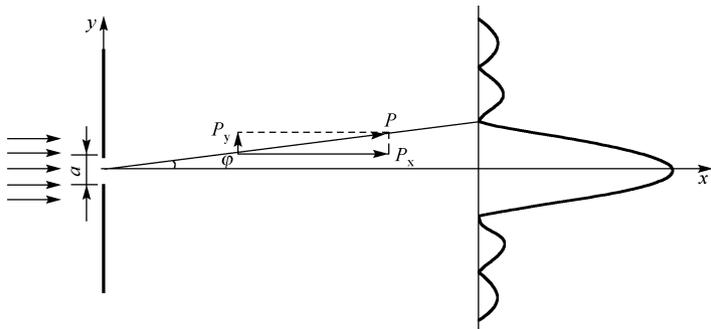


图 14-12 电子的单缝衍射

测不准关系式(14.20)表明, 微观粒子的位置坐标和同一方向上的动量不可能同时具有确定值。位置确定得越准确, 动量确定得就越不准确, 这和实验结果是一致的。例如, 做单缝衍射实验时, 缝越窄, 电子在底片上分布的范围就越宽。因此, 对于具有波粒二象性的微观粒子, 不可能用某一时刻的位置和动量来描述其运动状态, 轨道的概念已失去意义, 经典力学规律也不再适用。

注意: 如果在所讨论的具体问题中, 粒子坐标和动量的不确定量很小, 或者说普朗克常数是一个微不足道的量, 则说明粒子的波动性不显著, 实际上观测不到, 仍可用经典力学。微观粒子满足测不准关系是微观粒子具有波粒二象性的必然结果, 是微观粒子的固有属性之一, 是一个客观规律, 并不是测量仪器不精确或主观能力有问题所造成的。

测不准关系不仅存在于坐标和动量之间, 也存在于能量和时间之间。如果微观体系处于某一状态的时间为 Δt , 则其能量必有一个不确定量 ΔE , 由量子力学可以推出二者之间有如下关系式:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \tag{14.20a}$$

式(14.20a)称为时间和能量的不确定关系式。将其应用于原子系统, 可以讨论原子激发态能级宽度 ΔE 和原子在该能级的平均寿命 Δt 之间的关系, 平均寿命 Δt 越长的能级越稳定, 能级宽度 ΔE 越小。由于能级有一定的宽度, 两个能级间跃迁所产生的光谱线也有一定的频率宽度, 称为频宽。显然激发态的平均寿命越长, 能级宽度越小, 跃迁到基态所发射的光谱线的单色性越好。

【例 14.5】 一颗质量为 10 g 的子弹, 具有 $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率, 若其动量的不确定范围为动量的 0.01%(这在宏观范围是十分精确的了), 则该子弹位置的不确定量范围为多大?

【解】 子弹的动量

$$P = mv = 2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

动量的不确定范围

$$\Delta P = 0.01\% \times P = 2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

由不确定关系式(14.20), 得子弹位置的不确定范围

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta P_x} = 3.3 \times 10^{-30} \text{ m}$$

我们知道, 原子核的数量级为 10^{-15} m , 所以, 子弹的这个位置的不确定范围更是微不足道的, 可见, 子弹的动量的位置都能精确地确定, 换言之, 不确定关系对宏观物体来说, 实际上是不起作用的。

【例 14.6】 原子尺度的数量级为 10^{-10} m , 电子在原子中运动位置的不确定量至少为原子的大小的 $1/10$, 即 $\Delta x = 10^{-11} \text{ m}$, 试求电子速率的不确定量。

【解】 由不确定关系得

$$\Delta v = \frac{h}{m \cdot \Delta x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 0.1^{-31} \times 10^{-11}} = 7.29 \times 10^7 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

由玻尔的量子论可估算出氢原子中电子的速率约为 $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 可见电子的速率的不确定量与电子速率的数量级相同。因此原子中的电子在任一时刻都没有确定的位置和速率, 更谈不上有确定的轨道了。

* 14.7 波函数 薛定谔方程

14.7.1 波函数

微观粒子具有波动性, 与微观粒子相联系的波称为物质波, 波函数就是物质波的数学表达式。为了便于理解, 下面先介绍一个最简单的一维波函数。

把不受任何外力作用的粒子称为自由粒子。假设有一个动量为 P 、能量为 E 的自由粒子, 按德布罗意假设, 自由粒子的物质波是一列沿它的运动方向传播的单色平面波, 其波长和频率分别为 $\lambda = h/P$, $\nu = E/h$ 。若取平面波传播的方向为 x 轴的正方向, 则由波动理论可知, 平面波的波动方程为

$$y = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

它正好是下面复数的实部:

$$y = A e^{-i \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right]}$$

类似地, 在量子力学中, 物质波的波函数可表示为

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right]}$$

再分别用 P 和 E 代替式中的 λ 和 ν , 用 \hbar 代替 h , 可得

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - Px)}$$

上式是自由粒子沿 x 轴传播的物质波的表达式, 若自由粒子的物质波沿空间任意方向传播, 则其波函数的表达式为

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} [Et - (P_x x + P_y y + P_z z)]} \quad (14.21)$$

对于在各种外力场中运动的粒子, 它们的波函数 $\psi(x, y, z, t)$ 的具体表达式可由下面要讲的薛定谔方程去求解。

若考虑空间一个小微元 dV , 则在 dV 内波函数 ψ 可视为不变。因为粒子在 dV 内出现的概率正比于该处物质波的强度, 即正比于 $|\psi|^2$ 。若用 $d\rho$ 表示粒子出现在 dV 中的概率, 则

$$d\rho = |\psi|^2 dV$$

波函数 ψ 是复数, 通常用 ψ^* 表示它的共轭复数。由复数的性质可得

$$d\rho = (\psi \cdot \psi^*) dV$$

于是有

$$\frac{d\rho}{dV} = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^* \quad (14.22)$$

$\frac{d\rho}{dV}$ 表示该点处单位体积内粒子出现的概率, 称为粒子在该点处的概率密度。根据式(14.22),

可以算出自由粒子在空间某处出现的概率密度为

$$\frac{d\rho}{dV} = \psi \cdot \psi^* = |\psi_0|^2$$

概率密度为常数说明对于自由粒子而言, 在空间任一点都可能出现, 且在空间每一点出现的概率相等, 也就是说, 它的位置不完全确定。但因为自由粒子具有完全确定的动量值, 所以与不确定关系式是符合的。

由于一定时刻粒子在空间出现的概率应该是唯一的, 不可能既是这个值, 又是那个值, 并且应该是有限的(应该小于1), 又因为在空间各点概率分布应该连续变化的, 所以波函数 $\psi(x, y, z, t)$ 必须是单值、有限、连续的函数, 通常把这一条件称为波函数的归一化条件。

又因为粒子必定要在空间某一点出现, 不在这一点出现, 就在另一点出现, 它在整个空间各点出现的概率总和必然是1, 所以有

$$\iiint |\psi|^2 dV = 1 \quad (14.23)$$

式(14.23)通常称为波函数的归一化条件。

必须注意: 物质波的波函数 ψ 不同于机械波的波函数 y , y 是表示振动位移的物理量, 而 ψ 本身没有什么直观的物理意义, 只是通过 $|\psi|^2$ 才间接地反应出粒子出现的概率。

14.7.2 薛定谔方程

前面对描述微观粒子运动状态的波函数做了简单的讨论, 下面的问题是如何确定各种条件下的波函数。1924年奥地利物理学家薛定谔建立了一个方程, 彻底解决了这个问题, 后人为纪念他的贡献, 将其称为薛定谔方程。因为涉及的数学问题较为复杂, 我们在此不讨论它的一般形式。一类比较简单的问题是粒子在恒定力场中的运动, 由于这种问题中势能函数 V 和粒子能量 E 与时间无关, 这时粒子处于定态, 粒子的定态波函数可以写成坐标函数 $\psi(x, y, z)$ 与时间函数 $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ 两部分的乘积, 即

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

不难看出, 粒子处于定态时, 它在空间各点出现的概率密度与时间无关, 即概率密度在空间形成稳定分布。此时定态波函数的空间部分 $\psi(x, y, z)$ 称为定态波函数, $\psi(x, y, z)$ 所满足的薛定谔方程称为定态薛定谔方程, 它的非相对论形式为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi(x, y, z) = 0 \quad (14.24)$$

如果粒子在一维空间运动, 则方程(14.24) 简化为

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x) = 0 \quad (14.24a)$$

薛定谔方程是反映微观粒子运动规律的基本方程, 它在量子力学中的地位与经典力学中的牛顿运动定律的地位相当。

14.7.3 一维无限深势阱中运动的粒子

假设粒子只能沿 x 轴做一维运动, 且势能函数具有如下形式:

$$\begin{cases} V(x) = 0 & 0 < x < a \\ V(x) = \infty & x \leq 0 \text{ 和 } x \geq a \end{cases}$$

相应的势能曲线如图 14-13 所示。这种形式的力场称为一维无限深方势阱。束缚于金属内的自由电子只能在金属体内运动, 而不能逃逸出金属表面, 可以近似地认为金属内的自由电子在一维无限深方势阱内运动。

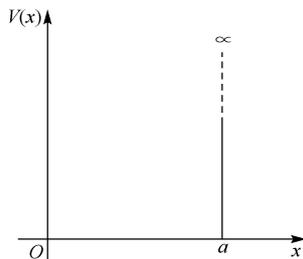


图 14-13 一维无限深方势阱

由于 $V(x)$ 与时间无关, 因此在势阱中运动的粒子处于定态, 可以用一维定态薛定谔方程求解。

在 $x \leq 0$ 和 $x \geq a$ 的区域内, $V(x) = \infty$ 具有有限能量的粒子不可能出现, 因此 $\psi(x) = 0$ 。

在 $0 < x < a$ 的区域内, 定态薛定谔方程为

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

若令 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 上述方程可变为

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$$

此方程的通解为

$$\psi(x) = A\sin(kx + \delta)$$

其中 A 和 δ 为待定常数。由于波函数连续, 所以

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(a) = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \sin\delta = 0 \\ \sin(ka + \delta) = 0 \end{cases}$$

解之可得 $\delta = 0$, $ka = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

由于 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 于是有 $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

n 就是前面讲过的主量子数, 它可以取 $1, 2, 3, \dots$ 诸正整数。应该说明的是, n 不能取零, 如 $n = 0$, 则 $k = 0$, 这时在势阱内 $\psi(x)$ 恒为零, 表示势阱内到处都没有粒子, 这显然不满足归一化条件。能量 E 描述粒子的状态, 能量只能取分立值 E_n , 即粒子的能量是量子化的, 并且与每个能量值所对应的波函数为

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

至于待定常数 A , 可用归一化条件来确定。由于粒子被限制在势阱内运动, 粒子必定在势阱内出现, 所以有

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{2}A^2 a = 1 \text{ 即 } A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

综上所述, 粒子在一维无限方势阱内运动时, 其波函数为

$$\begin{cases} x \leq 0 \text{ 和 } x \geq a; & \psi(x) = 0 \\ 0 < x < a; & \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

与能量 E 所对应的粒子在势阱中的概率密度为

$$|\varphi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

图 14-14 分别给出了 $n=1, 2, 3, 4$ 时的波函数和概率密度随 x 的分布情况。

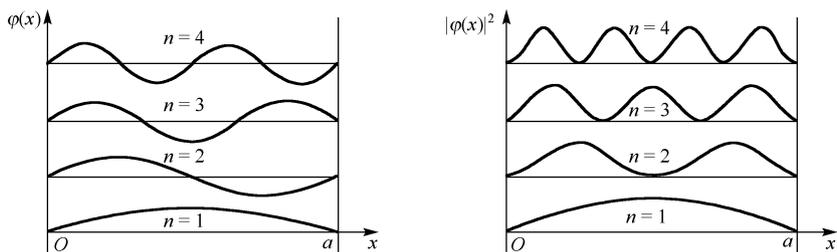


图 14-14 波函数和概率密度随位置的变化

14.7.4 氢原子的薛定谔方程

氢原子中有一个核和一个电子绕它们的质量中心运动。但核的质量比电子大得多, 所以采取一级近似后, 可以把核看做静止不动, 电子在绕核运动, 换言之, 就是电子在核电荷的势场中运动。由静电学知道, 势能函数为 $U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, 式中 e 为电子的电荷, r 为电子离核的距离, U 只是 r 的函数, 不随时间变化, 所以这是一个定态问题, 代入式(14.23)可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi(x, y, z) = 0$$

具体解这个方程很复杂, 通过求解这个方程可得到, 电子的总能量只能是一系列不连续的值, 其值为

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

这正是玻尔量子论的结果, 这里不再赘述。

【例 14.7】 已知一维运动的粒子的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax e^{-Bx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

式中 B 为正的常数, 试求: (1) 归一化常数 A 和归一化波函数; (2) 该粒子位置坐标的概率分布函数(即概率密度); (3) 在何处找到粒子的概率最大?

【解】 (1) 由归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ 可得

$$\int_{-\infty}^0 0^2 dx + \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2Bx} dx = \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2Bx} dx = \frac{A^2}{4B^3} = 1$$

于是归一化常数为

$$A = 2B\sqrt{B} \quad \left(\text{积分时利用了积分公式} \int_0^{\infty} y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3} \right)$$

归一化波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 2B\sqrt{B}x e^{-Bx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(2) 粒子的概率分布函数为

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} 4B^3 x^2 e^{-2Bx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(3) 令 $\frac{d}{dx} [|\psi(x)|^2] = 0$ 。有 $4B^3(2xe^{-2Bx} - 2Bx^2e^{-2Bx}) = 0$, 可得 $x=0, x=\frac{1}{B}, x=+\infty$

时概率密度 $|\psi(x)|^2$ 有最值。而只有二阶导数 $\frac{d^2}{dx^2} [|\psi(x)|^2]_{x=\frac{1}{B}} < 0$, 所以在 $x=\frac{1}{B}$ 处, 概率密度有最大值, 即粒子在该位置处出现的概率最大。

本章小结

一、黑体辐射和普朗克假设

1. 热辐射: 任何物体在任何温度下都发射各种波长电磁波的现象。

2. 黑体辐射的实验规律

斯忒藩-玻耳兹曼定律: $M = \sigma T^4$

维恩位移定律: $T\lambda_m = b$

3. 普朗克量子假设

黑体由带电谐振子组成, 谐振子的能量是不连续的, 谐振子的能量 $\varepsilon = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 式中 h 为普朗克常数, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, ν 为谐振子的频率, $h\nu$ 称为量子。

二、光电效应和爱因斯坦光子假设

1. 光电效应现象: 一定频率的光照射到金属表面时, 电子从金属表面逸出现象。

2. 爱因斯坦光子假设: 光由光子组成。物质不仅在吸收或发射电磁辐射时, 能量是量

子化的,而且电磁辐射在传播过程中,能量也是量子化的。光是一束速度为光速 c 的粒子流,这一粒子就是光子。

3. 光电效应方程: $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W$

4. 光电效应的红限频率: $\nu_0 = W/h$

5. 光子的波粒二象性: 光既具有粒子性,又具有波动性,即光具有波粒二象性。

光的干涉、衍射、偏振证明了光的波动性;光电效应、康普顿效应证明了光的粒子性。

光子的能量: $\varepsilon = h\nu$

光子的动量: $P = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$

三、康普顿散射效应

X射线照射物质后散射光波长改变的现象。

1. 康普顿散射公式: $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$

2. 康普顿波长(电子): $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 0.00242631058 \text{ nm}$ 为电子的康普顿波长。

四、玻尔的氢原子理论

原子结构: 卢瑟福通过大角散射实验确定了原子的核式结构模型。

1. 氢原子光谱的实验规律

原子光谱: $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

R 称为里德伯常数,近代测定值 $R=1.097\ 373\times 10^7 \text{ m}^{-1}$,一般计算时取 $1.097\times 10^7 \text{ m}^{-1}$,其中 $n>m$ 。

2. 玻尔理论的基本假设

(1) 定态假设: 能级分立或能量量子化;

(2) 跃迁假设: $\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}$;

(3) 角动量子化假设: 轨道量子化 $L=n \cdot \frac{h}{2\pi}$, 其中 $n=1, 2, \dots$ 称为主量子数。

玻尔的第一轨道半径: $a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$

基态能量: $E_1 = -13.6 \text{ eV}$

五、德布罗意关系

1. 德布罗意假设: 任何实物粒子和光子一样,都具有波粒二象性。

2. 德布罗意公式: $E = h\nu, P = \frac{h}{\lambda}$ 。

3. 戴维孙-革末的电子衍射实验证实了电子的波动性。

六、测不准关系

$$\Delta x \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

七、物质波的波函数与薛定谔方程

1. 波函数: $\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(E - P_x x)}$ 。
2. 波函数的统计解释: 物质波是一种概率波, 且 $|\psi(x)|^2$ 称为概率密度。
3. 波函数的标准条件: 单值、有限、连续。
4. 波函数所满足的归一化条件: $\iiint |\psi(x)|^2 dV = 1$ 。
5. 一维定态薛定谔方程: $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x) = 0$ 。

习 题 14

一、填空题

- 14.1 波长为 3 m 的一个光子的动量大小是 _____, 能量是 _____, 质量是 _____。
- 14.2 金属的光电效应的红限频率依赖于 _____。
- 14.3 以光强相同而频率为 ν_1 和 ν_2 的单色光分别照射一光电管, 若 $\nu_1 > \nu_2$ (均高于红限频率 ν_0), 则光电子的最大初动能 E_{1} _____ E_{2} , 遏止电压 $|U_{c1}|$ _____ $|U_{c2}|$, 饱和光电流 I_{s1} _____ I_{s2} 。(填“大于”、“等于”或“小于”)
- 14.4 光电效应实验和康普顿散射实验证明光具有 _____ 特性。
- 14.5 一颗子弹的质量为 0.01 kg, 一个电子的质量为 9.1×10^{-31} kg。若它们飞行的速度均为 1000 m/s, 子弹的德布罗意波长为 _____ m, 电子的德布罗意波长为 _____ m。

二、选择题

- 14.6 下列物体中属于绝对黑体的是()。
 - A. 不辐射可见光的物体
 - B. 不辐射任何光线的物体
 - C. 不能反射可见光的物体
 - D. 不能反射任何光线的物体
- 14.7 光电效应和康普顿效应都是光子和物质原子中的电子相互作用过程, 在下面几种理解中, 正确的是()。
 - A. 两种效应中电子与光子组成的系统都服从能量守恒定律和动量守恒定律
 - B. 光电效应是由于电子吸收光子能量而产生的, 而康普顿效应则是由于电子与光子的弹性碰撞过程
 - C. 两种效应都相当于电子与光子的弹性碰撞过程
 - D. 两种效应都属于电子吸收光子的过程

14.8 关于光子的性质,有以下说法:(1)不论真空中或介质中的速度都是 c ; (2)它的静止质量为零;(3)它的动量为 $h\nu/c$; (4)它的总能量就是它的动能;(5)它有动量和能量,但没有质量。其中正确的是()。

- A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4) C. (3)(4)(5) D. (3)(5)

14.9 关于不确定关系有以下理解()。

- A. 粒子的动量不可能确定
 B. 粒子的坐标不可能确定
 C. 粒子的动量和坐标不可能同时确定
 D. 不确定关系不仅适用于电子和光子,也适用于其他粒子

三、计算题

14.10 天狼星的温度大约是 $11\,000^\circ\text{C}$,试由维恩位移定律计算其辐射峰值的波长。

14.11 太阳可看做是半径为 $7.0\times 10^8\text{ m}$ 的球形黑体,试计算太阳的温度,设太阳射到地球表面上的辐射能量为 $1.4\times 10^3\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$,地球与太阳间的距离为 $1.5\times 10^{11}\text{ m}$ 。

14.12 钨的逸出功是 4.52 eV ,钡的逸出功是 2.50 eV ,分别计算钨和钡的截止频率,哪一种金属可以用做可见光范围内的光电管阴极材料?

14.13 钾的截止频率为 $4.62\times 10^{14}\text{ Hz}$,今以波长 435.8 nm 的光照射,求钾放出的光电子的初速度。

14.14 在康普顿效应中,入射光子的波长为 $3.0\times 10^{-3}\text{ nm}$,反冲电子的速度为光速的 60% ,求散射光子的波长及散射角。

14.15 波长为 0.10 nm 的辐射,射在碳上,从而产生康普顿效应,从实验中,测量到散射辐射的方向与入射辐射的方向相垂直,求:(1)散射辐射的波长;(2)反冲电子的动能和运动方向。

14.16 试求波长为下列数值的光子的能量、动量及质量:(1)波长为 1500 nm 的红外线;(2)波长为 500 nm 的可见光;(3)波长为 20 nm 的紫外线;(4)波长为 0.15 nm 的X射线;(5)波长为 $1.0\times 10^{-3}\text{ nm}$ 的 γ 射线。

14.17 已知 α 粒子的静止质量为 $6.68\times 10^{-27}\text{ kg}$ 。求速率为 5000 km/s 的 α 粒子的德布罗意波长。

14.18 求动能为 1.0 eV 的电子的德布罗意波的波长。

14.19 从铝中移出一个电子需要 4.2 eV 的能量,今有波长为 2000 \AA 的光投射到铝表面。试问:(1)由此发射出来的光电子的最大动能是多少?(2)遏止电势差为多大?(3)铝的截止(红限)波长有多大?

14.20 实验发现基态氢原子可吸收能量为 12.75 eV 的光子。(1)试问氢原子吸收光子后将被激发到哪个能级?(2)受激发的氢原子向低能级跃迁时,可发出哪几条谱线?请将这些跃迁画在能级图上。

14.21 以动能 12.5 eV 的电子通过碰撞使氢原子激发时,最高能激发到哪一能级?当回到基态时能产生哪些谱线?

14.22 处于基态的氢原子被外来单色光激发后发出巴尔末线系中只有两条谱线,试求这两条谱线的波长及外来光的频率。

14.23 当基态氢原子被 12.09 eV 的光子激发后, 其电子的轨道半径将增加多少倍?

14.24 为使电子的德布罗意波长为 1 \AA , 需要多大的加速电压?

14.25 具有能量 15 eV 的光子, 被氢原子中处于第一玻尔轨道的电子所吸收, 形成一个光电子。问此光电子远离质子时的速度为多大? 它的德布罗意波长是多少?

14.26 一质量为 40 g 的子弹以 $1.0 \times 10^3 \text{ m/s}$ 的速率飞行, 求: (1) 其德布罗意波的波长; (2) 若测量子弹位置的不确定量为 0.10 nm, 求其速率的不确定量。

14.27 设有一电子在宽为 0.20 nm 的一维无限深的方势阱中。(1) 计算电子在最低能级的能量; (2) 当电子处于第一激发态时, 在势阱何处出现的概率最小, 其值为多少?

* 第 15 章

原子核物理和粒子物理简介

自 1911 年卢瑟福通过 α 粒子散射实验发现原子的核式结构以来，人们已获得了很多关于核的知识，认识到原子是有内部结构，是由原子核和核外电子构成的；获得了能量以及核的转化等很多知识，如核能、放射性同位素等，且已得到了广泛的应用。到了 20 世纪 30 年代，进一步知道原子核是由质子和中子构成的，当时认为质子、中子、电子和光子是构成物质的基本单元，被称为基本粒子；20 世纪 60 年代以后，理论和实验都证实质子、中子等称为强子的基本粒子都有内部结构，于是去掉“基本”二字，改称为粒子，这些粒子由夸克构成，但至今尚未找到自由夸克。夸克有没有内部结构？人们正在探索。

原子核物理以原子核为研究对象，研究原子核力的性质、核结构、核反应、核衰变以及核技术在许多领域中的应用。本章先概述核的一般性质，包括核的组成、大小、自旋等，然后讲解使核保持稳定的核力和结合能，放射性衰变的规律以及 α 衰变的特征。粒子是比原子核更深的物质结构层次，粒子物理研究粒子的性质、结构、粒子间相互作用和转化的规律，是当前物理学的前沿之一，最后一节将对此做简要介绍。

15.1 原子核的一般性质

15.1.1 核的组成及大小

1. 核的组成

卢瑟福的实验结果说明，虽然核的体积只有原子体积的 10^{15} 分之一，但核中却集中了原子的全部正电荷和几乎全部质量。由于核的正电荷是氢核正电荷的整数倍，所以一般就认为氢核是各种核的组分之一而被称为质子。由于核的质量总是大于由其正电荷所显示的质子的总质量，所以人们又设想核是质子和电子的复合体，多于电子的质子的总电荷就是核的电荷。但通过计算知道核内不可能存在单独的电子。1932 年查德威克通过实验发现了核内存在一种质量和质子相近但不带电的粒子，以后被称为中子。此后人们就公认核是由质子和中子组成的，质子和中子也因此统称为核子。

质子和中子的质量大约是电子质量的 1840 倍。质子所带电量和电子的相等，但符号相反。质子和中子的自旋量子数和电子的一样，都是 $1/2$ ，因此它们都是费米子。表 15.1 列出了质子、中子和电子各种内禀性质的比较，其中质量的单位“u”叫原子质量单位，它是 ^{12}C 原

子的质量的 $1/12$ 。原子质量单位和其他单位的换算关系为

$$1\text{u} = 1.660\,540\,2 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.494\,3 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$$

表 15.1 质子、中子和电子的内禀性质比较

内禀物质	质 子	中 子	电 子
质量/u	1.007 276 466 0	1.008 664 923 5	$5.485\,799\,03 \times 10^{-4}$
质量/kg	$1.672\,623\,1 \times 10^{-27}$	$1.674\,928\,6 \times 10^{-27}$	$9.109\,389\,7 \times 10^{-31}$
质量/MeV · c ⁻²	938.272 31	939.565 63	0.511 0
电荷/e	+1	0	-1
自旋量子数	1/2	1/2	1/2
磁矩/J · T ⁻¹	$1.410\,607\,61 \times 10^{-26}$	$-0.966\,236\,69 \times 10^{-26}$	$-9.284\,770\,1 \times 10^{-24}$

不同元素的原子核中的中子数和质子数不同。质子数 Z 叫核的原子序数。中子数 N 和质子数 Z 的和用 A 表示, 即

$$A = Z + N \quad (15.1)$$

A 叫核的质量数, 因为核的质量几乎就等于 A 乘以一个核子的质量。原子核通常用 ${}_Z^A X$ 表示, 其中 X 表示该核所属化学元素的符号。由于各元素的原子序数 Z 是一定的, 所以也常不写 Z 值, 如写成 ${}^{16}\text{O}$ 、 ${}^{107}\text{Ag}$ 、 ${}^{238}\text{U}$ 等。

同一元素的原子的核中的质子数是相同的, 但中子数可能不同。质子数相同而中子数不同的核叫同位素, 取在周期表中位置相同之意。如碳的同位素有 ${}^8\text{C}$ 、 ${}^9\text{C}$ 、 \dots 、 ${}^{12}\text{C}$ 、 ${}^{13}\text{C}$ 、 ${}^{14}\text{C}$ 、 \dots 、 ${}^{20}\text{C}$ 等。天然存在的各元素中各同位素的多少是不一样的, 各种同位素所占比例叫各该同位素的天然丰度。例如在碳的同位素中, ${}^{12}\text{C}$ 的天然丰度为 98.90%, ${}^{13}\text{C}$ 的为 1.10%, 而 ${}^{14}\text{C}$ 的只是 $1.3 \times 10^{-10}\%$ 。许多同位素是不稳定的, 经过或长或短的时间要衰变成其他的核。因此, 许多同位素, 包括 $Z > 92$ 的各种核都不是天然存在的, 只能在实验室中通过核反应人工地制造出来。

2. 核的大小

卢瑟福根据他们的实验结果计算出来的核的线度为 10^{-15} m 量级。其他实验(包括高能电子散射实验)给出, 如果把核看成球形, 则核的半径 R 和 $A^{1/3}$ 成正比, 即

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (15.2)$$

其中

$$r_0 = 1.2 \text{ fm} = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

由式(15.2)可算得 ${}^{56}\text{Fe}$ 核的半径为 4.6 fm, ${}^{238}\text{U}$ 的核半径为 7.4 fm。当然, 由于粒子的波动性, 核不可能有清晰的表面。有的实验还证明, 有的核的形状明显地不是球形而是椭球形或梨形。

由于球的体积和半径的 3 次方成正比, 所以原子核的体积和质量数 A 成正比。这表示核好像是 A 个不可压缩的小球紧挤在一起形成的。由此也可知各种核的密度都是一样的, 其大小为

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1.67 \times 10^{-27} \text{ A}}{\frac{4}{3} \pi \times (1.2 \times 10^{-15})^3 \text{ A}} = 2.3 \times 10^{17} \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

这一数值比地球的平均密度大 10^{14} 倍!

15.1.2 核的自旋和磁矩

核子在核内运动的轨道角动量和自旋角动量之和称为核的自旋角动量, 简称核自旋。核自旋量子数用 I 表示。按一般的量子规则, 核的自旋角动量的大小为 $\sqrt{I(I+1)}\hbar$ 。核自旋在 z 方向的投影为

$$I_z = m_l \hbar \quad m_l = \pm I, \pm (I-1) \cdots, \pm \frac{1}{2} \text{ 或 } 0 \quad (15.3)$$

I 的值可以是半整数或整数。实验结果指出, 偶偶核(Z 、 N 都是偶数)的自旋都是零, 如 ^4He 、 ^{12}C 、 ^{238}U 等就是。奇奇核(Z 、 N 都是奇数)的自旋都是整数, 如 ^{10}B 的是 3, ^{26}Al 的是 5 等。这些核都是玻色子。奇偶核(Z 、 N 中一个是奇数, 一个是偶数)的自旋都是半整数, 如 ^{15}N 的是 $1/2$, ^{29}Na 的是 $3/2$, ^{25}Mg 的是 $5/2$, ^{83}Kr 的是 $9/2$ 等。这些核都是费米子。

和角动量相联系, 核有磁矩。质子由于其轨道角动量而有轨道磁矩比 $\mu_L = \frac{e}{2m_p}L$ 。此磁矩在 z 方向的投影为

$$\mu_{L,z} = \frac{e}{2m_p}L_z = \frac{e\hbar}{2m_p}m_l = \mu_N m_l \quad (15.4)$$

式中常量

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.057866 \times 10^{-27} \text{ J/T} \quad (15.5)$$

叫做核磁子。它比电子的玻尔磁子小 5×10^{-4} 。中子由于不带电, 所以没有轨道磁矩。

质子和中子都由于自旋而有自旋磁矩

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \left(\frac{e}{2m_p} \right) \mathbf{S} \quad (15.6)$$

它在 z 方向的投影为

$$\mu_{s,z} = g_s \left(\frac{e\hbar}{2m_p} \right) m_s = g_s \mu_N m_s, \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (15.7)$$

式中 g 叫 g 因子。质子的 g 因子 $g_{s,p} = 5.5857$, 中子的 g 因子 $g_{s,n} = -3.8261$ 。由于 $m_s = \pm \frac{1}{2}$, 所以质子的自旋磁矩在 z 方向的投影为

$$\mu_{p,z} = 2.7928 \mu_N = 1.4106 \times 10^{-26} \text{ J/T}$$

中子的自旋磁矩在 z 方向的投影为

$$\mu_{n,z} = -1.9131 \mu_N = -9.662 \times 10^{-26} \text{ J/T}$$

中子的磁矩为负值表示其磁矩方向和自旋方向相反。中子不带电为什么有自旋磁矩呢? 这是由于中子只是整体上不带电。电子散射实验证明, 中子由带正电的内核和带负电的外壳构成。按经典模型处理, 自旋着的中子就有磁矩, 而且其磁矩的方向和自旋的方向相反。

整个核的自旋角动量用 I 表示, 其磁矩为 $\mu = g \frac{e}{2m_p} I$ 。核磁矩在 z 的方向的分量为 $\mu_z =$

$$g \frac{e}{2m_p} I_z = g \frac{e \hbar}{2m_p} m_I = g \mu_N m_I。$$

15.1.3 核力

由于核中质子间的距离非常小, 因而它们之间的斥力很大。核的稳定性说明核子之间一定存在着另一种和库仑斥力相抗衡的吸引力, 这种力叫核力或强力(核子是“强子”)。在核的线度内, 核力可能比库仑力大得多。例如, 中心相距 2 fm 的两个质子, 其间库仑力约为 60 N, 而相互吸引的核力可达 2×10^3 N。

核力虽然比电磁力大得多, 但力程非常短, 它不像电磁力那样是长程力。当两核子中心相距大于核子本身线度时, 核力几乎已完全消失。因此, 在核内, 一个核子只受到和它“紧靠”的其他核子的核力作用, 而一个质子却要受到核内所有其他质子的电磁力。

实验证明, 核力与电荷无关。质子和质子、质子和中子、中子和中子之间的作用力是一样的。质子-质子和中子-质子的散射实验证明了这一点, 一个质子和一个中子的平均结合能相同也支持了这一结论。

实验证明, 核力与核子自旋的相对取向有关。两个核子自旋平行时的相互作用力大于它们自旋反平行时的相互作用力。氦核的稳定基态是两个核子的自旋平行状态就说明了这一点。氦的自旋磁矩为 $0.8574 \mu_N$, 这与质子和中子的磁矩之和 $0.8797 \mu_N$ 是十分相近的。

强力不像库仑力那样是有心力。更奇特的是, 强力是一种多体力, 即两个核子的相互作用力和其他相邻的核子的位置有关。因此, 强力不遵守叠加原理, 强力的这种性质给核子系统的理论计算带来巨大的困难。

由于核力的复杂性, 它还没有精确的表达式。通常就用一个势能函数(薛定谔方程就要用这个函数)或势能曲线表示两个核子之间的相互作用。图 15-1 就是两个自旋反平行而轨道角动量为零的两个核子之间的势能曲线。它的形状和两个中性分子或原子之间的势能曲线相似, 只是横轴的距离标度小很多(小到 10^{-15} m), 而竖轴的能量标度又大很多(大到分子间势能的 10^8 倍)。这种相似不是偶然的。两个中性原子之间的作用力本质上是电磁力。由于每个原子都是中性的, 所以它们之间的电磁力是两个带电系统的正负电荷相互作用的电磁力抵消之后的残余电磁力。对核子来说, 现已确认核子由夸克组成。每个夸克都有“色荷”作为其内禀性质。色荷有三种: “红”、“绿”、“蓝”。三“色”俱全, 则色荷为零。色荷具有相互作用力, 叫色力。每个核子都由三个色荷不同的夸克

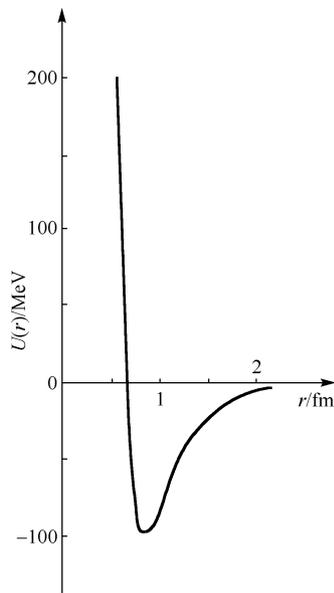


图 15-1 核力势能曲线

构成, 总色荷为零。两个核子之间的作用力就是组成它们的夸克之间的相互作用力抵消之后的残余色力的表现, 图 15-1 就是这种残余色力的势能曲线。可以说, 和原子之间的力相比较, 同为残余力, 所以具有形状相似的势能曲线。由图 15-1 可以看出, 在两核子相距超过

2 fm 时,核力基本上消失了。距离稍近一些,核力是吸引力;相距约小于 1 fm 时,核力为斥力,而且随距离的减小而迅速增大。这可以说明核子有一定“半径”。这种斥力实际上是两个夸克的波函数相互重叠时泡利不相容原理起作用的结果(夸克都是费米子)。

【例 15.1】 估算其势能曲线如图 15-1 所示的那两个核子相距 1.0 fm 时的相互作用核力并与电磁力相比较。

【解】 在图中作 $r=1.0$ fm 处的曲线的切线,其斜率约为 $100/0.7(\text{MeV}/\text{fm})$,于是相互作用核力为

$$F_N = -\frac{\Delta U}{\Delta r} = -\frac{100 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{0.7 \times 10^{-15}} = -2.3 \times 10^4 (\text{N})$$

负号表示在 $r=1.0$ fm 时两核子的相互吸引。在该距离时两质子的相互库仑斥力为

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(1.0 \times 10^{-15})^2} = 2.3 \times 10^2 (\text{N})$$

此力较核力小 100 倍。

15.1.4 原子核的结合能

由于核力将核子聚在一起,所以要把一个核分解成单个的中子或质子时必须反对核力做功,为此所需的能量叫做核的结合能。它也就是单个核子结合成一个核时所能释放的能量。

一个核的结合能 E_b 可以由爱因斯坦质能关系求出。以 m_N 表示核的质量,则能量守恒给出

$$(Zm_p + Nm_n)c^2 = m_N c^2 + E_b$$

由此得

$$E_b = (Zm_p + Nm_n - m_N)c^2 = \Delta m c^2 \quad (15.8)$$

式中 $\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_N$ 叫核的质量亏损,它是单独的核子结合成核后其总的静质量的减少。由于数据表一般多给出原子的质量,所以利用质量亏损求结合能时多用氢原子的质量 m_H 代替式(15.8)中的 m_p ,而用原子质量 m_a 代替其中的核质量 m_N ,写成

$$E_b = (Zm_H + Nm_n - m_a)c^2 \quad (15.9)$$

可以看出在此式中所涉及的电子的质量是消去了的,结果和式(15.8)一样。

【例 15.2】 计算 ${}^5\text{Li}$ 核和 ${}^6\text{Li}$ 核的结合能,给定 ${}^5\text{Li}$ 原子的质量为 $m_5 = 5.012\,539$ u, ${}^6\text{Li}$ 原子的质量为 $m_6 = 6.015\,121$ u,氢原子的质量为 $m_H = 1.007\,825$ u。比较 ${}^5\text{Li}$ 核的质量与质子及 α 粒子的质量和($m_{\text{He}} = 4.002\,603$ u)。

【解】 由式(15.9)可得 ${}^5\text{Li}$ 和 ${}^6\text{Li}$ 核的结合能分别为

$$\begin{aligned} E_{b,5} &= (3 \times 1.007\,825 + 2 \times 1.008\,665 - 5.012\,539) \times 931.5 \\ &= 26.3 (\text{MeV}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{b,6} &= (3 \times 1.007\,825 + 3 \times 1.008\,665 - 6.015\,121) \times 931.5 \\ &= 32.0 (\text{MeV}) \end{aligned}$$

由于 $m_5 = 5.012\,539$ u $>$ $m_H + m_{\text{He}} = 5.010\,428$ u 可知 ${}^5\text{Li}$ 核的质量大于质子和 α 粒子的质量和。因此 ${}^5\text{Li}$ 核不稳定,它会分裂成一个质子和一

个 α 粒子并放出一定的能量，该能量可计算为

$$(5.012\ 539 - 5.010\ 428) \times 931.5 = 2.0\ \text{MeV}$$

不同的核的结合能不相同，更令人注意的是平均结合能，即就一个核平均来讲，一个核子的结合能。图 15-2 画出了稳定核的平均结合能 $E_{b,1}$ 和质量数 A 的关系。开始时， $E_{b,1}$ 很快随 A 的增大而增大，而在 $A=4$ (He), 12 (C), 16 (O), 20 (Ne) 和 24 (Mg) 时具有极大值，说明这些核比与其相邻的核更稳定。在 $A>20$ 时 $E_{b,1}$ 差不多与 A 无关，都大约为 8MeV 。这说明核力的一种“饱和性”，这种饱和性是核力的短程性的直接后果。由于一个核子只和与它紧靠的其他核子有相互作用，而在 $A>20$ 时在核内和一个核紧靠的粒子数也基本不变，因此核子的平均结合能也就基本上不随 A 的增加而改变。

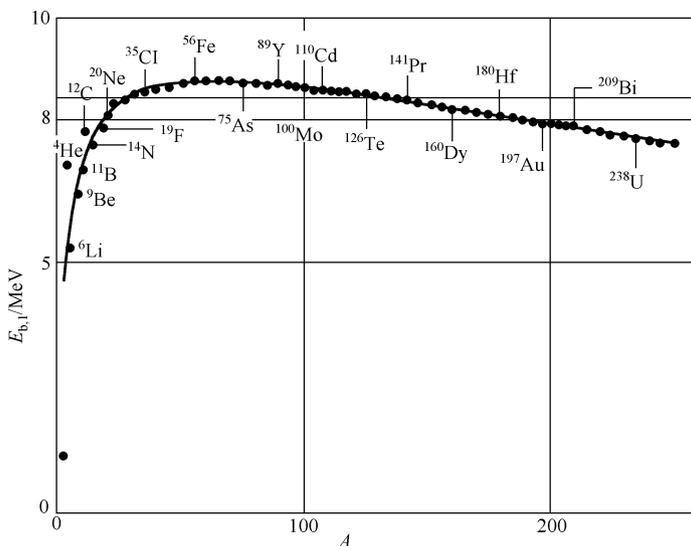


图 15-2 平均结合能和质量数的关系

核内质子之间有库仑斥力作用。该力和核力不同，为长程力。因此，一个质子要受到核内所有其他质子的作用。当质子数增大时，库仑力的效果渐趋显著。该斥力有减小结合能的作用，这就是图 15-2 中 $A>60$ 时 $E_{b,1}$ 逐渐减小的原因。结合能的减小将削弱核的稳定性。中子不带电，不受库仑斥力的作用。因此，在核内增加质子数的同时，多增加一些中子将会使核更趋稳定。图 15-3 中标出了稳定核的中子数和质子数的关系，在质量数大时，中子数超过了质子数就是由于这种原因。质子数很大时，稳定性将不复存在。实际上，正如图 15-3 所示， $Z>81$ 的绝大多数同位素核都是不稳定的，它们都会通过放射现象而衰变。

从图 15-2 的核子平均结合能曲线还可看出，重核分裂为轻核时会放出能量的(因为两个轻核的结合能大于分裂前的那个重核的结合能)。这种释放能量的方式叫裂变。裂变除了应用于爆炸——原子弹，目前已被广泛地应用于发电或供暖，这种原子能发电站的“锅炉”，即释放核能的部位叫反应堆。图 15-2 还说明，两个轻核聚合在一起形成一个新核时也会放出能量(因为原来两个轻核的结合能小于聚合成的新核的结合能)。这种释放能量的方式叫聚变。目前已应用于爆炸——氢弹，而人工控制的聚变还正在积极研究中。

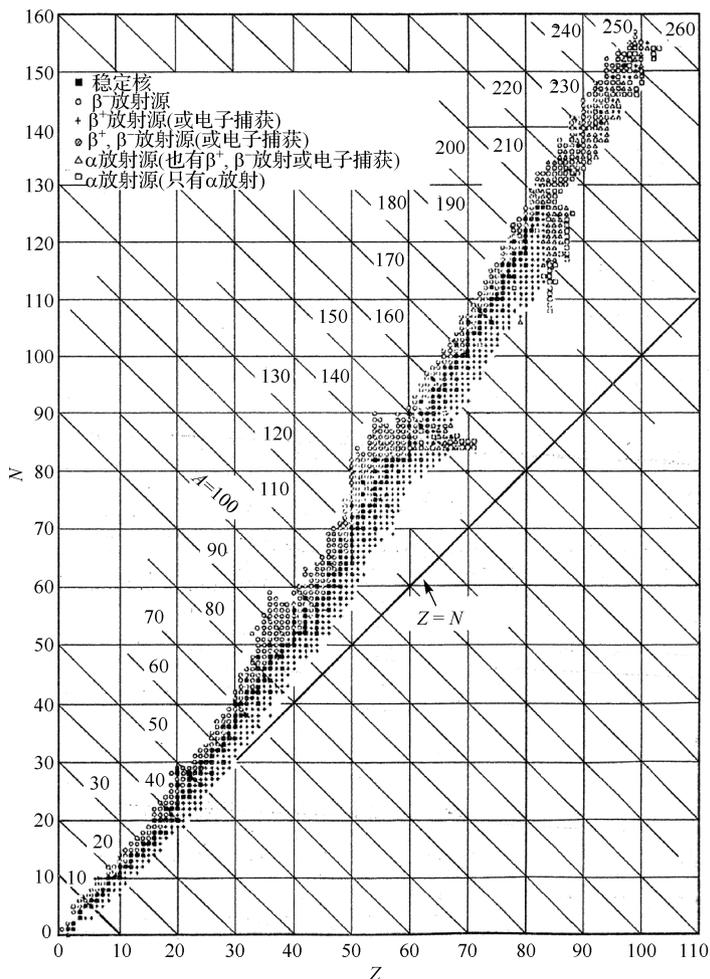


图 15-3 核的中子数和质子数的关系

15.2 原子核的放射性衰变

15.2.1 原子核的稳定性

原子核的稳定性,是指原子核不会自发地改变其质子数、中子数和它的基本性质。按原子核的稳定性可分为稳定原子核和不稳定(或放射性)原子核两类。以下经验规则可帮助我们预测核的稳定性。

1. 原子核中的质子数等于和大于 84 的原子核是不稳定的。即原子序数 84 以后的元素均为放射性元素。

2. 具有少于 84 个质子的原子核,质子数和中子数均为偶数时,其核稳定。

3. 质子数或中子数等于 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 的原子核特别稳定。这些数称为幻数。例如 ${}^4_2\text{He}$ 、 ${}^{16}_8\text{O}$ 很稳定,质子数和中子数都是幻数,称为双幻数核。天然放射性最后的稳定产物都是铅 ${}^{208}_{82}\text{Pb}$,是双幻数核。

4. 中子数和质子数之比 N/p , 在 $Z < 20$ 时 $\frac{N}{p} = 1$, 原子核稳定。随着原子序数增加, $\frac{N}{p}$

值增大。 Z 在中等数值时 $\frac{N}{p}$ 约为 1.4; Z 在 90 左右约为 1.6, 比值越大, 稳定性越差。

15.2.2 原子核的放射性和衰变定律

放射性是不稳定核自发地发射出一些射线而本身变为新核的现象, 这种核的转变也称做放射性衰变(或蜕变)。放射性是 1896 年贝可勒尔(H. Becquerel)发现的, 他当时观察到铀盐发射出的射线能透过不透明的纸使其中的照相底片感光。其后卢瑟福和他的合作者把已发现的射线分成 α 、 β 和 γ 三种。再后人们发现 α 射线是 α 粒子, 即氦核(${}^4\text{He}$)流, β 射线是电子流, γ 射线是光子流。下面列出几个放射性衰变的例子:



式中 $\bar{\nu}_e$ 是反电子中微子的符号。以上衰变例子中原来的核称母核, 生成的新核叫子核。

天然的放射性元素的原子序数 Z 都大于 81, 它们都分属三个放射系。这三个放射系的起始元素分别为 ${}^{238}\text{U}$ 、 ${}^{235}\text{U}$ 和 ${}^{232}\text{Th}$, 常根据各系的核的质量数而分别命名为 $4n+2$ 、 $4n+3$ 和 $4n$ 系, 各系的最终核分别是同位素 ${}^{206}\text{Pb}$ 、 ${}^{207}\text{Pb}$ 和 ${}^{208}\text{Pb}$ 。图 15-4 给出了钍系的衰变顺序图。还有一个系, 即 $4n+1$ 系, 由于系中各核的半衰期较短, 它们在自然界已不存在。此系的起始元素是镎的同位素 ${}^{237}\text{Np}$, 而其最终核应为 ${}^{209}\text{Pb}$ 。

所有放射性核的衰变速率都跟它们的化学和物理环境无关, 所以衰变都遵守同样的统计规律: 在时间 dt 内衰变的核的数目 $-dN$ 和 dt 开始时放射性核的数目 N 以及 dt 成正比。因此可以得到

$$-dN = \lambda N dt \quad (15.10)$$

式中常量 λ 叫衰变常量。衰变常量也就是一个放射性核单位时间内衰变的概率。

式(15.10)积分之后, 就可得到

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (15.11)$$

式中 N_0 是在 $t=0$ 时放射性核的数目。

由式(15.10)可知, 从 $t=0$ 开始, $-dN$ 个放射性核的生存时间为 t , 所以所有放射性核的平均寿命为

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t(-dN) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N dt = \int_0^{\infty} t \lambda^{-1} dt$$

积分结果是

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (5.12)$$

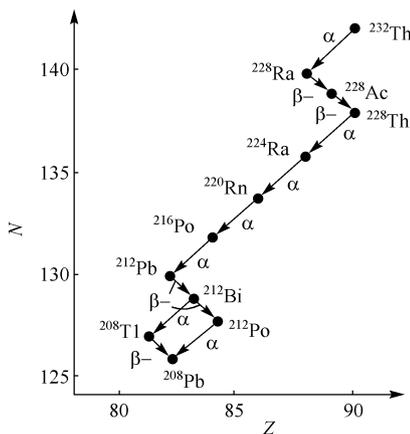


图 15-4 钍系衰变图

实际上讨论衰变速率时常不用 λ 和 τ , 而用半衰期。一种放射性核的半衰期是它的给定样品中的核衰变一半所用去的时间, 半衰期用 $t_{1/2}$ 表示。由此定义, 根据式(15.11)可知

$$N_0/2 = N_0 e^{-t_{1/2}/\tau}$$

于是有

$$t_{1/2} = (\ln 2)\tau = 0.693\tau = 0.693/\lambda \quad (15.13)$$

不同的放射性核的半衰期不同, 而且差别很大, 从微秒(甚至更小)到万亿年(甚至更长)都有。表 15.2 列出了一些半衰期的实例。

表 15.2 半衰期实例

核	$t_{1/2}$	核	$t_{1/2}$	核	$t_{1/2}$
^{216}Ra	0.18 μs	^{131}I	8.04d	^{237}Np	$2.14 \times 10^6 \text{a}$
^{207}Ra	1.3s	^{60}Co	5.272a	^{235}U	$7.04 \times 10^8 \text{a}$
自由中子	12min	^{226}Ra	1600a	^{238}U	$4.46 \times 10^9 \text{a}$
^{191}Au	3.18h	^{14}C	5730a	^{232}Th	$1.4 \times 10^{10} \text{a}$

在使用放射性同位素时, 常用到活度这个量, 一个放射性样品的活度是指它每秒钟衰变的次数。以 $A(t)$ 表示活度, 再利用式(15.11)可得

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t} \quad (15.14)$$

式中 $A_0 = \lambda N_0$ 是起始活度。由此式可知, 活度与衰变常量以及当时的放射性核的数目成正比。因此, 活度和放射性核数以相同的指数速率减小。对于给定的 N_0 , 半衰期越短, 则起始活度越大而活度减小得越快。

活度的国际单位是贝可[勒尔], 符号是 Bq。1 Bq = 1 s⁻¹。

活度的常用单位是居里, 符号为 Ci。其分数单位有毫居(mCi)和微(μCi)。它最初是用 1 g 的镭的活度定义的, 该定义为

$$1\text{Ci} = 3.70 \times 10^{10} \text{Bq} \quad (15.15)$$

【例 15.3】 ^{236}Ra 的半衰期为 1 600a, 1 g 纯 ^{226}Ra 的活度是多少? 这一样品经过 400a 和 6000a 时的活度又分别是多少?

【解】 样品中最初的核数为

$$N_0 = \frac{1 \times 6.023 \times 10^{23}}{226} = 2.66 \times 10^{21}$$

衰变常量为

$$\lambda = 0.693/t_{1/2} = \frac{0.693}{1600 \times 3.156 \times 10^7} = 1.37 \times 10^{-11} (\text{s}^{-1})$$

起始活度为

$$A_0 = \lambda N_0 = 1.37 \times 10^{-11} \times 2.66 \times 10^{21} = 3.65 \times 10^{10} (\text{Bq})$$

差不多等于 1Ci, 和式(15.15)定义相符合。由式(15.14)可得

$$\begin{aligned} A_{400} &= A_0 e^{-\lambda t} = A_0 \times 2^{-t/t_{1/2}} = 3.65 \times 10^{10} \times 2^{-400/1600} \\ &= 3.07 \times 10^{10} (\text{Bq}) = 0.83(\text{Ci}) \end{aligned}$$

$$A^{6000} = 3.65 \times 10^{10} \times 2^{-6000/1600} = 2.71 \times 10^9 (\text{Bq}) = 0.073(\text{Ci})$$

上面说过, 一个母核生成的子核还可能是放射性的。假定开始时是纯母核 P 的样品, 由

于它的放射,子核 D 的数目开始时增大,但是不久此子核的数目就会由于母核数的减少和此子核本身的衰变而逐渐减小。子核数 N_D 随时间变化的微分方程为此方程的解,为

$$\frac{dN_D}{dt} = \lambda_P N_P - \lambda_D N_D = \lambda_P N_{0P} e^{-\lambda_P t} - \lambda_D N_D$$

此方程的解为

$$N_D(t) = \frac{N_{0P} \lambda_P}{\lambda_D - \lambda_P} (e^{-\lambda_P t} - e^{-\lambda_D t}) \quad (15.16)$$

常常遇到母核的半衰期比子核的半衰期大很多的情况。这种情况下,在时间 t 满足 $t_{1/2, P} \gg t \gg t_{1/2, D}$ 的时期内,式(15.16)给出

$$N_D = \frac{\lambda_P}{\lambda_D} N_P = \frac{t_{1/2, D}}{t_{1/2, P}} N_P \approx \frac{t_{1/2, D}}{t_{1/2, P}} N_P \quad (15.17)$$

这就是说,在这一时期内放射性核 D 由于 P 的衰变而产生的速率和 D 核本身衰变的速率相等,因此 D 的数目保持不变。例如, ^{238}U 是一种 α 放射源,半衰期为 $4.46 \times 10^9 \text{ a}$ 。它的衰变产物 ^{234}Th 是 β 放射源,半衰期仅为 24.1d。如果开始的样品中是纯 ^{238}U , 它的 α 活度随时间不会有明显的变化。当 ^{234}Th 的产生速率和它由于发射 β 射线而衰变的速率相平衡时, ^{234}Th 核的数目将基本不变。这种长期平衡状态实际上经过约 5 个 ^{234}Th 的半衰期就达到了。此后样品将以基本上不变的速率放射 α 粒子和 β 粒子。贝可勒尔当初观察到的 β 射线就是这些 ^{234}Th 核发生的(也还有 ^{235}U 核的子核 ^{231}Th 核发出的,这两种核的半衰期分别是 $7.04 \times 10^8 \text{ a}$ 和 25.2 h)。

放射性的一个重要应用是鉴定古物年龄,这种方法叫放射性鉴年法。例如,测定岩石中铀和铅的含量可以确定该岩石的地质年龄。下面介绍一种对于生物遗物的 ^{14}C 放射性鉴年法。

^{14}C 放射性鉴年法是利用 ^{14}C 的天然放射性来鉴定有生命物体的遗物(如骨骼、皮革、木头、纸等)的年龄的方法。它是 20 世纪 50 年代里贝(W. F. Libby)发明的,并因此获得 1960 年诺贝尔化学奖。各种生物都要吸收空气币的 CO_2 用来合成有机分子。这些天然碳中绝大部分是 ^{12}C , 只有很小一部分是 ^{14}C 。这些 ^{14}C 是来自太空深处的宇宙射线中的中子和地球大气中的 ^{14}N 核发生下述核反应产生的:



该 ^{14}C 核接着以 $(5730 \pm 30) \text{ a}$ 的半衰期进行下述衰变:



由于产生的速率不变,同时又进行衰变,经过上万年后空气中的 ^{14}C 已达到了恒定的自然丰度,约 $1.3 \times 10^{-10} \%$ 。植物活着的时候,它不断地吸收空气中的 CO_2 来制造新的组织代替旧的组织。动物一般要吃植物,所以它们也要不断地吸收碳进行新陈代谢。生物组织不能区别 ^{12}C 和 ^{14}C , 所以它们身体组织中的 ^{14}C 的丰度和大气中的一样。但是,一旦它们死了,就不再吸收 CO_2 了。在它们的遗体中, ^{12}C 的含量不会改变,但 ^{14}C 由于衰变而不断减少,于是由此衰变产生的活度也将不断减小,测量一定量遗体的活度就能判定该遗体的存在时间,或说年龄。请看下面的例题。

【例 15.4】 河北省磁山遗迹中发现有古时的粟。一些这种粟的样品中含有 1 g 碳, 它的活度经测定为 $2.8 \times 10^{-12} \text{ Ci}$ 。求这些粟的年龄。

【解】 1 g 新鲜碳中的¹⁴C核数为

$$N_0 = 6.023 \times 10^{23} \times 1.3 \times 10^{-12} / 12 = 6.5 \times 10^{10}$$

这些粟的样品活着的时候,活度应为

$$\begin{aligned} A_0 &= \lambda N_0 = (\ln 2) N_0 / t_{1/2} = 0.693 \times 6.5 \times 10^{10} / (5730 \times 3.156 \times 10^7) \\ &= 0.25(\text{Bq}) = 6.8 \times 10^{-12}(\text{Ci}) \end{aligned}$$

由于 $A_t = 2.8 \times 10^{-12}(\text{Ci})$, 按 $A_t = A_0 e^{-0.693t/t_{1/2}}$ 计算可得

$$t = \frac{t_{1/2}}{0.693} \ln \frac{A_0}{A_t} = \frac{5730}{0.693} \ln \frac{6.8 \times 10^{-12}}{2.8 \times 10^{-12}} = 7300(\text{a})$$

据考证这些粟是世界上发现得最早的粟,比在印度和埃及发现的都要早。

15.2.3 α 衰变

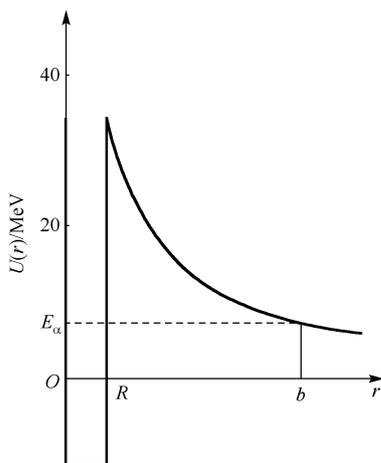


图 15-5 α 粒子的势能曲线

α 衰变是⁴He核从核内逃逸的现象。由于⁴He的结合能特别大,所以在核内两个质子和两个中子就极有可能形成一个单独的单位—— α 粒子。核对 α 粒子形成一势阱,因而 α 粒子从中逃出是一个势垒穿过程。 α 粒子逃出时所要穿过的势垒是 α 粒子和子核的相互作用形成的。图 15-5 画出了²³²Th的 α 粒子势能和离核中心的距离的关系。在核外($r > R$, R 为核半径),势能为 α 粒子和子核之间的库仑势能

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (15.18)$$

式中 Z 为子核的电荷数。在核内,势能基本上是常量,深度为几十 MeV。逃出核的 α 粒子的能量 E_α 一般比势垒高峰低得多。

【例 15.5】 求²³⁸U核中 α 粒子的库仑势垒的峰值。

【解】 因为 $r = R = r_0 A^{1/3}$, 由式(15.18)可得

$$U(R) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}}$$

此式中 Z 和 A 应分别用子核²³⁴Th的值 90 和 234, 于是

$$\begin{aligned} U(R) &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 90 \times (1.5 \times 10^{-19})^2}{1.2 \times 10^{-15} \times 234^{1/3}} \\ &= 5.6 \times 10^{-12}(\text{J}) = 35(\text{MeV}) \end{aligned}$$

这比由²³⁸U核放射出的 α 粒子的能量(4.2 MeV)大得多。

同一 α 放射源可以放射出不同能量的 α 粒子。由图 15-5 可知,逸出的 α 粒子的能量越大,它要穿过的势垒的厚度就越小,因而这种 α 粒子穿过势垒的概率就越大,相应的 α 衰变的半衰期就会越短。量子理论给出 α 半衰期 $t_{1/2}$ 和 α 粒子能量 E_α 有下述关系:

$$\ln t_{1/2} = AE_\alpha^{-1/2} + B \quad (15.18)$$

式中 A 和 B 对应一种核，基本上是常量。由于上式中 $t_{1/2}$ 和 E 是对数关系，所以差别不大的 E ，所对应的 $t_{1/2}$ ，可以有非常大的差别。这可由图 15-6 中的实验数据看出(图中所示 Th 核的各同位素的库仑势垒峰值基本相同)。

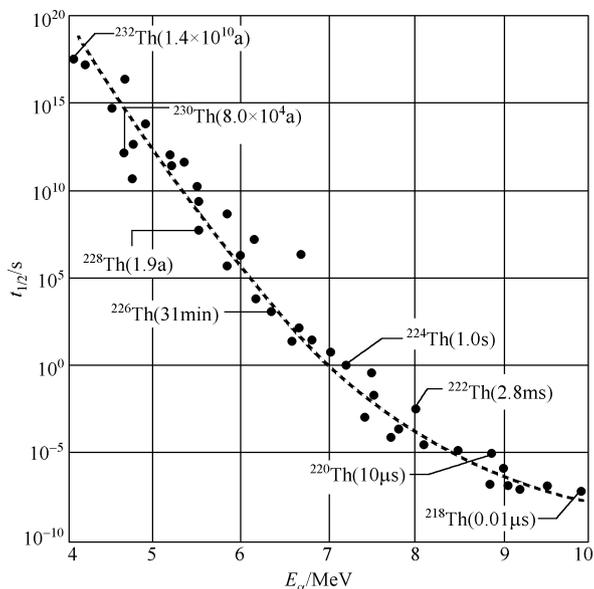


图 15-6 α 衰变半衰期和 α 粒子能量的关系

α 衰变的同时常常有 γ 射线发出—— γ 衰变，这意味着由衰变产生的子核处于激发态。一种 α 放射源所发射的 α 射线几乎无例外地按能量明显地分成若干组，图 15-7 所示的 ^{227}Th 衰变为 ^{223}Ra 时所发射的 α 粒子的能谱就说明了这一点。由于可以假定母核在衰变前都处于基态，此 α 能谱说明子核可能(至少在短时间内)处于一定的激发态。于是，当子核从这些激发态衰变回其基态时，就会发射出一系列能量不同的 γ 射线，实验证明了这一点。图 15-8 画出了 ^{227}Th 核 α 衰变伴随的 γ 射线的能量与 α 能谱图 15-7 中峰的能量差的关系。这种关系也给出了一种用 α 能谱确定核的能级的方法。

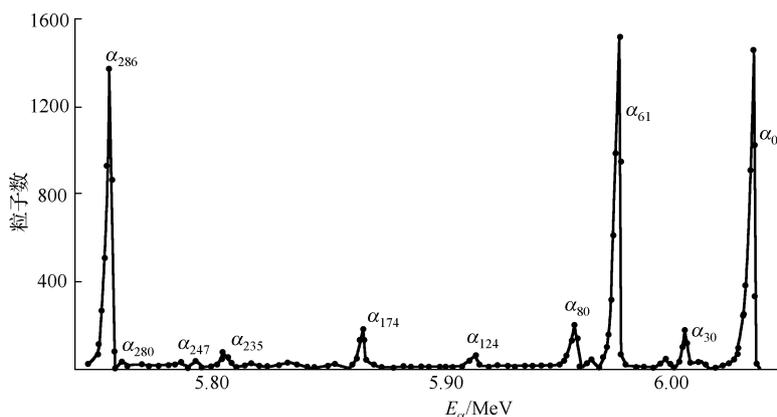


图 15-7 ^{227}Th 衰变为 ^{223}Ra 时的 α 能谱

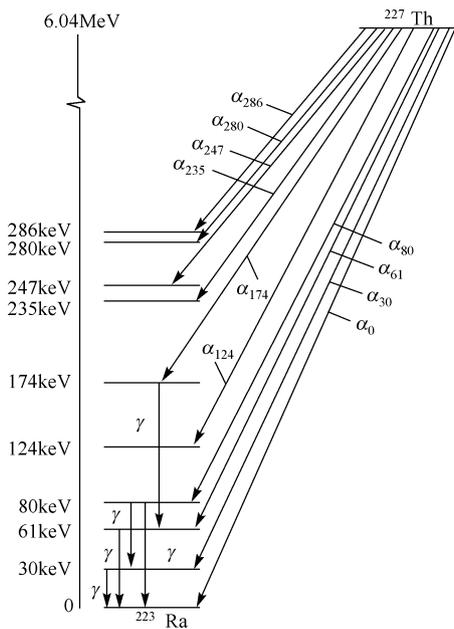


图 15-8 α 能谱确定子核能级及 γ 射线能量的关系

【例 15.6】 已知某放射性元素在 5 min 内减少了 43.2%，求它的衰变常数、半衰期和平均寿命。

【解】 根据衰变定律 $N = N_0 e^{-\lambda t}$ ，在 $t = 300$ s 时有

$$(1 - 43.2)N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$$

所以

$$0.568 = e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{0.568}\right) = 0.00188 \text{ s}^{-1}$$

利用式(15.13)有

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 368 \text{ s}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 532 \text{ s}$$

放射性同位素有广泛的应用，并以深入到多个学科领域。根据半衰期可算出地质年代，在考古学中有重要应用；在医学上用放射性医疗、诊断；农业上用放射性育种；工业上用于无损检测等。

15.3 粒子物理简介

粒子物理研究的对象是比原子核更深入的一个物理结构层次，其空间尺度小于 10^{-16} m。粒子是一个庞大的家族，至今已发现并被确认的粒子有 450 多种，已发现尚待确认的还有 300 多种，随着加速器能量的不断提高和实验技术的不断改进，新粒子还在不断地被发现。到目前为止，只有光子、电子、正电子、质子、反质子、中微子是稳定的，其他粒子都会衰变。

粒子可在相互作用中产生,正、反粒子相遇时会湮灭。在这一层次的物理现象极其丰富多彩。这里只简单介绍粒子的相互作用、分类、强子结构和相互作用的统一理论。

15.3.1 粒子特征 四种相互作用和粒子分类

19 世纪末,物理学深入到物质结构的微观领域,电子的发现是一个重要标志。到 20 世纪 30 年代,中子的发现又是一个重要标志。至此连同已发现的质子、光子四种粒子被称为基本粒子。下面再介绍几个重要发现。

1. 正电子的发现

1932 年安德孙在记录宇宙射线(宇宙中的高能粒子流)的云雾室中发现了正电子。

它与电子有相同的质量,但却带正电荷。已知原子中的电子都带负电荷,因此正电子不是宏观物体的组元,它的性质表明它与电子同样属于基本粒子,这使当时的人们很惊讶。早在 1930 年狄拉克曾在理论上预言存在正电子。狄拉克认为“真空”是充满负能粒子的一种状态。负电子充满整个负能区,因而没有观测效应。如果负能态的电子吸收了大于 1.022 MeV 能量的光子而跃入正能态(电子静能 $m_0c^2 = 0.511 \text{ MeV}$),电子原先占据的负能级就成为一个空穴,这个空穴就是正电子。正电子碰到负电子,即正能区的电子降落到负能区的空穴中,正负电子湮灭,同时产生两个光子。如图 15-9 所示。正电子湮灭技术,当今已成为一个有特色的研究领域。现在已经清楚,所有粒子都有反粒子,正电子只是其中第一例而已。正反粒子是指两者质量、自旋、平均寿命完全相同,而电荷等值异号,磁矩方向相反。从理论上说,还应该有这些反粒子组成的反原子核、反原子、反物质、反星体等。1998 年 6 月中美等科学家将 α 谱仪送上太空,其任务之一就是想在宇宙中寻找反物质。

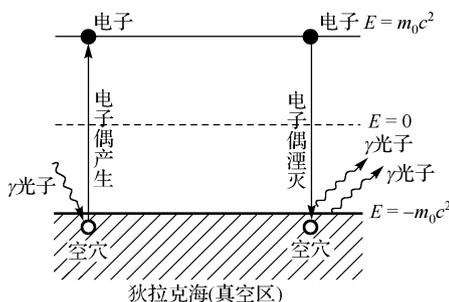


图 15-9 正负电子对的产生和湮灭

2. 中微子的发现

原子核在 β 衰变时观测到的是从原子核中放出的电子。1930 年泡利根据衰变前后应遵守角动量守恒和能量守恒而提出核在发射 β 粒子的同时应发射一个质量几乎为零的中性粒子,称为中微子。中微子自旋在粒子前进方向的投影为 $-\frac{1}{2}h$,反中微子为 $\frac{1}{2}h$ 。实验探测中微子很困难,直到 1959 年才得到公认的结果。原子核中并不存在中微子,因此中微子也不是宏观物体的组元,它是在衰变过程中产生出来的。现在人们认识到,粒子间能互相转换是微观世界的普遍性。

3. 介子的发现

1936 年在宇宙射线的观测中发现了一种粒子,质量是电子的 207 倍,但又比质子小,物理上称它为“ μ 介子”(后改称 μ 子), μ 子是不稳定的,平均寿命是 $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。后来发现它衰变成正电子、中微子和反中微子,或者电子、中微子和反中微子,说明 μ 子有正、反两种,分别带电为 $+e$ 和 $-e$,用符号 μ^+ 和 μ^- 表示。1947 年在宇宙射线中发现 π 介子。它的质量是电子质量的 273.1 倍,带有 $+e$ 和 $-e$ 电荷,分别用 π^+ 和 π^- 表示,其平均寿命是 $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。

π 介子衰变成 μ 子还放出中微子, 反应式为

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

ν_μ 和 $\bar{\nu}_\mu$ 为互反粒子, 它们是和 μ 子相联系的中微子, 称为 μ 中微子。它们和电子中微子 ν_e , $\bar{\nu}_e$ 不同。 μ 子和中微子 ν_μ 的自旋都是 $\frac{1}{2}$, 所以 π^\pm 的自旋应为整数, 实验测得 π 介子自旋为零。一般来说, 介子的自旋都为整数, μ 子并不属于介子类。

4. 20 世纪 50 年代以后发现了质量超过核子质量的粒子, 称为超子。其性质见表 15.4

粒子的特性可用几个物理量来描述: ①质量。常用能量表示。因为可按相对论的质能关系给出质量 $m = \frac{E}{c^2}$ 。例如质子的静止质量是 938.2796 MeV。②电量。常以电子电量 e 为单位。如 π^+ 介子电量是 +1。③自旋。自旋角动量以 h 为单位。自旋量子数为整数或半奇数。例如电子的自旋为 $\frac{1}{2}$ 。光子的自旋为 1。④平均寿命。多数粒子是不稳定的, 它的衰变特征用平均寿命表示。

在经典物理中, 物体的相互作用在本质上只有两种, 即引力和电磁力。微观粒子质量太小, 引力实际上不起作用。实验证明, 电磁力的规律在微观领域依然成立。但除此之外还应有别的作用力存在。

前面已经提到原子核中有一种核力, 是一种引性的力, 这种作用比静电作用更强, 称为强作用力。在 β 衰变中, 涉及不带电粒子, 因此也不是电磁力的效果, 定量分析表明这种作用力很弱, 简称为弱作用力。

至今, 人们认识到自然界的基本相互作用力只有四种。按强弱排序, 它们是强作用力、电磁力、弱作用力、引力。譬如, 一对质子, 在相距 10^{-15} m 时四种作用力的比值约为强: 电磁: 弱: 引力 = $1 : 10^{-2} : 10^{-14} : 10^{-40}$ 。强作用力和弱作用力只是在微观距离上起作用。因此宏观上只有电磁力和引力。这四种力通常称作四种相互作用。表 15.3 列出了相互作用的比较。

表 15.3 四种相互作用比较

作用类别	引力作用	弱作用	电磁作用	强作用
作用力程(米)	∞	$<10^{-16}$	∞	$10^{-15} \sim 10^{-16}$
实例	天体之间	β 衰变	原子结合	核力
相对强度	10^{-39}	10^{-15}	1/173	1
作用传递者	引力子(?)	中间玻色子(W^\pm, Z^0)	光子(γ)	胶子 g
被作用粒子	一切物体	强子、轻子	强子, e, μ, γ	强子
特征时间(秒)		$>10^{-10}$	$10^{-20} \sim 10^{-16}$	$<10^{-23}$

四种相互作用都严格遵守能量守恒、动量守恒、角动量守恒、电荷数守恒这四条守恒定律。此外还有一些与粒子内部结构相联系的守恒定律, 如宇称守恒、同位旋守恒、奇异数守恒、重子数守恒、轻子数守恒等, 这些守恒定律并不是在每一种相互作用中都成立, 它们只是一些近似的守恒定律。例如, 美籍华人杨振宁、李政道于 1956 年提出弱相互作用中宇称不守恒的假设, 后经美籍华人吴健雄实验证实。为此杨振宁、李政道获 1957 年度诺贝尔物理学奖。

粒子按其参与相互作用的性质可以分为三类。第一类叫做规范粒子。按照量子场论, 这四种作用力都是通过交换一定的粒子来实现的交换力。规范粒子是传递作用力的粒子。光子

是电磁力的传递者, W^\pm 和 Z^0 是弱力的传递者。强力的传递者(按至今的理论)是胶子, 符号为 g 。胶子是不能单独出现的粒子, 因此无法记录在仪器上。引力是通过交换引力子来实现的, 但是它的存在还没有充足的理论依据。第二类是轻子。这些粒子完全不受强作用力的影响, 如电子、中微子、 μ 子等。由于这些代表性粒子都较轻(有时并不轻), 因而称为轻子, 带电的轻子也参与电磁作用, 不带电的轻子(只有中微子)则只参与弱作用。第三类是强子, 强子又分成介子和重子两类。以介子、质子、中子为代表, 它们既有强作用也有弱作用。两种作用都存在时, 强作用是主要的, 因此称为强子类。表 15.4 中粒子按这样的分类, 不仅使人们对粒子的全局有清晰的了解, 而且对以后的深入研究也是重要的导向。

表 15.4 粒子分类表

类别	粒子名称	符号	质量(MeV)	自旋	平均寿命(s)	主要衰变方式	
规范粒子	光子	γ	0	1	稳定		
	W 粒子	W^\pm	80 800	1	$>0.95 \times 10^{-25}$	$W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$	
	Z^0 粒子	Z^0	92 900	1	$>0.77 \times 10^{-25}$	$Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$	
	胶子	g	0	1	稳定		
轻子	电中微子	ν_e	0	1/2	稳定		
	μ 中微子	ν_μ	0	1/2	稳定		
	τ 中微子	ν_τ	0	1/2	稳定		
	电子	e^-	0.511 003 4	1/2	稳定		
	μ 子	μ^-	105.659 32	1/2	$2.197 09 \times 10^{-6}$	$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	
	τ 子	τ^-	1 776.9	1/2	3.4×10^{-13}	$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$	
强子	介子	π 介子	π^0	134.963 0	0	0.83×10^{-16}	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
			π^\pm	139.567 3	0	$2.603 0 \times 10^{18}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
		η 介子	η	548.8	0	7.48×10^{-19}	$\eta \rightarrow \gamma + \gamma$
		K 介子	K^0	497.67	0	$0.892 3 \times 10^{-10}$	$K_s^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
			\bar{K}^0 K^\pm	493.667	0	5.183×10^{-8} 1.2371×10^{-8}	$K_L^0 \rightarrow \pi^- + e^- + \nu_e$ $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
	D 介子	D^0	1 864.7	0	4.4×10^{-13}	$D^0 \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^0$	
		\bar{D}^0 D^\pm	1 869.4	0	9.2×10^{-13}	$D^0 \rightarrow \bar{K}^0 + \pi^+ + \pi^0$	
	F 介子	F^\pm	1 971	0	1.9×10^{-13}	$F^+ \rightarrow \eta + \pi^+$	
	重子	B 介子	B^0	5 274.2	0	14×10^{-13}	$B^0 \rightarrow \bar{D}^0 + \pi^+ + \pi^-$
			\bar{B}^0	5 270.8	0		$B^+ \rightarrow \bar{D}^0 + \pi^+$
			B^\pm				
		质子	P	938.279 6	1/2	稳定	
		中子	n	939.573 1	1/2	898	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
		Λ^0 超子	Λ^0	1 115.60	1/2	2.632×10^{-10}	$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$
		Σ 超子	Σ^+	1 189.36	1/2	0.800×10^{-10}	$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$
Σ^0			1 192.46	1/2	5.8×10^{-20}	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$	
Σ^-			1 197.34	1/2	1.482×10^{-10}	$\Sigma^- \rightarrow p + \pi^-$	
Ξ 超子	Ξ^0	1 314.9	1/2	2.90×10^{-10}	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$		
	Ξ^-	1 321.32	1/2	1.641×10^{-10}	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$		
Ω^- 超子	Ω^-	1 672.45	3/2	0.819×10^{-10}	$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$		
Λ_c^+ 重子	Λ_c^+	2 282.0	1/2	2.3×10^{-13}	$\Lambda_c^+ \rightarrow p + K^+ + \pi^+$		

15.3.2 强子的夸克结构

到目前为止,轻子类有六种。它们是电子、 μ 子、 τ 子和分别与之对应的三种中微子。按当今人类的认识水平,轻子类也只有这六种,还未发现轻子有内部结构。但是强子情况却相反,越来越大的加速器使人们不断看到有新的强子出现,至今已发现强子有八百多种。这是使人们想到强子不是基本粒子的重要原因。

在强子种类已很多时,人们开始从现象上对不同强子分类。在分类规律的指引下,提出了强子不是基本粒子,而是若干个夸克构成的复合体。夸克是强子的组元粒子。

夸克总共有六种,粒子物理学家称夸克有六种不同的味道。表 15.5 给出了这六种夸克。

表 15.5 六种夸克的符号及其性质

夸克种类(味)	上	下	奇异	粲	底	顶
英文	up	down	strange	charm	bottom	top
符号	u	d	s	c	b	t
质量(MeV)	5	10	500	1 500	4 800	?
电荷(e)	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
自旋(\hbar)	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

每种夸克都有相应的反夸克。

最轻的两味是 u 夸克和 d 夸克。u 夸克带正电荷,电量是电子电量的 2/3。d 夸克带负电荷,电量是电子电量的 $\frac{1}{3}$ 。所有重子都由三个夸克组成。如质子由 uud 三个夸克组成。

$P = (uud) \uparrow \uparrow \downarrow$, 其电荷 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$, 小箭头代表夸克自旋之间的关系,其自旋为 $+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。中子由 udd 三个夸克组成, $n = (udd) \uparrow \uparrow \downarrow$, 电荷 $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$, 自旋为 $+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。除电荷以外,还有一些量子数,如重子数、同位旋、超荷、粲数等,

本文不再介绍。所有的介子类,都由一个夸克和一个反夸克组成。例如 $\pi^+ = (u\bar{d}) \uparrow \downarrow$, 其电荷为 $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, 自旋为零; $\pi^+ =$

$(\bar{u}d) \downarrow \uparrow$, 其电荷为 $-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1$, 自旋为零。表 15.6 给出了一些强子的夸克谱。

以电子电量为单位,夸克所带的是分数电荷,这是一个显著特征。于是人们开始以分数电荷为标志来寻找夸克。多年的努力没有成果,而夸克的强相互作用理论却发展起来了。按照这一理论,夸克不仅有“味”的区别,而且还有“颜色”的区

以电子电量为单位,夸克所带的是分数电荷,这是一个显著特征。于是人们开始以分数电荷为标志来寻找夸克。多年的努力没有成果,而夸克的强相互作用理论却发展起来了。按照这一理论,夸克不仅有“味”的区别,而且还有“颜色”的区

表 15.6 一些强子的夸克谱

介子	重子
$\pi^+ = (u\bar{d}) \uparrow \downarrow$	$p = (uud) \uparrow \uparrow \downarrow$
$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \uparrow \downarrow$	$n = (uud) \uparrow \uparrow \downarrow$
$\pi^- = (d\bar{u}) \uparrow \downarrow$	$\Sigma^+ = (uus) \uparrow \uparrow \downarrow$
$K^+ = (u\bar{s}) \uparrow \downarrow$	$\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(uds + sdu) \uparrow \uparrow \downarrow$
$K^- = (s\bar{u}) \uparrow \downarrow$	$\Sigma^- = (dds) \uparrow \uparrow \downarrow$
$K^0 = (d\bar{s}) \uparrow \downarrow$	$\Xi^0 = (uss) \uparrow \uparrow \downarrow$
$\bar{K}^0 = (s\bar{d}) \uparrow \downarrow$	$\Xi^- = (dss) \uparrow \uparrow \downarrow$
$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} - d\bar{d} - 2s\bar{s}) \uparrow \downarrow$	$\Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(sdu - sud) \uparrow \uparrow \downarrow$

别,形象地称它们为红夸克、黄夸克、蓝夸克。每种“味”的夸克可以具有三种不同的颜色,不同颜色的夸克靠胶子结合在一起。三个夸克组成的重子是白色的。构成介子的正反夸克,互为补色,所以介子也是白色的。即质子、中子等一切能观测到的强子都是白色的。相反,非白色的单个夸克或夸克复合体是不能单独出现的,这样,单个夸克不被发现就是必然的了。不同“色”的夸克表示不同的状态。引入“色”就可解释自旋问题。夸克的自旋都是 $\frac{1}{2}$,应遵守泡利不相容原理。一个夸克和一个反夸克构成一介子,自旋相反,介子的自旋为零,这很好理解。但是三个夸克构成一个重子。如 Ω^- 是(sss) $\uparrow\uparrow\uparrow$,自旋是 $\frac{3}{2}$,三个s夸克自旋平行,必须这三个夸克应分别具有不同颜色,处于不同的状态,才不违背泡利原理。

这个被称为量子色动力学的夸克强作用理论,已被大量实验证明是正确的。现在已很少有人因为没有找到夸克而被怀疑它的真实性了,夸克理论的确立使人们对粒子世界的认识进了一大步。原来作为基本粒子的质子、中子等强子都是复合物,而不是基本粒子了。迄今为止,还没有实验现象说明轻子和夸克有内部结构,所以可认为轻子和夸克是物质世界的最小单元。夸克有六味,每味各有三色,又各有正反粒子,一共36个。轻子有六味,即 $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$,它们都无色,各有正反粒子,共12个。至于这些粒子是否是物质的终极本原,这是未来物理学家才能回答的问题。有人也提出夸克-轻子的复合模型,称为亚夸克理论,减少这48种粒子的数目,但是它缺乏实验根据而不被承认。

15.3.3 相互作用的统一

粒子间有四种相互作用,它们各自是独立的。质子和中子靠强相互作用结合成原子核;原子核和电子靠电磁作用结合成原子;弱相互作用导致 β 衰变,万有引力作用存在于一切物体之间;强相互作用和弱相互作用是短程的,对宏观现象不起作用。因此,宏观力的本原只有电磁力和引力两种。自然界为什么存在这么多的作用?它们之间有没有联系?能否在这些表面上看来很不相同的作用中找出简单的统一本原?首先是爱因斯坦,他在建立了广义相对论之后,致力于研究电磁力和引力的统一。可是他花费了很大的精力,最后没有成功。海森伯研究过各种力的统一,也没有结果。因为物理学是一门实验科学,一个理论是否正确的唯一标准是它是否符合事实。因此物理学家追求统一的思想能否实现,取决于他们的想法是否与客观实际情况相一致。而这一点很难事先作出判断。

在后来的物理学家看来,爱因斯坦的失败并不是他追求统一的想法不对,而是由于他错误地想在宏观物理的基础上寻求统一。宏观物理规律是唯象形的,而不是本原性的。因此在微观粒子的动力学理论确立以后,追求几种不同相互作用的统一的努力又复活起来。到1968年,格拉肖、温伯格、萨拉姆三人在现代高能物理实验的基础上,把弱作用和电磁相互作用统一起来,这就是弱电统一理论。

从现象上来看,引力和电磁力是性质差别很大的两种力。弱力是短程力,电磁力是长程力,强度上的差别有10个数量级以上。这两种力怎么会在本质上是同一种?由量子场理论看,弱力的弱性和它的短程性来自同一个原因,那就是传递弱力的媒介粒子和光子一样是静止质量为零的。再由于内部某种对称性的后果,使弱力和电磁力成为同一种力,弱力和电磁力的强度和所表现的效果都没有区别。现在人们简单地称这种统一的力叫弱电力。在能量较

低时,一种被称为希克斯机制的物理效应把该种内部对称性破坏了,使某些传递力的媒介粒子获得很重的质量。这些粒子的传递力就变得很弱,它就是在低能现象上看到的弱力。有一种媒介粒子仍然保持静止质量为零,它传递的就是电磁力。传递力的媒介粒子叫做规范粒子。在低能范围内,电磁相互作用的规范粒子是光子,弱相互作用的规范粒子是 W^\pm 粒子和 Z^0 粒子。这一理论称为有对称性自发破缺的规范场理论。弱电统一理论已被大量实验证实。1979年,格拉肖、温伯格、萨拉姆因建立弱电统一理论而获得诺贝尔物理学奖。1984年,范德密尔和卢比亚因在发现 W 粒子和 Z 粒子过程中的重要贡献而获得诺贝尔物理学奖。说明这一理论得到了人们的首肯。

弱电统一理论的成功,是人类认识微观世界的重大成果,它鼓舞物理学家建立更大的统一理论。把强相互作用和弱电作用统一起来的理论,叫做大统一理论。1974年乔奇和格拉肖以弱电统一理论和量子色动力学为基础建立了一个大统一理论,可是这个理论至今没有得到实验验证。物理学家还想把引力也统一进来,也就是四种相互作用都统一起来的理论,叫做超大统一理论。如果超大统一理论成功了,那就意味着自然界只有一种基本相互作用。这确实应当被认为是一件了不起的事。可是,近20多年来的尝试,困难很大,还没有出现实验可证实的结果。要实现超大统一,似应考虑夸克和轻子的组元是什么,可是目前还还没解决这个问题。

从古至今,人类一直在探索物质及其相互作用的本原。在这一思想的支配下由浅入深、由表及里地一个层次一个层次地发展。这种探索可能是永无止境的。

本章小结

一、原子核的一般性质

1. 原子核由中子和质子组成。中子数 N 、质子数 Z 和质量数 A 的关系为 $A = Z + N$ 。
2. 原子核的半径: $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.2 \text{fm}$ 。
3. 原子核的自旋: 自旋量子数 I 。核自旋角动量在 z 方向的投影 $I_z = m_I \hbar$, $m_I = \pm I, \pm(I-1), \dots, \pm I \frac{1}{2}$ 或 0 。

原子核的磁矩在 z 方向的投影为

$$\mu_z = g\mu_N m_I$$

核磁子: $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.06 \times 10^{-27} \text{J/T}$ 。

质子、中子都有磁矩, $\mu_z = g\mu_N m_I$, $m_I = \pm 1/2$ 。

4. 核力: 大而短程,与电荷无关,和核子的自旋取向有关,是一种多体力,不服从叠加原理。核力实际上是核子内部的夸克之间的色相互作用的残余力。
5. 核的结合能: 等于使一个核的各核子完全分开所需要做的功。可由中子和质子组成核时的质量亏损乘以 c^2 算出。大多数核的核子的平均结合能约为 $8 \text{MeV}/c^2$ 。

二、放射性和衰变规律

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau}$$

其中, λ 为衰变常量, τ 为平均寿命。

半衰期: $t_{1/2} = 0.693\tau$

活度: $A(t) = -dN/dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t}$

活度常用单位: $1\text{Ci} = 3.70 \times 10^{10}\text{Bq}$

6. α 衰变: α 衰变是 α 粒子势垒穿透过程。逸出的 α 粒子能量越大, 半衰期越短。 α 衰变常伴随 γ 射线的发射。

三、粒子的相互作用有四种

强相互作用, 电磁相互作用, 弱相互作用, 引力相互作用, 强相互作用和弱相互作用只在微观距离上起作用。

四、粒子按相互作用性质分为三类

规范粒子、轻子、强子; 强子又分为重子和介子两类。

五、只有强子才有夸克结构

夸克有六味, 每味夸克有三色, 每色有反粒子, 共有 36 种。

习 题 15

一、思考题

- 15.1 为什么说核好像是多个小硬球挤在一起形成的?
- 15.2 为什么各种核的密度都大致相等?
- 15.3 为什么核子由强相互作用决定的结合能和核子数成正比?
- 15.4 什么叫核力? 核力具有哪些主要性质? 怎么理解核力是一种残余力?
- 15.5 什么叫原子核的质量亏损?

二、计算题

15.6 假定质子的正电荷均匀分布在核内, 试根据带电球体的静电能公式与结合能的半经验公式求出系数 a_2 的值。

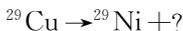
15.7 完成下列核衰变方程:



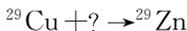
.....



.....



.....



15.8 放射性 ${}^{235}\text{U}$ 系的起始放射核是 ${}^{235}\text{U}$, 最终核为 ${}^{207}\text{Pb}$ 。从 ${}^{235}\text{U}$ 到 ${}^{207}\text{Pb}$ 共经过了几次 α 衰变?

15.9 ^{16}N 、 ^{16}O 和 ^{16}F 原子的质量分别是 $16.006\,099\text{u}$ 、 $15.994\,915\text{u}$ 和 $16.011\,465\text{u}$ 。试计算这些原子的核的结合能。

15.10 将核中质子当费米气体处理, 试求原子序数为 Z 和质量数为 A 的核内的质子的费米能量和每个质子的平均能量。对 ^{56}Fe 核和 ^{238}U 核求这些能量的数值(以 MeV 为单位)。

15.11 假设一个 ^{232}Th 核分裂成相等的两块。试用结合能的半经验公式计算此反应所释放的能量。

15.12 假设两个 Z 、 A 核聚合成一个 $2Z$ 、 $2A$ 的核。试根据结合能的半经验公式写出所释放的能量的表示式并计算两个 ^{12}C 核聚合时所释放能量的数值。

15.13 一种放射性衰变的平均寿命为 τ , 这种放射性物质的寿命对平均寿命的方均根偏差是多少? 最概然寿命多长?

15.14 天然钾中放射性同位素 ^{40}K 的丰度为 1.2×10^{-4} , 此种同位素的半衰期为 $1.3 \times 10^9\text{a}$ 。钾是活细胞的必要成分, 约占人体重量的 0.37% 。求每个人体内这种放射源的活度。

15.15 计算 10kg 铀矿(U_3O_8)中 ^{226}Ra 和 ^{231}Pa 的含量。已知天然铀中 ^{238}U 的丰度为 99.27% , ^{235}U 的丰度为 0.72% ; ^{226}Ra 的半衰期为 1600a , ^{231}Pa 的半衰期为 $3.27 \times 10^4\text{a}$ 。

15.16 一年龄待测的古木片在纯氧氛围中燃烧后收集了 0.3mol 的 CO_2 。该样品由于 ^{14}C 衰变而产生的总活度测得为每分钟 9 次计数。试由此确定古木片的年龄。

15.17 一块岩石样品中含有 0.3g 的 ^{238}U 和 0.12g 的 ^{206}Pb 。假设这些铅全来自 ^{238}U 的衰变, 试求这块岩石的地质年龄。

15.18 ^{226}Ra 放射的 α 粒子的动能为 $4.782\,5\text{MeV}$, 求子核的反冲能量。此 α 衰变放出的总能量是多少?

第 16 章

新技术的物理基础

几乎所有重大的新技术领域(如半导体、激光、超导和信息技术等)的创立,事前都是在物理学中经过了长期的酝酿,在理论和实验上积累了大量的知识之后,才突然迸发出来的。1960年第一台红宝石激光器的诞生依赖于受激辐射理论。晶体管、集成电路及以计算机为代表的信息技术革命和具有广阔应用前景的超导体在诞生之前的几十年内,正是量子力学逐步完善的时期。量子力学及建立在量子力学基础上的能带理论孕育并成就了这些新技术。本章将从量子物理的基本结论出发,对半导体、激光、超导和纳米科学技术等专题逐一介绍。

16.1 半 导 体

16.1.1 固体的能带结构

固体由大量原子紧密结合而成,它的结构和性质既决定于原子间的相互作用,又与原子中外层电子的运动有重要关系。固体是指具有确定形状和体积的物体,可分为三大类:一类是晶体,如食盐、云母、金刚石等;二是非晶体,如玻璃、松香、沥青等;三是准晶体。迄今只对晶体才有较成熟的理论,但目前对非晶体和准晶体的研究也很活跃。实践证明,固体的许多性质无法用经典理论解释,必须用量子理论才能说明。本节所讨论的固体指的是晶体。理想晶体中的原子是有规则排列着的,原子间有着不同程度的相互作用,从而形成能带。

为了说明能带的形成,让我们考虑一个个独立的原子集聚形成晶体时其能级的变化。如图 16-1 所示,设有两个相距较远的孤立氢原子,由于原子中的电子被束缚在原子核的周围。因此孤立原子中的能态是以分立能级形式出现的。电子可分别处于不同的能级上,形成 $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, ... 等电子壳层。

当两个原子靠得很近时,原子 A 上的电子除受到自身的原子核的作用外,还受到另一个靠得很近的原子 B 的作用;同样,原子 B 上的电子也要受到原子 A 和原子 B 自身的核的作用,原子间相互作用的结果,原子的各个子能级就不再具有原先的单一值,而使两个原子的能量状态具有稍为不同的能量,使原先的能级分裂成两个相距很近的子能级,如图 16-2(a) 所示,图中 r 是原子间距。图 16-2(b) 是 5 个彼此靠得很近的原子。它们原先每一个能级分裂成 5 个相距很近的子能级。

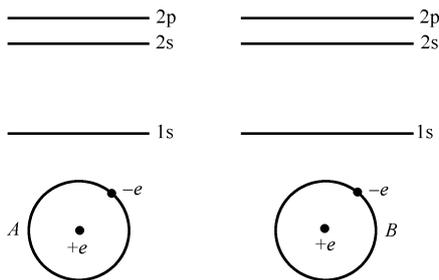


图 16-1 完全分离的两个氢原子能级

在理想的固态晶体中，原子之间的间距很小，设晶体由数量巨大的 N 个原子构成，由于原子中的电子受到电子和核的共同作用，使得原有能级将分裂成 N 个间距极近的子能级，这些子能级几乎是靠在一起的，形成如图 16-2(c)所示的能带，能带的符号仍沿用子能级的符号，如 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, …。

每个量子态容纳的电子不能超过 1 个，所以，每个子能级能容纳 $2(2l+1)$ 个电子。考虑到每个能带包含 N 个分裂的能级，因此每个能带上能容纳的电子数为 $2(2l+1)N$ 。按以上讨论，对 N 个原子构成的晶体，由于 1s, 2s, 3s, … 的能带中， $l=0$ ；故 1s, 2s, 3s, … 的能带中能容纳的电子数为 $2N$ ；在 2p, 3p, … 的能带中，由于 $l=1$ ，故这些能带所能容纳的电子数为 $6N$ ；而 3d, 4d, … 的能带，由于 $l=2$ ，这些能带所能容纳的电子数为 $10N$ ；余此类推。

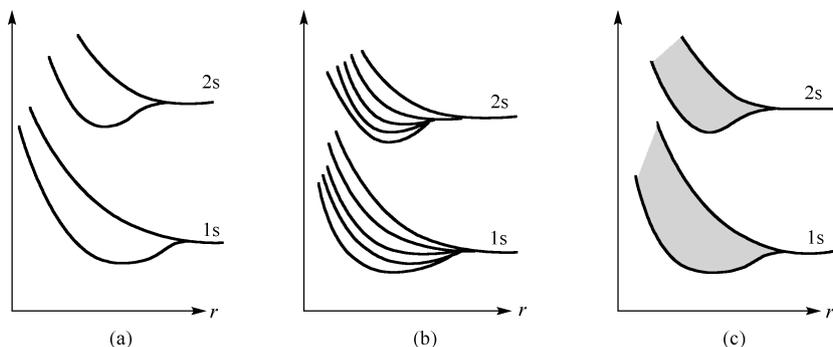


图 16-2 重叠能级分裂形成能带

我们把相邻能带之间不存在能级的区域，叫做禁带。如某一能带中，各能级均被电子所填满，这种能带叫做满带。如能带中各能级没有电子填入，这种能带叫做空带。价电子的能级所分裂而成的能带，叫做价带，价带可以是满带，也可以不是满带。空带和未被电子填满的价带统称为导带。图 16-3 是晶体能带结构的示意图，其中 E_g 是禁带的宽度，即相邻两级能带间的最小能量差。

我们知道，在一定温度下，不同固体的电阻率有很大的差异。通常，把电阻率在 $10^{-8} \sim 10^{-4} \Omega \cdot m$ 范围内，温度系数为正的固体，当作导体；电阻率在 $10^{-4} \sim 10^8 \Omega \cdot m$ 范围内，温度系数为负的固体为半导体；而电阻率在 $10^8 \sim 10^{20} \Omega \cdot m$ 范围内，温度系数为负的固体为绝缘体。显然，导体的导电性最好，因为它的价带已是导带；绝缘体的导电性最差，半导体则介于两者之间。

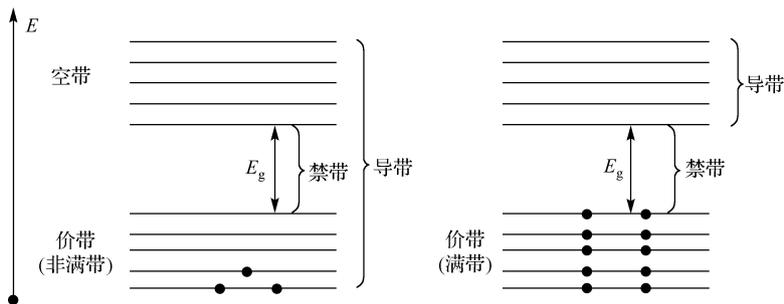


图 16-3 晶体能带结构

虽然半导体和绝缘体都有禁带，但禁带的宽度是不同的。半导体的禁带宽度比绝缘体要小得多。例如，在 0 K 时，绝缘体金刚石的禁带宽度 E_g 约为 5 eV，而半导体锗(Ge)的禁带宽度 E_g 约只有 0.67 eV。在通常情况下，绝缘体中的价带被价电子所填满，没有空着的能级，形成了满带，加之禁带宽度又比较宽，因此在不十分强的外电场作用下，价带中的电子难以跃到空带上去。所以，在通常情况下，绝缘体不具有导电性。但是，在很强的外电场作用下，或者当绝缘体受到诸如热激发、光激发等作用时，有少量电子会从价带跃迁到空带上去，从而使绝缘体具有微弱的导电性。

然而，对半导体来说，虽然其价带亦为电子所填满，但由于其禁带的宽度比绝缘体小很多，在外界的热激发、光激发的情况下，价带中的电子较之绝缘体容易跃迁到空带上去，在这种情况下，满带和导带中的电子浓度分布都要发生变化，使半导体具有一定的导电性。半导体中掺以杂质，也会使它具有导电性，这将在下面做进一步介绍。

16.1.2 本征半导体和杂质半导体

半导体有两类，一类叫本征半导体，另一类叫杂质半导体。

1. 本征半导体

纯净的无杂质的半导体称为本征半导体。如图 16-4 所示，本征半导体的导电性，是由于满带中的价电子在热激发或光激发的作用下，由满带跃迁到导带中去而形成的。这时在导带中出现了电子，而原先充满价电子的满带，则出现了空状态，这种满带中的空状态，一般叫做空穴，空穴则等同于一个带 $+e$ 的电荷。

本征半导体中产生空穴，还可以用图 16-5 所表示的锗(Ge)晶体点阵结构的平面示意图来说明。在图 16-5(a)中，一个锗原子靠其四个价电子，跟另外四个锗原子的各一个价电子，形成共价键而结合起来。当价电子由于激发而挣脱共价键的束缚时，在晶体中就留下一个带正电的空穴[见图 16-5(b)]，晶体中的空穴，可能被来自邻近锗原子的电子所占有，从而出现新的空穴，这个空穴又会被其他邻近锗原子的电子所占有，再出现新的空穴，以此类推，由于电子逐步向空穴转移，空穴在晶体中就发生了移动。

因此我们可以说，由于价电子从满带中被激发到导带，于是在晶体中就出现了电子和空穴这

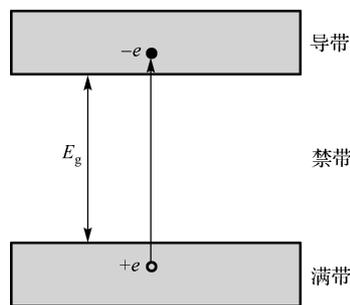


图 16-4 本征半导体

两种载流子。它们在数量上是相等的,而且电荷值也相等,但符号相反,空穴为正能量子,电子为负载流子,在电场作用下,它们移动的方向相反,我们把由导带中电子移动引起的导电性,叫做电子导电;由价带中空穴移动引起的导电性,叫做空穴导电。在本征半导体中,电子导电和空穴导电同时存在,它们统称为本征导电。

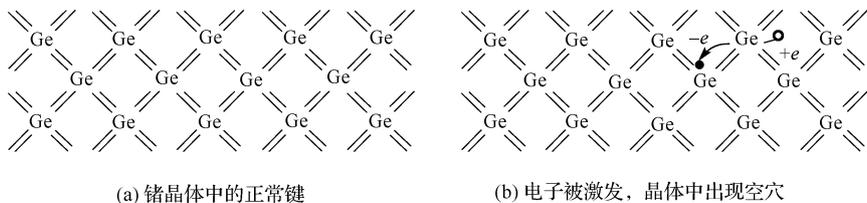


图 16-5 锗晶体点阵结构的平面示意图

2. 杂质半导体

在半导体中掺入微量的杂质,将显著地改变半导体的特性。例如,在锗中掺有百万分之一的砷后,其导电率将提高数万倍,杂质半导体又分为空穴型(简称 p 型)半导体和电子型(简称 n 型)半导体。下面对它们的导电性分别做一些简要的说明。

如图 16-6 所示,将五价杂质原子砷(As)掺入到四价硅(Si)中,砷有五个价电子,其中四个价电子与相邻的硅原子形成共价键,第五个价电子所受的束缚较小,它可环绕带正电的离子砷(A_s^+)运动,计算表明,这个电子在 A_s^+ 的电场中的电离能约为 0.05 eV,它比硅的禁带宽度($E_s = 1.09$ eV)要小很多,这时,在半导体的价带和导带之间,产生一个离导带很近的附加能级(见图 16-7),这个能级也叫做施主能级,而砷这类五价杂质则为施主杂质,因为施主能级很靠近导带,所以在施主能级上的电子,很容易受激发而跃迁到导带上去参与导电,由于含有施主杂质半导体的载流子为电子,故掺有施主杂质的半导体也叫做 n 型半导体。

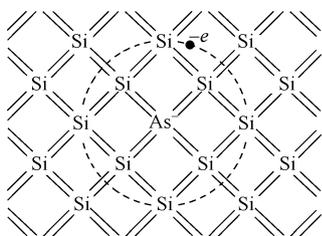


图 16-6 五价杂质原子砷(As)掺入到四价硅(Si)中,多余价电子环绕砷离子运动

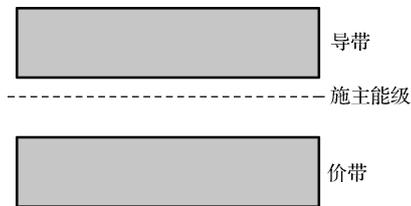


图 16-7 施主能级

下面介绍 p 型半导体。如图 16-8 所示,将三价杂质硼(B)掺入到四价半导体锗(Ge)中,由于硼有三个价电子,它和相邻的锗原子构成共价键时,缺少一个价电子,于是就存在一个带 $+e$ 电荷的空穴,这个空穴在带 $-e$ 电荷的硼离子的作用下,将环绕带负电的硼离子(B-)运动,计算表明,空穴在 B 的电场中的电离能约为 0.01 eV,比锗的禁带宽度($E_g = 0.72$ eV)要小很多,这时,在半导体的价带和导带之间,产生一个离价带很近的附加能级(见图 16-9),这个能级的存在可为价带提供空穴,也可认为它接受来自价带的电子,故这个能级也叫做受主能级,而硼这类三价杂质则为受主杂质,因为受主能级很靠近价带,所以价带中的电子很容易

因激发而跃迁到受主能级上去，并在价带中留下空穴，而空穴在电场作用下要发生移动，参与导电。由于含有受主杂质半导体的载流子为空穴，故掺有受主杂质的半导体，也叫做 p 型半导体。

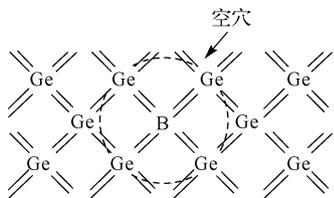


图 16-8 三价杂质硼掺入到四价半导体锗中，空穴环绕硼离子运动

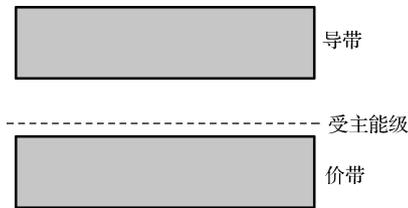


图 16-9 受主能级

16.1.3 pn 结

使 p 型半导体和 n 型半导体相接触，在它们相接触的区域就形成了 pn 结。从实验中发现，pn 结两端没有加外电压时，半导体中没有电流；当 pn 结两端加上外电压时，就有电流通过，但电流的大小和方向跟外加电压有关。图 16-10 是从实验中得出的 pn 结伏安特性曲线，从曲线中可以看到，若 p 型接正极，n 型接负极，即电压 U 为正向电压时，电流为正值 ($I > 0$)，这个电流叫正向电流；而且随着正向电压的增加，正向电流也随之指数上升。从曲线中还看到，若 p 型接负极，n 型接正极，即电压 U 为反向电压时，电流为负值 ($I < 0$)，这个电流叫反向电流，其绝对值较正向电流小，且随着反向电压的增加，反向电流很快达到饱和电流 I_s 。利用 pn 结的这个特性，可制成电子线路中常用的检波和整流二极管。下面对 pn 结的导电特性做一些说明。

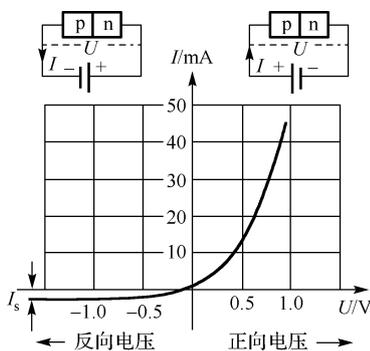


图 16-10 pn 结的伏安特性

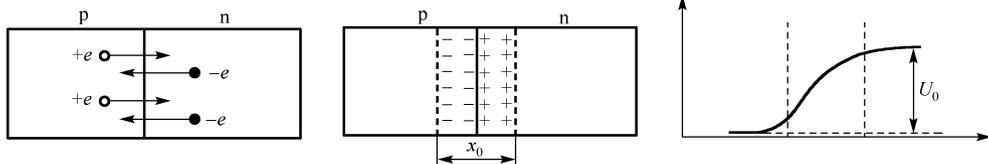


图 16-11 pn 结

当 p 型与 n 型相接触时，有电子从 n 型扩散到 p 型中去，同时也有空穴从 p 型扩散到 n 型中去[见图 16-11(a)]，这样在 p 型和 n 型相接触的区域，就出现了偶电层[见图 16-11(b)]，由于这个偶电层的存在，在 p 型和 n 型相接触的区域内，也就存在由 n 指向 p 的电场，它要阻止空穴和电子的继续扩散，直至达到动平衡为止。这时，在 p 型与 n 型接触区域就存在如图 16-11(c)所示的电势变化情况，图中 U_0 为动平衡时，p、n 之间势垒的高度，因而无论是空穴或电子都需克服高度为 U_0 的势垒，才能通过偶电层进入到 n 或 p 中去。

然而,当 p 接外电源正极, n 接外电源负极,即 p、n 间为正向电压 U 时,便使势垒高度降低,于是 n 型中的电子和 p 型的空穴将较易通过 pn 结,从而在电路中形成电流,这就是图 16-10 中,随正向电压增加,正向电流亦增加的道理。

16.1.4 半导体的其他特征和应用

半导体还有其他一些特性和应用,本节仅就热敏电阻、光敏电阻、温差电偶等的原理和应用做一些简单介绍。

热敏电阻 半导体的电阻随温度的升高而指数下降。这是因为随着温度的升高,由于热激发,半导体中的载流子(电子或空穴)显著增加的缘故。这种热激发载流子称为热生载流子。特别在杂质半导体中,因施主和受主能级处于禁带中,所需要的激发能量远比禁带宽度对应的能量小,所以热生载流子的增加尤为显著。其导电性随温度的变化十分灵敏。通常把这种电阻随温度的升高而降低的半导体器件称为热敏电阻。由于热敏电阻具有体积小、热惯性小、寿命长等优点,已广泛应用于自动控制。

光敏电阻 在可见光照射下,半导体晒的电阻值将随光强的增加而急剧减小。这是由于光激发使半导体中载流子迅速增加的缘故。这种光激发的载流子称为光生载流子,由于光生载流子并没有逸出体外,因此又称之为内光电效应,

应该注意,光电导和热电导不同,热敏电阻是一种没有选择性的辐射能接收器。而光敏电阻是有选择性的,和光电效应类似,要求照射光的频率大于红限频率。在此条件下,光强愈强,电导率越大。电导率随光强的变化十分灵敏。利用这种特性制成的半导体器件称为光敏电阻,是自动控制、遥感等技术中的一个重要元件。

温差电偶 两种不同的金属导体组成的闭合回路,如果两个接头处于不同的温度,那么在回路中将产生温差电动势。这个回路称为温差电偶,或热电偶。如果把两种不同的半导体组成回路,并使两个接头处于不同温度,也会产生温差电动势,而且比金属组成的热电偶的电动势大得多。这是因为半导体中的自由电子或空穴是由热激发产生的,随着温度的升高,自由电子或空穴的浓度极为迅速地增长。

由于存在温度差,半导体中的电子或空穴就由浓度大、运动速度较大的热端跑到冷端,同时也有少量电子或空穴由冷端运动到热端。在 n 型半导体中,载流子是电子,结果造成冷端带负电,热端带正电。而在 p 型半导体中,则冷端带正电,热端带负电,因而在冷热两端

产生电势差。随着电势差的增加,半导体内电场也开始增强,并且阻止由热端向冷端载流子的扩散而加速其由冷端到热端的运动,最后达到动态平衡。这种动态平衡决定了半导体中因温差而形成的温差电动势。它比金属中的温差电动势要大数十倍,温度每差 1° ,能够达到甚至超过 10^{-3} V。实际的半导体温差电偶如图 16-12 所示。

此外还有半导体光电池、半导体场致发光材料、半导体激光器等,广泛应用于工农业、科研、通信、测量、宇航等各种技术领域。

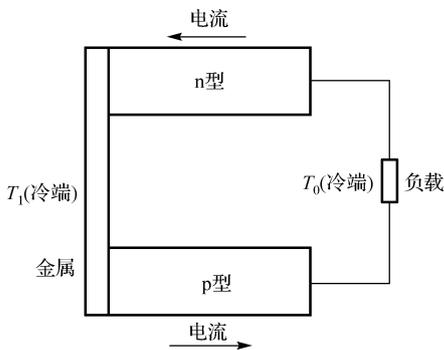


图 16-12 半导体热电偶示意图

16.2 激 光

激光是“受激辐射光放大”的简称，是 20 世纪 60 年代初期发展起来的一门新兴技术，它不但引起了现代光学应用技术的巨大变革，还促进了物理学和其他有关学科的发展。本节将简要介绍激光的产生原理和它的特性。

16.2.1 自发辐射 受激辐射

1. 自发辐射

原子在没有外界干预的情况下，电子会由处于激发态的高能级 E_2 自动跃迁至低能级 E_1 ，这种跃迁称为自发跃迁，由自发跃迁而引起的光辐射称为自发辐射。图 16-13 是自发辐射的示意图，由频率条件可知，自发辐射所发出光子的频率为

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

白炽灯、日光灯、高压水银灯等普通光源，它们的发光过程就是上述的自发辐射。这些光源的发光物质中，各个原子在进行自发辐射时所发出的光，是彼此独立的，它们所发出的光，无论是频率、振动方向，还是相位，都不一定相同，所以自发辐射所发出的光不是相干光。

2. 光吸收

当原子中的电子处于低能级 E_1 时，若外来光子的能量 $h\nu$ 恰等于激发态的高能级 E_2 与低能级 E_1 的能量差，即 $h\nu = E_2 - E_1$ ，那么原子就会吸收光子的能量，并从低能级 E_1 跃迁到高能级 E_2 ，这个过程称为光吸收，图 16-14 是光吸收示意图。

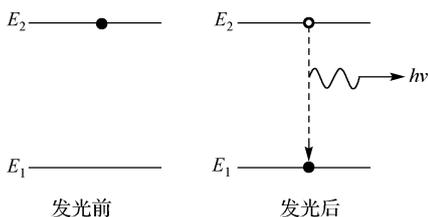


图 16-13 自发辐射

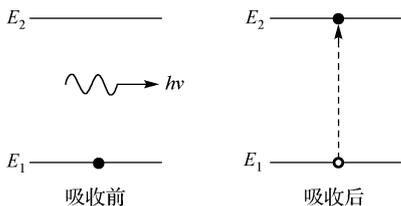


图 16-14 受激辐射

3. 受激辐射

1916 年爱因斯坦在研究辐射与原子间的相互作用时指出，原子除吸收光辐射和自发辐射外，还会有受激辐射。他认为，当原子中的电子处于如图 16-15 所示的高能级 E_2 时，若外来光子的频率恰好满足 $h\nu = E_2 - E_1$ ，则原子中处于高能级 E_2 的电子，会在外来光子的诱发下向低能级 E_1 跃迁，并发出与外来光子一样特征的光子，这就是所说的受激辐射。实验表明，受激辐射产生的光子与外来光子具有相同的频率、相位和偏振方向，在受激辐射中，通过一个光子的作用，得到两个特征完全相同的光子，如果这两个光子再引起其他原子产生受激辐射，就能得到更多的特征完全相同的光子，这个现象称为光放大，如图 16-16 所示。可见，在受激辐射中，各原子所发出的光同频率、同相位、同偏振态，所以说，由受激辐射得到的放大的光是相干光，称之为激光。

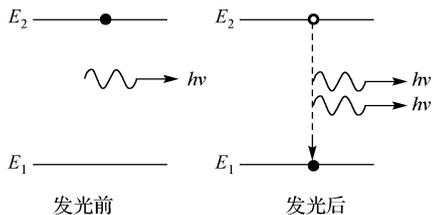


图 16-15 受激辐射

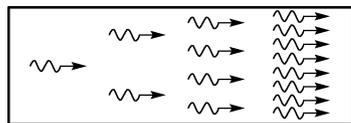


图 16-16 受激辐射的光放大

16.2.2 激光原理

1. 粒子数正常分布和粒子数布局反转分布

在一般情况下,就热平衡物质而言,处于低能级的电子数比处于高能级的电子数要多,所以,在正常情况下,光通过物质时,光吸收的概率要大于光受激辐射的概率,从宏观来看,光通过物质时表现出来的是光吸收。由统计分布定律可知,在温度为 T 的平衡态时,原子中的电子处于能级 E_i 时的数目 N_i 为

$$N_i = Ce^{-E_i/kT}$$

由上式可得原子中电子处于 E_1 和 E_2 时的数目之比为

$$N_1/N_2 = e^{-(E_1-E_2)/kT}$$

已知 $E_2 > E_1$, 所以 $N_2 > N_1$, 这也表明,处于低能级的电子数大于高能级的电子数,这种分布叫做粒子数的正常分布(见图 16-17),因为在正常情况下,处于低能级的电子数比处于高能级的电子数多,所以从整体来看,光吸收过程比光受激辐射过程要占优势。这就是在正常情况下,难以产生连续受激辐射的原因。由此可以看出,要使光通过物质后获得光放大,就必须使处在高能级上电子数大于处在低能级上的电子数,即 $N_2 > N_1$, 这种分布与正常分布相反,故叫做粒子数布局反转,简称粒子数反转或布局反转,如图 16-18 所示。总之,使粒子数反转是实现受激辐射,得到光放大的必要条件。

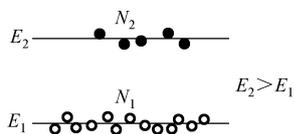


图 16-17 粒子束正常分布

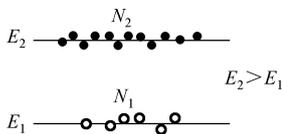


图 16-18 粒子束反常分布

下面先简略介绍实现粒子数反转,然后再介绍光学谐振腔。

为了使工作物质实现粒子数反转,我们可以从外界输入能量(如光照、放电等),把低能级上的原子激发到高能级上去,这个过程叫做激励(也叫泵浦)。但是,仅仅从外界进行激励是不够的,还必须选取能实现粒子数反转的工作物质。我们知道,原子可以长时间处于基态,而处于激发态的时间(即激发态寿命)一般是很短的,约为 10^{-8} s,所以激发态是不稳定的。除基态和激发态外,有些物质还具有亚稳态,它不如基态稳定,但比激发态要稳定得多。氢原子、氖原子、氩原子、钕离子、二氧化碳等粒子都存在亚稳态。具有亚稳态的工作物质,就能实现粒子数反转,下面以红宝石为例加以说明。

红宝石是在人工制造的刚玉(Al_2O_3)中,掺入少量的铬离子(Cr^{3+})而构成的晶体。在红

宝石中,起发光作用的是铬离子,当红宝石受到强光照时,铬离子被激励,使处于基态 E_1 的大量铬离子吸收光能而跃迁到激发态 E_3 ,如图 16-19 所示。被激发的铬离子在能级 E_3 上停留时间很短,只有约 10^{-8} s,它很快地以无辐射跃迁的方式转移到亚稳态 E_2 ,这种跃迁放出的能量只使红宝石发热,铬离子在亚稳态 E_2 上停留时间较长,约有 10^{-3} s,因而不立即以自发辐射的方式返回基态;加上外界强光的不断激励,亚稳态 E_2 上的粒子数不断积累,使得亚稳态 E_2 上的粒子数 N_2 大于基态的粒子数 N_1 ,即 $N_2 > N_1$ 。从而在亚稳态 E_2 和基态 E_1 之间形成了粒子数反转,达到光放大的目的。

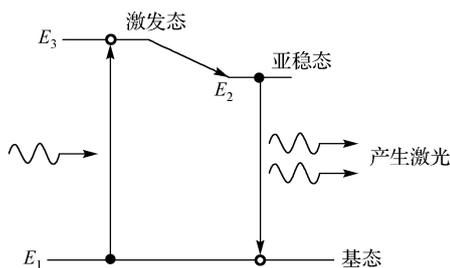


图 16-19 红宝石中铬离子能级示意图

2. 光学谐振腔 激光的形成

仅仅使工作物质处于反转分布,产生光放大,虽可得到激光,但这时的激光寿命比较短、强度也很微弱,没有实用价值。为获得有一定寿命和强度的激光,还必须加上一个光学谐振腔。图 16-20 是光学谐振腔的示意图。这是一个最简单的光学谐振腔,它是由两个放置在工作物质两边的平面反射镜组成的。这两个反射镜严格平行,其中一个是全反射镜,另一个是部分透光的反射镜,谐振腔的作用主要是产生和维持光振荡。光在粒子数反转的工作物质中传播时,得到光放大,当光到达反射镜时,又反射回来穿过工作物质,进一步得到光放大,这样往返地传播,使谐振腔内的光子数不断增加,从而获得很强的光,这种现象叫做光振荡。但是,光在工作物质中传播时还有损耗(包括光的输出、工作物质对光的吸收等),当光的放大作用与光的损耗作用达到动态平衡时,就形成稳定的光振荡。此时,从部分透光反射镜透射出的光很强,这就是输出的激光。

此外,在谐振腔中,受激辐射的光可以向不同的方向传播,但凡是不沿谐振腔轴线传播的光,都将从腔内逸出,见图 16-20,只有沿谐振腔轴线传播的光才能从部分透光反射镜射出,所以激光的方向性很好。

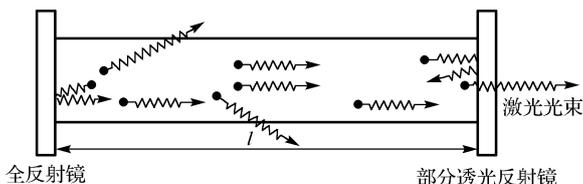


图 16-20 光学谐振腔

再则,光在谐振腔内传播时形成以反射镜为节点的驻波,由驻波条件可得,加强的光必须满足

$$l = k \frac{\lambda}{2}$$

式中 l 是谐振腔的长度, λ 是光的波长, k 是正整数,波长不满足上述条件的,会很快减弱而被淘汰。所以,谐振腔又起到选频的作用,使输出的激光频率宽度很窄,即激光的单色性很好。

16.2.3 激光器

目前已经研制成功的激光器种类很多,按照它们的工作物质来分,可分为气体激光器、固体激光器、半导体激光器和液体激光器等。按照激光的输出方式来分,又可分为连续输出激光器和脉冲输出激光器。下面介绍两种简单的激光器,一种是气体激光器,另一种是固体激光器。

1. 氦氖气体激光器

氦氖(He-Ne)激光管的构造如图 16-21 所示,激光管的外壳用硬质玻璃制成,中间有一根毛细管作为放电管。制造时先抽去管内空气,然后按(5~10):1 的比例充入氦、氖混合气,直至总压强为 $2.66 \times 10^2 \sim 3.99 \times 10^2 \text{ Pa}$ 。管的两端面为反射镜,组成光学谐振腔。激励是用气体放电的方式进行的,为了使气体放电,在阳极 A 和阴极 K 之间加上几千伏的高压,形成的激光通过部分透光反射镜输出。这种激光器发出的激光波长为 632.8 nm。

氦、氖气体中粒子数的布局反转分布是如何形成的呢?在这两种气体的混合物中,产生受激辐射的是氖原子,氦原子只起传递能量的作用。在通常情况下,绝大多数的氦原子和氖原子都处在基态(见图 16-22)。氦原子的能级中有两个亚稳态,氖原子有两个与氦原子的这两个亚稳态十分接近的能级 1 和 2,并存在一个寿命极短的能级 3。在激光器两电极间加上几千伏的电压时,产生气体放电,电子在电场的作用下加速运动,与氦原子发生碰撞,使氦原子激发到两个亚稳态上,这些处于亚稳态的氦原子又与处在基态的氖原子发生碰撞,并使氖原子激发到能级 1 和 2 上。由于处于能级 3 上的氖原子数极少,这样在能级 1、2 和能级 3 之间就形成了粒子数的反转分布,当受激辐射引起氖原子在能级 1 和能级 3 之间跃迁时,即发射波长为 632.8 nm 的红色激光。能级 2、3 间和其他能级间的跃迁所产生的辐射为红外线,采取一定的措施可以把它遏止掉。

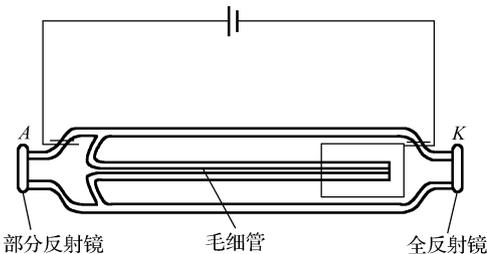


图 16-21 氦氖激光器

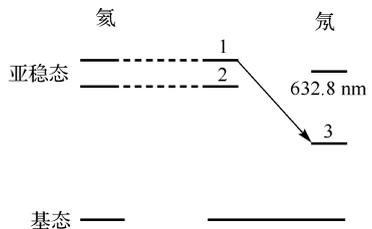


图 16-22 氦和氖的原子能级图

氦氖激光器的输出功率不大,25 cm 长的激光管输出功率约为 1 mW 左右,50 cm 长的激光管输出功率约为 3~10 mW 左右,输出方式是连续输出。目前,在各种常用的激光器中,氦氖激光器输出激光的单色性最好。因此,在精密测量中常采用这种激光器。此外,它还具有结构简单、使用方便、成本低等优点。

2. 红宝石激光器

红宝石激光器的工作物质是棒状红宝石晶体(见图 16-23),棒的两端面要求很光洁并严格平行。作为谐振腔的两个反射镜可以单独制成,也可利用棒的两端面镀上反射膜。激励是利用脉冲氙灯发出强烈的光脉冲进行的,为了提高激励功率,常装有聚光器。另外,附有一

套用于点燃氙灯电源设备,为了防止红宝石温度升高,还附有冷却设备(一般采用水冷却)。

红宝石激光器发出的是脉冲激光,它的波长为 694.3 nm。棒长 10 cm、直径 1 cm 的红宝石激光器,每次脉冲输出的能量为 10 J,脉冲持续时间为 1 ms,平均功率为 10 kW。

在以 He-Ne 激光器为代表的可连续输出激光的气体激光器和以红宝石激光器为代表的脉冲输出激光的固体激光器问世以后,各种类型的激光器接连不断地被发明出来。其主要方面是:

(1)扩展了激光的波长范围。现在已能制成波长自亚毫米直到极紫外波段的激光器。1997 年发明的自由电子激光器,不仅使激光的波长可从红外延伸到紫外范围,而且峰值功率已达 1 GW。

(2)激光的功率大大提高。如 CO_2 激光器的连续功率已达 10 kW,脉冲的瞬时功率可达 10^{14} W。

(3)激光器已能实现小型化。由于半导体激光器的发明,目前单元激光器的长度尺寸可以小到 10^{-6} m 的数量级。

波长覆盖范围宽、连续功率和瞬时功率大、尺寸小的激光器的出现,使激光的应用领域已十分广泛。

16.2.4 激光的特性和应用

1. 方向性好

激光的方向性很好,如果使一根氦氖激光管发光,就可看到一条细而亮、笔直前进、很少发散的激光束,它几乎是一束平行光。激光光束每行进 200 km,其扩散直径不到 1 m。若把激光束射到距地球 3.8×10^4 km 的月球上,光束扩散的直径还不到 2 km。而对于普通光源,即使具有抛物形反射面的探照灯,它的光束在几千米之外,也要扩散到几十米的直径,激光的这种方向性好的特性,可用于定位、导向、测距等。例如,用激光测定地球与月球的距离,精度可达到 ± 15 cm 左右。利用激光照射在运动物体上产生的多普勒频移,可以测量运动物体的速度,所测速度范围可从 $10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 到 $10^2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 之间。利用激光准直仪可使长为 2.5 km 的隧道掘进偏差不超过 16 mm。

2. 单色性好

激光的单色性很好。例如,氦氖激光器发出红光的频率为 4.74×10^{14} Hz,其频率宽度只有 9×10^{-2} Hz。而普通的氦氖混合气体放电管所发出的同样频率的光,其频率宽度达 1.52×10^9 Hz,比激光的频率宽度大 10^{10} 倍以上。也就是说,激光的单色性比普通光高 10^{10} 倍。目前,普通光源中最好的单色光源是氪灯,激光的单色性比氪灯还高一万倍。利用激光单色性好的特性,可把激光的波长作为长度标准进行精密测量。在光纤通信中,可利用激光单色性好的这一特性,来减小在光纤中传播时光信号的损耗。

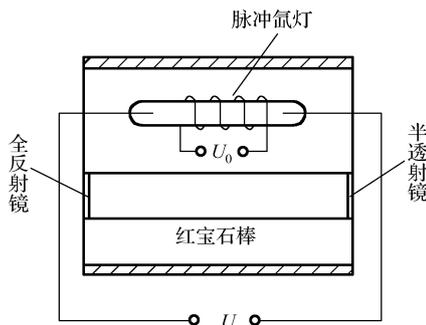


图 16-23 红宝石激光器

3. 能量集中

普通光源(如白炽灯)发出的光,射向四面八方,能量分散,即使通过透镜也只能会聚它的一部分光,而且还不能将这部分光会聚在一个很小的范围内。而激光器发出的激光,由于方向性很好,几乎是一束平行光,通过透镜后,都可以会聚在一个很小的范围内,即激光的能量在空间是高度集中的。如果使用脉冲激光器,则激光的能量可集中在很短的时间内,以脉冲的形式发射出去,即激光的能量在时间上也是高度集中的。它可以对金属或非金属材料进行打孔、切割、焊接等精密机械加工,在医学上,利用连续发光的激光器,可制成激光手术刀。此外,在激光同位素制备、激光核聚变研究和激光武器等方面也有广泛的发展前景。

4. 相干性好

前面已经指出,普通光源的发光过程是自发辐射,发出的不是相干光,激光器的发光过程是受激辐射,它发出的光是相干光。所以,激光具有很好的相干性。激光的相干性也有很重要的应用。例如,用激光干涉仪进行检测,比普通干涉仪速度快、精度高,用激光作为全息照相的光源有其独特的优点。

* 16.3 超 导 体

16.3.1 超导体的转变温度

超导电性的发现和发展过程是和低温技术的发展密切相关的。1877年,人们发现温度在90 K时,氧气被液化;不久,人们又在77 K时实现了氮气的液化;随后,1898年杜瓦把氢气液化,其液化温度为20 K;1908年荷兰物理学家卡末林-昂内斯在莱登大学实验室又实现了氦气的液化,把温度进一步降低到4.25 K,这个4.25 K的极低温度为他3年后发现超导电性奠定了基础。

也就在19世纪末期,人们从实验中已发现,温度在20 K以上时,金属的电阻率随温度的降低而减小。对此现象有不同的解释,有人认为,当温度降低到某一温度后,电阻率会平缓地趋于零;也有人认为,在极低的温度下,随着温度的降低,金属的电阻率反而会升高;如此等等,众说纷纭。由于19世纪末、20世纪初低温技术取得了巨大的进展,特别是卡末林-昂内斯实现了4.25 K的低温,于是,他能对以真空蒸馏获取的纯汞进行电阻随温度变化的研究,结果导致他于1911年发现,随着温度的降低,汞的电阻先是平稳地减少,直至降到4.2 K附近时,汞的电阻突然降至零,如图16-24所示。卡末林-昂内斯把金属电阻突然降为零的状态称为超导态,或称超导电性,把电阻发生突变的温度称为超导转变温度,或称临界温度,用 T_c 表示。为表彰他制成液态氦及发现超导电性,1913年昂内斯被授予诺贝尔物理学奖。此后,寻找新的超导体材料和提高临界温度 T_c 的研究,一直受到世界上许多著名实验室和物理学家、化学家的关注,但进展很慢,直到1955年发现氮化铌(NbN)的 $T_c=14.7$ K,1973年发现铌三锗(Nb₃Ge)的 $T_c=23.2$ K。而到1986年以后,高温超导材料相继被发现。在短短几年中,瑞士、美国、中国、日本等国科学家把 T_c 从35 K(钡铜氧化物)提高到125 K(铊钡钙铜氧化物),超导材料也从金属、合金、化合物扩展到氧化物陶瓷。人们把临界温度高于35 K的超导体称为高临界温度超导体,简称高温超导体。表16.1给出几种材料的临

界温度。表中 $T_c = 80 \text{ K}$ 的 Y-Ba-Cu-O 超导材料是我国物理学家赵忠贤和休斯顿大学的朱经武各自独立发现的。现在发现的高温超导体 $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$ 的临界温度已达 134 K 。

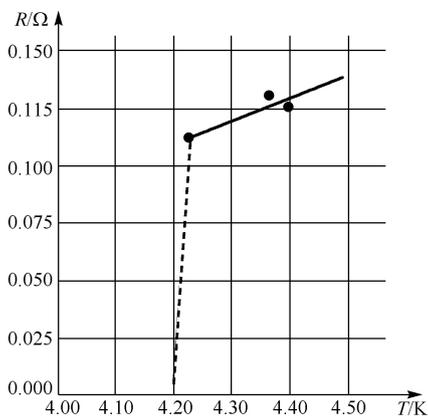


图 16-24 在 4.25 K 附近汞的电阻突降为零

表 16.1 几种超导材料的临界温度

材 料	T_c/K
Zn	0.844
Al	1.174
Sn	3.72
Hg	4.15
Pb	7.201
Nb	9.26
NbN	14.7
Nb ₃ Ge	23.2
La-Ba-Cu-O	35
Y-Ba-Cu-O	80
Bi-Sr-Cu-O	110
Tl-Ba-Ca-Cu-O	125
$\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$	134

16.3.2 超导体的主要特性

1. 零电阻率

零电阻率是超导体的一个重要特性，当超导体的温度接近临界温度时，其电导率可视为无限大，因而可承载很大的电流。只要这个电流不超过临界电流 I_c ，超导体内电流的流动就可看成是无阻的，热损耗也可略而不计。若用这样的超导体组成一闭合回路，一旦回路内激发起电流，此回路内的电流将长久地维持下去，由于超导体的电阻为零，所以电流在超导体内流动时，导体内任意两点间没有电势差，整个超导体是一个等势体。为了显示零电阻现象，有人曾做过这样一个演示实验。把一个超导线圈放在磁场中，并把温度降至临界温度 T_c 以下，然后把磁场撤去，这时在线圈中便激起感应电流。由于该超导线圈处于临界温度 T_c 以下，故线圈的电阻为零。这个线圈中的电流经过一年之久后仍没有衰减的迹象。

2. 临界磁场

超导态不仅与导体的温度有关，还与外磁场的强度有关，即使超导体的温度 $T < T_c$ ，若外磁场很强，也会破坏超导态。能破坏超导态的外磁场的临界值(磁场强度的最低值)称为临界磁场，用 H_c 表示。实验指出 H_c 是温度的函数，可用下式表示：

$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

式中 H_0 为 $T = 0 \text{ K}$ 时的临界磁场强度，即临界磁场的最大值。当 $T = T_c$ 时， $H_c = 0$ ，临界磁场的磁场强度 H_c 与温度 T 之间的关系可用图 16-25 来表示。

3. 迈斯纳效应

前面已指出，在超导态时，超导体内任意两点间的电势差为零，这样，在超导体内不存在电场。由电磁感应定律

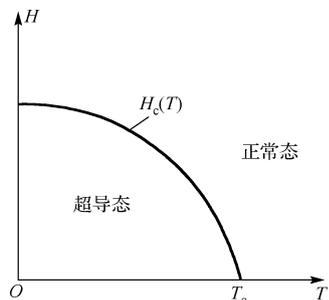


图 16-25 临界磁场与温度的关系

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})}{dt}$$

由于超导体的面积是不变的,所以由上式可以看出,因超导体内 $E=0$,故 $dB/dt=0$ 。这就是说,在超导体处于超导态时,其内部的磁场不随时间变化。当处于超导态的超导体置于外磁场中时,只要外磁场的磁场强度 H 小于外界磁场强度 H_c ,超导体的磁场强度 H 仍为零。这就好像穿过超导体的磁场线被排斥出去了(见图 16-26),这称为迈斯纳效应。这个效应是 1933 德国物理学家年迈斯纳与奥克森菲尔德从实验中发现的。迈斯纳效应声明,处于超导态的超导体是一个具有完全抗磁性的抗磁体。超导体的抗磁性可用图 16-27 的演示实验表现出来。图中圆环有持久的稳定电流通过,小球由用于超导态的超导材料作成。由于超导材料的抗磁性,小球被悬浮于空中,这就是通常所说的磁悬浮。

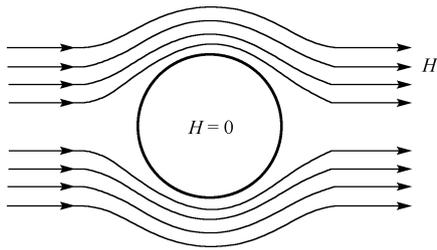
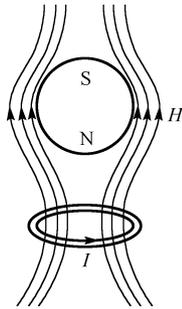
图 16-26 超导体中 $H=0$ 

图 16-27 超导小球的抗磁性

16.3.3 超导的应用前景

利用超导体的零电阻的完全抗磁性等特性,超导体技术将在科学技术和生产中发挥巨大的优越性,同时也带来了新课题,下面简略介绍超导体的几个应用方面。

1. 强磁场

由超导体圈做成的电磁体有很多用途,例如超导能提高回旋同步加速器带电粒子的功率,减小电磁铁的体积。此外,现在许多国家都有试验性运行的超导发电机和电动机,超导发电机中的定子是由超导材料制成的,当定子处于超导态时,定子中电流很大,从而大大提高了发电机的输出功率,而且超导发电机的体积也有所减小。目前利用铋(Bi)线材绕制成的超导电磁体,在 4.2 K、20 K 和 77 K 时的磁感强度已分别达到 4T、1T 和 0.6T,虽然这些超导磁体的磁性很强,但由于其临界温度仍太低,投入实际使用仍需时日。

2. 低损耗电能传输

目前所有的电能传输线多由铜、铝材料制成,由焦耳定律知,输电线上能量损耗为 I^2R ,输电线路越长,能量损耗越多,通常长距离输电线路能量损失可达 20%~30%,而由超导材料制成的传输线,由于电阻率趋于零,故线路上的能量损耗可略去不计,因此,由超导材料制成的输电线可用于长距离的直流输电,目前已能制成长约 1000 m、电流密度为 $10000 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ 的铋系超导电缆,并已投入试运行,这方面的研究已进入实用阶段。

3. 磁悬浮列车

利用超导体的抗磁性,可以把列车悬浮在轨道上,其结构是车厢下面靠近铁轨处安装有

超导线圈,当列车达到一定速率时,轨道中的感应电流使列车悬浮起来,目前日本、德国、中国已有磁悬浮列车在试运行,车速已达 $500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 。随着超导悬浮列车的研究成功,列车的速度会有更显著的提高。利用超导体的抗磁性,还可制成无摩擦轴承,这种轴承不仅可减少磨损,而且还可大大提高轴承的转速,达每分钟数十万转,这将对提高加工精度带来很大好处。

* 16.4 纳米材料简介

纳米是 nanometer 的译名,是长度的一种单位,用 nm 表示($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$)。纳米材料是指几何尺寸为纳米量级的微粒或由纳米大小的微粒在一定条件下加压成形得到的固体材料,纳米材料包含纳米金属和金属化合物、纳米陶瓷、纳米非晶态材料等。由于纳米材料具有奇特的物理性能,它已成为 20 世纪 80 年代以来人们的一个研究热点,并有可能成为 21 世纪材料研究和应用的一个新领域。

16.4.1 纳米效应

纳米微粒由于其尺度很小,微粒内包含的原子数仅为 $10^2 \sim 10^4$ 个,其中有 50% 左右为界面原子。纳米微粒的微小尺寸和高比例的表面原子数导致了它具有与相同材料的大尺度物体的不同物理特性。

1. 小尺寸效应

由于纳米微粒的尺寸比可见光的波长还小,光在纳米材料中传播的周期性被破坏,其光学性质就会呈现与普通材料不同的情形。例如,金属由于光反射显现各种颜色,而金属纳米微粒的光反射能力却很低,纳米金属微粒都呈黑色,说明它们对光的吸收能力特别强。由纳米微粒组成的纳米固体在较宽的频谱范围内显示出对光的均匀吸收性,吸收峰的位置和峰的半高宽都与微粒半径的倒数有关,利用这一性质,可以通过控制颗粒尺寸制造出具有一定频宽的微波吸收纳米材料。

2. 表面与界面效应

纳米微粒结构的特点是表面原子比例大。由表 16.2 可以看出,随着粒子直径减小,表面原子数迅速增加。因此,纳米微粒具有很高的表面能。

一些金属的纳米粒子在空气中极易氧化,甚至会燃烧,就连化学惰性的金属铂在制成纳米微粒后也变得不稳定,成为活性极好的催化剂。为什么高比例的表面原子会增加表面活性呢?我们可以通过下列情形做一说明。

图 16-28 所示为一简立方结构晶粒的二维平面图。图中实心圆代表位于表面的原子,空心圆代表内部原子,位于表面的原子近邻配位不完全,图中 C 原子缺少一个近邻的原子, B 原子缺少两个近邻的原子,而 A 原子则缺少三个近邻的原子, A 原子由于受其他原子的束缚少,所以极不稳定,很容易跑到附近的空位上,与其他原子结合形成较稳定的结构。这种表

表 16.2 纳米微粒尺寸与表面原子数的关系

纳米微粒尺寸/nm	包含总原子数	表面原子所占比例
10	3×10^4	20%
4	4×10^3	40%
2	2.5×10^2	80%
1	30	99%

面原子的活性不但引起表面原子的输运和构型的变化,同时也会引起表面电子自旋构象和电子能级的变化。

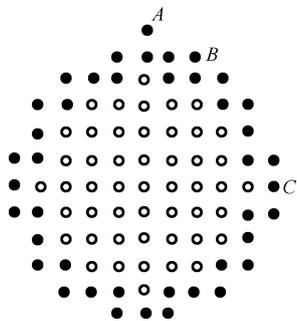


图 16-28 晶粒结构

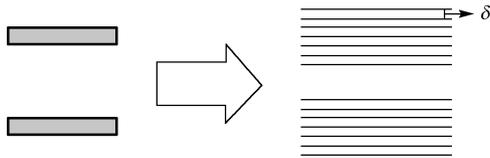


图 16-29 准连续能带变成分立的能级

3. 量子尺寸效应

量子尺寸效应是指粒子尺寸下降到极低值时,费米能级附近的电子能级由准连续变为不连续离散分布的现象。我们知道,晶体中的电子能级为准连续能带,而理论研究指出,能级间距与晶粒的大小有关。理论公式给出

$$\delta = \frac{4E_F}{3N}$$

式中 δ 为能级间距, E_F 为费米能级, N 为总电子数,对于纳米微粒, N 值较小,因此准连续的能带就变成分立的能级,如图 16-29 所示。当能级间距大于热能、电能、磁能或超导体的凝聚能时,就会出现明显的量子效应,导致纳米微粒的磁、光、声、热、电等性能与宏观材料的特性有明显的不同。例如,纳米微粒对于红外吸收,表现出灵敏的能级跃迁结构;共振吸收的峰比普通材料尖锐得多;比热容与温度的关系也呈非线性关系。此外,微粒的磁化率、电导率、电容率等参数也因此具有特有的变化规律,例如金属普遍是良导体(能量准连续),而纳米金属微粒在低温下却呈现电绝缘性(能量分立); PbTiO_3 、 BaTiO_3 和 SrTiO_3 通常情况下是铁电体,但它们的纳米微粒是顺电体;无极性的氮化硅陶瓷,在纳米态时却会出现极性材料才有的压电效应等。

16.4.2 纳米材料的制备

制备纳米固体材料,可采用物理、化学等方法进行。例如利用激光或等离子体的技术进行高温气相合成,可以得到纳米级的金属粉料或陶瓷粉料,用化学沉积法、水热合成法也可获得纳米尺寸的陶瓷粉料,获得粉料后,再进行成形与烧结。在超细粉末成形和烧结过程中所遇到的主要问题是团聚,微粒间的静电力、范德瓦耳斯力、磁力都可能使它们产生团聚,通过加入适当的添加剂可以改善这种团聚现象。

目前制备纳米晶体或非晶材料常用的方法是惰性气体沉积加上原位加压法,即将初始材料在压强约为 1 kPa 的惰性气体中蒸发,蒸发后的原子与惰性气体原子相互碰撞,并沉积在低温的冷阱上形成尺寸为几个纳米的松散粉末,然后在真空环境下压制成纳米晶体材料。

16.4.3 一种纳米新材料——碳纳米管

1991 年 11 月,日本科学家宣布发现了一种新的碳结构,这种结构不同于 C_{60} 的球状结

构,而是一种针状的碳管,碳针的直径约在 1 nm 到 30 nm 之间,长度可达到 1 μm 。图 16-30 所示即为一碳纳米管的模拟图,它由嵌套在一起的直径不同的多个柱状碳管组成,形成一碳针,每根碳针的数目一般在 2~50 层之间,每层碳管可看成是由石墨片卷成圆筒状而成,这就是说,碳纳米管管壁由碳六边形环构成,每个碳与周围的三个碳原子相邻,但把石墨片卷成圆筒状的方式并不是唯一的。

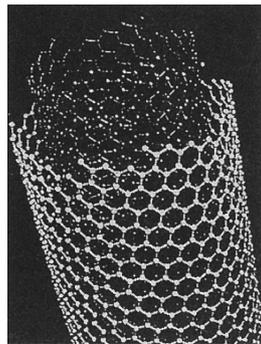


图 16-30 碳纳米管的结构

最新的研究表明,碳纳米管具有惊人的强度。据报道,碳纳米管能经受住近百万倍大气压强(即 10^9 Pa)的压力,这一数值较其他可类比的纤维高 2 个数量级,它的韧度比其他纤维高 200 倍以上。碳纳米管之所以如此坚韧,是因为其碳-碳键十分稳定且缺陷很少,因此碳纳米管有希望用于增强合成材料,具有广泛的应用前景。

科学家们还对碳纳米管的填充表现了很高的兴趣,因为在这种特殊结构的纳米材料内填充其他物质后可进一步改变其性质和用途,例如,填充其他物质后的碳纳米管可看成是极细的导线,这可能为超精细电子线路的制造开辟出一条道路。对于碳纳米管及其他纳米材料的研究,将对未来产生深远的影响。

16.4.4 应用前景

纳米材料具有很多潜在的应用价值,下面是几个应用方面的简单介绍。

1. 在微电子器件方面的应用

当电子器件进入纳米尺寸时,量子效应十分明显,因此,纳米材料应用在电子器件上,会出现普通材料所不能达到的效果。目前,对于纳米硅材料的研究和应用在国际上正逐步走向深入,例如,纳米磁性材料的发展也十分迅速,纳米尺寸的多层膜除了可在微电子器件方面应用外,还在磁光存储、磁记录等方面具有优越的性能。

2. 在磁记录方面的应用

在当今的信息社会,要求记录材料高性能化和记录高密度化,例如每 1 cm^2 需要记录 1000 万条以上的信息,这就要求每条信息记录在几 μm^2 甚至更小的面积内,而纳米微粒能为这种高密度记录提供有利条件。磁性纳米微粒由于尺寸小,具有单磁畴结构,矫顽力很高,制成磁记录材料可提高信噪比,改善图像质量。现在,日本松下电器公司已制成纳米级微粉录像带,它具有图像清晰、信噪比高、失真十分小的优点。

3. 在传感器上的应用

由于纳米微粒材料具有巨大的表面和界面,对外界环境如温度、光、湿度等十分敏感,外界环境的改变会迅速引起表面或界面离子价态和电子运输的变化,而且响应速度快,灵敏度高。20 世纪 80 年代初,日本已研制出二氧化锡(SnO_2)纳米薄膜传感器。纳米陶瓷材料用于传感器也具有巨大潜力,例如利用纳米 LiNbO_3 、 LiTiO_3 、PZT 和 SrTiO_3 的热电效应,可制成红外检测传感器。

参考答案

习 题 8

一、填空题

- 8.1 $\oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = 0$; 在电场力作用下单位正电荷沿任何闭合路移动时电场力做功为零;
保守场
- 8.2 每个点电荷单独存在时在该点所产生的电场强度矢量叠加
- 8.3 有源场
- 8.4 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, \rightarrow ; $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$; \rightarrow ; $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; \leftarrow
- 8.5 正; 减少

二、选择题

- 8.6 C
- 8.7 D
- 8.8 D
- 8.9 C

三、计算题

- 8.10 $\frac{5q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$, $-4q$
- 8.11 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2lr}{\left[r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2}$
- 8.12 (1) $6.74 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, 方向水平向右; (2) $14.96 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, y 轴正向
- 8.13 (1) $(\sqrt{2}-1)bd^{5/2}$; (2) $\epsilon_0(\sqrt{2}-1)bd^{5/2}$
- 8.14 $\mathbf{E} = \frac{\lambda \mathbf{i}}{2\pi\epsilon_0 R}$
- 8.15 0, $E = 4.0 \text{ V/m}$, $E = 1.05 \text{ V/m}$
- 8.16 (1) $r < R_1$, $E = 0$; (2) $R_1 < r < R_2$, $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$; (3) $r > R_2$, $E = 0$

- 8.17 两面间, $\mathbf{E} = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{n}$; σ_1 面外, $\mathbf{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{n}$; σ_2 面外, $\mathbf{E} = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{n}$; \mathbf{n} : 垂直于两平面由 σ_1 面指为 σ_2 面
- 8.18 $2.0 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$
- 8.19 $12.5 \times 10^{-13} \text{ C/m}$
- 8.20 $6.55 \times 10^{-6} \text{ J}$
- 8.21 $\frac{q_0 q}{6\pi\epsilon_0 R}$
- 8.22 (1) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$; $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$; $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r}$;
 (2) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$
- 8.23 $\frac{\rho}{4\epsilon_0}(R^2 - r^2)$, ($r \leq R$); $\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$, ($r \geq R$)
- 8.25 (1) $-2 \times 10^{-7} \text{ C}$, $-1 \times 10^{-7} \text{ C}$; (2) $2.26 \times 10^3 \text{ V}$
- 8.26 $q' = \frac{q}{3}$
- 8.27 (1) 介质内 $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$, 介质外 $E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
 (2) 介质内: $U_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$, 介质外: $U_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
 (3) $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$
- 8.28 $\frac{\sigma_{\text{直}}}{\sigma_{\text{无}}} = \epsilon_r$
- 8.29 (1) $w = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon r^2 l^2}$, $dW = \frac{Q^2 dr}{4\pi\epsilon r l}$; (2) $W = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$; (3) $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}$
- 8.30 (1) 120 pF , (2) 击穿
- 8.31 (1) $1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$, (2) $1.01 \times 10^{-4} \text{ J}$, (3) $4.49 \times 10^{-12} \text{ F}$

习 题 9

一、填空题

- 9.1 回路 L 所包围的电流的代数和; L 上确定点的总磁感应强度; 空间所有电流共同
- 9.2 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{4\pi r^2}$
- 9.3 0 ; $2\mu_0 I$; $\mu_0 I$; $-\mu_0 I$
- 9.4 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- 9.5 $R = \left(\frac{\mu_0 a^2 I}{\pi B_0} \right)^{\frac{1}{3}}$

二、选择题

- 9.6 C
9.7 B
9.8 C
9.9 A
9.10 A
9.11 C

三、计算题

9.12 (a) $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; (b) $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8R}$, (c) $\frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (d) $\frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

9.13 0

9.14 $1.2 \times 10^{-4} \text{ T}$, $r = 0.1 \text{ m}$, L_2 外侧

9.15 $\frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$

9.16 $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$

9.17 $\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$, $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

9.18 (1) $\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$; (2) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; (3) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$; (4) 0

9.19 $1.28 \times 10^{-3} \text{ N}$, 0

9.20 $F_a = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos 60^\circ} \ln \frac{d+l_0}{d}$, 方向: 垂直于 ca 斜指向上

$F_{ab} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l_0}{2\pi(d+l_0)\cos 60^\circ}$, 方向: 垂直于 ab 指向左

$F_{bc} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+l_0}{d}$, 方向: 垂直于 bc 指向下

9.21 大小 $F_{ab} = BI \overline{ab}$, 方向 $\perp \overrightarrow{ab}$ 向上

9.22 (2) $3.7 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, (3) $6.2 \times 10^{-16} \text{ J}$

9.24 (1) $H = 200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, $B_0 = 2.5 \times 10^{-4}$

(2) $H = 200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, $B = 1.05 \text{ T}$

(3) $B_0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$, $B' \approx 1.05 \text{ T}$

9.25 $\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$; $\frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$; $\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$; 0

习 题 10

一、填空题

10.1 洛伦兹力; 感生电场对电荷的作用力

$$10.2 \quad \frac{3\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2x^4} v$$

10.3 右

10.4 4 倍; 0

10.5 变化的磁场; 变化的电场

二、选择题

10.6 C

10.7 A

10.8 B

10.9 D

10.10 C

10.11 D

三、计算题

$$10.12 \quad 2.51 \text{ V}$$

$$10.13 \quad 0.40 \text{ V}$$

$$10.14 \quad \left(\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{dI}{dt}$$

10.15 $2RvB$; P 端电势高

10.16 $-3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$; A 端电势高

$$10.17 \quad \varepsilon_{MN} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{a-b}{a+b}, U_M - U_N = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

$$10.18 \quad (1) \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \left(\ln \frac{b+a}{b} - \ln \frac{d+a}{d} \right); (2) \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{d+a}{d} - \ln \frac{b+a}{b} \right) \frac{dI}{dt}$$

$$10.19 \quad \frac{\mu_0 I l_1 l_2 v}{2\pi d(d+l_1)}, \text{ 顺时针方向}$$

10.20 $klvt$, 顺时针方向

$$10.21 \quad U_{AB} = \frac{\mu_0 Iv}{\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

$$10.22 \quad (1) \frac{1}{6} B\omega l^2; (2) b$$

$$10.23 \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 - \frac{\pi R^2}{6} \right) \frac{dB}{dt}, \text{ 逆时针}$$

$$10.24 \quad (1) U_a = U_b, (2) U_c > U_d$$

$$10.25 \quad \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 2$$

$$10.26 \quad \frac{N^2(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)}{l}$$

$$10.27 \quad 2.8 \times 10^{-6} \text{ H}; 0$$

$$10.29 \quad \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}; \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$10.30 \quad \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3; \frac{\mu_0 a \lambda I_0}{2\pi} \ln 3 \cdot e^{-\lambda}$$

$$10.31 \quad \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$10.32 \quad \frac{\epsilon k}{r \ln R_2 / R_1}$$

习 题 11

一、选择题

- 11.1 D
11.2 B
11.3 C
11.4 D
11.5 D

二、填空题

- 11.6 相位变化
11.7 分波阵面法,分振幅法
11.8 相等,减小,减小

三、计算题

- 11.9 (1)600 nm, (2)3 mm
11.10 1.76×10^{-2} m
11.11 6.6×10^{-6} m
11.12 4.5×10^{-2} m
11.13 673.1 nm
11.14 $e_{\min} = 99.6 \text{ nm} (k = 0)$, 当 k 为其他整数倍时也满足要求
11.15 (1) 4.0×10^{-4} rad (2) 3.4×10^{-7} m (3) 0.85 mm (4) 141 条
11.16 5.46×10^{-7} m
11.17 (1) 1.85×10^{-3} rad (2) 409.1 nm
11.18 1.22
11.19 628.9 nm
11.20 5.9×10^{-2} mm

习 题 12

一、选择题

- 12.1 D

- 12.2 C
 12.3 B
 12.4 A
 11.2 A

二、填空题

- 12.6 单缝衍射,多缝干涉
 12.7 $1.2 \times 10^{-3} \text{ m}$, $0.6 \times 10^{-3} \text{ m}$
 12.8 $6.25 \times 10^{-7} \text{ m}$
 12.9 $2.68 \times 10^{-7} \text{ rad}$

三、计算题

- 12.10 (1) $\Delta l = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\theta = 5.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$; (2) $\Delta l \approx 3.76 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\theta = 3.76 \times 10^{-3} \text{ rad}$
 12.11 (1) $1.63 \times 10^{-3} \text{ m}$; (2) $2.45 \times 10^{-3} \text{ m}$
 12.12 (1) 16 cm; (2) 8 cm
 12.13 $k_{\max} = 3$
 12.14 (1) 6 cm; (2) 30 cm
 12.15 (1) $6.0 \times 10^{-6} \text{ m}$; (2) $1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$
 (3) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$, 共 15 条明条纹
 12.16 1.5 mm
 12.17 13.86 cm
 12.18 有 $\lambda_3 = 0.13 \text{ nm}$, $\lambda_4 = 0.097 \text{ nm}$ 的 X 射线能产生强反射

习 题 13

一、选择题

- 13.1 B
 13.2 B
 13.3 C

二、填空题

- 13.4 光波的振动方向相对光的传播方向的不对称
 13.5 1:2

三、计算题

- 13.6 $2.25 I_1$
 13.7 透过检偏器后的光强分别是 I_0 的 $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ 倍

13.8 (1) $54^{\circ}44'$; (2) $35^{\circ}16'$

13.9 (1) $\arctan 1.40$; (2) $\frac{\pi}{2} - \arctan 1.40$

13.11 $\arctan 1.33$

13.12 (1) $\arctan 1.50/1.33$; (2) $\arctan 1.33/1.50$; (3) 互余

习 题 14

一、填空题

14.1 $2.21 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, $6.63 \times 10^{-26} \text{ J}$, $7.37 \times 10^{-43} \text{ kg}$

14.2 金属的逸出功

14.3 大于, 大于, 小于

14.4 粒子性

14.5 $6.63 \times 10^{-35} \text{ m}$, $7.028 \times 10^{-7} \text{ m}$

二、选择题

14.6 B

14.7 B

14.8 A

14.9 C, D

三、计算题

14.10 257 nm

14.11 5800 K

14.12 $1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $0.603 \times 10^{15} \text{ Hz}$; 钷

14.13 $5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

14.14 $4.35 \times 10^{-3} \text{ nm}$, $63^{\circ}36'$

14.15 (1) 0.1024 nm (2) $4.66 \times 10^{-17} \text{ J}$, $44^{\circ}18'$

14.16 (1) $1.33 \times 10^{-19} \text{ J}$, $4.42 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $1.47 \times 10^{-36} \text{ kg}$

(2) $3.99 \times 10^{-19} \text{ J}$, $1.33 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $4.41 \times 10^{-36} \text{ kg}$

(3) $9.97 \times 10^{-18} \text{ J}$, $3.31 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $1.10 \times 10^{-34} \text{ kg}$

(4) $1.33 \times 10^{-15} \text{ J}$, $4.42 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $1.47 \times 10^{-32} \text{ kg}$

(5) $1.99 \times 10^{-13} \text{ J}$, $6063 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $2.21 \times 10^{-30} \text{ kg}$

14.17 $1.99 \times 10^{-5} \text{ nm}$

14.18 1.23 nm

14.19 (1) 2.0 eV, (2) 2.0 eV, (3) 0.296 μm

14.20 $n = 4$

14.21 $n = 3$, 102.6 nm, 121.6 nm, 656.3 nm

- 14.22 657.3 nm, 487.2 nm, 3.08×10^{15} Hz
 14.23 9
 14.24 150 V
 14.25 $7.0 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 1.04 nm
 14.26 (1) $1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$; (2) $1.66 \times 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 14.27 (1) 9.43 eV; (2) $x = 0, 0.10 \text{ nm}, 0.20 \text{ nm}$, 其值均为零

习 题 15

一、思考题

(略)

二、计算题

- 15.9 118.0 MeV, 127.7 MeV, 111.5 MeV
 15.10 $53 (Z/A)^{2/3} \text{ MeV}$, $32 (Z/A)^{2/3} \text{ MeV}$; 32, 19 和 28, 17 MeV
 15.11 169 MeV
 15.12 $\left(-0.8345 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + 7.3458 A^{2/3}\right) \text{ MeV}$, 25.4 MeV
 15.13 $\tau, 0$
 15.14 8.1 kBq
 15.15 2.87 mg, 2.71 mg
 15.16 $1.5 \times 10^4 \text{ a}$
 15.17 $2.45 \times 10^9 \text{ a}$
 15.18 0.0862 MeV, 4.8707 MeV