微积分练习册（上）

主　编　杨　新　钱贺斌

副主编　陈　勇　罗　琳

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

全书练习题与配套教材章节顺序相同，共包含九章：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程。本习题册的形式为学生作业本，一方面比较规范，便于教师批改，另一方面减轻了学生抄作业题的负担，同时也便于作业本的保留。

本书可作为应用型本科高校、高职高专院校理工科专业大学数学课程配套习题册。

图书在版编目（CIP）数据

微积分练习册：全 2 册 / 杨新，钱贺斌主编. —北京：电子工业出版社，2016.8

ISBN 978-7-121-29673-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杨… ②钱… Ⅲ. ①微积分—高等学校—习题集 Ⅳ. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 188787 号

策划编辑：郭乃明
责任编辑：郭乃明　　特约编辑：范　丽
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：19.75　字数：263 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元（上、下册）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254561，guonm@phei.com.cn。

前　　言

本书是与中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础（一）：微积分》一书相配套的实训练习册，该练习册对各章节知识点进行了归纳整理，相信使用者能结合课堂所学，通过一定数量的习题练习，学好微积分这门重要的基础课程，为其他专业必修课程打好基础。

本教材分上下册，共九章，上册包含函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分共 5 章内容；下册包含定积分、无穷级数、多元函数、微分方程共 4 章内容，编写顺序与原教材相同，每章分为若干节，每节以模块形式组织内容，符合学生的认知规律。

本教材编写的指导思想是：把数学作为重要的基础课和工具课，以必需、适用、够用为原则，以专业服务为导向，以用熟悉建模的方法培养学生分析问题和解决问题的能力为归宿。

本书有以下特点：

1．与其他“高等数学”教材内容紧密衔接，为应用型院校财经专业学生提供专业学习所必需的数学基础知识和方法。

2．注重考查学生对所学知识本质的理解，本习题册结构严谨、逻辑清晰、选题丰富、类型多样、通俗易懂，包含了专业所要求的所有教学要点，保持了知识的连续性、完整性，使得课程的学习真正做到学以致用、学能够用。

3．教材扩大了适用面，在保证教学基本要求的前提下，根据各专业差异，在教学内容的选择上留有一定的余地。

本书由四川工商学院教研室全体成员共同编写完成。由杨新、钱贺斌担任主编，陈勇、罗琳任副主编。由于编审人员水平有限，不足之处在所难免，恳请各界同仁、有关专家和学者使用本书时进行批评和指正，将遇到的问题以及改进意见及时反馈给我们，以便于我们修订此书时加以改进。

编者

2016 年 7 月

目　　录

专业班级__________________　　姓名__________________　　学号__________________

第一章　函数

第 1 次

集合　实数集　函数关系

理解：（1）集合的两种表示：列举法、描述法。
（2）全体实数与数轴上的点一一对应。
（3）函数的两要素。

1．用集合的描述法表示下列集合。

（1）大于 5 的所有实数集合

（2）圆 $x^2+y^2=25$ 内部一切点的集合

（3）球面 $x^2+y^2+z^2=27$ 上所有点的集合

2．设全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$， $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,4,6\}$，写出下列集合的全部元素。

（1） $\overline{A}$

（2） $\overline{B}$

（3） $\overline{A}\cup\overline{B}$

（4） $\overline{A}\cap\overline{B}$

3. 如果$A=\{(x,y)|x-y+2\geq 0\}$，$B=\{(x,y)|2x+3y-6\geq 0\}$，$C=\{(x,y)|x-4\leq 0\}$，在坐标平面上标出集合$A\cap B\cap C$的区域。

4．设集合$A=\{1,2\}$， $B=\{3,4,5\}$，求$A\times B$与$B\times A$。

5．用区间表示下列实数集合：$I=\{x\,|\,1<|x-2|<3\}$。

6．下列给出的关系是不是函数关系？

（1）$y=\sqrt{-x}$

（2）$y=\lg(-x^2)$

（3）$y^2=x+1$

7．下列给出的各对函数是不是相同的函数？

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

（2） $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

（3） $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$

注：（1）定义域与对应法则是函数的两要素，只要两个函数的定义域和对应法则相同，那么它们是相同的函数。

（2）写函数定义域时，切忌集合与区间混用。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 2 次

分段函数　建立函数关系的例题
函数的几种简单性质

理解：（1）分段函数的定义域是各分段区间的定义区间的并集。

（2）函数的奇偶性、有界性、单调性、周期性。

1．确定下述函数的定义域，并画出函数的图形。

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (|x|\le 1)\\ x-1 & (1<|x|<2)\end{cases}$$

2．设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2 & (0\le x\le 1)\\ 2x & (1<x\le 2)\end{cases}$，求 $\varphi(x)$。

3．将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段形式表示，并画出函数图形。

4．画出 $x^2+(y-3)^2=1$ 的图形，并求出两个 y 是 x 的函数的单值的显函数关系。

5．设生产与销售某产品的总收益 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知：当产量 $x=0,2,4$ 时，总收益 $R=0,6,8$，试确定总收益 R 与产量 x 的函数关系。

6．某化肥厂生产某种产品 1000 吨，每吨定价为 130 元，销售量在 700 吨以下时，按原价出售，超过 700 吨时，超过的部分打九折出售，试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式写出。

7．讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的奇偶性、有界性、单调性、周期性。

注：（1）函数的奇偶性是就函数的定义域关于原点是否对称而言的。

（2）若函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，则 $f(kx)(k>0)$ 是以 $\dfrac{T}{k}$ 为周期的周期函数。

（3）一个函数的有界性，不仅与函数表达式有关，而且与考查的区间有关，一个函数可能在某个区间无界，在另一个区间内有界。

第 3 次

反函数与复合函数　初等函数

理解：（1）反函数。（2）复合函数。（3）初等函数。

1．求下列函数的反函数。

（1）$y=\dfrac{x+2}{x-2}$

（2）$y=x^3+2$

（3）$y=1+\lg(x+2)$

2．下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成的？

（1）$y=\sqrt{3x-1}$

（2） $y=(1+\lg x)^5$

（3） $y=\sin^2 \mathrm{e}^x$

3．如果 $f(x)=3x^3+2x$， $\varphi(t)=\lg(1+t)$，求 $f[\varphi(t)]$。

4．分别就 $a=2$， $a=-2$ 讨论 $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数，如果是复合函数，求其定义域。

注：（1）只有一一对应的函数才有反函数。

（2） $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

（3） $y=f(u)$， $u=\varphi(x)$ 并不一定能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$， $y=f[\varphi(x)]$ 能成为复合函数的条件是 $f(u)$ 的定义域与 $\varphi(x)$ 的值域构成的交集非空。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

习题一

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-9}}+\ln x$，则 $f(x)$ 的定义域是____________。

2. 设函数 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，则 $f[f(0)]=$__________。

3. 函数 $y=\sin^2 x$ 是由__________和__________复合而成的。

4. 函数 $y=\sqrt{x-x^2}$ 的值域为_____________。

5. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{x-1}$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$____________。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ 是（　　）。

   A. 偶函数
   B. 奇函数
   C. 非奇非偶函数
   D. 偶函数又是奇函数

2. 下列函数中，在其定义域内单调递增的是（　　）。

   A. $\ln\dfrac{1}{x}$　　　　B. $\sqrt{x-1}$
   C. x^2-1　　　　D. e^{-x}

3. 下列各对函数中相同的是（　　）。

   A. $y=\lg[x(x-1)]$ 与 $y=\lg x+\lg(x-1)$
   B. $y=\lg[x(x+1)]$ 与 $y=\lg x+\lg(x+1)$
   C. $y=\lg\dfrac{1-x}{x}$ 与 $y=\lg(1-x)-\lg x$
   D. $y=\lg\dfrac{1+x}{x}$ 与 $y=\lg(1+x)-\lg x$

4. 设函数 $f(x)=2^{\cos x}$，$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}$，在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内（　　）。

   A. $f(x)$ 是增函数，$g(x)$ 是减函数
   B. $f(x)$ 是减函数，$g(x)$ 是增函数
   C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增函数
   D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是减函数

5．下列关系中，是复合函数关系的是（　　）。

A．$y = x + \sin x$

B．$y = 2x^2 e^x$

C．$y = \sqrt{\sin x - 2}$

D．$y = \cos\sqrt{x}$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1．设 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x^2-1 & (x>0) \end{cases}$，求 $f\{f[f(-1)]\}$。

2．下列初等函数是由哪几个基本初等函数复合而成的？（每小题 5 分）

（1）$y = \ln\sqrt{1-x}$

（2）$y = \sqrt{e^{\sin x}}$

3．证明下列函数是有界函数。（每小题 5 分）

（1） $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

（2） $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

4．求下列函数的反函数。（每小题 5 分）

（1） $y=x^3+2$

（2） $y = 1 + \ln(x+2)$

5．用铁皮做一个容积为V的圆柱形罐头筒，试将它的全面积表示成底半径的函数，并确定此函数的定义域。

6．某商品供给量Q对价格P的函数关系为：$Q = Q(P) = a + bc^P\ (c \neq 1)$

已知当$P = 2$时，$Q = 30$；当$P = 3$时，$Q = 50$；$P = 4$时，$Q = 90$。求供给量Q对价格P的函数关系。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第二章　极限与连续

第 4 次

数列的极限　函数的极限　变量的极限

理解：（1）数列极限、函数极限的描述性定义。

（2）左、右极限。

1．用观察的方法判断下列数列是否收敛。

（1）y_n ：$-\frac{1}{3},\frac{3}{5},-\frac{5}{7},\frac{7}{9},-\frac{9}{11},\cdots$

（2）y_n ：$1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{1}{5},\frac{7}{6},\cdots$

（3）y_n ：$0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},\cdots$

2．观察下列函数极限并写出极限值。

（1） $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x}$

（3） $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$

（4） $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x$

3．设 $f(x)=\begin{cases} x & (x<3) \\ 3x-1 & (x\geq 3) \end{cases}$，画出 $f(x)$ 的图形，并讨论当 $x\to 3$ 时，$f(x)$ 的左、右极限。

4．证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

注：（1）极限具有唯一性。

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

第 5 次

无穷大量与无穷小量

理解：（1）无穷大量与无穷小量。

（2）无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量。

（3）无穷小量的阶。

1．函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 在什么变化过程中是无穷大量？又在什么变化过程中是无穷小量？

2. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？哪些既不是无穷小量也不是无穷大量？

（1）$100x^2$　　（2）$\sqrt[3]{x}$

（3）$\dfrac{2}{x}$　　（4）$\dfrac{x^2}{x}$

（5）0 （6）$x^2+0.01$

（7）$\dfrac{1}{x-1}$ （8）$\dfrac{x-1}{x+1}$

3．当$x\to+\infty$时，上题中的变量，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？哪些既不是无穷小量也不是无穷大量？

注：讨论无穷大量或无穷小量时，必须指出变量的变化过程。

第 6 次

极限的运算法则

理解：（1）极限的四则运算法则。

（2）因式分解求极限。

（3）分子（分母）有理化求极限。

（4）通分求极限。

1．求下列各函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{2}{x-3})$

（3）$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

（4）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

（6）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

负整数。

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{6x-1}$

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$

（9）$\lim\limits_{x\to -1}(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1})$

（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$

2．若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求$a$，$b$的值。

注：（1）若分式分子的极限不为0，分母的极限为0，则此分式的极限为∞。

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}a_0/b_0 & (n=m)\\ 0 & (n<m)\\ \infty & (n>m)\end{cases}$，其中$a_0$，$b_0$不为$0$；$m$，$n$为非负整数。

第 7 次

两个重要的极限

理解：（1）夹逼准则，单调有界准则。

（1）第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

（2）第二个重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$。

1．求下列函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

（4） $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

2．求下列极限。

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{2x}$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2-x}{2})^{\frac{2}{x}}$

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-1}{x+1})^{x}$

（4） $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

注：（1）第一个重要极限讨论的是$\dfrac{0}{0}$型极限， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$。

（2）第二个重要极限讨论的是1^{∞}型极限， $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}\Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to\infty}(1+\dfrac{1}{f(x)})^{f(x)}=\mathrm{e}$。

专业班级__________________　　姓名__________________　　学号__________________

第 8 次

利用等价无穷小量代换求极限　函数的连续性

记住：常用的几种等价无穷小量。

理解：（1）函数连续的两种等价定义。

（2）间断点的分类。

（3）连续函数的有界定理、最值定理、介值定理、零点定理。

1．当 $x \to 0$ 时，试将下列无穷小量与无穷小量 x 进行比较。

（1）$x^2 + 1000x$　　　　（2）$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

2．用等价无穷小量求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$　　　　（2）$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$

3．函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\leq 0) \\ x^2 & (x>0) \end{cases}$ 在点 $x=0$ 是否连续？画出 $f(x)$ 的图形。

4．给函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 补充定义 $f(0)$ 等于一个什么数值，能使修改后的函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续？

5．证明方程 $x^5-3x=1$ 在 1 与 2 之间至少存在一个实根。

注：常用的几种等价无穷小量：

（1）当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\ln(1+x)\sim x$， $\mathrm{e}^x-1\sim x$， $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$。

（2）同理，当 $\varphi(x)\to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$， $\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$， $\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$， $\mathrm{e}^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$， $1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{1}{2}\varphi^2(x)$， $\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\dfrac{\varphi(x)}{n}$。

专业班级________________　　　　姓名________________　　　　学号________________

习题二

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $a(x)=\sin x$， $\beta(x)=x$，则 $x\to 0$ 时， $a(x)$ 与 $\beta(x)$ 是______无穷小量。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{4n^2+2n+1}=$________________。

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$________________， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$________________。

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{2x}=$________________。

5. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x(x+1)}$ 的连续区间是________________。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限的（　　）。

   A. 必要条件

   B. 充分条件

   C. 充要条件

   D. 无关条件

2. $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x)=$（　　）。

   A. 0

   B. 1

   C. 2

   D. 不存在

3. 当 $x\to 0$ 时，（　　）与 $\ln(1+x)$ 是等价无穷小量。

   A. x

   B. $2x$

   C. x^2

   D. $2x^2$

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的（　　）。

   A. 连续点

   B. 可去间断点

C．无穷间断点

D．跳跃间断点

5．下面结论正确的是（　　）。

A．$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$

B．$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{-x}=\mathrm{e}$

C．$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{1-x}=\mathrm{e}$

D．$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{2x}=\mathrm{e}$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1．求下列函数极限。（每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2n+1}{3n})$

（2）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

2．求下列函数极限。（每小题 5 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$

3．证明当$a+b=1$时，函数$f(x)=\begin{cases} e^x-b & (x<0) \\ a+x & (x\geq 0) \end{cases}$在$x=0$处连续。

4．设$f(x)=\sqrt{x}$，求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

5．若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a， b 的值。

6．设 $f(x)=\mathrm{e}^x-2$，求证在区间 $(0,2)$ 内至少有一点 x_0，使 $\mathrm{e}^{x_0}-2=x_0$

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第三章　导数与微分

第 9 次

导数的概念　导数的基本公式

理解：（1）导数反映了函数相对于自变量变化的快慢程度，即变化率问题。

（2）导数的几何意义。

记住：求导法则与常用的求导公式。

1．一物体的运动方程为$s=t^3+10$，求该物体在$t=3$时的瞬时速度。

2．求曲线$y=\sqrt[3]{x^2}$上点（1,1）处的切线方程与法线方程。

3．求下列各函数的导数。

（1） $y=3x^2-x+5$

（2） $y=x^{a+b}$

（3） $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$

（4） $y=\dfrac{1-x^3}{\sqrt{x}}$

（5） $y=x\ln x$

（6） $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

（7） $y=\tan x-x\tan x$

（8） $y=\dfrac{5\sin x}{1+\cos x}$

注：函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数可记为： $y'(x)=f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 10 次

复合函数求导法则

理解：复合函数的求导关键在于搞清复合关系，从外层到内层一步一步进行求导运算，不要遗漏。

求下列复合函数的导数。

（1） $y=(1+x^2)^5$

（2） $y=\sqrt{x^2-a^2}$

（3） $y=\ln(a^2-x^2)$

（4） $y=\cos^3\dfrac{x}{2}$

(5) $y=\sin 5x$

(6) $y=\sin x^{5}$

(7) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$

(8) $y=x^{2}\sin\frac{1}{x}$

(9) $y=\mathrm{e}^{4x}$

(10) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$

专业班级__________________　　姓名__________________　　学号__________________

第 11 次

隐函数求导法则　对数求导法则
参数方程求导法则

1．下列各题中的方程均确定 y 是 x 的函数，求 y'_x。（提示：把 y 看成 x 的函数，用复合函数求导法对方程两边关于 x 求导，然后解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$）

（1） $x^2+y^2-xy=1$

（2） $y=1+x\mathrm{e}^y$

2．求曲线 $y^3+y^2=2x$ 在点（1,1）处的切线方程与法线方程。

3．利用对数求导法求下列函数的导数。（提示：先对式子两边取自然对数，然后再对 x 求导，这样的对数求导法适用于幂指数函数、乘积、乘方、开方等形式）

（1） $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

（2） $y = \sin x^{\tan x}$

4．已知 $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。（提示：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$）

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 12 次

高阶导数

理解：二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。二阶导数可记为 $y''(x)$、$f''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，三阶导数可记为 $y'''(x)$、$f'''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$，当导数阶数 $n \geq 4$ 时，记为 $y^{(n)}(x)$、$f^{(n)}(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$。

1．求下列函数的二阶导数。

（1） $y = \ln(1 + x^2)$

（2） $y = x\mathrm{e}^{x^2}$

2．已知函数 $x^2 + y^2 = a^2\ (y > 0)$，求 y''_x。

3．求下列各函数的 n 阶导数。

（1） $y=3^x$

（2） $y=\ln(1+x)$

4．方程 $y-xe^y=1$ 确定 y 是 x 的函数，求 $y''\big|_{x=0}$ 。

第 13 次

微分

理解：函数的微分刻画了当自变量有微小变化时，函数变化的近似值。微分的研究可以在局部范围内实现“以直代曲”，用线性函数近似代替非线性函数，而线性函数是形式最简单、相对最易被研究的函数。

1．当 $x=1$，且（1）$\Delta x=1$，（2）$\Delta x=0.1$，（3）$\Delta x=0.01$ 时，分别求出函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 的改变量及微分，并加以比较，判断是否能得出结论：当 Δx 越小时，二者越近似。

2．求下列各函数的微分。

（1）$y=3x^2$　　（2）$y=\sqrt{1-x^2}$

（3）$y=\dfrac{x}{1-x^2}$　　（4）$y=\tan\dfrac{x}{2}$

3．证明当$|x|$很小时，下列近似公式成立。

（1）$e^x \approx 1+x$

（2）$\sqrt{1+x} \approx 1+\dfrac{x}{2}$

4．求$\ln 1.01$的近似值。

专业班级__________________　　　　　姓名__________________　　　　　学号__________________

习题三

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$ ____________。

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是__________________。

3. 若 $y=7x^4-3x^2+6x-2$，则 $y^{(4)}(4)=$ ____________。

4. 设 $y=f(x)$ 是可微函数，则 $\mathrm{d}f(x^2)=$ ____________。

5. 设 $y=x^x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____________。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 曲线 $y=x^2+2x-3$ 上切线斜率为 6 的点是（　　）。
   A. $(1,0)$
   B. $(-3,0)$
   C. $(2,5)$
   D. $(-2,-3)$

2. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$，则 $f'(0)=$（　　）。
   A. 6
   B. 3
   C. 2
   D. 0

3. 设 $f(x)$ 二阶可导， $y=f(\ln x)$，则 $y''=$（　　）。
   A. $f''(\ln x)$
   B. $f''(\ln x)\dfrac{1}{x^2}$
   C. $\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)+f'(\ln x)]$
   D. $\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$

4. $y=\cos^2 2x$，则 $\mathrm{d}y=$（　　）。
   A. $\sin^2 2x\mathrm{d}x$
   B. $2\sin^2 2x\mathrm{d}x$
   C. $-4\cos 2x\sin 2x\mathrm{d}x$
   D. $4\cos 2x\sin 2x\mathrm{d}x$

5．若 $f(u)$ 可导，且 $y=f(\mathrm{e}^x)$，则有 $\mathrm{d}y=$（　　）。

A．$f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

B．$f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

C．$[f(\mathrm{e}^x)]'\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

D．$[f(\mathrm{e}^x)]'\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1．求下列函数的导数。（每小题 5 分）

（1）$y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$

（2）$y=\sqrt{1+\ln^2 x}$

2．求下列参数方程所确定的函数的导数。（每小题 5 分）

（1）$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t}) \\ y=\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{t}) \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \sin t \\ y = \mathrm{e}^t \cos t \end{cases}$

3．设 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$，求 $y'(1)$。

4．求由方程 $y^x = x^y$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数。

5．求下列函数的微分。（每小题 5 分）

（1） $y=\sqrt{2-5x^2}$

（2） $y=\mathrm{e}^{2x}\sin\frac{x}{3}$

6．半径为 10cm 的金属圆片，加热后半径伸长了 0.05cm，求所增加面积的精确值与近似值。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第四章　中值定理与导数的应用

第 14 次

中值定理　洛必达法则

理解：(1) 微分中值定理是应用导数研究函数以及曲线性质的重要工具。导数只反映函数在一点附近的局部特性，要应用它来研究函数在某区间上的整体性质，则要借助于微分中值定理，因此微分中值定理是沟通函数及其导数的桥梁。

(2) 应用洛必达法则可对未定式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 求极限。不是未定式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的，用分式性质或对数恒等式等变形可使其成为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后检查洛必达法则成立的条件，看是否适用。若使用洛必达法则一次后还是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，可考虑再次使用洛必达法则。同时，洛必达法则可与其他求极限方法（如等价无穷小替代或重要极限方法）结合使用，先化简再使用洛必达，使运算更加简单。

1．利用拉格朗日中值定理证明不等式：$|\sin x_2 - \sin x_1| \le |x_2 - x_1|$

2．利用洛必达法则求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

（2）$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

（3）$\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1})$

（4）$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

（5）$\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$

第 15 次

函数的增减性　函数的极值

记住：(1) 单调区间的求解步骤：①先求出函数 $y = f(x)$ 定义域；②求函数的导数 $y' = f'(x)$，再求函数的驻点($y' = 0$ 的解)和不可导点；③根据驻点和不可导点把定义域划分为几个区间，根据导数在各区间的符号大于0还是小于0判定单增还是单减。

(2) 极值是一个局部的概念，最大(小)值是一个整体概念。函数 $f(x)$ 的极值求解步骤：①求出 $f'(x)$；②求 $f(x)$ 的所有驻点和不可导点；③判断 $f'(x)$ 在每个驻点和不可导点两侧是否异号，以确定该点是否极值点；④求出各极值点的函数值。

1．根据函数单调性证明不等式：$2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$　（$x > 0$，$x \neq 1$）。

2．求下列函数的单调区间。

(1) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

（2） $y=2x^2-\ln x$

3．求下列函数的极值。

（1） $y=x^3-3x^2+7$

（2） $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 16 次

最大值与最小值　极值的应用问题

记住：最值应用题的求解步骤：（1）根据问题适当设自变量，建立目标函数 $f(x)$，并确定定义域；（2）求 $f(x)$ 的最值：求驻点，用充分条件判定极值，根据实际问题确定最值。

1．求函数 $y=\ln(x^2+1)$ 在[-1,2]上的最值。

2．欲做一个容积为 300 m^3 的无盖圆柱形蓄水池，已知池底单位造价为池壁单位造价的两倍，问蓄水池的尺寸应该怎样设计才能使总造价最低？

3．已知函数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ （$a>0$）在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 3，最小值为-29，求 a， b 的值。

4．某厂生产某种商品，其年销售量为 100 万件，每批生产须增加准备费 1000 元，而每件的库存费为 0.05 元，如果年销售率是均匀的，且上批销售完后，立即再生产下一批（此时商品库存数为批量的一半），问应分几批生产，能使生产准备费及库存费之和最小？

第 17 次

曲线的凹向与拐点　函数图形的作法

记住：（1）拐点和凹凸区间的求解步骤：①先求出二阶导数 $f''(x)$；②解出 $f''(x)=0$ 在定义域 I 上的实根以及 I 内 $f''(x)$ 不存在的点；③对上面求出的每个点 x_0，若 $f''(x)$ 在 x_0 两侧符号相反，则 $[x_0, f(x_0)]$ 是拐点。

（2）三种渐近线定义：

① 若 $\lim\limits_{x\to x_{0^+}} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_{0^-}} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线；

② 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

③ 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$，则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线。

1．确定下列曲线的凹向与拐点。

（1） $y=x^2-x^3$

（2） $y=xe^x$

2. 求曲线 $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 的渐近线。

3. 求曲线 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 在拐点处的切线方程。

4. 画出函数 $y = 3x - x^3$ 的图形。

第 18 次

变化率及相对变化率在经济中的应用——边际分析与弹性分析介绍

理解：（1）设函数 $y=f(x)$ 可导，导函数 $f'(x)$ 也称为边际函数。$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的变化率，也称为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的边际函数值。其具体含义：$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处，当 x 产生一个单位的改变时，y（近似）改变 $f'(x_0)$ 个单位。

（2）设成本函数 $C=C(Q)$（C 为总成本，Q 为产量），其变化率 $C'=C'(Q)$ 称为边际成本。$C'(Q_0)$ 称为当产量为 Q_0 时的边际成本，其经济含义：在产量为 Q_0 时，再多生产一个单位的产品，成本（近似）改变 $C'(Q_0)$ 个单位。同样理解边际收益、边际利润。

（3）两点间的弹性 $\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 反映了在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 两点间，随着 x 的变化，$f(x)$ 变化的平均幅度大小；点弹性 $E=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 反映了在点 x_0 处，随着 x 的变化，$f(x)$ 变化的幅度大小，也就是 $f(x)$ 对 x 变化的反应强烈程度或敏感度。由此可定义需求弹性、供给弹性。

1．某化工厂日产能力最高为 1000 吨，每天的生产总成本 C（单位：元）是日产量 x（单位：吨）的函数：

$$C=C(x)=1000+7x+50\sqrt{x}\qquad x\in[0,1000]$$

（1）求当日产量为 100 吨时的边际成本。

（2）求当日产量为 100 吨时的平均单位成本。

2．某商品价格 P 与需求量 Q 的关系为：

$$P = 10 - \frac{Q}{5}$$

（1）求需求量为 20 及 30 时的总收益 R、平均收益 $\overline{R}$ 及边际收益 R'。

（2）Q 为多少时总收益最大？

3．设某商品需求量 Q 对价格 P 的函数关系为

$$Q = f(P) = 1600(\frac{1}{4})^P$$

求需求 Q 对于价格 P 的弹性函数。

4．某商品的需求函数为

$$Q = Q(P) = 75 - P^2$$

（1）求 $P = 4$ 时的边际需求，并说明其经济意义。

（2）求 $P = 4$ 时的需求弹性，并说明其经济意义。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

习题四

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 若函数 $y=ax^2+2x+c$ 在点 $x=1$ 取得极大值 2，则 $a=$______， $c=$_______。

2. 曲线 $y=(x-1)^3-1$ 的拐点是__________________。

3. 曲线 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 有___________渐近线，其方程为___________________。

4. 某商品的销售量为 q，成本函数为 $C=C(q)$，收入函数为 $R=R(q)$，则边际成本为_________，边际收入为___________，边际利润为____________。

5. 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的弹性 $E=$__________，它反映了当 x 变化 1% 时， $f(x)$ 的变化为_____________。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）是使用洛必达法则计算未定式 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的（　　）。

   A. 必要条件
   B. 充分条件
   C. 充要条件
   D. 无关条件

2. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有（　　）。

   A. 一个实根
   B. 两个实根
   C. 三个实根
   D. 无实根

3. 函数 $f(x)=x-\ln(1+x^2)$ 在定义域内（　　）。

   A. 无极值
   B. 极大值为 $1-\ln 2$
   C. 极小值为 $1-\ln 2$
   D. $f(x)$ 为非单调函数

4. 若收入函数 $R(q)=150q-0.01q^2$（元），则当产量 $q=100$ 时，边际收入是（　　）。

   A. 150 元
   B. 149 元

C. 148元

D. 147元

5. 需求量q对价格p的函数为$q(p)=100\times 2^{-p}$，则需求弹性$E_p=$（　　）。

A. $p\ln 2$

B. $-p\ln 2$

C. $\ln 2$

D. $-\ln 2$

三、计算题（6个小题，每题10分，共60分）

1. 求下列极限。（每小题5分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1})$

2．求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值。

3．设把一根长为 a 的铅丝切成两段，一段围成圆形，另一段围成正方形，问这两段铅丝各为多长时，圆形面积与正方形面积之和最小？

4．某工厂生产某产品，日总成本为 C 元，其中固定成本为 200 元，每多生产一单位产品，成本增加 10 元。该商品的需求函数为 $Q=50-2P$，求 Q 为多少时，工厂日总利润 L 最大？

5．已知函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，试确定 a 的值，并指出它有极大值还是极小值，求出此极值。

6．设某商品的需求函数为

$$Q=3000\mathrm{e}^{-0.02p}$$

求价格为100时的需求弹性并解释其经济含义。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第五章 不定积分

第 19 次

不定积分的概念 不定积分的性质

理解：（1）原函数。

（2）不定积分及其符号表示。

1．若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^{2x} + C$，求 $f(x)$。

2．已知函数 $y = f(x)$ 的导数等于 $x+2$，且 $x=2$ 时 $y=5$，求这个函数的表达式。

3．若$\frac{2}{3}\ln\cos 2x$是$f(x)=k\tan 2x$的一个原函数，求k。

4．已知某产品产量的变化率是时间t的函数$f(t)=at+b$（a，b是常数），设此产品经过t时间的产量函数为$P(t)$，已知$P(0)=0$，求$P(t)$。

注：给定函数，求导数（或微分）是微分问题；反过来，给定函数的导数（或微分），求该函数是不定积分问题，求导（或微分）与求不定积分互为逆运算。

第 20 次

基本积分公式

记住：常用的基本积分公式。

求下列不定积分。

（1）$\int(1-3x^2)\mathrm{d}x$

（2）$\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\mathrm{d}x$

（3）$\int\sin^2\frac{u}{2}\mathrm{d}u$

(4) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$

(5) $\int (2^x + x^2) dx$

(6) $\int (\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}) dx$

(7) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

第 21 次

第一换元积分法

理解：第一换元积分法也称凑微分法。根据具体的题目，凑成需要的微分，凑微分的目的是为了应用基本积分公式求得不定积分。适当练习些题目，可掌握凑微分规律。

求下列不定积分。

（1）$\int (1-3x)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$

（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)^2}$

（3）$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$

（4） $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

（5） $\int e^{\sin x}\cos x dx$

（6） $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

第 22 次

第二换元积分法

理解：根式变换。

求下列不定积分。

（1）$\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-3}+1}$

（3） $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx$

（4） $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

第 23 次

分部积分法

理解：设 $u(x)$，$v(x)$ 具有连续导数，则有 $\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x$ 或 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ 。

分部积分法的关键是 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取，其一般原则是：

（1）$\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积出。

（2）v 要容易求得。

1．求下列不定积分。

（1）$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

（2）$\int x\sin x\mathrm{d}x$

（3）$\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$

2．若 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$ 。

3．设 $f'(\mathrm{e}^x)=1+x$，求 $f(x)$。（提示：令 $t=\mathrm{e}^x$）

第 24 次

综合杂例

1．如果$\dfrac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，证明：$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\cos x-\dfrac{2\sin x}{x}+C$

2．若$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，求$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x$。

3．设生产 x 单位某产品的总成本 C 是 x 的函数 $C(x)$，固定成本（即 $C(0)$）为 20 元，边际成本函数为 $C'(x)=2x+10$（元/单位），求总成本函数 $C(x)$。

4. 设某商品的需求量 Q 是价格 P 的函数，该商品的最大需求量为 1000（即 $P=0$ 时，$Q=1000$），已知需求量的变化率（边际需求）为

$$Q'(P)=-1000\ln 3\cdot(\frac{1}{3})^{P}$$

求需求量 Q 与价格 P 的函数关系。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

习题五

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} + C$，则 $f(x) =$_____________。

2. 若 $f(x) = k\tan 2x$ 的一个原函数是 $\frac{2}{3}\ln\cos 2x$，则 $k =$___________。

3. 若 $y' = 2x$，且 $x = 1$ 时 $y = 2$，则 $y =$___________。

4. 通过点 $(\frac{\pi}{6},1)$ 的积分曲线 $y = \int \sin x\mathrm{d}x$ 的方程是______________________。

5. $\int$______$\mathrm{d}x = 7^{2x} + C$。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{1}{x}$，则 $f'(x) =$（　　）。

A. $\ln|x|$　　　　B. $\frac{1}{x}$

C. $-\frac{1}{x^2}$　　　　D. $\frac{2}{x^3}$

2. 设 $f'(x)$ 存在且连续，则 $[\int \mathrm{d}f(x)]' =$（　　）。

A. $f(x)$　　　　B. $f'(x)$

C. $f'(x) + C$　　　　D. $f(x) + C$

3. 设某产品当产量为 q 时的边际成本是 $C'(q)$，生产该产品的固定成本是 C_0，则总成本函数 $C(q) =$（　　）。

A. $\int C'(q)\mathrm{d}q + C_0$

B. $\int C'(q)\mathrm{d}q + C$

C. $\int C'(q)\mathrm{d}q$

D. $\int C'(q)\mathrm{d}q - C_0$

4. 若 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x =$（　　）。

A. $x\cos x - \sin x + C$

B. $x\sin x + \cos x + C$

C. $x\cos x + \sin x + C$

D. $x\sin x - \cos x + C$

5．设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$（　　）。

A．$-\frac{1}{x}+C$　　B．$-\ln x+C$

C．$\frac{1}{x}+C$　　D．$\ln x+C$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1．求下列不定积分。（每小题 5 分）

（1）$\int\mathrm{e}^{x}\sqrt{3+2\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$

（2）$\int\sin\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$

2．求下列不定积分。（每小题 5 分）

（1）$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

（2）$\int e^{\sqrt{x}}dx$

3．若 $f'(e^x)=1+e^{2x}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$。

4．设 $f'(e^x)=1+x$，求 $f(x)$。

5．若 $\int f(x)dx=x^2+C$，求 $\int xf(1-x^2)dx$。

6. 设某商品的需求量 Q 是价格 P 的函数, 该商品的最大需求量为 1000（即 $P=0$ 时, $Q=1000$）, 已知需求量的变化率（边际需求）为

$$Q'(P)=-1000\ln 3\left(\frac{1}{3}\right)^{P}$$

求需求量 Q 与价格 P 的函数关系。

专业班级________________　　　　姓名________________　　　　学号________________

总复习题一

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(2x)$ 的定义域为（　　）。

A. $[0,1]$　　B. $[0,2]$

C. $[0,\frac{1}{2}]$　　D. 实数域

2. 当 $x\to 0$ 时，下列函数中为无穷小的是（　　）。

A. $\frac{x^2+1}{x^3}$　　B. $\cos x$

C. $\frac{\sin x}{x}$　　D. $x\sin\frac{1}{x}$

3. 当 $x\to 0$ 时，$x^2\tan x \sim x^n$，则 $n=$（　　）。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^x}{2x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 满足（　　）。

A. $a=1$　　B. $a=2$

C. $a=\frac{1}{2}$　　D. $a=-\frac{1}{2}$

5. 已知 $f(x)=x^3+10x^2-100$，则 $f^{(4)}(3)=$（　　）。

A. 0　　B. 3

C. 6　　D. 9

6. 下列等式中错误的是（　　）。

A. $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$　　B. $2^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2^x)$

C. $\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$　　D. $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\sqrt{x})$

7. 若函数 $y=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有极值，则 a 的值为（　　）。

A. $\frac{1}{2}$ B. 2

C. 3 D. $\sqrt{3}$

8．某商品的需求函数为 $q=75-p^2$，q 为该商品的需求量，则价格为 5 时的需求弹性为（　　）。

A. 1 B. $-\frac{1}{2}$

C. -1 D. -2

9．设 $f(x)=\sin 2x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为（　　）。

A. $2\cos 2x$ B. $-\frac{1}{2}\cos 2x$

C. $\cos 2x$ D. $\frac{1}{2}\cos 2x$

10．设 $f'(x)$ 存在，则 $[\int \mathrm{d}f(x)]'=$（　　）。

A. $f'(x)$ B. $f'(x)+C$

C. $f(x)$ D. $f'(x)\mathrm{d}x$

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1．某商品的需求与供给函数分别为 $Q=10-p$，$S=4p-10$，则该商品的均衡价格 p_0 为__________。

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n=$__________。

3．设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $\mathrm{d}y=$__________。

4．已知 $(1,a)$ 为曲线 $y=x^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$______，$b=$______。

5．某商品价格为 100 元时的弹性 $E=-\frac{1}{2}$，则当价格提高到 120 元时该商品的需求量将下降约__________%。

6．不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$__________。

三、计算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-4x^2+4x}$。

2．设 $y=\ln(a^2-x^2)$，求 y''。

3．设 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+14$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值（列表）。

4．求不定积分 $\int\frac{3\ln^2 x+\ln x+1}{x\ln x}\mathrm{d}x$。

5．求不定积分$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x$。

四、应用题（12 分）

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C(x)=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$ (元)，（1）求产量为100件时的平均成本；（2）求产量为100件时的边际成本；（3）若产品以每件500元售出，求利润函数 $L(x)$，并求利润最大时的产量。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

总复习题二

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x-1}=$（　　）。

A. 1　　　　B. ∞

C. e^2　　　　D. e^3

2. 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x$ 是关于 x 的（　　）。

A. 同阶无穷小　　　　B. 低阶无穷小

C. 高阶无穷小　　　　D. 等价无穷小

3. 函数 e^x 与 ex 满足关系式（　　）。

A. $e^x\leq ex$　　　　B. $e^x\geq ex$

C. $e^x>ex$　　　　D. $e^x<ex$

4. 设 $f'(x)=g(x)$，则 $\dfrac{d}{dx}f(\sin^2 x)=$（　　）。

A. $2g(x)\sin x$　　　　B. $g(x)\sin 2x$

C. $g(\sin^2 x)\sin 2x$　　　　D. $g(\sin^2 x)$

5. 曲线 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 的拐点个数是　（　　）。

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 0

6. 下列等式中错误的是（　　）。

A. $e^{2x}dx=2de^{2x}$　　　　B. $e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}d(e^{2x})$

C. $2dx=d(2x)$　　　　D. $\dfrac{1}{x}dx=d(\ln|x|)$

7. 对需求函数 $Q=e^{-\frac{p}{5}}$，需求价格弹性 $E=-\dfrac{p}{5}$，若需求量减少的幅度小于价格提高的幅度，则价格 $p=$（　　）。

A. 3　　　　B. 5

C. 6　　　　D. 10

8. 若 $f(x)$ 的导函数是 x^{-2}，则 $f(x)$ 有一个原函数为（　　）。

A. $\ln x$　　B. $-\ln|x|$

C. $-x^{-1}$　　D. $-x^{-3}$

9. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln(x+1)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} =$（　　）。

A. 2　　B. -2

C. -1　　D. 1

10. 若 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$，则 $f(x) =$（　　）。

A. $\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 x + C$　　B. $x - \dfrac{1}{2}x^2 + C$

C. $\cos x - \sin x + C$　　D. $\dfrac{1}{2}x^2 - x + C$

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+5}{3n-2} = 2$，则 $a =$__________，$b =$__________。

2. 若当 $x \to x_0$ 时，α 与 β 是等价无穷小量，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta} =$__________。

3. 曲线 $y = x^2 + 2x - 5$ 上点 M 处的切线斜率为 6，则点 M 的坐标为__________。

4. 若 $y = \sin x^2$，则 $\mathrm{d}y =$__________。

5. 设总收益函数和总成本函数分别为 $R = 24Q - 2Q^2$，$C = Q^2 + 5$，则当利润最大时产量 Q 是__________。

6. $\mathrm{d}[\int xf'(x)\mathrm{d}x] =$__________。

三、计算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^x-1)}{1-\cos x}$。

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & (x<0)\\ a & (x=0)\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b & (x>0)\end{cases}$，求 a，b 的值，使 $f(x)$ 在（-∞，+∞）上连续。

3. 设 $e^{x+y}=xy+1$，求 y' 及 $y'|_{x=0}$。

4. 求不定积分 $\int xe^{-2x}dx$。

5．求不定积分 $\int\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 。

四、应用题（12 分）

一个星级旅馆有150间客房，经过一段时间的经营实践，旅馆经理得到一些数据：若每间客房定价为160元，住房率为55%；每间客房定价为140元，住房率为65%；每间客房定价为120元，住房率为75%；每间客房定价为100元，住房率为85%。欲使每天收益最高，每间客房定价应为多少？

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

总复习题三

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 与 $f(x)=|x|$ 等价的函数是（　　）。

A. x　　　　B. $(\sqrt{x})^2$

C. $(\sqrt[3]{x})^3$　　　　D. $\sqrt{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} =$

A. 0　　　　B. ∞

C. 不存在　　　　D. 都不对

3. 当 $x\to 0^+$ 时，下列变量是无穷小的有（　　）。

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　　　B. 2^x+3^x-1

C. $\ln x$　　　　D. $\dfrac{\cos x}{x}$

4. 经过点 $(1,2)$ 且切线斜率为 $4x^3$ 的曲线方程为（　　）。

A. $y=x^4$　　　　B. $y=x^4+c$

C. $y=x^4+1$　　　　D. $y=x^4-1$

5. 若 $f(x)=x\cos x$，则 $f''(x)=$（　　）。

A. $\cos x+x\sin x$　　　　B. $\cos x-x\sin x$

C. $-2\sin x-x\cos x$　　　　D. $2\sin x+x\cos x$

6. 曲线 $y=x+x^{\frac{5}{3}}$ 在下列哪个区间内是凹弧（　　）。

A. $(-\infty,0)$　　　　B. $(0,+\infty)$

C. $(-\infty,+\infty)$　　　　D. 都不对

7. 某型号手机 2000 元，此时 $E=-2$，若提价 20 元，需求量（　　）。

A. 增加 1%　　　　B. 减少 2%

C. 增加 2%　　　　D. 减少 1%

8. 若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int \mathrm{d}F(x)=$（　　）。

A. $f(x)$　　　　B. $F(x)$

C. $f(x)+C$　　　　D. $F(x)+C$

9. 若$\int f(x)\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sin x}+C$，则$f(x)=$（　　）。

A. $\sin x$　　　　B. $-\sin x$

C. $\cos x$　　　　D. $-\cos x$

10. 设某商品生产x件时总费用$F(x)$的变化率为$f(x)=0.4x-6$，且$F(0)=60$（单位：元/件），则总费用函数$F(x)=$（　　）。

A. $0.4x^2-6x$　　　　B. $0.2x^2-6x$

C. $0.2x^2-6x+60$　　　　D. $0.2x^2-6x-60$

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=3$，则$a=$__________，$b=$__________。
2. 设$y=\ln(x+1)$，那么$y^{(n)}(x)=$__________。
3. 由方程$\mathrm{e}^y-x^2y=0$所确定的隐函数的导数为__________。
4. 在积分曲线族$\int 2x\mathrm{d}x$中，过点$(0,1)$的曲线方程是__________。
5. 某商品的需求函数为$Q=12-\dfrac{P}{2}$，则当$P=6$时的需求价格弹性为__________。
6. $\int f'(2x)\mathrm{d}x=$__________。

三、计算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$。

2．设 $y = \mathrm{e}^{x}\cos 3x$，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$。

3．求函数 $y = x^{3} - 3x^{2} - 9x$ 的极值。

4．求不定积分 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

5．求不定积分$\int x\ln(x+1)\mathrm{d}x$。

四、应用题（12 分）

求由抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$与过焦点$(0,1)$的弦所围成的图形面积的最小值。

微积分练习册（下）

主　编　杨　新　钱贺斌
副主编　陈　勇　罗　琳

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

全书练习题与配套教材章节顺序相同，共包含九章：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程。本习题册的形式为学生作业本，一方面比较规范，便于教师批改，另一方面减轻了学生抄作业题的负担，同时也便于作业本的保留。

本书可作为应用型本科高校、高职高专院校理工科专业大学数学课程配套习题册。

图书在版编目（CIP）数据

微积分练习册：全 2 册 / 杨新，钱贺斌主编. —北京：电子工业出版社，2016.8

ISBN 978-7-121-29673-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杨… ②钱… Ⅲ. ①微积分—高等学校—习题集 Ⅳ. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 188787 号

策划编辑：郭乃明
责任编辑：郭乃明　　特约编辑：范　丽
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：19.75　字数：263 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元（上、下册）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010) 88254561，guonm@phei.com.cn。

前　　言

本书是与中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础（一）：微积分》一书相配套的实训练习册，该练习册对各章节知识点进行了归纳整理，相信使用者能结合课堂所学，通过一定数量的习题练习，学好微积分这门重要的基础课程，为其他专业必修课程打好基础。

本教材分上下册，共九章，上册包含函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分共 5 章内容；下册包含定积分、无穷级数、多元函数、微分方程共 4 章内容，编写顺序与原教材相同，每章分为若干节，每节以模块形式组织内容，符合学生的认知规律。

本教材编写的指导思想是：把数学作为重要的基础课和工具课，以必需、适用、够用为原则，以专业服务为导向，以用熟悉建模的方法培养学生分析问题和解决问题的能力为归宿。

本书有以下特点：

1．与其他“高等数学”教材内容紧密衔接，为应用型院校财经专业学生提供专业学习所必需的数学基础知识和方法。

2．注重考查学生对所学知识本质的理解，本习题册结构严谨、逻辑清晰、选题丰富、类型多样、通俗易懂，包含了专业所要求的所有教学要点，保持了知识的连续性、完整性，使得课程的学习真正做到学以致用、学能够用。

3．教材扩大了适用面，在保证教学基本要求的前提下，根据各专业差异，在教学内容的选择上留有一定的余地。

本书由四川工商学院教研室全体成员共同编写完成。由杨新、钱贺斌担任主编，陈勇、罗琳任副主编。由于编审人员水平有限，不足之处在所难免，恳请各界同仁、有关专家和学者使用本书时进行批评和指正，将遇到的问题以及改进意见及时反馈给我们，以便于我们修订此书时加以改进。

编者

2016 年 7 月

目　　录

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第六章　定积分

第 1 次

定积分的定义　定积分的基本性质

理解:（1）定积分与不定积分的区别：前者是一个具体的数值，它与上、下限有关，后者是原函数的全体。

（2）定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示：由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形中，在 x 轴上方各图形面积之和，减去在 x 轴下方各图形面积之和。

（3）定积分的值仅与被积函数 f 及区间 $[a,b]$ 有关，而与对区间 $[a,b]$ 的分法及对点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的取法无关，也与积分变量 x 的记法无关，即：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

1．利用定积分的几何意义，求下列积分。（提示：画出图形）

（1）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=$__________________　　　　（2）$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$__________________

2．不计算积分，比较下列各组积分值的大小。

（1）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$，$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$

（2）$\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，$\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

3．估计下列积分值。

（1）$\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

（2）$\int_{1}^{2} (2x^3 - x^4)\mathrm{d}x$

4．如果 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且平均值为 2，求 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 2 次

微积分基本定理

理解：变上限的定积分求导

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$

（2）当积分上限，甚至积分下限，都是 x 的函数时，就要应用复合函数的求导法则进行求导。如对 $\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 的求导，可令 $u=\varphi(x)$，则利用复合函数求导法则求导有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\int_a^u f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

1．求下列函数的导数。

（1）$F(x)=\int_0^x \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$

（2）$F(x)=\int_{x^3}^{x^2} \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

2．计算下列定积分。（记住：牛顿—莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数）

（1）$\int_{-1}^1 (x^3-3x^2)\mathrm{d}x$

（2）$\int_1^{27} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$

(3) $\int_1^2 (\frac{1}{x} + e^x)dx$

(4) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

(5) $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx$

3．求下列极限。（提示：所求极限如为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，可考虑用洛必达法则）

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x}$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$

第 3 次

定积分的换元法

理解：应用换元公式应注意：用 $x=\varphi(t)$ 把原来的变量 x 代换成新变量 t 时，积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限。

1．计算下列定积分。

（1）$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$

（2）$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$

（3）$\int_0^5 \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x$

（4）$\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

（5）$\int_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

（6）$\int_{0}^{1}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

2．试分析k，a，b为何值时满足$\int_{0}^{2}x^2 f(x^3)\mathrm{d}x=k\int_{a}^{b}f(t)\mathrm{d}t$？

第 4 次

定积分的分部积分法

理解：分部积分法是定积分计算的一个重要方法，特别适用于当被积函数可看成两个函数的乘积的情况，其应用关键是恰当地选取u和v，其寻找u和v的思路同不定积分一样。此外，分部积分法常与换元法一起使用。

1．计算下列积分。

（1）$\int_1^{e} \ln x\mathrm{d}x$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\mathrm{d}x$

（3）$\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x\mathrm{d}x$

2．设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。（提示：应用分部分法）

第 5 次

定积分的应用　广义积分与 Γ 函数

理解：定积分的微元法体现了化整为零、积少成多的思想，切丝求面积、切片求体积时须使所表达的面积微元、体积微元在相应区间具有可加性。这一思想也适用于其他从微观入手的实际问题。

1．求下列各题中平面图形的面积。

（1）曲线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围成的图形

（2）曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=0$， $y=1$ 所围成的图形

（3）曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$， $x=2$ 所围成的图形

2．求下述平面图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转产生的旋转体的体积：
曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=2$， $y=0$ 所围成的图形。

3．已知某产品生产 x 个单位时，总收益 R 的变化率（边际收益）为：

$$R'=R'(x)=200-\frac{x}{100} \quad （x \geq 0）$$

（1）求生产了 50 个单位时的总收益。
（2）如果已经生产了 100 个单位，求再生产 100 个单位时的总收益。

4．判断下列广义积分的敛散性。（提示：对无限区间上的积分，应先求原函数，再代值求极限）

（1） $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

（2） $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

专业班级________________　　　　姓名________________　　　　学号________________

习题六

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1．曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$， $x^2+y^2=8$ 所围成的平面图形的面积（上半平面部分）= ____________（用定积分表示）。

2. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$ __________ $+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$。

3. 已知 $f(0)=1$， $f(2)=3$， $f'(2)=5$，则 $\int_0^2 xf''(x)\mathrm{d}x=$ __________。

4. 设 $f(x)$ 是连续函数， $F(x)=\int_{x^2}^{\mathrm{e}^x} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(0)=$ __________。

5. 若某产品产量的变化率是时间 t 的函数：

$$f(t)=2t+5\,(t/h),\quad t\geq 0$$

且当 $t=0$ 时，产量为零，则从 $t=0$ 到 $t=5$ 时的总产量为______________。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. $\int_a^x f'(2t)\mathrm{d}t=$（　　）。

A. $2[f(x)-f(a)]$　　　　B. $f(2x)-f(2a)$

C. $2[f(2x)-f(2a)]$　　　　D. $\dfrac{1}{2}[f(2x)-f(2a)]$

2. 下列积分值为零的是（　　）。

A. $\int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x$　　　　B. $\int_{-1}^{1} x\sin^2 x\mathrm{d}x$

C. $\int_{-1}^{1} x\sin x\mathrm{d}x$　　　　D. $\int_{-1}^{1} x^2\sin^2 \mathrm{d}x$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=$（　　）。

A. 1　　　　B. 0

C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. $\dfrac{1}{3}$

4. $\int_0^a x(2-3x)\mathrm{d}x=2$，则 $a=$（　　）。

A. -1　　　　B. 1

C．0　　　　D．$\dfrac{1}{2}$

5．若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值为（　　）。

A．$\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$　　　　B．$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

C．$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　　　D．$\dfrac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1．求下列定积分。（每小题 5 分）

（1）$\int_0^1 (x^2+1)^3 x\mathrm{d}x$

（2）$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

2．求下列定积分。（每小题 5 分）

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$

（2）$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

3．求由方程$\int_0^y \mathrm{e}^t \mathrm{d}t + \int_0^x \cos t \mathrm{d}t = 0$确定的隐函数$y = y(x)$的导数。

4．求函数$F(x) = \int_0^x t(t-4)\mathrm{d}t$在区间$[-1,5]$上的最大值与最小值。

5．（1）求由曲线$y = \mathrm{e}^x$，$y = \mathrm{e}^{-x}$及$x = 1$所围成的平面图形的面积。

（2）求上述图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

6．设某产品的边际成本是产量 Q 的函数

$$C'(Q)=4+0.25Q \quad （万元/t）$$

边际收入也是产量 Q 的函数

$$R'(Q)=80-Q \quad （万元/t）$$

（1）求产量由 $10t$ 增加到 $50t$ 时，总成本与总收入各增加多少？

（2）设固定成本为 $C(0)=10$（万元），求总成本函数和总收入函数。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第七章 微分方程与差分方程简介

第 6 次

微分方程的一般概念 一阶微分方程（一）

理解：（1）微分方程的概念。

（2）微分方程的阶。

（3）微分方程的解与通解。

（4）微分方程的初始条件、特解与初值问题。

（5）分离变量法求解微分方程。

1．验证下列各给定函数是否是其对应微分方程的解。

（1） $y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2y}{x^2}=0$， $y=C_1x+C_2x^2$

（2） $y''-7y'+12y=0$， $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{4x}$

2．求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解。

（1） $(1+y)\mathrm{d}x-(1-x)\mathrm{d}y=0$

（2） $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}y}{x}=0$， $y\big|_{x=3}=4$

（3） $y'\sin x-y\cos x=0$， $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$

第 7 次

一阶微分方程（二） 几种二阶微分方程

记住：（1）一阶线性齐次微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解公式：$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

（2）一阶线性非齐次微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式：

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

（3）用逐次积分法降阶求高阶微分方程 $y^{(n)}=f(x)$。

1．求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解。

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$

（3） $xy' + y = 3$， $y|_{x=1} = 0$

2．求 $y'' = \mathrm{e}^{2x}$ 的通解。

第 8 次

二阶常系数线性微分方程

1．求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解。

（1） $y''-4y'+3y=0$

（2） $y''-5y'+6y=0$， $y'\big|_{x=0}=1$， $y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

（3） $y''-6y'+9y=0$， $y'\big|_{x=0}=2$， $y\big|_{x=0}=0$

2．求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解。

（1） $y'' - 6y' + 13y = 14$

（2） $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{2x}$

（3） $y'' - 4y = 4$， $y'\big|_{x=0} = 0$， $y\big|_{x=0} = 1$

第 9 次

差分方程的一般概念

1．求下列函数的差分。

（1） $y_x = c$ （c 为常数），求 Δy_x

（2） $y_x = x^2 + 2x$，求 $\Delta^2 y_x$

（3） $y_x = a^x$ （$a > 0$， $a \neq 1$），求 $\Delta^2 y_x$

2．确定下列方程的阶。

（1） $y_{x+3}-x^2y_{x+1}+3y_x=2$

（2） $y_{x-2}-y_{x-4}=y_{x+2}$

3．验证函数 $y_x=C_1+C_2 2^x$ 是差分方程 $y_{x+2}-3y_{x+1}+2y_x=0$ 的解，并求 $y_0=1$，$y_1=3$ 时方程的特解。

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

习题七

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 微分方程 $(y')^2 + y'(y'')^3 + xy^4 = 0$ 的阶是___________。
2. $y'' = \mathrm{e}^{-x}$ 的通解为_________________。
3. $y' = 2xy$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 2$ 的特解为______________。
4. $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解为___________________。
5. 某商品的需求函数为 $Q = Q(p)$，p 为商品价格，若该商品的需求弹性 $E = -k$（k 为常数，$k > 0$），则需求量 Q 与价格 p 的关系为 $Q =$ _______________。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 以下方程是一阶线性微分方程的是（　　）。
   A. $y' = \mathrm{e}^{x+y}$
   B. $y' = \dfrac{x}{y}$
   C. $y'' + xy' + y = 0$
   D. $y' - y = \ln x$
2. $y^2\mathrm{d}x - (1-x)\mathrm{d}y = 0$ 是（　　）微分方程。
   A. 一阶线性齐次
   B. 一阶线性非齐次
   C. 可分离变量
   D. 二阶线性齐次
3. 下列函数中（　　）是微分方程 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ 的通解。
   A. $x + y = C$
   B. $x^2 + y^2 = C$
   C. $Cx + y = 0$
   D. $Cx^2 + y^2 = 0$
4. 若 $y_1 = \mathrm{e}^{3x}$，$y_2 = x\mathrm{e}^{3x}$，则它们所满足的微分方程为（　　）。
   A. $y'' + 6y' + 9y = 0$
   B. $y'' - 9y = 0$
   C. $y'' + 9y = 0$
   D. $y'' - 6y' + 9y = 0$
5. 设 y_1，y_2 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解，则 $y = c_1y_1 + c_2y_2$（c_1、c_2 为

任意常数）（　　）。

A．是此方程的通解

B．是此方程的特解

C．不一定是该方程的解

D．是该方程的解

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1．求 $y^2\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $x=0$， $y=1$ 的特解。

2．求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1-2x}{x^2}y-1=0$ 的通解。

3．求 $y''' + \cos x = \sin x$ 的通解。

4．求方程 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = 0$ 满足初始条件 $s\big|_{t=0} = 4$， $s'\big|_{t=0} = -2$ 的特解。

5．已知某产品的利润 L 是广告支出 x 的函数，且满足 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=b-a(L+x)$（$a>0$，$b>0$，常数）当 $x=0$ 时，$L(0)=L_0$，求利润函数 $L(x)$。

6．某林区现有木材 10 万立方米，如果在每一瞬间木材的变化率与当时的木材数成正比，假设 10 年内该林区能有木材 20 万立方米，试确定木材数 P 与时间 t 的关系。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第八章　多元函数

第 10 次

空间解析几何简介　多元函数的概念
二元函数的极限与连续

1．求下列函数的定义域并在平面上画出对应区域。

（1） $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

（2） $z=\ln(-x-y)$

2．求下列各极限。

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x+y-1}{xy+1}$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{\ln(xy+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin xy}{x}$

第 11 次

偏导数与全微分（一）

1．求下列函数的偏导数。

（1） $z = x^2 y^2$

（2） $z = \mathrm{e}^{\sin x} \cos y$

（3） $z = \ln \dfrac{y}{x}$

（4） $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2．求下列函数的偏导数。

（1） $z=x\ln(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

（2） $u=\mathrm{e}^{xyz}$，求 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 12 次

偏导数与全微分（二）

记住：全微分公式。

1．求下列函数的全微分。

（1）$z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

（2）$z=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$

（3） $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

2．求函数 $z = x^2 y^3$ 当 $x = 2$， $y = -1$， $\Delta x = 0.02$， $\Delta y = -0.01$ 时的全微分。

3．计算 $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ 的近似值。

专业班级__________________　　姓名__________________　　学号__________________

第 13 次

复合函数的微分法与隐函数的微分法

1．求下列函数的导数或偏导数。

（1） $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}$， $v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

（2） $z=\dfrac{y}{x}$，而 $x=\mathrm{e}^t$， $y=1-\mathrm{e}^{2t}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

2．求由下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数。

（1） $\sin y + e^x - xy^2 = 0$， 求 $\dfrac{dy}{dx}$

（2） $e^z = xyz$， 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

3．已知函数 $f(xy, x+y) = x^2 + y^2 + xy$， 求 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$， $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$。

第 14 次

二元函数的极值

1．求下列函数的极值。

（1） $z=4(x-y)-x^2-y^2$

（2） $z=x^3+y^3-3xy$

2．求抛物线 $y^2=4x$ 上的与直线 $x-y+4=0$ 距离最近的点。

3．某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 P_1 和 P_2，销售量分别为 Q_1 和 Q_2，需求函数分别为

$$Q_1=24-0.2P_1,\quad Q_2=10-0.05P_2$$

总成本函数为

$$C=35+40(Q_1+Q_2)$$

试问：厂家如何确定两个市场的产品售价，使其获得的总利润最大？最大利润是多少？

第 15 次

二重积分

理解：二重积分两要素：被积函数、积分区域。计算二重积分关键是分析积分区域。

1．化二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为二次积分（写出两种积分次序）。

（1）$D=\{(x,y)\mid |x|\leq 1,|y|\leq 1\}$

（2）D是由y轴，$y=1$及$y=x$围成的区域

（3）D是由x轴，$y=\ln x$及$x=\mathrm{e}$围成的区域

2．交换二次积分的次序。

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

3．计算下列二重积分。

（1）$\iint\limits_D x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)\big|0 \leq x \leq 1，\ 0 \leq y \leq 1\}$

（2）$\iint\limits_D (x+6y)\mathrm{d}\sigma$，$D$ 是由 $y=x$，$y=5x$，$x=1$ 所围成的区域

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

习题八

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域是________________________。

2. 设 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$____________________。

3. 设 $z=\ln(1+\dfrac{x}{y})$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$_________________。

4. 点 $(1,0)$ 是函数 $f(x,y)=x^2-2x+y^2+9$ 的极________值点。

5. $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=$__________，其中 D 为 $\pi^2\leq x^2+y^2\leq 2\pi^2$，$x\geq 0$，$y\geq 0$ 所围成。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 若 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\mathrm{e},1)}=$（　　）。

   A. e
   B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$
   C. 1
   D. 0

2. 若 $z=f(u)$ 二阶可导，且 $u=3x-2y^2$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　）。

   A. $9f''$
   B. $4f''$
   C. $-6xyf''$
   D. $-12yf''$

3. 设方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，则 $z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$（　　）。

   A. $\mathrm{d}x+\sqrt{2\mathrm{d}y}$
   B. $-\mathrm{d}x+\sqrt{2\mathrm{d}y}$
   C. $-\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$
   D. $\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$

4. 交换二次积分 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序后为（　　）。

A. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_a^y f\mathrm{d}x$

B. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y f\mathrm{d}x$

C. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f\mathrm{d}x$

D. $\int_0^a \mathrm{d}y \int_y^0 f\mathrm{d}x$

5. 设区域 D 是单位圆 $x^2+y^2 \le 1$ 在第一象限的部分, 则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma =$ (　　)。

A. $\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\mathrm{d}y$

B. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\mathrm{d}x$

D. $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2 \sin 2\theta \mathrm{d}r$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1. 设 $z = y\mathrm{e}^{x^2+y^2}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2. 设 $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求 $\mathrm{d}u$ 在点 $(3,4,5)$ 处的值。

3．设 $z=\mathrm{e}^{xy^2}$，而 $x=\sin^2 y$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$。

4．求 $z=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值。

5．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中，$D$ 是由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$ 所围区域，求 $f(x,y)$。

6．假设某公司生产甲、乙两种产品，其产量分别为x，y，如果甲、乙产品的单价分别为$p_1=4$和$p_2=1$，那么公司的收益函数为$R(x,y)=4x+y$，另外，公司的生产总成本为$C(x,y)=5+x^2-xy+y^2$，问如何安排生产才能使公司的利润最大？

专业班级__________________　　　姓名__________________　　　学号__________________

第九章　无穷级数

第 16 次

无穷级数的概念　无穷级数的基本性质

理解：（1）等比级数收敛条件。

（2）级数收敛的必要条件，其逆否命题可用来判定级数发散。

1．判定下列级数的敛散性，若级数收敛，求其和。

（1）$\frac{4}{5}-\frac{4^2}{5^2}+\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^4}{5^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{4^n}{5^n}+\cdots$

（2）$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$

2．判断下列级数的敛散性。

（1） $-\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}+\cdots+(-1^n)\frac{2^n}{3^n}+\cdots$

（2） $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}$

3．根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

第 17 次

正项级数

理解：（1）调和级数。

（2）p-级数。

（3）应用比较判别法需要参照级数，等比级数、调和级数、p-级数常被作为参照级数。

1．用比较判别法判定下列级数的敛散性。

（1）$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$

（2）$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

2．用比值判别法判定下列各级数的敛散性。

（1） $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$

（2） $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\frac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 18 次

任意项级数　绝对收敛

理解：交错级数、绝对收敛、条件收敛。

1．判定下列交错级数的敛散性。

（1）$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

（2）$1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$

2．判定下列级数哪些是绝对收敛，哪些是条件收敛。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{(n+1)^2}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$

（3）$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

第 19 次

幂级数

求下列幂级数的收敛半径和收敛域。

（1）$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{5^{n-1}\sqrt{n}}$

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 20 次

某些初等函数的幂级数展开式

幂级数的应用举例

1．将下列函数展开成 x 的幂级数，并确定收敛域。

（1） $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$

（2） $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

2．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并确定收敛域。

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

习题九

一、填空题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n =$____________。

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$_________（填收敛或发散）。

3. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ （$a \neq 0$），叫________级数，当__________时它收敛，当_______时它发散。

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ （$p > 0$），叫________级数，当__________时它收敛，当_______时它发散。

5. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$___________（填收敛或发散）。

二、选择题（5 个小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列级数必定收敛的是（　　）。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 100)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 100)$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} (100 - u_n)$

2. 下列级数中，为收敛级数的是（　　）。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

3. 下列级数中，为绝对收敛级数的是（　　）。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^2+1}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

4. 下列级数中，为条件收敛级数的是（　　）。

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{n+1}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{2^n}$

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$的收敛域是（　　）。

A. $(-1,1)$　　B. $[-1,1]$

C. $[-1,1)$　　D. $(-1,1]$

三、计算题（6 个小题，每题 10 分，共 60 分）

1. 根据定义，判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$的敛散性。

2. 判定下列级数的敛散性。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+n}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n}$

3．判定下列级数是绝对收敛还是条件收敛。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{(n+1)^{2}}$

4. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin na}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$的敛散性。

5. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$的收敛半径和收敛域。

6. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

总复习题四

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 连续，且平均值为 2，则 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x =$（　　）。

A. 6　　B. 8　　C. 4　　D. -4

2. 若函数 $f(x)=\int_0^x (a\sin t+\sin 3t)\mathrm{d}t$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得极值，则 a 的值为（　　）。

A. 2　　B. -2　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

3. 下列定积分值为 0 的是（　　）。

A. $\int_{-1}^{1} x\sin x\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$

C. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-2}^{2} x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

4. 已知微分方程 $y''=6x$，则函数 $y=x^3+x+C$（　　）。

A. 是方程的解　　B. 是方程的通解

C. 是方程的特解　　D. 不是方程的解

5. 微分方程 $2yy''-x(y')^4=x$ 的阶数为（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 曲线 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2-1=0$ 在 $(0,0)$ 处的切线斜率为（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. e

7. 函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x+3$ 的极小值点为（　　）。

A. $(-3,0)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-3,2)$　　D. $(1,0)$

8. 改变二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序正确的是（　　）。

A. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

9. 下列级数中，发散的级数是（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ 　　　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

10．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛区间为（　　）。

A. $(-1,1)$ 　　B. $(-1,1]$ 　　C. $[-1,1]$ 　　D. $[-1,1)$

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．某产品总产量的变化率为$f(t)=2t+3$（t为时间，单位：年），则第一个五年的总产量为______________。

2．微分方程$y''+2y'+y=0$的通解为____________________。

3．函数$z=\sqrt{xy}$在$(1,2)$处的全微分$\mathrm{d}y=$____________________。

4．已知$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 9\}$，则$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______________。

5．若数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2u_n+1}{3u_n+2}=$_______________。

三、计算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^3}$。

2．计算定积分$\int_0^2 \mathrm{e}^{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$。

3．求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 所围成的平面图形的面积。

4．设 $z=\mathrm{e}^{x-2y}$， $x=\sin t$， $y=t^3$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

5．判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^n}$ 敛散性，如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

四、应用题（共 15 分）

1．（7 分）某厂生产甲、乙两种产品，生产甲产品 x 单位和生产乙产品 y 单位时，总成本函数为 $C(x,y)=300+x+3y+0.01(2x^2+xy+3y^2)$，如果甲、乙产品的销售价格分别为 6 元和 10 元，求该厂生产这两种产品的最大利润。

2．（8 分）某商品的最大需求量为 1200（即当 $p=0$ 时，$q=1200$）件，该商品的需求函数为 $q=q(p)$，p 为单价（单位：万元），需求弹性为 $E=\dfrac{p}{p-120}$，试确定需求函数的表达式。

专业班级________________　　　　姓名________________　　　　学号________________

总复习题五

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t+2)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 在区间 $[-3,2]$ 上的最大值为（　　）。

A. $-\frac{2}{3}$　　　　B. $\frac{10}{3}$

C. 4　　　　D. 1

2. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$（　　）。

A. 为正常数　　　　B. 为负常数

C. 恒为零　　　　D. 不为常数

3. 已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，$f''(x)$ 连续，则 $\int_0^2 xf''(x)\mathrm{d}x=$（　　）。

A. 12　　B. 8　　C. 7　　D. 6

4. 微分方程 $(y')^2+(y'')^3+xy^4=0$ 的通解含独立任意常数的个数是（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. $\frac{\mathrm{d}y}{\cos x}-\frac{\mathrm{d}x}{y}=0$，$y(0)=2$ 的特解是（　　）。

A. $y^2=-2\sin x+4$　　　　B. $y^2=-2\cos x+4$

C. $y^2=2\sin x+4$　　　　D. $y^2=2\cos x+4$

6. 已知 $f(1,1)=-1$ 为函数 $f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$ 的极值, 则 a, b, c 分别为（　　）。

A. $1,1,-1$　　　　B. $-1,-1,3$

C. $-1,-1,-3$　　　　D. $1,1,-3$

7. 设 $u=f(x-y,y-z,t-z)$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=$（　　）。

A. $2f_1'$　　B. $2f_2'$　　C. $2f_3'$　　D. 0

8. 函数 $z=\ln(x^3+y^3)$ 在 $(1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$（　　）。

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　　　B. $2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

C. $3(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$　　　　D. $\frac{3}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

9. 设 D 为：$x^2+y^2\le R^2$，二重积分的值 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

A. πR^2　　B. $2\pi R^2$

C. $\dfrac{2}{3}\pi R^3$　　D. $\dfrac{1}{2}\pi R^4$

10．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n a_n$ （　　）。

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 不能判定

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. $\int_a^b f'(x+b)\,\mathrm{d}x =$ ______________。

2. 设二元函数 $z = x\mathrm{e}^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,\,0)} =$ ______________________。

3. 若 D 是由 x 轴、y 轴及 $2x+y-2=0$ 围成的区域，则 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________________。

4. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=3$ 的特解是_______________。

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{10}}{10^n}x^{n-1}$ 的收敛半径 $R =$ ____________。

三、计算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$。

2. 求曲线 $y = x^2 - 2x$，$y=0$，$x=1$，$x=3$ 所围成的平面图形的面积。

3．已知二重积分$\iint\limits_{D} x^2 \mathrm{d}\sigma$，其中$D$由$y=1-\sqrt{1-x^2}$，$x=1$以及$y=0$围成。

（1）请画出D的图形，并在极坐标系下将二重积分化为累次积分。

（2）请在直角坐标系下分别用两种积分次序将二重积分化为二次积分。

（3）选择一种积分次序计算出二重积分的值。

4．设函数$u=f\left(x,y,z\right)$有连续偏导数，且$z=\phi\left(x,y\right)$是由方程$x\mathrm{e}^{z}-y\mathrm{e}^{y}=z\mathrm{e}^{z}$所确定的二元函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$及$\mathrm{d}u$。

5．计算。

（1）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$的收敛域（4 分）。

（2）求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 在初始条件 $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$ 下的特解（4 分）。

四、应用题（共 15 分）

1．（7 分）某企业生产某产品的产量 $Q\left(x,y\right)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$，其中 x 为劳动力人数， y 为设备台数，该企业投入 5000 万元生产该产品，设招聘一个劳动力需要 15 万元，购买一台设备需要 25 万元，问该企业招聘几个劳动力和购买几台设备时，可使得产量达到最高？

2．（8 分）已知某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性 $\eta=2P^2$，而市场对该商品的最大需求量为 10000 件，即 $Q(0)=10000$，求需求函数 $Q(P)$。

专业班级________________　　　　姓名________________　　　　学号________________

总复习题六

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．设函数 $y=\int_0^x (t-1)\mathrm{d}t$，则 y 有（　　）。

A．极小值 $\frac{1}{2}$　　　　B．极小值 $-\frac{1}{2}$

C．极大值 $\frac{1}{2}$　　　　D．极大值 $-\frac{1}{2}$

2．若 $f(x)$ 为连续的奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为（　　）。

A．奇函数　　　　B．偶函数

C．非奇非偶函数　　　　D．不一定

3．微分方程 $y'+y=0$ 的一个特解为（　　）。

A．e^x　　　　B．e^{-x}

C．e^{2x}　　　　D．e^{-2x}

4．已知微分方程 $y''=6x$，则函数 $y=x^3+x+C$（　　）。

A．是方程的解　　　　B．是方程的通解

C．是方程的特解　　　　D．不是方程的解

5．设总成本函数 $C=5xy+2x^2+2y^2$，产量 x 和 y 分别为 2、1 时，C 对产量 x 的边际成本为（　　）。

A．30　　　　B．13

C．17　　　　D．14

6．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=$（　　）。

A．e^2　　　　B．1

C．∞　　　　D．0

7．设 $z=f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(3,4)=$（　　）。

A．$\frac{3}{5}$　　　　B．$\frac{8}{5}$

C．$\frac{1}{5}$　　　　D．$\frac{2}{5}$

8. 设$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2\}$，若$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$，则$a=$（　　）。

A. 1　　B. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

C. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$　　D. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

9. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{q^n}$（$a$为常数）收敛的充分条件是（　　）。

A. $|q|>1$　　B. $q=1$

C. $|q|<1$　　D. $q<1$

10. 下列级数中收敛的是（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. $f(x)=\int_0^x(t+1)(t-2)\mathrm{d}t$，则在区间$[-2,3]$上$f(x)$在$x=$________处取得最大值。

2. 已知函数$z=x^y\,(x>0)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________。

3. 已知$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9\}$，则$\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________。

4. 微分方程$y'=4x^3y$在初始条件$y\big|_{x=0}=4$下的特解是：$y=$________。

5. 若数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2u_n+1}{3u_n+2}=$________。

三、计算题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 求由$\int_0^y\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=0$所决定的隐函数$y=y(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

2. 求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=kx+1$ 所围平面图形的面积, 问 k 为何值时, 该面积最小？

3．改变二次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \sin y^2 \mathrm{d}y$ 的积分次序并且计算该积分。

4．已知 $z=f(x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

5．求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 在初始条件 $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$ 下的特解。

四、应用题（共 15 分）

1．（7 分）某企业生产两种产品，当产量分别为 Q_1，Q_2 时，总成本为 $C(Q_1,Q_2)=Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2+5$，而两种产品的需求函数分别为 $Q_1=26-P_1$，$Q_2=10-\frac{1}{4}P_2$，为使企业获得最大利润，试确定两种产品的产量。

2.（8 分）宏观经济研究发现，某地区的国民收益 y、国民储蓄 S 和投资 I 均为时间 t 的函数，且在任意时刻 t，储蓄额 $S(t)$ 为国民收益 $y(t)$ 的 $\frac{1}{10}$，投资额 $I(t)$ 是国民收益增长率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的 $\frac{1}{3}$，如果 $y(0)=5$（亿元），且在 t 时刻的储蓄额全部用于投资，求国民收益函数 $y(t)$。

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036