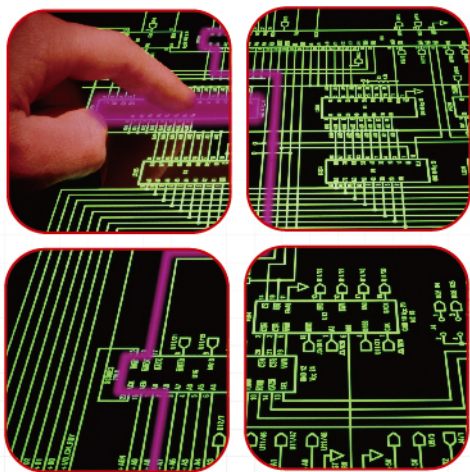


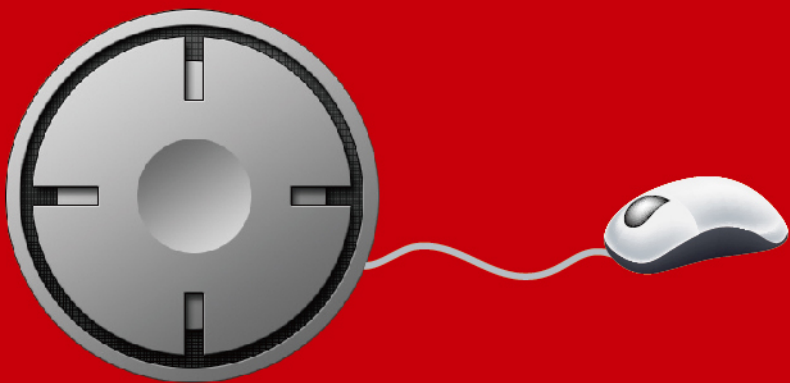
现代控制理论

关新平 吴忠强 主 编



M

odern Control Theory



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

高等学校“十二五”电气自动化类规划教材

现代控制理论

关新平 吴忠强 主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

与古典控制理论只适用于线性定常单输入-单输出系统不同,现代控制理论适用于线性的或非线性的多输入-多输出系统。现代控制理论本质上是时域的方法,而古典控制理论是复频域的方法。在古典控制理论中,系统的设计方法是建立在试探法基础上的,通常得不到最优控制系统;现代控制理论能使人们对于给定的性能指标设计出最优控制系统,还能在设计时考虑初始条件,因而被广泛应用。

本书系统地介绍了现代控制理论的基本内容,包括控制系统的状态空间描述、运动分析、能控性与能观性、李雅普诺夫稳定性分析、状态反馈与状态观测器设计、最优控制系统设计。每章均配有一定的例题和习题。

本书可作为高等学校自动化专业的本科生和非自动化专业的研究生教材,也可供有关技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/关新平,吴忠强主编. —北京:电子工业出版社,2012.5

高等学校“十二五”电气自动化类规划教材

ISBN 978-7-121-15166-8

I. ①现… II. ①关… ②吴… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236682 号

策划编辑:陈韦凯

责任编辑:陈韦凯 特约编辑:刘海霞 李海玲

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:345 千字

印 次:2012 年 5 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010) 88258888。

高等学校“十二五”电气自动化类规划教材 丛书编委会

（按拼音排序，排名不分先后）

编委会主任：关新平

编委会副主任：

毕卫红 韩 璞 娄国焕 吴学礼 杨 鹏

专家组成员：

何 谓 高 蒙 李国洪 李建华

王培光 姚福来 赵书强

编委会委员：

常丹华 曹晓华 杜立强 顾和荣 侯培国

韩兵欣 郝 成 李书杰 李珍国 马翠红

牛培峰 孙孝峰 唐瑞尹 吴忠强 王建民

王海群 王静波 王立乔 杨友良 殷桂梁

岳树盛 张宝荣 张秀玲 张燕君 张晓晖

前 言

以频域方法为基础的古典控制理论在经历了一百多年之后,直到 20 世纪的四五十年代才形成完整、独立的控制理论。毫无疑问,古典控制理论在解决广泛的控制问题上是非常有效的,并且已被广大从事自动控制的工程技术人员所掌握。它的广泛应用给人类带来了巨大的社会和经济效益,它的突出成就是导致自动化技术的诞生和发展。但是,也正是这种社会的进化过程对控制理论不断地提出新的更加严格的要求,使古典控制理论面临着挑战。随着 20 世纪 50 年代兴起的航天技术及其他生产技术的发展,一方面使控制对象变得更加复杂,另一方面对控制的要求提出了更加苛刻的条件。例如,非线性的、时变的或者分布参数的系统的控制问题,对系统本身或其周围环境的不确定因素的适应控制问题,多输入-多输出(MIMO)系统的分析与综合问题,以及实现控制的某种目标函数意义下的最优优化问题等,都不是单纯依赖古典控制理论所能解决的。面对这些挑战,控制理论必须向前发展,而在这个时期整个科学的进步,特别是现代数学和计算机技术的成就恰好为控制理论的发展提供了强有力的工具。正是在这种历史背景下,现代控制理论应运而生。在 20 世纪五六十年代,很多科学家为此做出了杰出的贡献,其中应特别提出的有庞特里亚金的极值原理,贝尔曼(Bellman)的动态规划,以及卡尔曼(Kalman)的滤波、能控性与能观测性理论等。正是他们的这些理论上的突破性成果奠定了现代控制理论的基础,成为控制理论由古典控制理论发展到现代控制理论的里程碑。至今 40 多年来,现代控制理论不论在理论方面还是在应用方面一直处于十分活跃的发展状态。它不仅在航天与航空技术上取得了举世瞩目的惊人成就,而且在电气、机械、化工、冶金、交通等工程系统及生物工程、企业管理和社会科学等广泛领域内都有成功的应用。可以毫不夸张地说,现代控制理论已经成为渗透到各个学科领域的横向科学。显然,控制理论的发展与成就标志着人类对客观世界的认识能力和改造能力的进一步提高。因此,它也必然会对人类的认识论和方法论给以重大影响。

本书共分 6 章:第 1 章介绍了控制系统的状态空间表达式,由姚成玉编写;第 2 章介绍了控制系统状态空间表达式的解,由魏立新编写;第 3 章介绍了线性控制系统的能控性与能观性,由吴忠强编写;第 4 章介绍了控制系统的稳定性,由李峰磊编写;第 5 章介绍了线性定常系统的综合,由张秀玲编写;第 6 章介绍了最优控制,由罗小元编写。全书由关新平、吴忠强汇总整理。本书可作为高等学校自动化专业的本科生和非自动化专业的研究生教材。

由于时间仓促,本书难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 控制系统的状态空间表达式	1
1.1 状态变量及状态空间表达式	1
1.1.1 状态变量	1
1.1.2 状态矢量	2
1.1.3 状态空间	2
1.1.4 状态方程	2
1.1.5 输出方程	3
1.1.6 状态空间表达式	4
1.1.7 状态空间表达式的系统框图	6
1.1.8 状态空间法的特点	7
1.2 模拟结构图	7
1.3 状态空间表达式的建立(一)	8
1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式	9
1.3.2 从系统的机理出发建立状态空间表达式	13
1.4 状态空间表达式的建立(二)	17
1.4.1 传递函数中没有零点时的实现	17
1.4.2 传递函数中有零点时的实现	20
1.5 状态矢量的线性变换(坐标变换)	25
1.5.1 状态空间表达式的非唯一性	25
1.5.2 特征值及特征矢量	28
1.5.3 约旦标准型	30
1.6 从状态空间表达式求传递函数阵	44
1.6.1 传递函数(阵)	44
1.6.2 组合系统的状态空间表达式及传递函数阵	46
1.7 离散时间系统的状态空间表达式	49
习题	51
第 2 章 控制系统状态空间表达式的解	55
2.1 线性定常系统的自由运动	55
2.1.1 齐次状态方程的解	55
2.1.2 齐次状态方程解的统一形式——状态转移矩阵	61
2.2 矩阵指数	63
2.3 线性定常系统的强迫运动	73
2.4 离散时间系统的状态空间分析	75
2.4.1 连续系统状态空间方程的离散化	75
2.4.2 线性定常离散系统的运动分析	77
习题	84

第 3 章 线性控制系统的能控性与能观性	86
3.1 能控性定义及能控性判据	86
3.1.1 状态能控性的定义	86
3.1.2 线性定常系统的能控性判别	87
3.2 能观性定义及能观性判据	96
3.3 能控性与能观性的对偶关系	102
3.4 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型	104
3.5 线性系统的结构分解	114
3.6 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系	123
习题	125
第 4 章 控制系统的稳定性	127
4.1 稳定性的基本概念	127
4.1.1 系统状态的运动及平衡状态	127
4.1.2 预备知识	128
4.1.3 系统稳定性概念	129
4.2 李雅普诺夫稳定性理论	131
4.2.1 李雅普诺夫第一法	131
4.2.2 李雅普诺夫第二法	133
4.3 线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	136
4.4 非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	138
习题	140
第 5 章 线性定常系统的综合	142
5.1 控制系统的结构、特性及极点配置	142
5.1.1 状态反馈	142
5.1.2 输出反馈	143
5.1.3 从输出到状态矢量导数 $\dot{\mathbf{x}}$ 反馈	144
5.1.4 闭环系统的能控性与能观性	145
5.2 极点配置问题	147
5.2.1 采用状态反馈	147
5.2.2 采用输出反馈	150
5.2.3 采用从输出到 $\dot{\mathbf{x}}$ 反馈	151
5.3 系统镇定问题	153
5.4 状态观测器	156
5.4.1 状态观测器定义	156
5.4.2 状态观测器的实现	156
5.4.3 反馈矩阵 $\mathbf{G}$ 的设计	158
5.5 带状态观测器的状态反馈系统	161
5.5.1 系统结构	161
5.5.2 闭环系统的基本特性	162

5.5.3 带观测器状态反馈系统与带补偿器输出反馈系统的等价性	164
5.5.4 状态观测器期望特征值的配置原则	167
习题	168
第 6 章 最优控制	171
6.1 最优控制的一般概念	171
6.1.1 最优控制的基本概念	171
6.1.2 最优控制问题	171
6.2 无约束最优控制的变分方法	175
6.2.1 经典变分理论	175
6.2.2 贯截条件	177
6.3 有约束最优控制的极小值原理	178
6.4 线性二次型调节问题的最优控制	180
6.4.1 线性二次型调节问题	180
6.4.2 终端时间有限时变状态调节器	182
6.4.3 终端时间无限状态调节器	187
6.5 最短时间控制和最小能量控制	189
6.5.1 Bang-Bang 控制原理	189
6.5.2 最短时间控制	190
6.5.3 最小能量控制	195
习题	200
参考文献	203

第 1 章 控制系统的状态空间表达式

在经典控制理论中，对线性定常系统，可用常微分方程或传递函数加以描述，可将某个单变量作为输出，直接与输入联系起来。实际上，系统除了输出量这个变量以外，还包含其他相互独立的变量，而微分方程或传递函数对这些内部的中间变量是不便描述的，因而不能包含系统的所有信息。显然，从能否完全揭示系统的全部运动状态来说，用微分方程或传递函数描述线性定常系统有其不足之处。

然而，现代工程系统日趋复杂，性能要求越来越高，因此，对系统的描述应该更加精细。对一个复杂系统的分析与综合，不仅需要了解它的输入-输出关系，而且要求知道它的内部结构。经常遇到的受控对象，不仅是定常的，也可能是有许多时变的；不仅是线性的，也可能是非线性的；不仅是确定性的，也可能是随机的。总之，对象的多样性，要求描述系统的数学工具应具有一定的适应性。尤其是现代许多复杂系统中，往往都需要有计算机参与工作。因此，为适应控制系统理论这种发展趋势的要求，在描述系统的数学方法上，需要进一步改进。控制理论发展到 20 世纪五六十年代便产生了一种新的描述方法——状态空间法。

这一方法的特点是：采用状态空间表达式（状态空间描述）作为系统的数学模型，系统的动态特性是用由状态变量构成的一阶微分方程组来描述的。它能反映系统的全部独立变量的变化，从而能同时确定系统的全部内部运动状态，而且还可以方便地处理初始条件。这样，在分析和设计控制系统时，不再只局限于输入量、输出量、误差量，为提高系统性能提供了有力的工具。加之可利用计算机进行分析设计及实时控制，因而可以应用于非线性系统、时变系统、多输入-多输出系统及随机过程。

本章在阐述状态空间表达式基本概念、表达形式的基础上，介绍依据不同已知条件（物理模型、框图、微分方程、传递函数）的建立方法。然后，介绍状态矢量的线性变换及约旦标准型。最后，介绍从状态空间表达式求解传递函数阵。

1.1 状态变量及状态空间表达式

1.1.1 状态变量

足以完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量为状态变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统，就有 n 个独立的变量，当这 n 个独立变量的时间响应都求得时，系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此，可以说该系统的状态变量就是 n 阶系统的 n 个独立变量。

同一个系统,究竟选取哪些变量作为独立变量,这不是唯一的,重要的是这些变量是相互独立的,且其个数应等于微分方程的阶数;又由于微分方程的阶数唯一地取决于系统中独立储能元件的个数,因此,状态变量的个数就应等于系统独立储能元件的个数。

众所周知, n 阶微分方程式要有唯一确定的解,就要必须知道 n 个独立的初始条件。很明显,这 n 个独立的初始条件就是一组状态变量在初始时刻 t_0 的值。

综上所述,状态变量是既足以完全确定系统运动状态而个数又是最小的一组变量,当其在 $t=t_0$ 时刻的值已知时,则在给定 $t \geq t_0$ 时间的输入作用下,便能完全确定系统在任何 $t \geq t_0$ 时间的行为。

1.1.2 状态矢量

如果 n 个状态变量用 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 表示,并把这些状态变量看做是矢量 $\mathbf{x}(t)$ 的分量,则 $\mathbf{x}(t)$ 就称为状态矢量,记作

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]$$

并且,状态矢量 $\mathbf{x}$ 的维数定义为其组成状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 的个数,即 $\dim \mathbf{x} = n$ 。

1.1.3 状态空间

以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维空间,称为状态空间。在特定时刻 t ,状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 在状态空间中是一点。已知初始时刻 t_0 的状态 $\mathbf{x}(t_0)$,就得到状态空间中的一个初始点。随着时间的推移, $\mathbf{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹,称为状态轨线。状态矢量的状态空间表示将矢量的代数表示和几何概念联系起来了。

1.1.4 状态方程

由系统的状态变量构成的一阶微分方程组称为系统的状态方程。

用如图 1-1 所示的 RLC 电路,说明如何用状态变量描述这一系统。

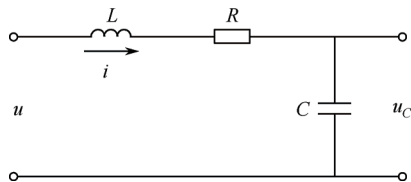


图 1-1 RLC 电路

此系统有两个独立储能元件,即电容 C 和电感 L ,所以,应有两个状态变量。状态变

量的选取,原则上是任意的,但考虑到电容的储能与其两端的电压 u_C 和电感的储能与流经它的电流 i 均直接相关,故通常就以 u_C 和 i 作为此系统的两个状态变量。

根据电学原理,容易写出含有两个状态变量的一阶微分方程组,即

$$\begin{cases} C \frac{du_C}{dt} = i \\ L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} \dot{u}_C = \frac{1}{C} i \\ i = -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} u \end{cases} \quad (1-1)$$

式(1-1)就是如图1-1所示系统的状态方程,若将式中状态变量用一般符号 x_i 表示,即令 $x_1 = u_C$, $x_2 = i$; 并写成矢量矩阵形式,则状态方程变为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (1-2)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

1.1.5 输出方程

在指定系统输出的情况下,该输出与状态变量间的函数关系式,称为系统的输出方程。

在如图1-1所示系统中,指定 $x_1 = u_C$ 作为输出,输出一般用 y 表示,则有

$$y = u_C$$

或

$$y = x_1 \quad (1-3)$$

式(1-3)就是如图1-1所示系统的输出方程,它的矩阵表达式为

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (1-4)$$

式中, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

1.1.6 状态空间表达式

状态方程和输出方程综合起来, 构成对一个系统完整的动态描述, 称为系统的状态空间表达式。

例如, 式 (1-1) 和式 (1-3), 或式 (1-2) 和式 (1-4) 就是如图 1-1 所示系统的状态空间表达式。

在经典控制理论中, 用指定某个输出量的高阶微分方程来描述系统的动态过程。如图 1-1 所示的系统, 在以 u_C 作为输出时, 从式 (1-1) 消去中间变量 i , 得到二阶微分方程为

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u \quad (1-5)$$

其相应的传递函数为

$$\frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (1-6)$$

如果要从高阶微分方程或从传递函数变换为状态方程, 即分解为多个一阶微分方程, 那么此时的状态方程可以有无穷多种形式, 这是由于状态变量的选取可以有无穷多种的缘故。这种状态变量的非唯一性, 归根到底, 是由于系统结构的不确定性造成的。关于这个问题, 下面还将论及, 此处暂不多述。

回到式 (1-5) 或式 (1-6) 的二阶系统, 若选 u_C 和 $\dot{u}_C$ 作为两个状态变量, 即令 $x_1 = u_C$, $x_2 = \dot{u}_C$, 则得一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u \end{cases} \quad (1-7)$$

即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (1-8)$$

若以 $q = idt$ 和 i 作为两个状态变量, 即令 $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q} = i$, 同样可求得一个状态方程。比较式 (1-8) 和式 (1-2), 显而易见, 同一系统中, 状态变量选取的不同, 状态方程也不同。

从理论上说, 并不要求状态变量在物理上一定是可以测量的量, 但在工程实践上, 仍以选取那些容易测量的量作为状态变量为宜, 因为在最优控制中, 往往需要将状态变量作为反馈量。

设单输入-单输出定常系统, 其状态变量为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则状态方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases}$$

输出方程式为

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du$$

用矢量矩阵表示时的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ y &= \mathbf{cx} + du \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为 n 维状态矢量;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为系统内部状态的联系, 称为系统矩阵, 为 $n \times n$ 方阵;

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 为输入对状态的作用, 称为输入矩阵或控制矩阵, 这里为 $n \times 1$ 的列阵;

$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$ 为状态对输出的影响, 称为输出矩阵, 这里为 $1 \times n$ 的行阵;

d 为输入与输出直接传输项, 这里为一标量。

对于一个复杂系统, 具有 r 个输入, m 个输出, 此时状态方程变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r \end{aligned}$$

至于输出方程, 不仅是状态变量的组合, 而且在特殊情况下, 还可能有输入矢量的直接传递, 因而有如下的一般形式:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r \\ &\vdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r \end{aligned}$$

因而, 多输入-多输出系统状态空间表达式的矢量矩阵形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (1-10)$$

式中: $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 同单输入系统, 分别为 n 维状态矢量和 $n \times n$ 系统矩阵;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \text{ 为 } r \text{ 维输入 (或控制) 矢量;}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ 为 } m \text{ 维输出矢量;}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \text{ 为 } n \times r \text{ 输入 (或控制) 矩阵;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \text{ 为 } m \times n \text{ 输出矩阵;}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \text{ 为 } m \times r \text{ 直接传递矩阵。}$$

为了简便, 下面除特别说明, 在输出方程中, 均不考虑输入矢量的直接传递, 即令 $\mathbf{D} = 0$ 。

1.1.7 状态空间表达式的系统框图

和经典控制理论类似, 可以用框图表示系统信号传递的关系。对于式 (1-9) 和式 (1-10) 所描述的系统, 它们的框图分别如图 1-2 (a) 和图 1-2 (b) 所示。图中用单线箭头表示标量信号, 用双线箭头表示矢量信号。

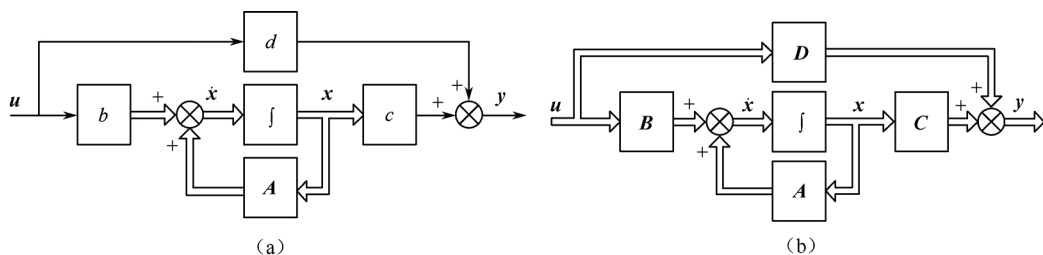


图 1-2 系统信号传递框图

从状态空间表达式和系统框图都能清楚地说明：它们既表征了输入对于系统内部状态的因果关系，又反映了内部状态对于外部输出的影响，所以，状态空间表达式是对系统的一种完全的描述。

1.1.8 状态空间法的特点

通过以上对状态空间描述的初步认识，可总结出如下几点：

- (1) 动力学系统的状态定义为完全地表征系统时间域行为的一个最小内部变量组。
- (2) 状态空间描述考虑了“输入-状态-输出”这一过程，其中，它考虑了被经典控制理论的输入-输出描述所忽略的状态，因此它揭示了问题的本质，即输入引起系统状态的变化，而状态和输入则决定了输出的变化。
- (3) 输入引起状态的变化是一个运动过程，数学上表现为微分方程，即状态方程。状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程，数学上表现为变换方程，即代数方程。
- (4) 系统的状态变量个数仅等于系统包含的独立储能元件的个数。
- (5) 对于给定的系统，状态变量的选择不是唯一的。如果 $\mathbf{x}$ 是系统的一个状态矢量，只要矩阵 $\mathbf{T}$ 是非奇异的，那么 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ 也是一个状态矢量。
- (6) 一般来说，状态变量不一定是物理上可测量或可观察的量，但从便于控制系统的构成来说，把状态变量选为可测量或可观察的量更为合适。
- (7) 系统的状态空间分析法是时域内的一种矩阵运算方法，特别适合用计算机来计算，有利于把工程技术人员从繁琐的计算中解脱出来，使他们在控制系统的分析与综合中从事更富有创造性的工作。

1.2 模拟结构图

在状态空间分析中，采用模拟结构图（或称状态变量图）来反映系统各状态变量之间的信息传递关系，对建立系统的状态空间表达式很有帮助。

为了简便，这里用框图代替模拟计算机的详细模拟图，它是由积分器、放大器、加法器等基本元素组成的。状态空间表达式的结构图可按如下步骤绘制：积分器的数目应等于状态变量数，将它们画在适当的位置，每个积分器的输出表示相应的某个状态变量，然后根据所给的状态方程和输出方程，画出相应的加法器和比例器，最后用箭头将这些元件连接起来。

对于一阶标量微分方程

$$\dot{x} = ax + bu$$

它的模拟结构图如图 1-3 所示。

再以三阶微分方程为例：

$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = bu$$

将最高阶导数留在等式左边，上式可改写成

$$\ddot{x} = -a_0x - a_1\dot{x} - a_2\ddot{x} + bu$$

它的模拟结构图如图 1-4 所示。

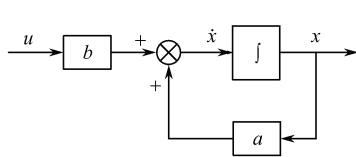


图 1-3 一阶标量微分方程的模拟结构图

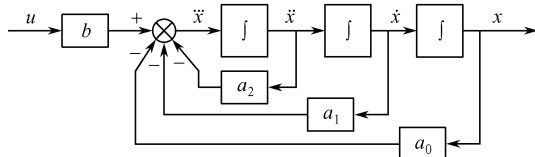


图 1-4 三阶微分方程的模拟结构图

图 1-4 也是传递函数 $W(s) = \frac{b}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$ 的模拟结构图。可见，模拟结构图既描述状态变量间的相互关系，又说明状态变量的物理意义。可以说，模拟结构图是系统相应框图拉普拉斯反变换的图形。

结合上面的方法，可以画出下列传递函数的模拟结构图：

$$W(s) = \frac{b}{s^2 + a_1s + a_0}$$

$$W(s) = \frac{b}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

同样，已知状态空间表达式，也可画出相应的模拟结构图，如图 1-5 所示是下列三阶系统的模拟结构图。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u \\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

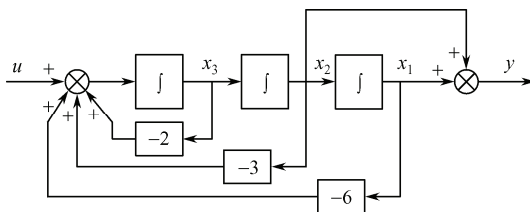


图 1-5 系统模拟结构图

1.3 状态空间表达式的建立（一）

用状态空间法分析系统时，首先要建立给定系统的状态空间表达式。通常可以采用两条可能的途径来求得。

一是分析的途径，适用于结构和参数为已知的系统。对于框图已知的系统，可以根据系统各环节的实际框图连接，写出相应的状态空间表达式；对于物理模型已知的系统，可利用机理分析进行推导得到。

二是辨识的途径, 适用于结构和参数难以搞清楚的系统。它通过实验的手段取得数据并采用适当方法确定系统的输入-输出模型 (高阶微分方程或传递函数), 然后再由所得到的系统输入-输出描述来导出相应的状态空间表达式。这里, 前一个步骤称为系统辨识和参数估计, 其内容已超出本书的范围。后一个步骤称为实现问题, 将在 1.4 节介绍。

本节介绍分析的途径。

1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式

当系统的描述是以框图形式给出时, 无须求出总的传递函数, 可直接由框图导出其相应的状态空间表达式。这是由 1.2 节的模拟结构图得到的启示, 其步骤如下: 首先, 将系统的各个环节按 1.2 节所述方法, 变换成相应的模拟结构图, 并把每个积分器的输出选作一个状态变量 x_i , 其输入便是相应的 $\dot{x}_i$; 然后, 由模拟图直接写出系统的状态方程和输出方程。

【例 1-1】 系统框图如图 1-6 (a) 所示, 输入为 u , 输出为 y 。试求其状态空间表达式。

解 首先, 传递函数

$$\frac{K}{Ts+1} = \frac{K}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{K}{T} \frac{s^{-1}}{1 + \frac{1}{T}s^{-1}}$$

其模拟结构图如图 1-6 (b) 所示。系统的模拟结构图如图 1-6 (c) 所示。

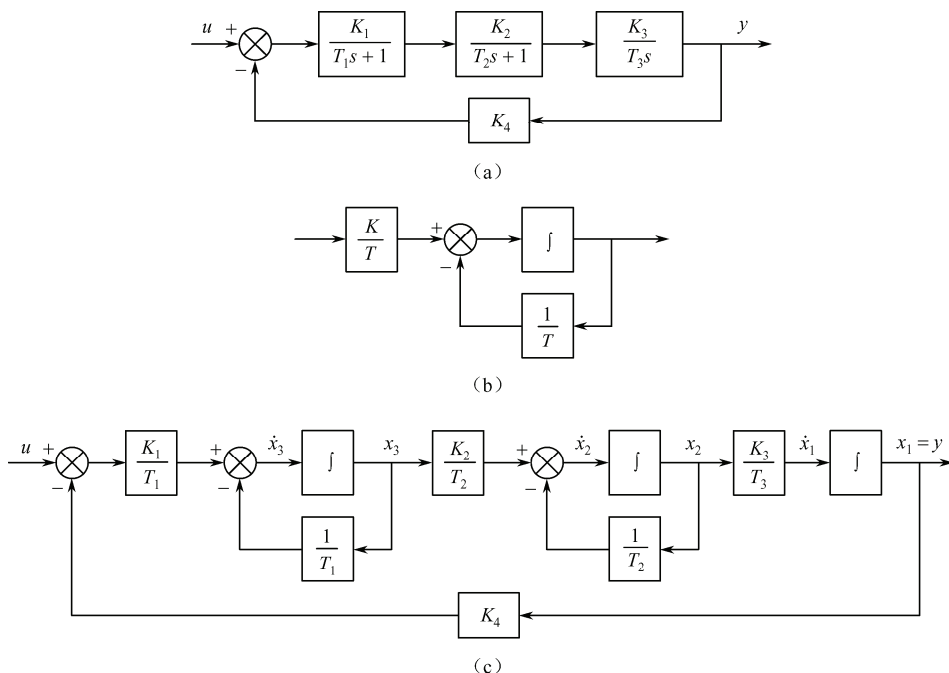


图 1-6 系统框图及模拟结构图

由图可知

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{K_3}{T_3} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{K_2}{T_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_1 K_4}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_3 + \frac{K_1}{T_1} u \end{cases} \quad (\text{状态方程})$$

$$y = x_1 \quad (\text{输出方程})$$

写成矢量矩阵形式, 系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1 K_4}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-11)$$

对于含有零点的环节, 如图 1-7 (a) 所示的系统, 可将其展开成部分分式, 即 $\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{z-p}{s+p}$, 从而得到等效框图如图 1-7 (b) 所示, 模拟结构图如图 1-7 (c) 所示。由图可得系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-12)$$

顺便指出, $\frac{s+z}{s+p}$ 还可以展开为

$$\frac{s+z}{s+p} = \frac{s}{s+p} + \frac{z}{s+p} = \frac{1}{1+ps^{-1}} + \frac{zs^{-1}}{1+ps^{-1}}$$

其模拟结构图如图 1-7 (d) 所示。

同理, $K \frac{\tau s+1}{Ts+1}$ 可以写成

$$K \frac{\tau s+1}{Ts+1} = \frac{K\tau}{T} \frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{T}} = \frac{K\tau}{T} \left[1 + \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

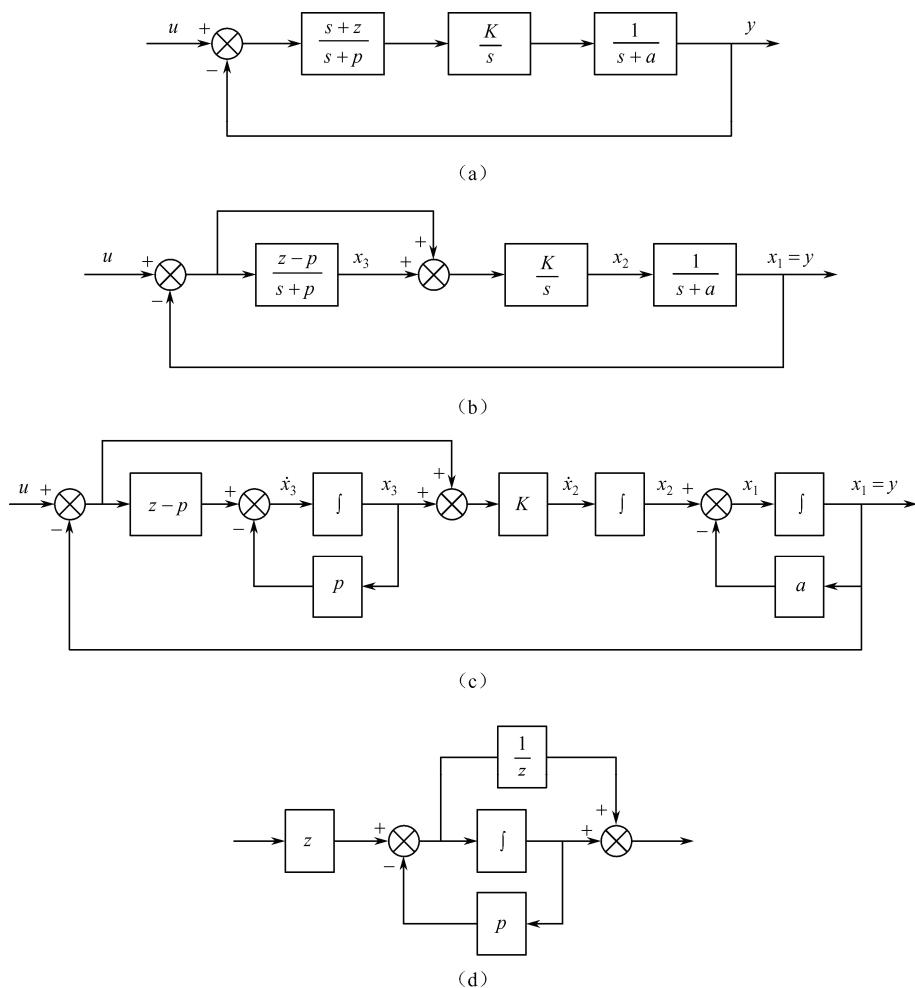


图 1-7 系统框图及模拟结构图

或

$$K \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} = \frac{K}{T} \left[\frac{\tau s}{s + \frac{1}{T}} + \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right] = \frac{K}{T} \left[\frac{\tau}{1 + \frac{1}{T}s^{-1}} + \frac{s^{-1}}{1 + \frac{1}{T}s^{-1}} \right]$$

对于系统中包含二阶振荡环节的情况，以如图 1-8 (a) 所示的例子进行说明。

首先把系统各环节的传递函数化为最简形式的组合，这里主要讨论如何把二阶振荡环节化成一阶环节的组合形式，即

$$\frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} = k_0 \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = k_0 G(s)$$

式中， $k_0 = k/a_0$ 。

若将上述二阶标准传递函数 $G(s)$ 看做是一单位反馈闭环结构的闭环传递函数，则其前向通道的传递函数应为

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{a_0}{s(s + a_1)}$$

于是二阶振荡环节的单位反馈闭环结构有如图 1-8 (b) 所示的形式。这样原结构图可化为由最简形式的各环节传递函数构成的结构图如图 1-8 (c) 所示。

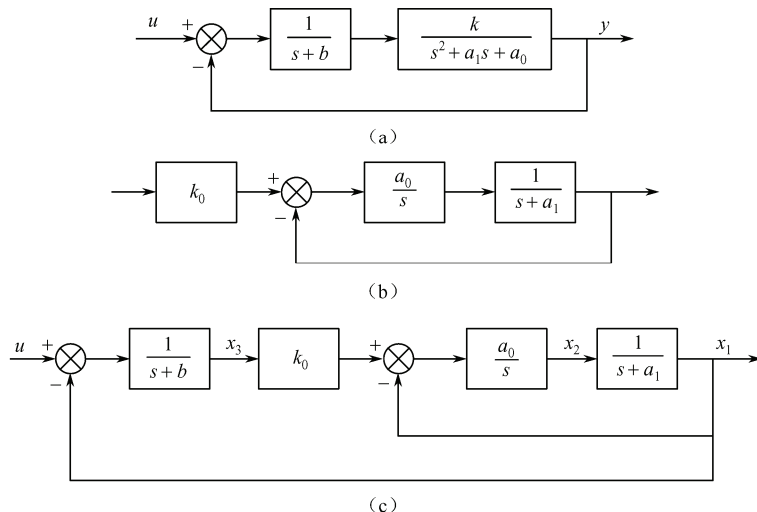


图 1-8 含有二阶振荡环节的系统框图及其框图变换

选各一阶环节输出为状态变量:

$$X_1(s) = \frac{1}{s + a_1} X_2(s)$$

$$X_2(s) = [-X_1(s) + k_0 X_3(s)] \frac{a_0}{s} = [-a_0 X_1(s) + k X_3(s)] \frac{1}{s}$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s + b} [-X_1(s) + U]$$

将上式进行拉普拉斯反变换得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_0 x_1 + k x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - b x_3 + u \end{aligned}$$

系统的输出方程为

$$y = x_1$$

写成矩阵形式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_0 & 0 & k \\ -1 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

本算例中, 对于传递函数 $\frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0}$ 也可以直接按 1.2 节的方法画出模拟结构图, 但状态变量会不同。

1.3.2 从系统的机理出发建立状态空间表达式

一般常见的控制系统, 按其能量属性, 可分为电气、机械、液压、气动、热力等系统。根据其物理规律, 如基尔霍夫定律、牛顿定律、能量守恒定律等, 即可建立系统的状态方程。当指定系统的输出时, 也很容易写出系统的输出方程。

【例 1-2】 RLC 电路如图 1-9 所示, 图中, 电源电压 u 为输入, 电容电压 u_C 为输出, 试写出此网络的状态空间表达式。

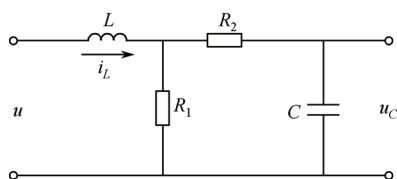


图 1-9 RLC 电路图

解 此网络是一个二阶系统, 有两个独立储能元件, 以电感 L 中的电流 i_L 和电容 C 上的电压 u_C 作为状态变量, 即令

$$x_1 = i_L, x_2 = u_C$$

根据基尔霍夫定律写出

$$x_1 = (u - L\dot{x}_1) \frac{1}{R_1} + C\dot{x}_2$$

$$u = L\dot{x}_1 + x_2 + R_2 C\dot{x}_2$$

经整理得

$$\dot{x}_1 = \frac{u}{L} - \frac{x_1}{L} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \frac{x_2}{L} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} x_1 - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} x_2$$

最后, 得到状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{L} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-13)$$

【例 1-3】 如图 1-10 所示的机械运动模型中, m_1 、 m_2 为质量块 (同时也为质量), k_1 、 k_2 为弹簧, 也为弹性系数, f 是阻尼器, 列写出在外力 F 作用下, 以质量块 m_1 和 m_2 的位移 y_1 和 y_2 为输出的状态空间表达式。

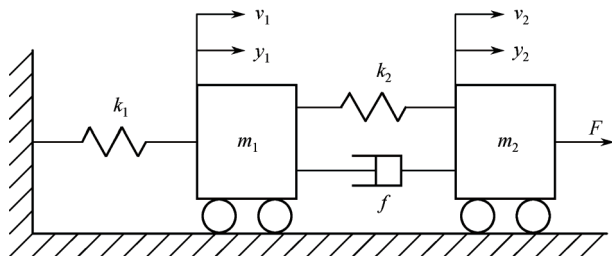


图 1-10 机械运动模型图

解 弹簧 k_1 、 k_2 ，质量块 m_1 、 m_2 是储能元件，故弹簧的伸长量为 y_1 、 y_2 ，质量块 m_1 、 m_2 的速度 v_1 、 v_2 可以选作状态变量。由结构图可以直接看出，它们是相互独立的。若

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \quad x_2 = y_2 \\ x_3 &= v_1 = \frac{dy_1}{dt}, \quad x_4 = v_2 = \frac{dy_2}{dt} \end{aligned}$$

根据牛顿定理，对于 m_1 ，有

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = k_2(y_2 - y_1) + f \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) - k_1 y_1$$

对于 m_2 ，有

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = F - k_2(y_2 - y_1) - f \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right)$$

把 $x_1 = y_1$ ， $x_2 = y_2$ ， $x_3 = \frac{dy_1}{dt}$ ， $x_4 = \frac{dy_2}{dt}$ 及 $u = F$ 代入上面两个式子，经整理可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{m_1}(k_1 + k_2)x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{f}{m_1}x_3 + \frac{f}{m_1}x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{f}{m_2}x_3 - \frac{f}{m_2}x_4 + \frac{1}{m_2}u \end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m_1}(k_1 + k_2) & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & \frac{f}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{f}{m_2} & -\frac{f}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u \quad (1-14a)$$

指定 x_1 、 x_2 为输出，故有

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (1-14b)$$

【例 1-4】 试写出如图 1-11 所示的机械旋转运动模型的状态空间表达式。图中, k 为扭转轴的刚性系数, J 为转动惯量, f 为粘性阻尼系数, T 为施加于扭转轴上的力矩。

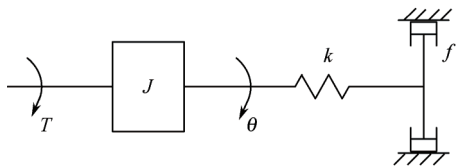


图 1-11 机械旋转运动模型

解 选择扭转轴的转动角度 θ 及其角速度 ω 为状态变量, 并令

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad u = T$$

于是有

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

根据牛顿定理

$$J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + k\theta = T$$

即

$$\ddot{\theta} = -\frac{k}{J}\theta - \frac{f}{J}\dot{\theta} + \frac{1}{J}T$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{J}x_1 - \frac{f}{J}x_2 + \frac{1}{J}u \end{aligned}$$

指定 x_1 为输出, 则

$$y = x_1$$

或者写成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-15)$$

【例 1-5】 图 1-12 是直流他励电动机的示意图。图中, R 、 L 分别为电枢回路的电阻和电感, J 为机械旋转部分的转动惯量, f 为旋转部分的粘性摩擦系数。列写该图在电枢电压作为控制作用时的状态空间表达式。

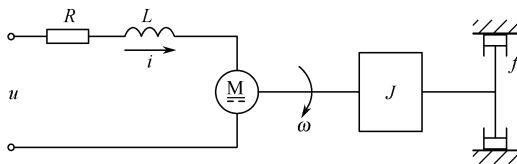


图 1-12 直流他励电动机示意图

解 电感 L 、转动惯量 J 是储能元件，相应的物理变量电流 i 及旋转速度 ω 是相互独立的，可选择为状态变量，即

$$x_1 = i$$

$$x_2 = \omega$$

则

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{di}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

由电枢回路的电路方程，有

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u$$

由动力学方程，有

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = K_a i$$

由电磁感应关系，有

$$e = K_b \omega$$

式中， e 为反电动势； K_a 、 K_b 为转矩常数和反电动势常数。

把上面三个公式整理，改写成

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{K_b}{L}\omega + \frac{1}{L}u \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_a}{J}i - \frac{B}{J}\omega \end{aligned}$$

把 $x_1 = i$ ， $x_2 = \omega$ 代入，有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1-16a)$$

若指定角速度 ω 为输出，则

$$y = x_2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1-16b)$$

若指定电动机的转角 θ 为输出，则上述两个状态变量尚不足以对系统的时域行为进行全面描述，必须增添一个状态变量 x_3 ，即

$$x_3 = \theta$$

则

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_2$$

于是状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} & 0 \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1-17a)$$

输出方程为

$$y = x_3 = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1-17b)$$

1.4 状态空间表达式的建立 (二)

已知系统的内部结构,很容易求得它的状态空间表达式,如1.3节所述。已知系统的状态空间表达式,也很容易求出它的外部描述——传递函数或运动方程式,后者将在1.6节中介绍。至于它的逆问题,即由描述系统输入-输出动态关系的运动方程式或传递函数,建立系统的状态空间表达式,这样的问题称为实现问题。所求得的状态空间表达式既保持了原传递函数所确定的输入-输出关系,又将系统的内部关系揭示出来。这是一个比较复杂的问题,因为根据输入-输出关系求得的状态空间表达式并不是唯一的,会有无穷多个内部结构能够获得相同的输入-输出关系。这个问题将在1.5节中讨论。

尽管实现是非唯一的,但只要原系统传递函数中分子和分母没有公因子,即不出现零极点对消,则 n 阶系统必有 n 个独立状态变量,必有 n 个一阶微分方程与之等效,系统矩阵 A 的元素取值虽各有不同,但既为一个系统的实现,其特征根必是相同的。通常把这种没有零极点对消的传递函数的实现称为最小实现。本节仅讨论最小实现问题。

1.4.1 传递函数中没有零点时的实现

在这种情况下,系统的微分方程为

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u \quad (1-18a)$$

相应的系统传递函数为

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1-18b)$$

1. 能控标准 I 型

如前所述,式(1-18a)和式(1-18b)的实现,可以有多种结构,常用的简便形式可由相应的模拟结构图(图1-13)导出。这种由中间变量到输入端的负反馈,是一种常见的结构形式,也是一种最易求得的结构形式。

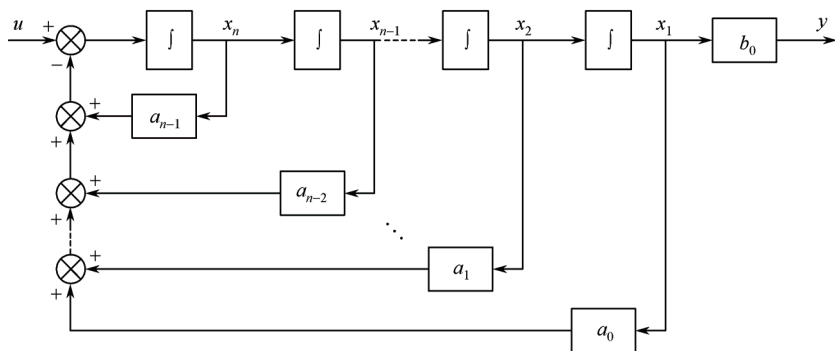


图 1-13 系统模拟结构图

将图中每个积分器的输出取作状态变量，有时称为相变量，它是输出 y （或 y/b_0 ）的各阶导数。至于每个积分器的输入，显然就是各状态变量的导数。顺便指出，相变量即相位变量，是一组特殊的状态变量，由系统的某个变量及其一阶导数直到 $n-1$ 阶导数所构成，相变量一般不是物理变量。

从图 1-13 容易列出系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n + u\end{aligned}$$

输出方程为

$$y = b_0x_1$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{\dot{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \\ y = \underbrace{[b_0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]}_{\mathbf{c}} \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-19)$$

顺便指出：

(1) 当矩阵 $\mathbf{A}$ 具有式 (1-19) 的形式时，称为友矩阵。友矩阵的特点是，主对角线上方的元素均为 1，最后一行的元素为特征多项式系数的负值，而其余元素均为零。

(2) 形如式 (1-19) 的状态空间表达式，称为能控标准 I 型。这里，能控标准 I 型的特点是， $\mathbf{A}$ 为友矩阵；矢量 $\mathbf{b}$ 最后一个元素为 1，其余元素均为 0。关于能控标准型，详见第 3 章。

2. 能观标准 I 型

若将图 1-13 中的输出 y 前面的 b_0 移至加法器前面, 则该模拟结构图对应的传递函数是不变的。此时, 系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n + b_0 u\end{aligned}$$

输出方程为

$$y = x_1$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \\ y = \underbrace{[1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]}_{\mathbf{c}} \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-20)$$

顺便指出, 形如式 (1-20) 的状态空间表达式, 称为能观标准 I 型。这里, 能观标准 I 型的特点是, $\mathbf{A}$ 为友矩阵, 矢量 $\mathbf{c}$ 第一个元素为 1, 其余元素均为 0。关于能观标准型, 详见第 3 章。

【例 1-6】 系统的输入-输出微分方程为

$$\ddot{y} + 9\ddot{y} + 23\dot{y} + 15y = 6u$$

列写其状态方程和输出方程。

解

1) 能控标准 I 型

选 $y/6$ 、 $\dot{y}/6$ 、 $\ddot{y}/6$ 为状态变量, 即

$$x_1 = \frac{y}{6}, \quad x_2 = \frac{\dot{y}}{6}, \quad x_3 = \frac{\ddot{y}}{6}$$

可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\dot{y}}{6} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\ddot{y}}{6} = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\dddot{y}}{6} = -15x_1 - 23x_2 - 9x_3 + u\end{aligned}$$

写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

输出为

$$y = 6x_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2) 能观标准 I 型

选 y 、 $\dot{y}$ 、 $\ddot{y}$ 为状态变量, 即

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -15x_1 - 23x_2 - 9x_3 + 6u \end{aligned}$$

写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

输出为

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1.4.2 传递函数中有零点时的实现

此时, 系统的微分方程为

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^m + b_{m-1}u^{m-1} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1-21a)$$

相应地, 系统传递函数为

$$W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad m \leq n \quad (1-21b)$$

这种包含输入函数导数情况下的实现问题, 与上述实现的不同点主要在于选取合适的结构使得状态方程中不包含输入函数的导数项, 否则将给求解和物理实现带来麻烦。

为了说明方便, 又不失一般性, 这里先从三阶微分方程出发, 找出其实现规律, 然后推广到 n 阶系统。

设待实现的系统传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad n = m = 3 \quad (1-22)$$

1. 能控标准 I 型

因为 $n = m$ ，式 (1-22) 可变换为

$$W(s) = b_3 + \frac{(b_2 - a_2 b_3)s^2 + (b_1 - a_1 b_3)s + (b_0 - a_0 b_3)}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

令

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} U(s)$$

则

$$Y(s) = b_3 U(s) + Y_1(s)[(b_2 - a_2 b_3)s^2 + (b_1 - a_1 b_3)s + (b_0 - a_0 b_3)]$$

对上式求拉普拉斯反变换，可得

$$y = b_3 u + (b_2 - a_2 b_3)\ddot{y}_1 + (b_1 - a_1 b_3)\dot{y}_1 + (b_0 - a_0 b_3)y_1$$

据此可得系统模拟结构图，如图 1-14 所示。

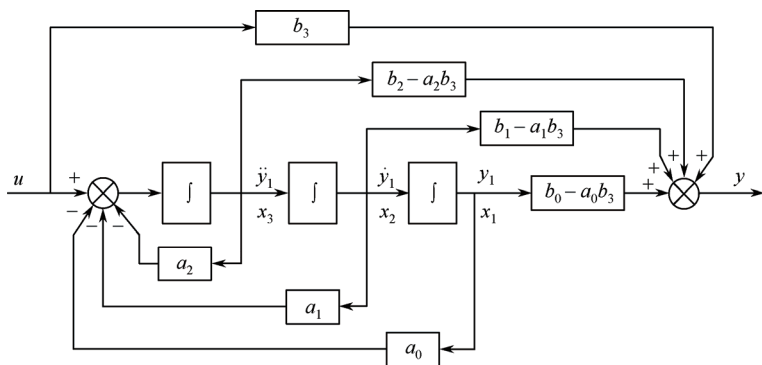


图 1-14 系统模拟结构图

每个积分器的输出为一个状态变量，可得系统状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u \\ y &= b_3 u + (b_2 - a_2 b_3)x_3 + (b_1 - a_1 b_3)x_2 + (b_0 - a_0 b_3)x_1 \end{aligned}$$

或表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} (b_0 - a_0 b_3) & (b_1 - a_1 b_3) & (b_2 - a_2 b_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_3 u \end{cases} \quad (1-23)$$

推广到 n 阶系统 ($m=n$), 式 (1-22) 的能控标准 I 型实现, 可以为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} (b_0 - a_0 b_n) & (b_1 - a_1 b_n) & \cdots & (b_{n-2} - a_{n-2} b_n) & (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \end{cases} \quad (1-24)$$

它的状态方程与式 (1-19) 是相同的, 所不同的只是输出方程。注意到这个差别, 就很容易根据式 (1-24), 由传递函数中分子分母多项式的系数, 写出系统的状态空间表达式。对于式 (1-24), 若 $m < n$, 则至少 $b_n = 0$, 于是, $c = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1}]$, $d = 0$ 。

2. 能观标准 I 型

前面已经提到, 实现是非唯一的。仍以三阶系统出发, 以式 (1-22) 的传递函数为例, 图 1-15 与图 1-14 相比, 从输入-输出的关系看, 二者是完全等效的。从图 1-15 可以看出, 输入函数的各阶导数 $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3u}{dt^3}$ 作适当的等效移动, 可以用图 1-16 (a) 表示, 只要 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 系数选择适当, 从系统的输入-输出看, 二者是完全等效的。将综合点等效地移到前面, 得到等效模拟结构图如图 1-16 (b) 所示。

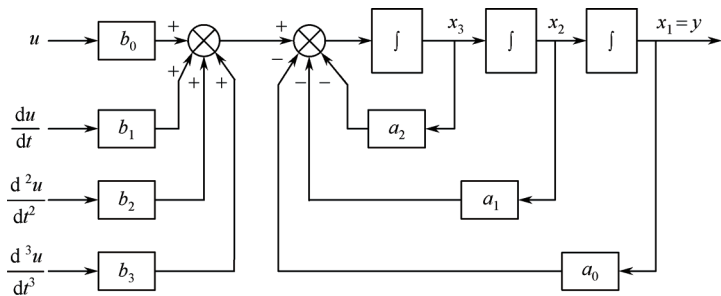


图 1-15 系统模拟结构图

从图 1-16 (b) 容易求得其对应的传递函数为

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\beta_3(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0) + \beta_2(s^2 + a_2s + a_1) + \beta_1(s + a_2) + \beta_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \\ &= \frac{\beta_3s^3 + (a_2\beta_3 + \beta_2)s^2 + (a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + \beta_1)s + (a_0\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + \beta_0)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (1-25)$$

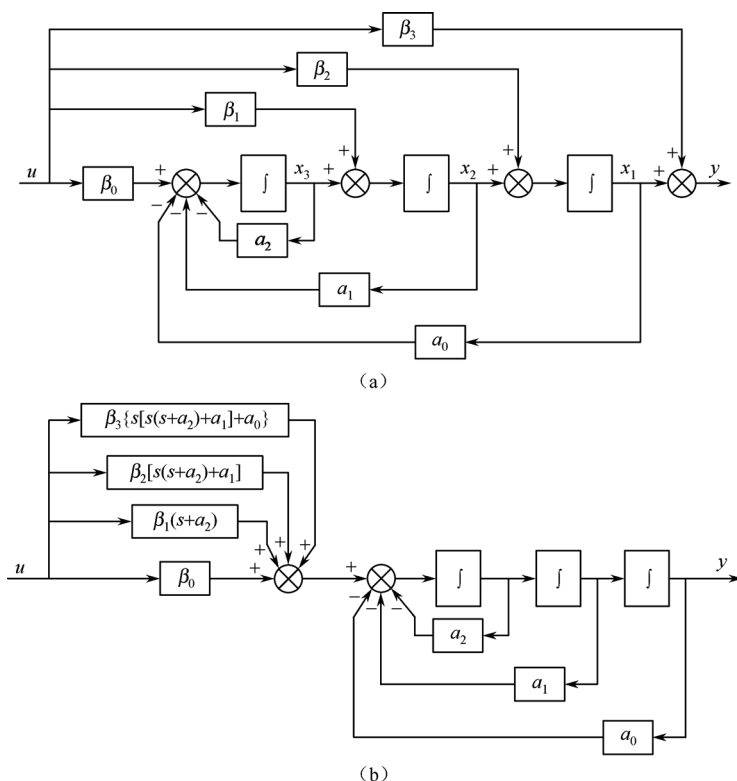


图 1-16 系统模拟结构图

为求得 β_i , 令式 (1-25) 与式 (1-22) 相等, 通过对 s 多项式系数的比较, 得

$$\begin{aligned}\beta_3 &= b_3 \\ a_2\beta_3 + \beta_2 &= b_2 \\ a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + \beta_1 &= b_1 \\ a_0\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + \beta_0 &= b_0\end{aligned}$$

故得

$$\begin{cases} \beta_3 = b_3 \\ \beta_2 = b_2 - a_2\beta_3 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_3 - a_2\beta_2 \\ \beta_0 = b_0 - a_0\beta_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 \end{cases} \quad (1-26)$$

为便于记忆, 可将式 (1-26) 写成式 (1-27) 的形式, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

将图 1-16 (a) 的每个积分器输出选作状态变量, 得到这种结构下的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_1 u \\ \dot{x}_3 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + \beta_0 u \\ y &= x_1 + \beta_3 u\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_3 u \end{cases} \quad (1-28)$$

扩展到 n 阶系统, 其状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_n u \end{cases} \quad (1-29)$$

式中

$$\begin{aligned}\beta_n &= b_n \\ \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1}\beta_n \\ \beta_{n-2} &= b_{n-2} - a_{n-2}\beta_n - a_{n-1}\beta_{n-1} \\ &\vdots \\ \beta_0 &= b_0 - a_0\beta_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 = b_0 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta_{n-i}\end{aligned} \quad (1-30a)$$

或记为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (1-30b)$$

【例 1-7】 已知系统的输入-输出微分方程为

$$\ddot{y} + 9\ddot{y} + 23\dot{y} + 15y = 3\dot{u} + 6u$$

试列写其状态空间表达式。

解 由微分方程系数知

$$a_2 = 9, \quad a_1 = 23, \quad a_0 = 15, \quad b_3 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_1 = 3, \quad b_0 = 6$$

1) 能控标准 I 型

根据式 (1-24) 直接写出状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [6 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2) 能观标准 I 型

首先根据式 (1-30) 的计算公式求出

$$\beta_3 = b_3 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_2\beta_3 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_3 - a_2\beta_2 = b_1 = 3$$

$$\beta_0 = b_0 - a_0\beta_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 = b_0 - a_2\beta_1 = -21$$

按式 (1-29) 直接写出状态方程和输出方程分别为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -21 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

值得注意的是, 这两种方法所选择的状态变量是不同的。这一点可以从它们的模拟结构图 (图 1-14 和图 1-16 (a)) 中很清楚地看到。

1.5 状态矢量的线性变换 (坐标变换)

1.5.1 状态空间表达式的非唯一性

对于一个给定的定常系统, 可以选取许多种状态变量, 相应地有许多种状态空间表达式描述同一系统, 也就是说系统可以有多种结构形式。所选取的状态矢量之间, 实际上是一种矢量的线性变换 (或称坐标变换)。

设给定系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1-31)$$

总可以找到任意一个非奇异矩阵 T ，将原状态矢量 x 作线性变换，得到另一状态矢量 z ，设变换关系为

$$x = Tz$$

即

$$z = T^{-1}x$$

有

$$\dot{z} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}(Ax + Bu) = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$

得到新的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}, \quad z(0) = T^{-1}x(0) = T^{-1}x_0 \quad (1-32)$$

很明显，由于 T 为任意非奇异矩阵，故状态空间表达式为非唯一的。通常称 T 为变换矩阵。

顺便指出，如果两个状态空间描述之间存在式 (1-31) 和式 (1-32) 的关系，则称它们是代数等价的，即它们具有相同的一些代数特性。同一系统采用不同的状态变量所导出的两个状态描述之间，必然是代数等价的。

以例 1-7 求得两个状态空间表达式为例，已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [6 \quad 3 \quad 0]x \end{cases}$$

$$\text{若取变换矩阵 } T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -15 & -14 & -2 \\ 30 & 31 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 求得 } T^{-1} = \frac{\text{adj}T}{|T|} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ -45 & -69 & -21 \end{bmatrix}, \text{ 则变换后}$$

的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -21 \end{bmatrix} u \\ y = CTz = [1 \quad 0 \quad 0]z \end{cases}$$

【例 1-8】 某系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y = [0 \quad 3]x \end{cases} \quad (1-33)$$

(1) 若取变换矩阵 $T_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ，即 $T_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ，则变换后的状态矢量为

$$z = T_1^{-1}x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x$$

即

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}x_2 \\ z_2 &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \end{aligned}$$

则新的状态变量 z_1 、 z_2 是原状态变量 x_1 、 x_2 的线性组合。

在这个状态变量下, 变换后的状态空间表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_1 \mathbf{z} + \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{b} u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c} \mathbf{T}_1 \mathbf{z} = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} = [6 \quad 0] \mathbf{z} \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{x}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (1-34)$$

(2) 若取变换矩阵 $\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 即 $\mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 则变换后的状态矢量为

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

在这样一组状态矢量情况下, 得到系统的另一种状态空间表达式, 见式 (1-35), 它的系统矩阵是对角线型的, 因此是一种并联实现。

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= [0 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} = [3 \quad 3] \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{z}}(0) &= \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (1-35)$$

(3) 若欲将式 (1-35) 的控制列阵 $\mathbf{b}$ 从 $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ 变换成 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的形式, 则需再行寻求变换矩

阵 $\mathbf{T}_3$ 。考虑到 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, 故可选 $\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; 此时, $\mathbf{T}_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 则

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

可得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{T}_3^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{T}_3 \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{T}_3^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [3 \quad 3] \mathbf{T}_3 \tilde{\mathbf{z}} = [6 \quad -6] \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-36)$$

1.5.2 特征值及特征矢量

1. 特征值

系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

系统特征值就是系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，也即特征方程

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (1-37)$$

的根。 $n \times n$ 方阵 $\mathbf{A}$ 有 n 个特征值；实际物理系统中， $\mathbf{A}$ 为实数方阵，故特征值或为实数，或为成对共轭复数；如 $\mathbf{A}$ 为实数对称方阵，则其特征值都是实数。

2. 特征值的不变性

同一系统，经非奇异变换后，得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{D} u \end{cases}$$

其特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = 0 \quad (1-38)$$

式 (1-37) 与式 (1-38) 形式虽不同，但实际是相等的，即系统的非奇异变换，其特征值是不变的。可以证明如下：

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| &= |\lambda \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \lambda \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}| |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}| |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

由于状态变量的选择带有人为的性质,而系统的特性具有客观性,因此,系统在坐标变换下的不变量反映了其固有的特性。特征值在坐标变换下保持不变,反映了系统的稳定性这一固有特性。

将特征方程写成多项式形式 $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ 。由于特征值全由特征多项式的系数 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 唯一地确定,而特征值经非奇异变换是不变的,那么,这些系数 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 也是不变的。

3. 特征矢量

一个 n 维矢量 p_i 经过以 A 作为变换阵的变换,得到一个新的矢量 $\tilde{p}_i$, 即

$$\tilde{p}_i = Ap_i$$

如果此 $\tilde{p}_i = \lambda_i p_i$, 即矢量 p_i 经 A 线性变换后,方向不变,仅长度变化 λ_i 倍 (λ_i 为标量,它是变换阵 A 的特征值),则称 p_i 为 A 的对应于 λ_i 的特征矢量,此时有 $Ap_i = \lambda_i p_i$, 即 $(\lambda_i I - A)p_i = 0$ 。

【例 1-9】 试求

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的特征矢量。

解 A 的特征方程为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

由此得特征值为

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1$$

(1) 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征矢量 p_1 , 设 $p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$, 按定义

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1$$

则有

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} p_{21} + p_{31} &= 0 \\ 3p_{21} &= 0 \\ 2p_{21} - p_{31} &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$p_{21} = 0, \quad p_{31} = 0$$

取基本解

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 同理, 可以算出对应于 $\lambda = -1$ 时的特征矢量为

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

对应于 $\lambda = 1$ 时的特征矢量为

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.5.3 约旦标准型

系统矩阵 A 的特征值是表征系统的动力学特性的重要参量。系统的状态方程可通过适当的线性非奇异变换而化为由特征值表征的标准型。并且, 当特征值两两相异 (无重根) 时, 标准型具有对角线标准型的形式; 而特征值非互异 (有重根) 时, 标准型将为约旦标准型 (也称约当标准型)。在后面的章节中将可看到, 这种以特征值表征的标准型状态方程, 对于分析系统的结构特性是非常直观的。

这里的问题是将

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1-39)$$

变换为

$$\begin{cases} \dot{z} = Jz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases} \quad (1-40)$$

根据系统矩阵 A , 求其特征值, 可以直接写出系统的约旦标准型矩阵 J 如下:

(1) 无重根时, 一般为

$$J = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

此时, 称为对角线标准型。

(2) 有重根时 (q_1 个重根 λ_1 , q_2 个重根 λ_2), 一般为

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & & 0 & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & & 0 & \\ & & & & & \lambda_2 & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & 0 & & & & 1 & \\ & & & & & & & \lambda_2 & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & & & \lambda_{q_1+q_2+1} & & 0 \\ & & & & & & & \lambda_{q_1+q_2+2} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{array} \right]$$

而要得到变换的控制矩阵 $T^{-1}B$ 和输出矩阵 CT ，则必须求出变换矩阵 T 。下面根据系统矩阵 A 的形式及有无重根的情况，分别介绍几种求 T 的方法。

1. 系统矩阵 A 为任意形式

1) 特征值无重根时

设 λ_i ($i=1,2,\dots,n$) 是 A 的 n 个互异特征根，求出 λ_i 的特征矢量 p_i ，则变换矩阵由 A 的特征矢量 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 构成，即

$$T = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] \quad (1-41)$$

证明如下：

(1) 由于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异，故特征矢量 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 线性无关，从而由它们构成的矩阵 $T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 必为非奇异，即 T^{-1} 存在，坐标变换后可得到

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz \end{aligned}$$

(2) 如果变换矩阵

$$T = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$$

两边左乘 A ，有

$$AT = A[p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$$

由特征矢量的定义

$$Ap_i = \lambda_i p_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AT} &= [\lambda_1 \mathbf{p}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \mathbf{p}_n] \\
 &= [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

上式两边左乘 $\mathbf{T}^{-1}$, 得

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1-42)$$

从而证明了式 (1-42) 中系统矩阵 $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT}$ 是对角阵。

【例 1-10】 试将下列状态方程变换为对角线标准型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 首先求出矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 其特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda + 11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

与例 1-9 不同, 本例需要解三次代数方程。若该方程有整数根, 则是常数项的约数。对于本例而言, 常数项的约数有 ± 1 、 ± 2 、 ± 3 、 ± 6 , 考虑到不能取正根, 将这四个负数依次代入 (或利用综合除法), 最后得到方程的根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

注意: 矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹 (主对角线元素之和) 等于矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值之和, 即 $\text{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$;

同时, 又有 $\text{tr} \mathbf{A} = -a_{n-1} = -6$ 。

可算出对应于各特征值的特征矢量为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

进而构成变换矩阵 T 并计算得 T^{-1} , 即

$$T = [p_1 \ p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{\text{adj} T}{|T|} = \frac{\begin{bmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 6 & 8 & -6 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}}{-2} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

则变换后各有关矩阵分别为

$$A = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$cT = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = [0 \ 2 \ 6]$$

于是变换后的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 2 \ 6] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

可见, 在对角线标准型下, 各个状态变量间实现了完全解耦, 可表示成为 n 个独立的状态变量方程。

2) 系统矩阵 A 的特征值有重根时

设 A 的特征值有 q 个 λ_1 重根, 其余 $n-q$ 个根为互异根, 现不加证明地引出变换矩阵 T 的计算公式如下:

$$T = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_q \ p_{q+1} \ \cdots \ p_n] \quad (1-43)$$

式中, $p_{q+1}, \dots, p_n$ 是对应于 $n-q$ 个单根的特征矢量, 求法同前。对于 q 个 λ_1 重根的各矢量 $p_1, \dots, p_q$, 应根据下式计算:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{A} \mathbf{p}_1 = 0 \\ \lambda_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{A} \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{p}_q - \mathbf{A} \mathbf{p}_q = -\mathbf{p}_{q-1} \end{cases} \quad (1-44a)$$

或

$$\begin{cases} (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_1 = 0 \\ (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 \mathbf{p}_2 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})^q \mathbf{p}_q = 0 \end{cases} \quad (1-44b)$$

显然, $\mathbf{p}_1$ 仍为 λ_1 对应的特征矢量, 其余 $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_q$ 则称为广义特征矢量。

【例 1-11】 试将下列状态空间表达式化为约旦标准型。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 先求出系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 其特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

得

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2$$

对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征矢量 $\mathbf{p}_1$ 可按式 (1-38) 求得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

解得

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再求对应于 $\lambda_1 = -1$ 的另一广义特征矢量 $\mathbf{p}_2$, 即

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{A} \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \\ & - \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解得

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后确定对应于 $\lambda_3 = 2$ 的特征矢量 $\boldsymbol{p}_3$, 即

$$\lambda_3 \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{A} \boldsymbol{p}_3$$

可得

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

于是变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

从而可得

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

这样可计算出变换后各矩阵分别为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ \hline & & 2 \end{array} \right]$$

$$\boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{b} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} \boldsymbol{T} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

可见, 当系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根时, 通常不可能通过变换实现状态变量间的完全解耦, 约旦标准型是可能达到的最简耦合形式。在这种标准型下, 每一个状态变量的方程只多与下一序号的状态变量构成耦合。

顺便指出, 以本例题中 $\lambda_1 = -1$ 为例, 为二重根, 故其代数重数 $\sigma_1 = 2$; 几何重数 $a_1 = n - \text{rank}(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$, 几何重数表示约旦小块的个数。当某一重根的几何重数等于代数重数时, 则表现为对角线标准型。也就是说, 只有重特征值对应的独立特征矢量的个数等于它的代数重数时, 系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 才能化为对角线标准型。例如:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

其特征值为

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

可以求出

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 2 \end{bmatrix}$$

此时, 几何重数等于代数重数。

2. 系统矩阵 A 为友矩阵

系统矩阵 A 为友矩阵时, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) A 的特征值无重根时, 其变换矩阵是一个范德蒙德 (Vandermonde) 矩阵, 为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1-45)$$

如

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

的特征值为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

其变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

有

$$A = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) A 的特征值有重根时, 以有 λ_1 的三重根为例, 即

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \lambda_4^3 & \cdots & \lambda_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \frac{d}{d\lambda}\lambda_1^{n-1} & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda_1^{n-1} & \lambda_4^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1-46)$$

【例 1-12】 试将下列状态空间表达式化为约旦标准型。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 A 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2$$

其变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

从而可计算得

$$T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

这样可计算出变换后各矩阵分别为

$$J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$T^{-1}b = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$cT = [1 \ 0 \ 1]$$

3. 模态标准型

当系统矩阵 A 的特征值出现共轭复数时, 化为对角标准型, 计算特征矢量将出现复数矢量, 结果 $T^{-1}AT$ 、 $T^{-1}B$ 、 cT 也是复数矩阵。同样, 模拟结构图也会出现复数。复数信号的物理意义不清晰, 因此, 当有共轭复根时, 可化为模态标准型。

如果系统矩阵 A 是二阶矩阵, 且有共轭复数特征值 $\lambda_1 = \sigma + j\omega$, $\lambda_2 = \sigma - j\omega$, 则 A 通过非奇异变换后得到的模态标准型为

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

T 是对应 λ_1 (或 λ_2) 的特征矢量的实部和虚部为列矢量构成的矩阵。

证明如下。设对应 $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ 的特征矢量为 $p_1 = \alpha + j\beta$, 其中, p_1 是二维复数矢量, α, β 都是二维实数矢量, 根据特征值的定义有

$$\lambda_1 p_1 = Ap_1$$

即

$$(\sigma + j\omega)(\alpha + j\beta) = A(\alpha + j\beta)$$

令实部、虚部分别相等, 即

$$\begin{cases} \sigma\alpha - \omega\beta = A\alpha \\ \omega\alpha + \sigma\beta = A\beta \end{cases}$$

写成一个矩阵方程, 即

$$[\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = A[\alpha \ \beta]$$

则

$$T = [\alpha \ \beta]$$

有

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

T 是对应 λ_1 的特征矢量的实部和虚部为列矢量构成的矩阵。

【例 1-13】 将系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ 变换为约旦标准型和模态标准型。

解 特征值为共轭复数对

$$\lambda_1 = -1 + j, \quad \lambda_2 = -1 - j$$

对应的特征矢量

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + j \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - j \end{bmatrix}$$

变换矩阵为

$$T = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + j & -1 - j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-j & -j \\ 1+j & j \end{bmatrix}$$

约旦标准型为

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1+j & 0 \\ 0 & -1-j \end{bmatrix}$$

为避免在系统矩阵中出现复数, 应化成模态标准型。

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

模态标准型为

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{当 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \text{ 时, 系统的特征根为}$$

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4$$

有

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1 = \mathbf{A} \mathbf{p}_1$$

设

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ p_{41} \end{bmatrix}$$

有

$$(\sigma + j\omega)p_{11} = p_{21}$$

$$(\sigma + j\omega)p_{21} = p_{31}$$

$$(\sigma + j\omega)p_{31} = p_{41}$$

最后一个方程根据凯莱-哈密尔顿定理自然成立。凯莱-哈密尔顿定理将在后面介绍。

取 $p_{11} = 1$, 得

$$p_{11} = 1$$

$$p_{21} = \sigma + j\omega$$

$$p_{31} = (\sigma + j\omega)^2 = \sigma^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega$$

$$p_{41} = (\sigma + j\omega)^3 = (\sigma^3 - 3\sigma\omega^2) + j(3\sigma^2\omega - \omega^3)$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 - \omega^2 \\ \sigma^3 - 3\sigma\omega^2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 2\sigma\omega \\ 3\sigma^2\omega - \omega^3 \end{bmatrix}$$

即

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \sigma & \omega & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \sigma^2 - \omega^2 & 2\sigma\omega & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \sigma^3 - 3\sigma\omega^2 & 3\sigma^2\omega - \omega^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix} \quad (1-47)$$

此时

$$T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & & \\ -\omega & \sigma & & \\ \hline & & 0 & \\ & & \lambda_3 & 0 \\ & & 0 & \lambda_4 \end{array} \right] \quad (1-48)$$

4. 系统的并联实现

已知系统传递函数

$$W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1-49)$$

现将式 (1-49) 展开成部分分式。由于系统的特征根有两种情况：一是所有根均是互异的；二是有重根，分别讨论如下。

1) 具有互异根的情况

此时式 (1-49) 可写成

$$W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \quad (1-50)$$

式中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为系统的特征根。

将其展开成部分分式, 即

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s - \lambda_1} + \frac{k_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - \lambda_i} \quad (1-51)$$

式中, k_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为待定系数, $k_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} W(s)(s - \lambda_i)$ 。

根据式 (1-51) 容易看到, 其模型结构图如图 1-17 (a) 或图 1-17 (b) 所示, 这种结构采取的是积分器并联的结构形式。

取每个积分器的输出作为一个状态变量, 系统的状态空间表达式分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-52)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1 \ \cdots \ 1] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-53)$$

式 (1-52) 和式 (1-53) 互为对偶。同理, 图 1-17 (a) 和图 1-17 (b) 也有其对偶关系。

不论式 (1-52) 还是式 (1-53), 它们都属于约旦标准型 (或对角线标准型), 因此, 约旦标准型的实现是并联型的。

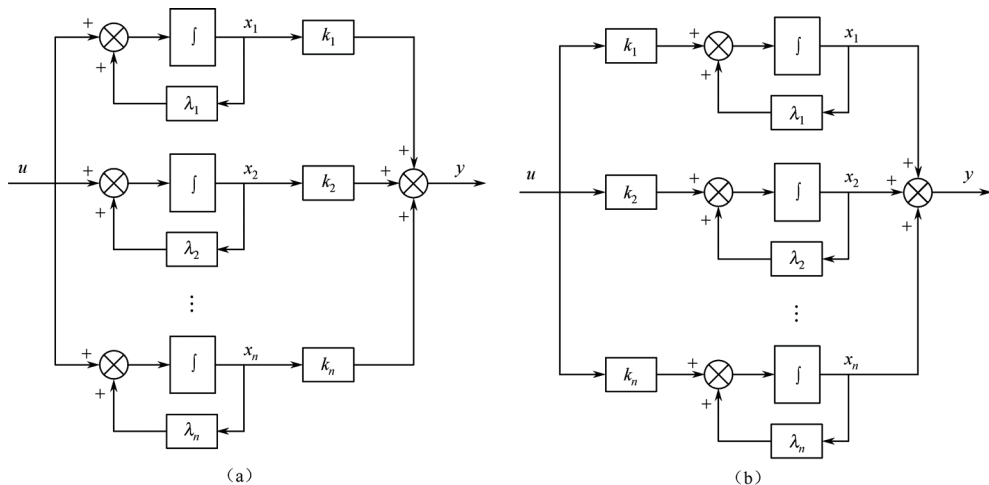


图 1-17 并联型模拟结构图

【例 1-14】 设 $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$, 试求其状态空间表达式。

解 其特征根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

对应的待定系数为

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow -1} W(s)(s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{6}{(s+2)(s+3)} = 3$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -2} W(s)(s+2) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{6}{(s+1)(s+3)} = -6$$

$$k_3 = \lim_{s \rightarrow -3} W(s)(s+3) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{6}{(s+1)(s+2)} = 3$$

因此, 其相应的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [3 \quad -6 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2) 具有重根的情况

设有一个 q 重的主根 λ_1 , 其余 $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n$ 是互异根。这时 $W(s)$ 的部分分式展开式为

$$W(s) = \frac{k_{11}}{(s-\lambda_1)^q} + \frac{k_{12}}{(s-\lambda_1)^{q-1}} + \dots + \frac{k_{1(q-1)}}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{k_{1q}}{(s-\lambda_1)} + \sum_{i=q+1}^n \frac{k_i}{(s-\lambda_i)} \quad (1-54)$$

式中, $k_{1\rho} (\rho=1, 2, \dots, q)$, $k_i (i=q+1, q+2, \dots, n)$ 为待定系数; $k_{1\rho} = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{1}{(\rho-1)!} \frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}}$

$[W(s)(s-\lambda_1)^\rho]$; $k_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} W(s)(s-\lambda_i)$ 。

从式 (1-54) 可知系统的一种实现, 具有如图 1-18 所示的结构, 除重根是取积分器串联的形式外, 其余均为积分器并联。

从图 1-18 的结构图, 不难列出其相应的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_1 x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{q-1} &= \lambda_1 x_{q-1} + x_q \\ \dot{x}_q &= \lambda_1 x_q + u \\ \dot{x}_{q+1} &= \lambda_{q+1} x_{q+1} + u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + u \\ y &= k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + \dots + k_{1(q-1)} x_{q-1} + k_{1q} x_q + k_{q+1} x_{q+1} + \dots + k_n x_n \end{aligned}$$

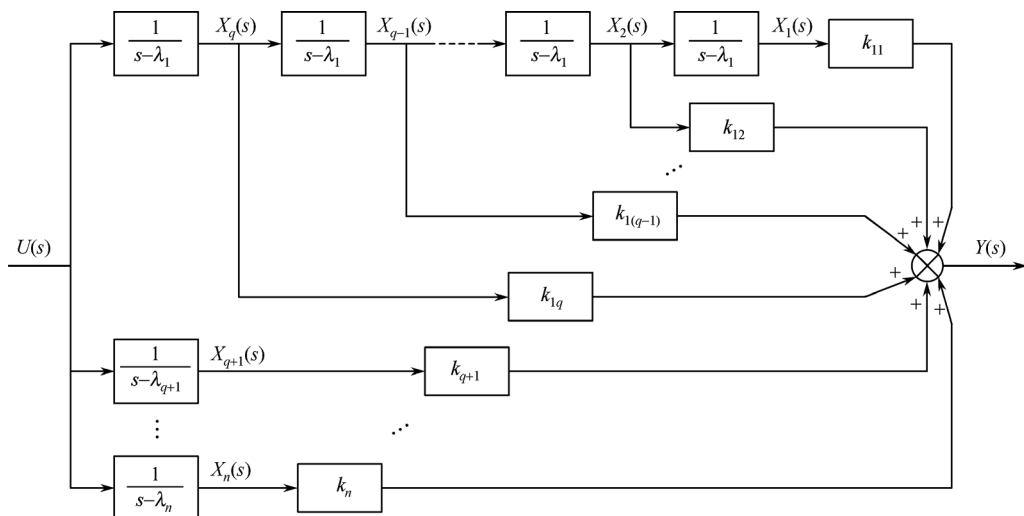


图 1-18 并联型模拟结构图

用矢量矩阵形式表示，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} \\ \dot{x}_q \\ \dot{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_{q+1} & \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1(q-1)} & k_{1q} & k_{q+1} & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1-55)$$

【例 1-15】 设 $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{(s-2)^3}$ ，试求其状态空间表达式。

解 其特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

待定系数为

$$k_{11} = \lim_{s \rightarrow 2} W(s)(s-2)^3 = \lim_{s \rightarrow 2} (2s^2 + 5s + 1) = 19$$

$$k_{12} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} [W(s)(s-2)^3] = \lim_{s \rightarrow 2} (4s + 5) = 13$$

$$k_{13} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [W(s)(s-2)^3] = \frac{4}{2} = 2$$

因此, 其相应的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [19 \quad 13 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

1.6 从状态空间表达式求传递函数阵

以上介绍了从传递函数求状态空间表达式的问题, 即系统的实现问题。本节介绍从状态空间表达式求传递函数(阵)的问题。

1.6.1 传递函数(阵)

1. 单输入-单输出系统

已知系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} + du \end{cases} \quad (1-56)$$

式中 $\mathbf{x}$ —— n 维状态矢量;

$\mathbf{A}$ —— $n \times n$ 方阵;

$\mathbf{b}$ —— $n \times 1$ 列阵;

y ——输出, 标量;

$\mathbf{c}$ —— $1 \times n$ 行阵;

d ——标量, 一般为零;

u ——输入, 标量。

对式(1-56)进行拉普拉斯变换, 并假设初始条件为零, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(s) \\ Y(s) = \mathbf{c}\mathbf{X}(s) + dU(s) \end{cases} \quad (1-57)$$

故 U - X 间的传递函数为

$$W_{ux}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}b \quad (1-58)$$

它是一个 $n \times 1$ 的列阵函数。

U - Y 间的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c(sI - A)^{-1}b + d \quad (1-59)$$

它是一个标量。

2. 多输入-多输出系统

已知系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1-60)$$

式中 u —— $r \times 1$ 输入列矢量；

y —— $m \times 1$ 输出列矢量；

B —— $n \times r$ 控制矩阵；

C —— $m \times n$ 输出矩阵；

D —— $m \times r$ 直接传递阵；

x, A ——同单输入-单输出系统。

对式 (1-60) 进行拉普拉斯变换, 并假设初始条件为零, 则有

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases} \quad (1-61)$$

故 U - X 间的传递函数为

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1}B \quad (1-62)$$

它是一个 $n \times r$ 矩阵函数。

由 $Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) = W(s)U(s)$, 可知 U - Y 间的传递函数为

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1-63)$$

它是一个 $m \times r$ 矩阵函数, 即

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1r}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \cdots & W_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

式中, 各元素 $W_{ij}(s)$ 都是标量函数, 它表征第 j 个输入对第 i 个输出的传递关系。当 $i \neq j$ 时, 意味着不同标号的输入与输出有关联, 称为耦合关系, 这正是多变量系统的特点。

式 (1-63) 可以表示为

$$W(s) = \frac{1}{|sI - A|} [C \text{adj}(sI - A)B + D |sI - A|] \quad (1-64)$$

可以看出, $W(s)$ 的分母, 就是系统矩阵 A 的特征多项式, $W(s)$ 的分子是一个多项式矩阵。

应当指出, 同一系统, 尽管其状态空间表达式可以作各种非奇异变换而不是唯一的, 但它的传递函数阵是不变的。对于已知系统见式 (1-60), 其传递函数阵为式 (1-63)。当作坐标变换, 即令 $z = T^{-1}x$ 时, 则该系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \quad (1-65)$$

那么, 对应式 (1-65) 的传递函数阵为

$$\begin{aligned} \tilde{W}(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = C[T(sI - T^{-1}AT)T^{-1}]^{-1}B + D \\ &= C[T(sI)T^{-1} - TT^{-1}ATT^{-1}]^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = W(s) \end{aligned}$$

即同一系统, 其传递函数阵是唯一的。

这个结论在物理上的含义是, 当系统的输入和输出变量确定后, 不管如何选取其状态变量, 系统的输入-输出特性将总是一样的。从数学上看, 则此结论说明, 所有代数等价的状态空间描述均具有等同的输入-输出特性。

1.6.2 组合系统的状态空间表达式及传递函数阵

实际的控制系统, 往往由多个子系统按一定的连接构成组合系统。组合的基本方式有并联、串联和反馈三种类型。现仅以上述三种基本组合方式, 分别讨论组合系统的状态空间表达式及传递函数阵。

设系统 1 为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u_1 \end{cases} \quad (1-66)$$

简记为

$$\Sigma 1: (A_1, B_1, C_1, D_1)$$

设系统 2 为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 \end{cases} \quad (1-67)$$

简记为

$$\Sigma 2: (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

1. 并联连接

并联连接, 是指各子系统在相同输入下, 组合系统的输出是各子系统输出的代数和, 结构简图如图 1-19 所示。

由式 (1-66) 和式 (1-67), 并考虑 $u_1 = u_2 = u, y = y_1 \pm y_2$, 得系统的状态空间表达式为

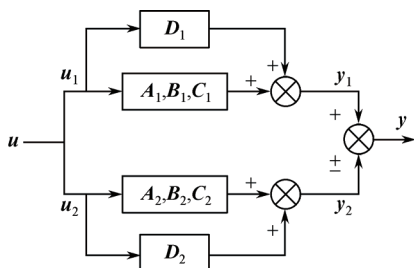


图 1-19 并联连接系统结构图

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \pm C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2)u \end{cases}$$

从而系统的传递函数阵为

$$\begin{aligned} W(s) &= [C_1 \pm C_2] \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2) \\ &= [C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1] \pm [C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2] \\ &= W_1(s) \pm W_2(s) \end{aligned} \quad (1-68)$$

故子系统并联时，系统传递函数阵等于子系统传递函数阵的代数和。若推广到 N 个子系统并联连接（以相加为例），则有 $W(s) = \sum_{i=1}^N W_i(s)$ 。

2. 串联连接

串联连接如图 1-20 所示。显然

$$y = y_2 = W_2 u_2 = W_2 y_1 = W_2 W_1 u_1 = W_2 W_1 u$$

可见，其串联连接传递函数阵为

$$W(s) = W_2(s)W_1(s) \quad (1-69)$$

即子系统串联时，系统传递函数阵等于子系统传递函数之积。但应注意，传递函数阵相乘，先后次序不能颠倒。若按此连接次序，推广到 N 个子系统串联连接，则有 $W(s) = W_N(s)W_{N-1}(s)\cdots W_1(s)$ 。

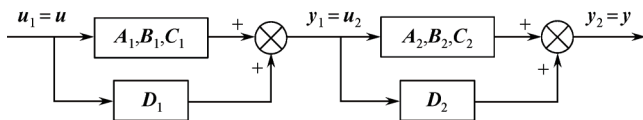


图 1-20 串联连接系统结构图

串联连接系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \\ y = [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 u \end{cases}$$

3. 反馈连接

反馈连接系统结构如图 1-21 所示。

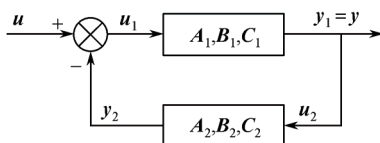


图 1-21 反馈连接系统结构图

由图可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 (u - C_2 x_2) \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y &= y_1 = C_1 x \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

从而系统的传递函数阵为

$$W(s) = [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} (sI - A_1) & B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & (sI - A_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里又遇到分块求逆的问题，假设

$$\begin{bmatrix} (sI - A_1) & B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & (sI - A_2) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

故有

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_1) & B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & (sI - A_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

从而得

$$\begin{aligned} F_{11}(sI - A_1) - F_{12}B_2C_1 &= I \\ F_{11}B_1C_2 + F_{12}(sI - A_2) &= 0 \end{aligned}$$

由以上两式解得

$$F_{11}(sI - A_1) = F_{12}B_2C_1 + I = I - F_{11}B_1C_2(sI - A_2)^{-1}B_2C_1$$

即

$$F_{11} = (sI - A_1)^{-1} - F_{11}B_1C_2(sI - A_2)^{-1}B_2C_1(sI - A_1)^{-1}$$

于是

$$\begin{aligned} W(s) &= [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 F_{11} B_1 \\ &= C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 - C_1 F_{11} B_1 C_2 (sI - A_1)^{-1} B_2 C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 \\ &= W_1(s) - W(s) W_2(s) W_1(s) \end{aligned}$$

所以

$$W(s) = W_1(s) [I + W_2(s) W_1(s)]^{-1} \quad (1-70)$$

式(1-70)还可通过下面方法证明。由图 1-21, 可得

$$u_1 = u - y_2 = u - W_2 u_2 = u - W_2 y_1 = u - W_2 W_1 u_1$$

整理得

$$u_1 = (I + W_2 W_1)^{-1} u$$

又

$$y = y_1 = W_1 u_1$$

则有

$$y = W_1 (I + W_2 W_1)^{-1} u$$

如图 1-21 所示, 系统的传递函数阵还有另一种形式, 下面给出简要证明。由图 1-21, 可得

$$y = W_1 u_1 = W_1 (u - W_2 y)$$

整理得

$$(I + W_1 W_2) y = W_1 u$$

即

$$y = (I + W_1 W_2)^{-1} W_1 u$$

最后, 求得

$$W(s) = [I + W_1(s) W_2(s)]^{-1} W_1(s) \quad (1-71)$$

还需指出, 在子系统反馈连接的讨论中, 假设 $D_1 = D_2 = 0$, 这是为了使结果不致于过于复杂, 而且这也是符合大多数实际问题的。

1.7 离散时间系统的状态空间表达式

连续时间系统的状态空间方法, 完全适用于离散时间系统。类似在连续系统中, 从微分方程或传递函数建立状态空间表达式, 称为系统的实现。在离散系统中, 从差分方程或脉冲传递函数求取离散状态空间表达式, 也是一种实现。

设系统差分方程为

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_n u(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k) \end{aligned} \quad (1-72)$$

相应地系统脉冲传递函数为

$$W(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (1-73)$$

实现的任务就是确定一种状态空间表达式, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}u(k) \\ y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}u(k) \end{cases} \quad (1-74)$$

在两相邻采样时刻, $u(k)$ 不变的条件下, 式 (1-73) 的状态空间表达式也可以用模拟结构图 (图 1-22) 表示。图 1-22 中, T 代表单位延迟器, 类似于连续系统中的积分器。

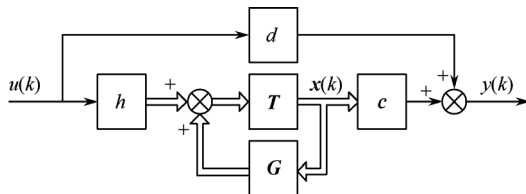


图 1-22 离散系统模拟结构图

实现是非唯一的, 较简单的实现见如图 1-23 所示的模拟结构图。图中, a_i 为已知参数, h_i 为待定常数。以每个延迟器的输出作为一个状态变量, 可得

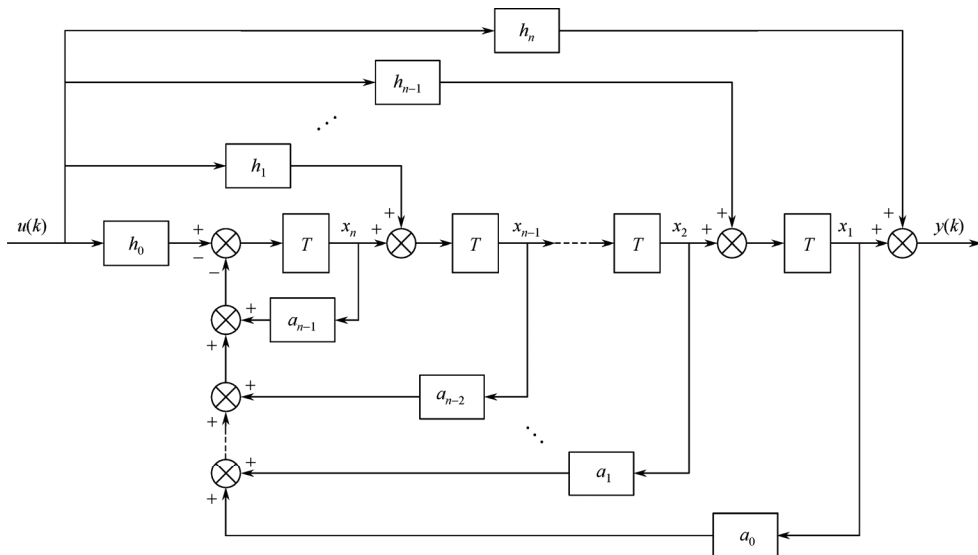


图 1-23 离散系统模拟结构图

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + h_{n-1}u(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + h_{n-2}u(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) + h_1u(k) \\ x_n(k+1) &= -a_0x_1(k) - a_1x_2(k) - \cdots - a_{n-1}x_{n-1}(k) + h_0u(k) \\ y(k) &= x_1(k) + h_nu(k) \end{aligned}$$

矢量矩阵形式的离散状态空间表达式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} h_{n-1} \\ h_{n-2} \\ \vdots \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]}_{\mathbf{c}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{h_n}_{\mathbf{d}} u(k)$$

式中, h_i 的求法, 类似于 1.4 节中式 (1-30) 求 β_i 的计算公式。即

$$\begin{aligned} h_n &= b_n \\ h_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1}h_n \\ &\vdots \\ h_0 &= b_0 - a_0h_n - a_1h_{n-1} - \cdots - a_{n-1}h_1 = h_0 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i h_i \end{aligned}$$

多变量离散状态空间表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (1-75)$$

习 题

1-1 试求如图 1-24 所示系统的模拟结构图, 并建立其状态空间表达式。

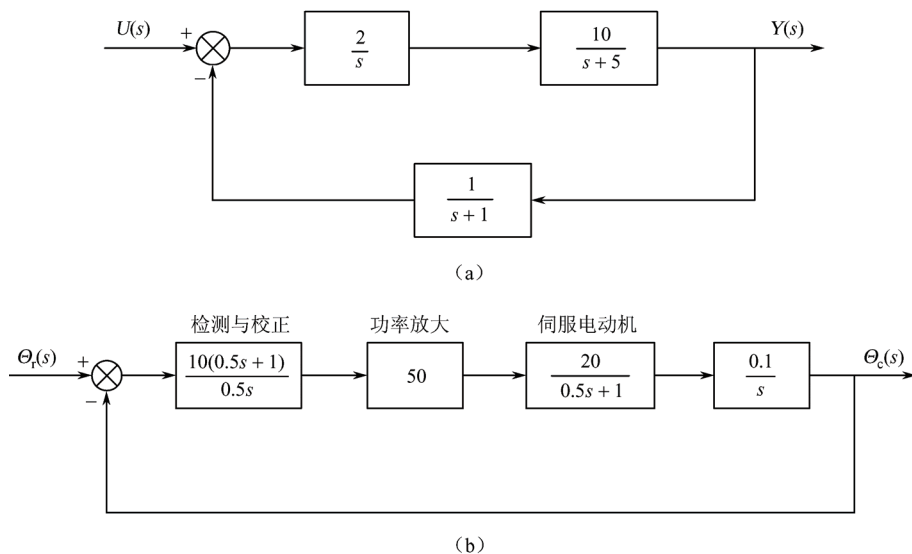


图 1-24 系统框图

1-2 有电路图如图 1-25 所示。以电压 u 为输入量，求以电感中的电流和电容上的电压为状态变量的状态方程，以及以电阻 R_2 上的电压作为输出量的输出方程（注：令 $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$, $x_3 = u_C$ ）。

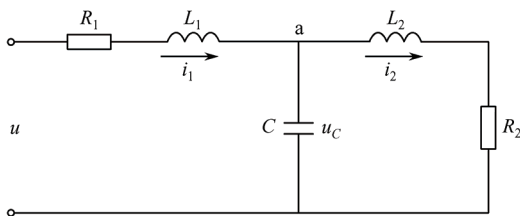


图 1-25 电路图

1-3 有机械系统如图 1-26 所示，质量块 m_1 和 m_2 分别受外力 F_1 和 F_2 的作用，其位移分别为 y_1 、 y_2 。求以 m_1 和 m_2 的运动速度 v_1 、 v_2 为输出时的状态空间表达式。

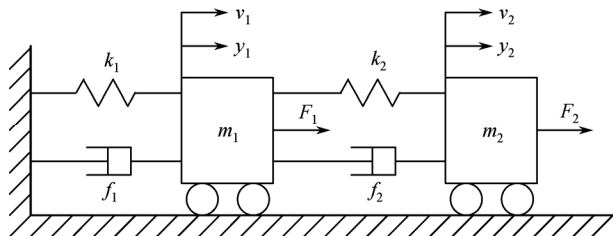


图 1-26 机械系统

1-4 两输入 u_1 、 u_2 ，两输出 y_1 、 y_2 的系统，其模拟结构图如图 1-27 所示，试求其状态空间表达式。

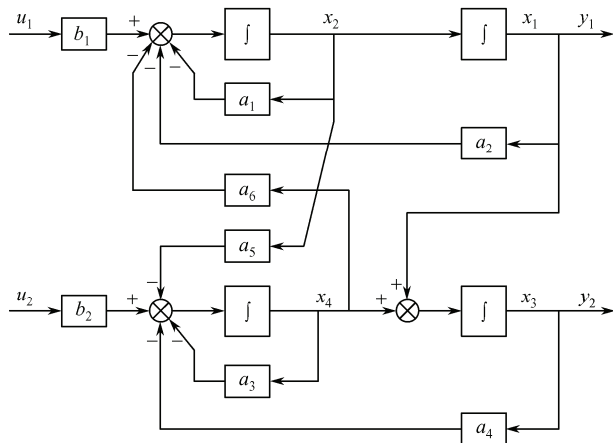


图 1-27 双输入-双输出系统模拟结构图

1-5 已知系统模拟结构图如图 1-28 所示，试求系统特征值之和 $\sum \lambda_i$ 。

1-6 系统的动态特性由下列微分方程描述：

(1) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$

(2) $\ddot{y} - 6\dot{y} + 12y = 2\ddot{u} + 5\dot{u} + u$

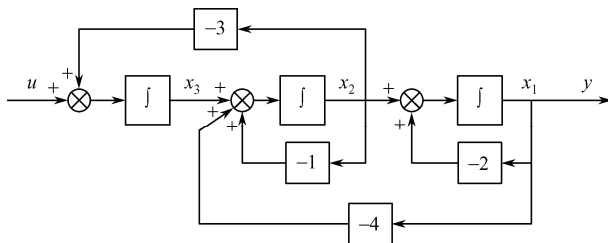


图 1-28 系统模拟结构图

列写其相应的状态空间表达式，并画出相应的模拟结构图。

1-7 已知系统传递函数

$$(1) W(s) = \frac{3(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

$$(2) W(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}$$

试求出系统的约旦标准型的实现，并画出相应的模拟结构图。

1-8 已知系统微分方程或传递函数

$$(1) \ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 3\ddot{u} + 12\dot{u} + 11u$$

$$(2) W(s) = \frac{3s^2 + 12s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

试利用本章方法求出系统的各种实现。

1-9 给定下列状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(1) 画出相应的模拟结构图；

(2) 求系统的传递函数。

1-10 求下列矩阵的特征值及特征矢量。

$$(1) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1-11 试将下列状态空间表达式化成约旦标准型（并联分解）。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1-12 已知 $\bar{A} = T^{-1}AT$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$; 试求 $\det A$, 即 $|A|$ 。

1-13 已知两子系统的传递函数阵 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 分别为

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}; \quad W_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

试求两子系统串联连接和并联连接时, 系统的传递函数阵。

1-14 已知如图 1-21 所示的系统, 其中子系统 1、2 的传递函数阵分别为

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}; \quad W_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求反馈连接系统的传递函数阵。

1-15 已知离散时间系统的差分方程为

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

试求系统的状态空间表达式。

第2章 控制系统状态空间表达式的解

对系统进行分析的目的，是要揭示系统状态的运动规律和基本特性。系统状态空间描述的建立为分析系统的行为和特性提供了可能性。在经典控制理论中分析动力学系统的时域行为，研究系统运动的规律和特性，归结于求解标量微分方程，导出输出量依时间变化的规律来考察其各项动力学性能指标是否符合给定性能指标要求的问题。对于状态空间分析法，描述系统动力学特性的数学模型是状态空间方程，因此，分析系统的动态特性，必然借助于求解系统的状态方程，导出状态变量依时间变化的规律，为系统的稳定性分析及系统的状态空间的综合奠定必要的基础。本章将重点讨论状态转移矩阵的定义、性质和计算方法，从而导出状态方程的求解公式。

2.1 线性定常系统的自由运动

2.1.1 齐次状态方程的解

对于线性定常系统在无控制、无扰动作用下的自由运动，实质上是求解齐次状态方程，即输入为零的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2-1)$$

此方程的解就是在初始状态的作用下系统的自由运动。本节将给出以下三种解法。

1. 一般解法

一阶常系数标量微分方程为

$$\dot{x} = ax \quad (2-2)$$

其特征方程及特征值为

$$\lambda - a = 0, \quad \lambda = a$$

方程的通解为具有下述指数形式的解，即

$$x(t) = pe^{at} = pe^{\lambda t}$$

而相应于初始条件 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的特解为

$$x(t) = x(0)e^{at} = x(0)e^{\lambda t}$$

类似于上述一阶标量微分方程，齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2-3)$$

也应具有指数形式的解，根据方程是线性、常系数的特点，式（2-3）应具有下述指数形式的解，即

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 e^{\lambda t} \\ p_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ p_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{P} e^{\lambda t} \quad (2-4)$$

式中, λ 是待定常数, 而 $\mathbf{P} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ 是与 λ 相应的待定矢量。

如果上述形式的解 $\mathbf{P} e^{\lambda t}$ 确是式 (2-3) 的解, 则必满足状态方程。于是有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{P} e^{\lambda t}$$

或

$$\lambda \mathbf{P} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{P} e^{\lambda t}$$

即

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{P} e^{\lambda t} = 0$$

因为 $e^{\lambda t}$ 不可能为零, 则

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{P} = 0 \quad (2-5)$$

式中, $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ 是状态方程的特征矩阵, $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$ 即为状态方程的特征多项式, 特征方程 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 的根就是系数矩阵 $\mathbf{A}$ 或状态方程的特征值; $\mathbf{P}$ 为与特征值相应的特征矢量。

下面仅讨论微分方程无重特征值的情况。

设微分方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异, $\mathbf{P}_i = [p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni}]^T$ 为与特征值 λ_i 相应的特征矢量, $i = 1, 2, \dots, n$, 则 n 个矢量函数

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{p}_n e^{\lambda_n t} = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix} e^{\lambda_n t} \end{array} \right. \quad (2-6)$$

是矢量微分方程的 n 个解。由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互异, 特征矢量 $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ 线性无关, 故矢量函数 $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{p}_i e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 也必线性无关。因此, 求得 n 个线性无关的解, 而它们的线性组合就是微分方程的通解, 即

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t) + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n(t) \quad (2-7)$$

式中, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是由初始条件 $\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0)$ 所确定的任意常数, 当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 确定后, 相应于初始条件的特解就随之确定。

因此, 求解齐次矢量微分方程, 实质上就是求其状态阵 $\mathbf{A}$ 的特征值及特征值相应的特征矢量, 并根据初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 确定 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的问题。

即根据特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ ，求 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，再根据特征矢量定义式 (2-5) 确定的一组代数方程

$$\begin{cases} (\lambda_1 I - A)p_1 = 0 \\ (\lambda_2 I - A)p_2 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_n I - A)p_n = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

解出特征量 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。

于是求得 n 个线性无关的基本解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ，这一组基本解称为基本解组，而此基本解组构成的函数矩阵为

$$X = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

称为基本解阵。其相应的行列式称为郎斯基 (Wronskion) 行列式，可见判定 n 个 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 矢量是方程 $\dot{x} = Ax$ 的线性无关解的充要条件是郎斯基行列式不等于零。

若将微分方程的通解写为矩阵的形式，即

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = X\alpha \quad (2-10)$$

并代入初始条件

$$x(0) = X_0\alpha$$

则待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由下式确定

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = X_0^{-1}x(0) \quad (2-11)$$

式中

$$X_0 = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]$$

所以，微分方程特解的矩阵式为

$$x(t) = XX_0^{-1}x(0) \quad (2-12)$$

一般地，如果初始时刻 $t = t_0$ ，则

$$x(t) = XX_0^{-1}x(t_0) \quad (2-13)$$

【例 2-1】 已知系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

试求在初始状态 $x_1(0), x_2(0)$ 作用下系统的自由运动。

解 首先求出系统的特征值及特征矢量

特征方程为

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

特征值为

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1$$

相应于 $\lambda_1 = -2$ 的特征矢量, 由方程 $(\lambda_1 I - A)p_1 = 0$ 求得, 即

$$p_1 = [p_{11} \quad p_{21}]^T = [-1 \quad 2]^T$$

相应于 $\lambda_2 = -1$ 的特征矢量, 由方程 $(\lambda_2 I - A)p_2 = 0$ 求得, 即

$$p_2 = [p_{12} \quad p_{22}]^T = [1 \quad -1]^T$$

于是

$$x_1(t) = p_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$x_2(t) = p_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

基本解阵为

$$X = [x_1(t) \quad x_2(t)] = \begin{bmatrix} -e^{-2t} & e^{-t} \\ 2e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

故

$$X_0 = [x_1(0) \quad x_2(0)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} x(t) &= XX_0^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} & e^{-t} \\ 2e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} x(0) \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} x(0) \end{aligned}$$

2. 幂级数法

通常, 常微分方程的解都是用大家所熟知的初等函数来表示, 自从有了函数项级数及幂级数的概念以后, 微分方程的解, 许多可用函数项级数, 特别是幂级数的形式来表示。

设 $\dot{x} = Ax$ 的解是 t 的矢量幂级数, 即

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \quad (2-14)$$

式中, $b_0, b_1, \dots, b_k, \dots$ 为待定常矢量; 矢量函数 $x(t)$ 的各元为纯量幂级数。因为幂级数中 t 的各项系数待定, 故解的具体形式并未确定。

将所设的解代入式 (2-1), 得

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots) \quad (2-15)$$

如果上式对 $t \geq 0$ 均成立, 则所设的解就是方程的真实解, 这样式 (2-15) 两边的各项系数对应相等, 有

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k = \frac{1}{k}\mathbf{A}\mathbf{b}_{k-1} = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \\ \vdots \end{cases} \quad (2-16)$$

把式(2-16)代入式(2-14), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}_0 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 t^k + \cdots \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots)\mathbf{b}_0 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \right) \mathbf{b}_0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

考虑到初始条件 $\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0)$, 可求出待定常矢量 $\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(0)$, 于是微分方程的特解为

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \right) \mathbf{x}(0) \quad (2-18)$$

由于纯量指数函数的幂级数定义式为

$$\mathrm{e}^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^k t^k$$

可见式(2-18)中所示的无穷幂级数对于有限的 t 值, 也是绝对收敛的, 其解析式为

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \quad (2-19)$$

并称为矩阵指数函数, 简称矩阵指数。

因此, 齐次矢量微分方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad (2-20)$$

如果起始时刻不在 $t=0$, 而在 $t=t_0$, 其初始条件为 $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$, 则有

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_0} \mathbf{b}_0$$

即 $\mathbf{b}_0 = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0)$ (2.2 节将证明 $\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}$ 为 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 的逆)

在此情形下的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad (2-21)$$

【例 2-2】 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 。

解

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1-t^2+t^3+\cdots & t-\frac{3}{2}t^2-\frac{7}{6}t^3+\cdots \\ -2t+3t^2-\frac{7}{3}t^3+\cdots & 1-3t+\frac{7}{2}t^2-\frac{5}{2}t^3+\cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. 拉普拉斯变换解法

同样, 可参照标量微分方程的拉普拉斯变换法, 求解齐次状态方程。

对于式 (2-1) 所示的状态方程, 两边取拉普拉斯变换

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) \quad (2-22)$$

式中, $\mathbf{x}(s) = L[\mathbf{x}(t)]$ 。

$$(2-23)$$

由式 (2-22) 整理得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) \quad (2-24)$$

由于状态阵 $\mathbf{A}$ 的特征矩阵必有逆阵 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, 则

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (2-25)$$

取 $\mathbf{x}(s)$ 的反拉普拉斯变换

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}(0) \quad (2-26)$$

标量情况下有理函数 $(1-x)^{-1}$ 的幂级数展开式为

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

若令 $x = \frac{a}{s}$, 则

$$\left(1 - \frac{a}{s}\right)^{-1} = 1 + \frac{a}{s} + \frac{a^2}{s^2} + \cdots + \frac{a^k}{s^k} + \cdots$$

依照上式可导出 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 的幂级数展开式为

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \left[s\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{s}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{s}\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{s}\right)^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} + \cdots \quad (2-27)$$

因此, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 的拉普拉斯反变换为

$$L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k = \mathbf{e}^{At} \quad (2-28)$$

将式 (2-28) 代入式 (2-26) 得微分方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{At} \mathbf{x}(0)$$

若初始时刻 $t = t_0$, $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$, 则

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$$

【例 2-3】 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 试用拉普拉斯反变换法求 $\mathbf{e}^{At}$ 。

解

$$\begin{aligned}
 s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \\
 (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \\
 \text{得 } \mathbf{e}^{At} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.1.2 齐次状态方程解的统一形式——状态转移矩阵

综合上述三种解法, 尽管方程的求解方法不同, 但方程的解必然是一致的, 因为在给定的初始条件下, 线性定常微分方程仅有唯一的解。

由一般解法的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{X}_{t_0}^{-1}\mathbf{x}(t_0)$$

由解法 2 和解法 3, 得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)$$

若令 $\mathbf{e}^{A(t-t_0)} = \mathbf{X}\mathbf{X}_{t_0}^{-1}$, 则三种方法的唯一解可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{At}\mathbf{x}_0 \text{ 或 } \mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0$$

从这个表达式可知, 它反映了从初始时刻的状态矢量 $\mathbf{x}_0$, 到任意 $t > 0$ 或 $t > t_0$ 时刻的状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 的一种矢量变换关系, 变换矩阵就是矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$ 。它不同于第 1 章的线性变换矩阵 $\mathbf{T}$, 它不是一个常数矩阵, 它的元素一般是时间 t 的函数, 即是一个 $n \times n$ 的变函数矩阵; 从时间角度而言, 这意味着它使状态矢量随着时间的推移, 不断地在状态空间中作转移, 所以, $\mathbf{e}^{At}$ 也称状态转移矩阵, 通常记为 $\Phi(t)$ 。 $\Phi(t) = \mathbf{e}^{At}$ 表示 $\mathbf{x}(0)$ 到 $\mathbf{x}(t)$ 的转移矩阵, 而 $\Phi(t-t_0) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)}$ 表示 $\mathbf{x}(t_0)$ 到 $\mathbf{x}(t)$ 的转移矩阵。

这样, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的解, 又可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$$

或

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

它的几何意义,以二维状态矢量为例,可用图形表示,如图 2-1 所示。从图 2-1 可知,在 $t=0$ 时, $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$, 若以此为初始条件,且已知 $\Phi(t_1)$, 那么在 $t=t_1$ 时的状态将为

$$\mathbf{x}(t_1)=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}=\Phi(t_1)\mathbf{x}(0) \quad (2-29)$$

若已知 $\Phi(t_2)$, 那么 $t=t_2$ 时的状态将为

$$\mathbf{x}(t_2)=\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}=\Phi(t_2)\mathbf{x}(0) \quad (2-30)$$

即状态从 $\mathbf{x}(0)$ 开始,将按 $\Phi(t_1)$ 或 $\Phi(t_2)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_1)$ 或 $\mathbf{x}(t_2)$, 在状态空间中描绘出一跳动轨线。

若以 $t=t_1$ 作为初始时刻,则状态 $\mathbf{x}(t_1)$ 的初始状态 t_1 转移到 t_2 的状态将为

$$\mathbf{x}(t_2)=\Phi(t_2-t_1)\mathbf{x}(t_1) \quad (2-31)$$

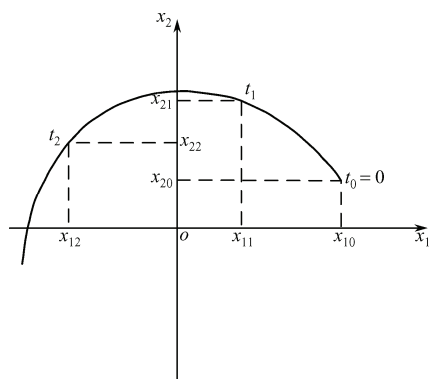


图 2-1 状态转移轨线

把式 (2-29) 的 $\mathbf{x}(t_1)$ 代入式 (2-31), 可得

$$\mathbf{x}(t_2)=\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1)\mathbf{x}(0) \quad (2-32)$$

式 (2-32) 表示 $\mathbf{x}(0)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_1)$, 再由 $\mathbf{x}(t_1)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_2)$ 的运动规律。

比较式 (2-30) 和式 (2-32), 可知转移矩阵 (或矩阵指数) 有以下关系:

$$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1)=\Phi(t_2)$$

或

$$\mathbf{e}^{A(t_2-t_1)}\mathbf{e}^{At_1}=\mathbf{e}^{At_2} \quad (2-33)$$

这种关系称为组合性质。

利用状态转移矩阵,可以对系统的运动,建立一个统一解的表达式。

对于线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2-34)$$

相应于初态 $\mathbf{x}(t)|_{t=0}=\mathbf{x}(0)$ 的解,可表示为如下更一般的形式:

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad (2-35)$$

式中, $\Phi(t)$ 为 $n \times n$ 维函数矩阵, 且是矩阵微分方程

$$\dot{\Phi}(t)=\mathbf{A}\Phi(t), \quad \Phi(0)=\mathbf{I} \quad (2-36)$$

的唯一解。

证明 如果 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$ 的确是式 (2-34) 的解, 则必然满足此微分方程及初始条件, 将其代入式 (2-34), 有

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = A\Phi(t)\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \Phi(t)\mathbf{x}(0)|_{t=0} = \Phi(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) \end{cases} \quad (2-37)$$

则有

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = I$$

因此, 只要某一具体形式的函数阵 $\Phi(t)$ 满足上述矩阵方程及初始条件, 那么 $\Phi(t)$ 是矩阵方程的唯一解。于是 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$ 也必定是式 (2-34) 的唯一解。

对于初始时刻 $t = t_0$ 的情况, 有

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (2-38)$$

是方程的唯一解。

当取 $\Phi(t) = e^{At}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \frac{de^{At}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots \right) \\ &= A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k + \cdots \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} A \left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k \right) &= A e^{At} \\ \Phi(0) &= e^{A \cdot 0} = I \end{aligned}$$

可见, 函数阵 e^{At} 满足式 (2-36) 的矩阵方程及初始条件, 因此, 它是矩阵方程的唯一解, 从而 $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ 则是式 (2-34) 的唯一解。

综上分析可以看出, 利用状态转移矩阵, 可以从任意指定的初始时刻的状态矢量 $\mathbf{x}(t_0)$, 求得任意时刻 t 的状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 。换言之, 矩阵微分方程的解, 在时间上可以任意分段求取, 这是动态系统用状态空间表示法的又一优点。因为在经典控制理论中, 用高阶微分方程描述的系统, 在求解时, 对初始条件的处理是很麻烦的, 一般都假设初始时刻 $t = 0$ 时, 初始条件也为零, 即从零初始条件, 去计算系统的输出响应。

2.2 矩阵指数

考虑到矩阵指数 e^{At} 在分析线性定常系统运动时的重要性, 有必要对它的基本性质, 计算方法等进行较深入的讨论。

n 阶方阵 A 构成的矩阵指数定义为如下的一个无穷幂级数:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

它也是一个 n 阶方阵, 且是时间 t 的函数阵, 并对有限的 t 值是绝对收敛的。

性质 1 对于矩阵指数 $\mathbf{e}^{At}$ 成立

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{At} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^{At} = \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{A} \quad (2-39)$$

证明 根据 $\mathbf{e}^{At}$ 的定义式:

$$\mathbf{e}^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k$$

由于此无穷幂级数对有限 t 值是绝对收敛的, 所以, 可将式 (2-39) 逐项的对 t 求导, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}^{At}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \cdots \right) \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^3 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \mathbf{A}^k t^{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \mathbf{A}^{k-1} t^{k-1} + \cdots \right) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^{At} \end{aligned}$$

或

$$\frac{d\mathbf{e}^{At}}{dt} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \mathbf{A}^{k-1} t^{k-1} + \cdots \right) \mathbf{A} = \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{A}$$

此性质说明矩阵 $\mathbf{A}$ 及其构成的矩阵指数 $\mathbf{e}^{At}$ 阵相乘, 它们的相乘次序是可交换的。

性质 2 若 t_1 和 t_2 为两个独立的自变量, 则成立

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_2} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_2} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1}$$

证明 根据 $\mathbf{e}^{At}$ 的定义式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_2} &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t_1 + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t_1^2 + \cdots \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t_2 + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t_2^2 + \cdots \right) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}(t_1 + t_2) + \mathbf{A}^2 \left(\frac{t_1^2}{2!} + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2!} \right) + \mathbf{A}^3 \left(\frac{t_1^3}{3!} + \frac{t_1^2 t_2}{2!} + \frac{t_1 t_2^2}{2!} + \frac{t_2^3}{3!} \right) + \cdots + \\ &\quad \mathbf{A}^k \left(\frac{t_1^k}{k!} + \frac{t_1^{k-1} t_2}{(k-1)!} + \frac{t_1^{k-2} t_2^2}{2!(k-2)!} + \cdots + \frac{t_1^{k-i} t_2^i}{i!(k-i)!} + \cdots + \frac{t_2^k}{k!} \right) + \cdots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}(t_1 + t_2) + \mathbf{A}^2 \frac{(t_1 + t_2)^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{(t_1 + t_2)^3}{3!} + \cdots + \mathbf{A}^k \frac{(t_1 + t_2)^k}{k!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k (t_1 + t_2)^k = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} \end{aligned}$$

$$\text{性质 3} \quad \mathbf{e}^{At} \big|_{t=0} = \mathbf{e}^{A \cdot 0} = \mathbf{I} \quad (2-40)$$

令 $\mathbf{e}^{At}$ 的定义式中 $t=0$ 即可证得。

性质 4 $\mathbf{e}^{At}$ 为非奇异矩阵, 必有逆阵, 其逆阵为 $\mathbf{e}^{-At}$ 。

证明 由性质 2 有 $\mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{As} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t+s)}$

若令 $s = -t$ ，则

$$\mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{-At} = \mathbf{e}^{A0} = \mathbf{I}$$

又因任意非奇异阵与它的逆阵相乘必然为单位阵，所以

$$\mathbf{e}^{At} (\mathbf{e}^{At})^{-1} = \mathbf{I}$$

故得

$$(\mathbf{e}^{At})^{-1} = \mathbf{e}^{-At}$$

从而证明了 $\mathbf{e}^{-At}$ 是 $\mathbf{e}^{At}$ 的逆阵，由于其逆存在，它是非奇异阵，可见，不论矩阵 A 是否奇异，它构成的矩阵指数总是非奇异的。

性质5 设 n 阶方阵 A 与 B ，若 A 、 B 可交换，即 $AB = BA$ ，则

$$\mathbf{e}^{(A+B)t} = \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt} = \mathbf{e}^{Bt} \cdot \mathbf{e}^{At} \quad (2-41)$$

A 、 B 不可交换，即 $AB \neq BA$ ，则式 (2-41) 不成立。

证明 根据 $\mathbf{e}^{At}$ 的定义式，有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(A+B)t} &= \mathbf{I} + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A+B)^2 t^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 t^3 + \cdots \\ &= \mathbf{I} + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2) t^2 + \end{aligned} \quad (2-42)$$

$$\frac{1}{3!}(A^3 + A^2 B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2 A + B^3) t^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt} &= \left(\mathbf{I} + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \cdots \right) \left(\mathbf{I} + Bt + \frac{1}{2!} B^2 t^2 + \frac{1}{3!} B^3 t^3 + \cdots \right) \\ &= \mathbf{I} + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) t^2 + \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2 B + 3AB^2 + B^3) t^3 + \cdots \end{aligned} \quad (2-43)$$

将两式相减

$$\mathbf{e}^{(A+B)t} - \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt} = \frac{t^2}{2!}(BA - AB) + \frac{t^3}{3!}(ABA + BAB + B^2 A + BA^2 - 2A^2 B - 2AB^2) + \cdots \quad (2-44)$$

由式 (2-44) 可见，当矩阵 A 及 B 可交换时，等式右边项均为零，故

$$\mathbf{e}^{(A+B)t} = \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt}$$

当矩阵 A 及 B 不交换时，等式右边各项均不为零，故

$$\mathbf{e}^{(A+B)t} \neq \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt}$$

又因 $A+B = B+A$ ，所以

$$\mathbf{e}^{(A+B)t} = \mathbf{e}^{(B+A)t}$$

同样可证得，当 A 、 B 相乘可交换时， $\mathbf{e}^{(A+B)t} = \mathbf{e}^{Bt} \cdot \mathbf{e}^{At}$

故

$$\mathbf{e}^{(A+B)t} = \mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt} = \mathbf{e}^{Bt} \cdot \mathbf{e}^{At}$$

性质6 若 n 阶方阵 A 为对角阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{e}^{At}$ 也必为对角阵, 即

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{a_{11}t} & & & \\ & \mathbf{e}^{a_{22}t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{e}^{a_{nn}t} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

证明 根据定义式:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{At} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}^2 t^2 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + a_{11}t + \frac{1}{2!}a_{11}^2t^2 + \cdots & & & \\ & 1 + a_{22}t + \frac{1}{2!}a_{22}^2t^2 + \cdots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + a_{nn}t + \frac{1}{2!}a_{nn}^2t^2 + \cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{11}^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{22}^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{nn}^k t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{a_{11}t} & & & \\ & \mathbf{e}^{a_{22}t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{e}^{a_{nn}t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

性质 7 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 经相似变换后构成的矩阵指数 $\mathbf{e}^{(T^{-1}AT)t}$, 必等于矩阵指数 $\mathbf{e}^{At}$ 的相似变换阵 $T^{-1}\mathbf{e}^{At}T$ 。即

$$\mathbf{e}^{(T^{-1}AT)t} = T^{-1}\mathbf{e}^{At}T \quad (2-46)$$

证明 根据矩阵指数的定义式, 有

$$\mathbf{e}^{(T^{-1}AT)t} = \mathbf{I} + (T^{-1}AT)t + \frac{1}{2!}(T^{-1}AT)^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k t^k + \cdots \quad (2-47)$$

又由

$$(T^{-1}AT)^k = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT) = T^{-1}A^kT \quad (2-48)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(T^{-1}AT)t} &= \mathbf{I} + (T^{-1}AT)t + \frac{1}{2!}(T^{-1}A^2T)t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T^{-1}A^kT)t^k + \cdots \\ &= T^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right)T \\ &= T^{-1}\mathbf{e}^{At}T \end{aligned}$$

性质 8 设 n 阶方阵 A 具有互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $\mathbf{e}^{At}$ 可经相似变换化为

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^{At} \mathbf{T} = \mathbf{e}^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & & & \\ & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

证明 由于矩阵 A 具有互异的特征值, 必可经相似变换化成对角阵, 即

$$\bar{A} = \mathbf{T}^{-1} A \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

根据性质 7 有 $\mathbf{e}^{\bar{A}t} = \mathbf{e}^{(\mathbf{T}^{-1} A \mathbf{T})t} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^{At} \mathbf{T}$

$$\text{则 } \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^{At} \mathbf{T} = \mathbf{e}^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & & & \\ & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (\text{根据性质 6}).$$

【例 2-4】 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{e}^{At}$ 。

解

$$|\lambda \mathbf{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

所以

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

可得相应的变换矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

这样

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ -2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

性质 9 n 阶方阵 A 具有 n 重特征值 λ_1 , 则 $\mathbf{e}^{At}$ 必经相似变换为

$$T^{-1}e^{At}T = e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_1 t} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_1 t} \\ & & & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

证明 由于矩阵 A 具有 n 重特征值, 故必经相似变换化成约旦阵。

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 2\lambda_1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

则

$$\bar{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \frac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^n) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda_1^{n-1}}(\lambda_1^n) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \frac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^n) \\ & & & \lambda_1^n \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

由矩阵指数定义式, 有

$$\begin{aligned} e^{\bar{A}t} &= I + \bar{A}t + \frac{1}{2!}\bar{A}^2t^2 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 2\lambda_1 \\ & & & \lambda_1^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_1 t} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_1 t} \\ & & & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【例 2-5】 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{e}^{At}$ 。

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

得

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{e}^{Jt} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix}$$

问题是仍然要求出变换矩阵 T 及 T^{-1} 。按第 1 章所述方法, 可得

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^t & \mathbf{e}^{2t} \\ \mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t & 2\mathbf{e}^{2t} \\ \mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^t & 4\mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2t\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{2t} & 3t\mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{2t} & -t\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{2t} \\ 2(\mathbf{e}^{2t} - t\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^t) & 3t\mathbf{e}^t + 5\mathbf{e}^t - 4\mathbf{e}^{2t} & -t\mathbf{e}^t - 2\mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{2t} \\ -2t\mathbf{e}^t - 4\mathbf{e}^t + 4\mathbf{e}^{2t} & 3t\mathbf{e}^t + 8\mathbf{e}^t - 8\mathbf{e}^{2t} & -t\mathbf{e}^t - 3\mathbf{e}^t + 4\mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

性质 10 矩阵指数 $\mathbf{e}^{At}$ 可化为 A 的有限项表达式。

设 A 为 n 阶方阵, 其构成的矩阵指数 $\mathbf{e}^{At}$ 可表示为一个 $(n-1)$ 次有限项表达式, 即

$$\mathbf{e}^{At} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (2-52)$$

式中, $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \cdots, \alpha_{n-1}(t)$ 为 t 的一组标量函数。

证明 根据凯莱-哈密顿 (Cayley-Hamilton) 定理。

凯莱-哈密顿定理: 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为

$$\alpha(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

以 $\lambda = A$ 代入多项式, 则有

$$\alpha(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0 \quad (2-53)$$

这一定理说明, 矩阵 A 满足其自身的特征多项式, 或 A 的特征多项式是 A 的零化多项式, 即

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I) \quad (2-54)$$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = -A(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I) \\ &= -a_{n-1}A^n - (a_{n-2}A^{n-1} + \cdots + a_1A^2 + a_0A) \\ &= a_{n-1}(a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I) - (a_{n-2}A^{n-1} + \cdots + a_1A^2 + a_0A) \\ &= (a_{n-1}^2 - a_{n-2})A^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3})A^{n-2} + \cdots + (a_{n-1}a_1 - a_0)A + a_{n-1}a_0I \end{aligned} \quad (2-55)$$

以上两式表明, A^n 可用 A 的 $(n-1)$ 次多项式表示, A^{n+1} 也可用 A 的 $(n-1)$ 次多项式表示, 同理可导出 A^{n+2} 及 A 的更高次幂都可用 A 的 $(n-1)$ 次多项式表示, 由此可知, 在 e^{At} 的无穷幂级数表达式中, 仅有 $A^0 = I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ 是独立的, 而所有高于 $(n-1)$ 次幂的 $A^n, A^{n+1}, \dots$ 都可表示为 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ 的线性组合。于是, 把上述 $A^n, A^{n+1}, \dots$ 的表达式代入 e^{At} 的定义式, 并把具有 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ 的各项分别归并一起, 就得到了 e^{At} 的关于 A 的 $(n-1)$ 次有限项表达式。 $e^{At} = a_{n-1}(t)A^{n-1} + a_{n-2}(t)A^{n-2} + \cdots + a_1(t)A + a_0(t)I$, 其中 A 的各项系数是 t 的标量函数。

现在, 剩下的问题是怎样求得系数 $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ 。

(1) 若 n 阶方阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异, 则计算 $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ 的关系式为

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

证明 根据指数函数 $e^{\lambda_i t}$ 的幂级数展开式, 有

$$e^{\lambda_i t} = 1 + \lambda_i t + \frac{1}{2!} \lambda_i^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \lambda_i^{n-1} t^{n-1} + \frac{1}{n!} \lambda_i^n t^n + \cdots$$

因 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为 A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 的特征值。

则有 $\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = 0$, 即

$$\begin{aligned} \lambda_i^n &= -(a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0) \\ \lambda_i^{n+1} &= (a_{n-1}^2 - a_{n-2})\lambda_i^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}a_1 - a_0)\lambda_i + a_{n-1}a_0 \end{aligned}$$

可见, $\lambda_i^n, \lambda_i^{n+1}, \dots$ 可表示为 λ_i 的 $(n-1)$ 次多项式, 将 $\lambda_i^n, \lambda_i^{n+1}, \dots$ 代入 $e^{\lambda_i t}$ 的定义式, 同样, 可导出 $e^{\lambda_i t}$ 的有限项表达式, 即

$$e^{\lambda_i t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_i + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} \quad (2-57)$$

由式(2-52)和式(2-57)的求导过程可知,两式的系数 $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ 必然对应相等。于是,由式(2-57)可得

$$\begin{cases} \dot{e}^{\lambda_1 t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + \dots + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ \dot{e}^{\lambda_2 t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_2 + \dots + a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ \dot{e}^{\lambda_n t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_n + \dots + a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

上述代数方程组的矩阵式为

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}^{\lambda_1 t} \\ \dot{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \dot{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

将式(2-58)等号左右同乘式中方阵的逆,得式(2-56)。

【例 2-6】 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 求 e^{At} 。

解 由例 2-4 知 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ 为互异根, 则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{e}^{\lambda_1 t} \\ \dot{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \\ &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 若 n 阶方阵 A 有 n 重特征值 λ_1 , 则计算 $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ 的关系式为

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{e}^{\lambda_1 t} \\ t\dot{e}^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{2!}t^2\dot{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\dot{e}^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

证明 已知, 对于方阵 A 的特征值 λ_1 , 必有

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 + \dots + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = \dot{e}^{\lambda_1 t} \quad (2-60)$$

但因矩阵 A 仅有一个为 λ_1 的重特征值, 由 $e^{\lambda_1 t}$ 的表达式无法解出 n 个未知量, 为了寻找 n 个线性无关的代数方程来求解 $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$, 可对式 (2-60) 逐次求导。

将式 (2-60) 对 λ_1 求一次导, 得

$$a_1(t)\lambda_1 + 2a_2(t)\lambda_1 + 3a_3(t)\lambda_1^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} = te^{\lambda_1 t}$$

再将上式对 λ_1 求一次导, 得

$$2a_2(t) + 6a_3(t)\lambda_1 + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} = t^2 e^{\lambda_1 t}$$

如此下去, 直到对 λ_1 的零次项系数化为 1, 得

$$\begin{cases} a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 + a_3(t)\lambda_1^3 + \dots + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t} \\ a_1(t) + 2a_2(t)\lambda_1 + 3a_3(t)\lambda_1^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} = te^{\lambda_1 t} \\ a_2(t) + 3a_3(t)\lambda_1 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} = \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_1 t} \end{cases} \quad (2-61)$$

将代数方程组 (2-61) 写成矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ & 1 & 2\lambda_1 & \dots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (2-62)$$

上式等号左右同乘式中方阵的逆, 得式 (2-59)。

【例 2-7】 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, 求 e^{At} 。

解 由例 2-5 知 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, 有一对重根。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{At} &= (-2te^t + e^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (3te^t + 2e^t - 2e^{2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \\
&\quad (-te^t - e^t + e^{2t}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 8 & -18 & 11 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & 3te^t + 2e^t - 2e^{2t} & -te^t - e^t + e^{2t} \\ 2(e^{2t} - te^t - e^t) & 3te^t + 5e^t - 4e^{2t} & -te^t - 2e^t + 2e^{2t} \\ -2te^t - 4e^t + 4e^{2t} & 3te^t + 8e^t - 8e^{2t} & -te^t - 3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.3 线性定常系统的强迫运动

线性定常系统在控制作用下的运动，称为强迫运动。研究控制作用下系统强迫运动的规律（状态对输入的响应）实质上是求解非齐次状态方程的问题。

线性定常系统在控制作用 $u(t)$ 下的强制运动。此时状态方程为非齐次矩阵微分方程，即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2-63)$$

当初始时刻 $t_0 = 0$ ，初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0)$ 时，其解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (2-64)$$

式中， $\Phi(t) = \mathbf{e}^{At}$ 。

当初始时刻为 t_0 ，初始状态为 $\mathbf{x}(t_0)$ 时，其解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (2-65)$$

式中， $\Phi(t-t_0) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)}$ 。

很明显，式 (2-63) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 由两部分组成：等式右边第一项表示由初始状态引起的自由运动，第二项表示由控制激励作用引起的强制运动。

证明 采用类似标量微分方程求解的方法，将式 (2-63) 写成

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}u$$

等式两边同左乘 $\mathbf{e}^{-At}$ ，得

$$\mathbf{e}^{-At} [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x}] = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{B}u(t)$$

即

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{e}^{-At} \mathbf{x}(t)] = \mathbf{e}^{-At} \mathbf{B}u(t) \quad (2-66)$$

对式 (2-66) 在 $0 \sim t$ 积分，有

$$\mathbf{e}^{-At} \mathbf{x}(t) \Big|_0^t = \int_0^t \mathbf{e}^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

整理后可得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

同理, 若对式 (2-66) 在 $t_0 \sim t$ 积分, 即可证明式 (2-65)。

式 (2-64) 也可从拉普拉斯变换法求得, 对式 (2-63) 进行拉普拉斯变换, 有

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

即

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

上式左乘 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, 得

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2-67)$$

注意: 式 (2-67) 等号右边第二项, 其中

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = L[\Phi(t)]$$

$$\mathbf{U}(s) = L[u(t)]$$

两个拉普拉斯变换函数的积是一个卷积积分的拉普拉斯变换, 即

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) = L\left[\int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau\right]$$

以此代入式 (2-67), 并取拉普拉斯反变换, 即得

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

【例 2-8】 求下述系统在单位阶跃函数作用下的解。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 (1) 先求 $\Phi(t)$ 。从例 2-2、例 2-4、例 2-6 已求得

$$\Phi(t) = \mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(2) 将 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 及 $u(t) = 1(t)$ 代入式 (2-64), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{x}_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{x}_2(0) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t})\mathbf{x}_1(0) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\mathbf{x}_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + [2\mathbf{x}_1(0) + \mathbf{x}_2(0) - 1]e^{-t} - [\mathbf{x}_1(0) + \mathbf{x}_2(0) - \frac{1}{2}]e^{-2t} \\ -[2\mathbf{x}_1(0) + \mathbf{x}_2(0) - 1]e^{-t} - [2\mathbf{x}_1(0) + 2\mathbf{x}_2(0) - 1]e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

若初始条件为零, 即 $\mathbf{x}(0) = 0$, 则系统的响应仅取决于控制作用的激励部分, 而为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

在特定控制作用下,如脉冲函数、阶跃函数和斜坡函数的激励下,系统的解式(2-64)可以简化为以下公式。

1. 脉冲响应

当 $u(t) = K\delta(t)$, $x(0_-) = x_0$ 时,有

$$x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} BK$$

式中, K 为与 $u(t)$ 同维的常数矢量。

2. 阶跃响应

当 $u(t) = K \times 1(t)$, $x(0_-) = x_0$ 时,有

$$x(t) = e^{At} x_0 + A^{-1}(e^{At} - 1)BK \quad (2-68)$$

3. 斜坡响应

当 $u(t) = Kt \times 1(t)$, $x(0_-) = x_0$ 时,有

$$x(t) = e^{At} x_0 + [A^{-2}(e^{At} - 1) - A^{-1}t]BK \quad (2-69)$$

2.4 离散时间系统的状态空间分析

分析连续时间动力学系统的状态空间法,可推广到离散时间系统中去。用状态空间法分析离散系统,首要的问题仍是确立离散系统状态空间的数学模型,然后对数学模型求解,从而获得系统在离散空间的运动信息。在经典控制理论中,离散系统的动力学特性是由标量差分方程或脉冲传递函数来描述的,同样,它仅能反映离散系统的输入-输出间的外部特性,而离散系统的状态空间方程在引入系统状态变量的基础上,却能完全描述系统的动力学特征。参照连续系统的状态空间分析所涉及的内容,本节主要讨论线性定常离散系统状态空间方程的确立及状态方程的求解,并引出离散系统的状态转移矩阵的概念。

2.4.1 连续系统状态空间方程的离散化

在利用数字机对连续系统进行数字仿真或对连续时间的被控过程实行计算机控制时,都会遇到要求把连续系统化为离散系统的问题。在经典控制理论中,是将连续系统的传递函数离散化为脉冲传递函数,在状态空间分析法中,则要求将连续系统的状态空间方程离散化为离散系统的状态空间方程。

下面讨论连续定常系统状态空间方程离散化方法。

连续系统状态方程解的一般形式:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (2-70)$$

若式(2-70)中令 $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, 则可得到系统在 $t = (k+1)T$ 采样时刻的状态, 即

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{e}^{AT} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{e}^{A[(k+1)T-\tau]} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (2-71)$$

进行积分变量代换:

令

$$\tau = kT + \xi, \quad d\tau = d\xi, \quad T \geq \xi \geq 0$$

积分下限为 $\tau = kT$, 对应 $\xi = 0$; 积分上限为 $\tau = (k+1)T$, 对应 $\xi = T$, 则

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{e}^{AT} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T \mathbf{e}^{A(T-\xi)} \mathbf{B}u(kT + \xi) d\xi \quad (2-72)$$

采用零阶保持器, $kT \sim (k+1)T$ 保持器的输出为恒定值, 且等于 kT 时刻的采样值, 即

$$u(kT + \xi) = u_h(kT + \xi) = u(kT) \quad (2-73)$$

故可将 $u(kT)$ 从积分号下提出, 得

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{e}^{AT} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T \mathbf{e}^{A(T-\xi)} d\xi \mathbf{B}u(kT) \quad (2-74)$$

并记

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{e}^{AT} \\ \mathbf{H} = \int_0^T \mathbf{e}^{A(T-\xi)} d\xi \mathbf{B} \end{cases}$$

对于 $\mathbf{H}$, 如果再做一次积分变量代换, 令

$$t = T - \xi, \quad dt = -d\xi$$

积分下限为 $\xi = 0$, 则对应 $t = T$; 积分下限 $\xi = T$, 对应 $t = 0$, 故

$$\int_0^T \mathbf{e}^{A(T-\xi)} d\xi = -\int_T^0 \mathbf{e}^{At} dt = \int_0^T \mathbf{e}^{At} dt$$

最后得

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{e}^{AT} \\ \mathbf{H} = \int_0^T \mathbf{e}^{At} dt \mathbf{B} \end{cases} \quad (2-75)$$

于是离散化的状态空间方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}u(kT) \\ y(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) \end{cases} \quad (2-76)$$

【例 2-9】 给定线性连续定常系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t \geq 0$$

且采样周期为 $T = 0.1s$, 要求建立其时间离散化模型。

首先求出给定连续的矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$ 。考虑到

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

对其求拉普拉斯反变换, 即得

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

再利用式(2-75)可求出

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \mathbf{e}^{AT} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \left(\int_0^T \mathbf{e}^{At} dt \right) \mathbf{B} = \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T & 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ 0 & -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是给定连续系统的离散化模型的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} u(k)$$

2.4.2 线性定常离散系统的运动分析

与线性定常连续系统类似, 分析离散系统的时域行为, 在状态空间分析法中实质上是求解离散系统的状态方程或矢量差分方程。

1. 迭代法解离散系统的状态方程

设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (2-77)$$

式中, 依次令 $k=0, 1, 2, \dots$, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0) \\ \mathbf{x}(2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}u(1) \\ \mathbf{x}(3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}u(2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{H}u(k-1) \end{cases} \quad (2-78)$$

将式(2-78)中第1式代入第2式得

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}[\mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{H}\mathbf{u}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(1)$$

再代入第3式, 又得

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(2)$$

如此迭代下去, 最后得

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{k-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \cdots + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(k-2) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) \\ &= \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i)\end{aligned}\quad (2-79)$$

或

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^i\mathbf{H}\mathbf{u}(k-i-1) \quad (2-80)$$

将上述各步解的表达式写为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(1) \\ \mathbf{x}(2) \\ \mathbf{x}(3) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^2 \\ \mathbf{G}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \cdot & & & \\ \mathbf{G}\mathbf{H} & \cdot & & & \\ \mathbf{G}^2\mathbf{H} & \cdot & \cdot & & \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mathbf{G}^{k-1}\mathbf{H} & \cdots & \mathbf{G}^2\mathbf{H} & \mathbf{G}\mathbf{H} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} \quad (2-81)$$

式(2-79)或式(2-80)表明, 状态方程的解由两部分组成, 第一项是 $\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0)$, 它是系统对初始状态的响应, 也就是系统的自由运动, 第二项 $\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^i\mathbf{H}\mathbf{u}(k-i-1)$ 是由输入的各次采样信号所引起的强迫分量或称受控量, 正是因为此受控量的存在, 才有可能选择适当的控制律, 确定相应的控制 $\mathbf{u}(k)$, 使被控过程按性能指标的要求达到预期的状态变化规律。

在上述讨论的基础上, 如果要确定系统输出变化规律, 则可将状态方程的解代入系统的输出方程, 则有

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i) \quad (2-82)$$

或

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^i\mathbf{H}\mathbf{u}(k-i-1) \quad (2-83)$$

【例 2-10】 离散时间系统的状态方程

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

试求当初始状态 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 和控制作用为 $\mathbf{u}(k)=1$ 时, 此系统的 $\Phi(k)$ 和 $\mathbf{x}(k)$ 。

解 根据定义

$$\Phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}^k$$

按上式直接计算 $\Phi(k)$ 有一定困难, 为此, 将原状态方程变换成约旦标准型, 即将 G 变换为对角线型。

令 $x(k) = T\bar{x}(k)$, 代入原式得

$$\bar{x}(k+1) = T^{-1}GT\bar{x}(k) + T^{-1}Hu(k)$$

相应地有

$$\begin{aligned} T^{-1}GT &= A; \quad \tilde{\Phi}(k) = (T^{-1}GT)^k = A^k \\ \tilde{x}(k) &= \tilde{\Phi}(k)\tilde{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Phi}(j)T^{-1}Hu(k-j-1) \\ |\lambda I - G| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0.16 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+0.2)(\lambda+0.8) = 0 \\ \lambda_1 &= -0.2; \quad \lambda_2 = -0.8 \end{aligned} \quad (2-84)$$

则

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Phi}(k) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix}$$

又求得

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

从而容易求得

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= T\tilde{\Phi}(k)T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (-0.8)^k & 5[(-0.2)^k - (-0.8)^k] \\ -0.8[(-0.2)^k - (-0.8)^k] & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

现按式 (2-84) 先求 $\bar{x}(k)$, 等式右边第一项为

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(k)\bar{x}(0) &= \tilde{\Phi}(k)T^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -(-0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

该式右边第二项为

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Phi}(j) T^{-1} H u(k-j-1) &= \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\Phi}(j) \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1 \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} (-0.2)^j & 0 \\ 0 & (-0.8)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 3(-0.2)^j \\ -2(-0.8)^j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3[1 + (-0.2) + (-0.2)^2 + \cdots + (-0.2)^{k-1}] \\ -2[1 + (-0.8) + (-0.8)^2 + \cdots + (-0.8)^{k-1}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3[1 - (-0.2)^k]}{1.2} \\ -2 \frac{[1 - (-0.8)^k]}{1.8} \end{bmatrix} \\
\tilde{x}(k) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -(-0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4}[1 - (-0.2)^k] \\ -\frac{1}{0.9}[1 - (-0.8)^k] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{5}{2} \\ \frac{22}{9}(-0.8)^k - \frac{10}{9} \end{bmatrix} \\
x(k) = T\tilde{x}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{5}{2} \\ \frac{22}{9}(-0.8)^k - \frac{10}{9} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. Z 变换法解离散系统的状态方程

线性离散系统的状态方程重写如下:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

对上式进行 Z 变换, 得

$$zx(z) - zx(0) = Gx(z) + Hu(z) \quad (2-85)$$

或

$$(zI - G)x(z) = zx(0) + Hu(z) \quad (2-86)$$

式中, $x(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$; $u(z) = Z[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$ 。

则

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(z) \quad (2-87)$$

$$\text{取 } Z \text{ 反变换 } \mathbf{x}(k) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z]\mathbf{x}(0) + Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(z)] \quad (2-88)$$

此结果与迭代法求得的解相比较, 应有

$$\mathbf{G}^k = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z] \quad (2-89)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(i) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(z)] \quad (2-90)$$

这一结论不难证明。因为, 根据 Z 变换的定义式有如下性质:

$$(1) \quad Z[\mathbf{G}^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^k z^k = \mathbf{I} + \mathbf{G}z^{-1} + \mathbf{G}^2 z^{-2} + \cdots + \mathbf{G}^k z^{-k} + \cdots \quad (2-91)$$

$$\mathbf{G}z^{-1}Z[\mathbf{G}^k] = \mathbf{G}z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^k z^{-k} = \mathbf{G}z^{-1} + \mathbf{G}^2 z^{-2} + \cdots + \mathbf{G}^k z^{-k} + \cdots \quad (2-92)$$

两式相减得

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})Z[\mathbf{G}^k] = \mathbf{I} \quad (2-93)$$

则

$$Z[\mathbf{G}^k] = (\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})^{-1} = [(z\mathbf{I} - \mathbf{G})z^{-1}]^{-1} = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z \quad (2-94)$$

两边取 Z 反变换得

$$\mathbf{G}^k = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z] \quad (2-95)$$

$$(2) \quad Z\left\{\left[\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(i)\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(i)\right] z^{-k}$$

式 (2-95) 中, 由于不存在 $\mathbf{G}^{-1}$, 应有 $k-i-1 \geq 0$, 即 $k \geq 1$, 所以有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(i)\right] z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{G}^{k-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}^{k-2} \mathbf{H}\mathbf{u}(1) + \mathbf{G}^{k-3} \mathbf{H}\mathbf{u}(2) + \cdots] z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(0) z^{-k} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{G}^{k-2} \mathbf{H}\mathbf{u}(1) z^{-k} + \sum_{k=3}^{\infty} \mathbf{G}^{k-3} \mathbf{H}\mathbf{u}(2) z^{-k} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{H} Z^{-k} [\mathbf{u}(0) + \mathbf{u}(1) z^{-1} + \mathbf{u}(2) z^{-2} + \cdots] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^k z^{-k}\right] \mathbf{H} Z^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}(k) z^{-k}\right] \\ &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z \mathbf{H} z^{-1} \mathbf{u}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(z) \end{aligned} \quad (2-96)$$

最后得

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(i) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{u}(z)]$$

【例 2-11】 同例 2-10, 试用 Z 反变换法求 $\Phi(k)$ 和 $\mathbf{x}(k)$ 。

解 因 $u(k)=1$, 所以 $u(z)=\frac{z}{z-1}$ 。

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= Z^{-1} \left[(zI - G)^{-1} z \right] \\ &= Z^{-1} \left\{ \left[\begin{array}{cc} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{array} \right]^{-1} z \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \left[\begin{array}{cc} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{array} \right] \right\} \\ &= Z^{-1} \left\{ \frac{z}{3} \left[\begin{array}{cc} \frac{4}{z+0.2} + \frac{-1}{z+0.8} & \frac{5}{z+0.2} + \frac{-5}{z+0.8} \\ \frac{-0.8}{z+0.2} + \frac{0.8}{z+0.8} & \frac{-1}{z+0.2} + \frac{4}{z+0.8} \end{array} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (0.8)^k & 5(-0.2)^k - 5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k + 0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

再计算

$$zx(0) + Hu(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}x(z) &= (zI - G)^{-1} [zx(0) + Hu(z)] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\ \frac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(17/6)z}{z+0.2} + \frac{(22/9)z}{z+0.8} + \frac{(25/18)z}{z-1} \\ \frac{-(3.4/6)z}{z+0.2} + \frac{(-17.6/9)z}{z+0.8} + \frac{(7/18)z}{z-1} \end{bmatrix} \\ x(k) &= Z^{-1} [x(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3. 离散系统的状态转移矩阵

回顾由连续系统自由运动引出的状态转移矩阵的概念, 同样对于离散系统, 也可由齐次矢量差分方程解的一般形式引出离散系统状态转移矩阵的概念。

考察如下齐次矢量差分方程

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) \\ x(k)|_{k=0} = x(0) \end{cases} \quad (2-97)$$

设解的一般形式为

$$x(k) = \Phi(k)x(0) \quad (2-98)$$

如果所设的解是方程的真实解, 则必满足此差分方程及其初始条件。

$$\text{故} \quad \begin{cases} \Phi(k+1)x(0) = G\Phi(k)x(0) \\ x(k)|_{k=0} = \Phi(0)x(0) \end{cases} \quad (2-99)$$

即

$$\begin{cases} \Phi(k+1) = G\Phi(k) \\ \Phi(0) = I \end{cases} \quad (2-100)$$

因此, 某一具体形式的离散时间函数矩阵 $\Phi(k)$ 若能满足上述矩阵差分方程, 则 $\Phi(k)$ 必是矩阵差分方程的唯一解。那么 $x(k) = \Phi(k)x(0)$, 也必是齐次矢量差分方程的唯一解。

根据前面求得的系统的自由运动, 即

$$x(k) = G^k x(0) \quad (2-101)$$

则

$$\Phi(k) = G^k$$

容易验证, G^k 是矩阵差分方程的唯一解。

首先, 它满足初始条件 $\Phi(0) = G^0 = I$, 其次, 依次令 $k=0, 1, 2, \dots$ 则

$$k=0: \Phi(1) = G\Phi(0) = G$$

$$k=1: \Phi(2) = G\Phi(1) = G^2$$

$$\vdots$$

$$k=k: \Phi(k) = G\Phi(k-1) = G^k$$

所以, $\Phi(k) = G^k$ 的确是矩阵差分方程 $\Phi(k+1) = G\Phi(k)$, 在初始条件 $\Phi(0) = G^0 = I$ 下的唯一解。

定义 $\Phi(k) = G^k$ 为线性定常离散系统的状态转移矩阵, 它描述了系统由初态 $x(0)$ 向任意时刻 $t=kT$ 的状态 $x(t)$ 转移的特性, 且唯一地确定了状态空间中系统自由运动的离散状态轨线。可以说, 状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 包含系统自由运动的全部信息。

状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 的性质如下:

(1) 不同于连续系统, 离散系统的状态转移矩阵 $\Phi(k) = G^k$, 并非一定是非奇异的, 仅当状态方程的状态阵 G 是非奇异阵时, $\Phi(k)$ 才是非奇异的, 显然, 当 G 是奇异阵时, G^k 也必然是奇异阵。但应当注意, 对于由连续系统离散化而得到的离散系统, 其状态方程的状态阵 $G = e^{AT}$ 总是非奇异的, 所以, $\Phi(k)$ 必定非奇异 (因为对于连续系统, 不论状态矩阵 A 是否非奇异, $\Phi(t) = e^{At}$ 总是非奇异的)。

(2) 如果离散状态方程的状态阵 G 是对角阵, 即 $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$, 则 $\Phi(k)$ 也必为对角阵, 即

$$\Phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} g_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & g_n^k \end{bmatrix}$$

(3) 如果系数矩阵 G 具有互异的特征值 $z_1, z_2, \dots, z_n$, 则通过相似变换可使 $\Phi(k)$ 化为对角阵。

(4) 连续系统的状态阵 A 具有互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则经离散化后离散系统的状

态阵 $\mathbf{G} = \mathbf{e}^{AT}$ 也具有互异的特征值 $z_1, z_2, \dots, z_n$, $\Phi(k)$ 可化为对角阵。

证明 经相似变换

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{e}^{AT} \mathbf{P} = \mathbf{e}^{(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P})^T} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1^T} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{e}^{\lambda_n^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

式中, 矩阵 $\mathbf{G}$ 的特征值为 $z_i = \mathbf{e}^{\lambda_i^T}$, $i=1, 2, \dots, n$ 。

z_i 也就是离散系统脉冲传函的极点, 由性质 (3) 得, $\Phi(k)$ 可化为对角阵。

习 题

2-1 试证明同维方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$, 当 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ 时, $\mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt} = \mathbf{e}^{(A+B)t}$, 而 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 时, $\mathbf{e}^{At} \cdot \mathbf{e}^{Bt} \neq \mathbf{e}^{(A+B)t}$ 。

2-2 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, 试用拉普拉斯反变换法求 $\mathbf{e}^{At}$ 。

2-3 用三种方法计算以下矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{At}$ 。

(1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

2-4 下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件, 如果满足, 试求与之对应的矩阵 $\mathbf{A}$ 。

(1) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$

(2) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

(3) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$

(4) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \\ (-e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \end{bmatrix}$

2-5 求下列状态空间表达式的解。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

初始状态 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，输入 $u(t)$ 是单位阶跃函数。

2-6 有系统如图 2-2 所示，试求离散化的状态空间表达式。设采样周期分别为 $T=0.1$ 和 1，而 u_1 和 u_2 为分段常数。

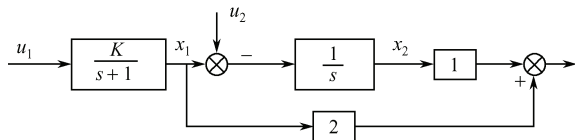


图 2-2 系统结构图

2-7 有离散时间系统如下，试求 $x(k)$ 。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$x_1(0) = -1; \quad x_2(0) = 3$$

输入 $u_1(k)$ 是从斜坡函数 t 采样而来， $u_2(t)$ 是从 e^{-t} 同步采样而来。

2-8 试将下列连续时间系统按等采样周期 T 离散化。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

第3章 线性控制系统的 能控性与能观性

1960年，卡尔曼（Kalman）提出能控性和能观性概念，深刻地揭示了动力学系统关于内部结构的两个基本属性，是现代控制理论中的两个重要概念，是最优控制和最优估计的设计基础。

能控性指的是控制作用对受控系统影响的可能性。能观性指的是由系统的输出量确定系统状态的可能性。这两个概念是状态空间描述所带来的新概念。而经典控制理论只限于讨论单变量控制系统且侧重于系统的外部特性，输入与输出的关系由系统传递函数唯一地确定，只要满足稳定性条件，系统对输出就是能控制的，而输出量本身就是被控制量，对一个实际物理系统而言，它一般是能观测到的。

本章将给出能控性和能观性的定义，介绍系统能控性和能观性的判别准则，以及能控性与能观性之间的对偶关系。然后介绍能控标准型和能观标准型，以及线性系统的结构分解。最后介绍传递函数矩阵的最小实现问题。

3.1 能控性定义及能控性判据

研究能控性时，只考察系统在控制作用下，状态矢量的转移情况，与输出无关，故只需依据系统的状态方程即可。

3.1.1 状态能控性的定义

线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

如果存在一个连续或分段连续的控制输入 $\mathbf{u}(t)$ ，能在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内，使系统由某一初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ ，转移到终端状态 $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ ，则称此状态是能控的。

如果状态空间中的所有非零状态都是能控的，则称此系统是状态完全能控的，或简称系统是能控的。如果状态空间中至少存在一个非零状态是不能控的，则称此系统是状态不完全能控的，或简称系统是不能控的。可见系统中某一状态的可控和系统的状态完全可控在含义上是不同的。

对状态的能控性作以下解释和讨论:

(1) 定义中把系统的初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 定义为状态空间的任意非零有限点, 而目标状态定义在状态空间的原点, 这只是为了研究问题方便而且不失一般性, 因为总可以通过坐标变换, 使终态置于状态空间的原点上。因此, 能控性问题又称达原点的能控性问题。从控制工程的观点看该控制问题相应于讨论调节问题的能实现性。反之, 如果取初态为状态空间的极点, 而终态取为状态空间的任意非零有限点, 这样的问题称为能达性问题, 从工程的观点看相应于讨论跟踪问题的能实现性。

(2) 定义中, 使系统由任意初态转移至终态的时间规定为某一有限时间 $[t_0, t_1]$, 但对于线性定常系统而言, 由于系统的结构与参数不变, 即系统的状态阵 $\mathbf{A}$ 和控制阵 $\mathbf{B}$ 为常数阵, 因此, 只要系统在有限时间 $[t_0, t_1]$ 上是能控的, 那么在任意取定的时间区间必定是能控的。在讨论中, 通常设初始时刻为 $t_0 = 0$ 。

(3) 定义中的控制 $\mathbf{u}(t)$ 几乎没有限制条件。只要保证状态方程解存在即可。 $\mathbf{u}(t)$ 的分段连续性在工程中是很容易满足的, 因此, 控制 $\mathbf{u}(t)$ 几乎是没有限制的。

(4) 在讨论能控性问题时, 考察的重点并不在如何选择控制 $\mathbf{u}(t)$, 以及将 $\mathbf{x}(t_0)$ 驱动到 $\mathbf{x}(t_1)$ 的轨迹如何, 而是分析整个状态空间中哪些状态是可控态, 可控态在状态空间如何分布。

3.1.2 线性定常系统的能控性判别

线性定常系统能控性判别准则有两种形式: 一种是先将系统进行状态变换, 把状态方程化为约旦标准型 $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$, 再根据 $\hat{\mathbf{B}}$ 阵, 确定系统的能控性; 另一种方法是直接根据状态方程的 $\mathbf{A}$ 阵和 $\mathbf{B}$ 阵, 确定其能控性。

1. 规范型判据

1) 单输入系统

具有约旦标准型系统矩阵的单输入系统, 状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \quad (3-1)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \quad (3-2)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots \neq \lambda_n \text{ 即 } n \text{ 个互异根};$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \text{ (} m_i \text{ 重根)}, \text{ 且 } \sum_{i=1}^k m_i = n;$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}。$$

对下述三个二阶系统进行能控性分析。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (3-3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (3-4)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3-5)$$

(1) 对式 (3-3) 的系统, 系统矩阵 $\mathbf{A}$ 为对角线型, 其标量微分方程形式为

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \quad (3-6)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_2 u \quad (3-7)$$

从式 (3-7) 可知, $\dot{x}_2$ 可以受控制量 u 的控制, 但是从式 (3-6) 又知, $\dot{x}_1$ 与 u 无关, 即不受 u 控制。因而, 只有一个特殊状态

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

是能控状态, 故为状态不完全能控的, 因而为不能控系统。

就状态空间而言, 如图 3-1 所示, 能控部分是图中粗线所示的一条线, 它属于能控状态子空间, 除此子空间以外的整个空间, 都是不能控的状态子空间。

式 (3-3) 系统的方块结构图如图 3-2 所示。它是一个并联型的结构, 而对应 x_1 这个方块而言, 是一个与 $u(t)$ 无联系的孤立部分, 即与它相应的自然模式 $e^{\lambda_1 t}$ 是不能控的。而状态 x_2 受 $u(t)$ 影响, 其自然模式 $e^{\lambda_2 t}$ 是能控的。

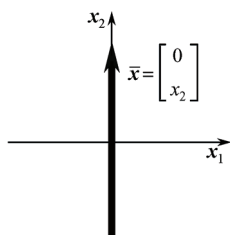


图 3-1 状态不完全能控的状态空间表示

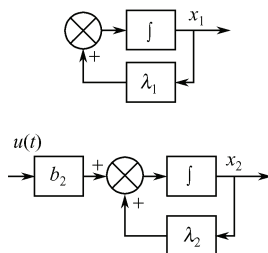


图 3-2 不完全能控的系统模拟结构图

(2) 对于式 (3-4) 的系统, 系统矩阵 $\mathbf{A}$ 为约旦型, 微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + b_2 u \end{cases} \quad (3-8)$$

$$(3-9)$$

虽然式 (3-8) 与 $u(t)$ 无直接关系, 但它与 x_2 是有联系的, 而 x_2 却是受控于 $u(t)$ 的, 所以, 不难断定式 (3-4) 的系统是状态完全能控的。根据式 (3-8) 和式 (3-9) 画出系

统的方块结构图如图 3-3 所示。它是一个串联型结构，没有孤立部分，也表明其状态是完全能控的。

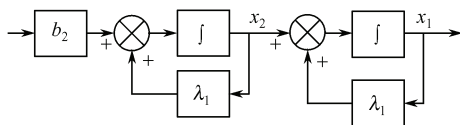


图 3-3 能控系统的模拟结构图

(3) 对于式 (3-5) 的系统，系统矩阵虽也为约旦型，但控制矩阵第二行的元素却为 0，其微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases} \quad (3-10)$$

$$(3-11)$$

式 (3-11) 中只有 x_2 本身，它不受 $u(t)$ 的控制，而为不能控的，从如图 3-4 所示的方块结构图中看，存在一个与 $u(t)$ 无关的孤立部分。

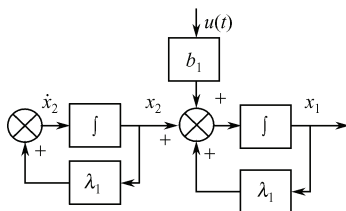


图 3-4 不完全能控系统的模拟结构图

通过以上分析，可以得出以下几点结论：

(1) 系统的能控性，取决于状态方程中的系统矩阵对 (A, b) 。

系统矩阵 A 是由系统的结构和内部参数决定的，控制矩阵 b 是与控制作用的施加点及其传递增益有关的，因此，系统的能控性是结构的性质，取决于系统的结构、参数，以及控制作用的施加点。如图 3-3 所示，控制作用只施加于 x_2 ，未施加于 x_1 ，图 3-4 则相反，孤立部分和控制无直接联系也无间接联系，这些没有与输入联系的孤立部分所对应的状态变量是不能控制的，这一点可以作为由方块图判定系统存在不可控制部分的依据。

(2) 在 A 为对角线规范型的情况下，如果 b 的元素有为零的，则与之相应的一阶标量状态方程必为齐次微分方程，而与 $u(t)$ 无关；这样，该方程的解无强制分量，在非零初始条件时，系统状态不可能在有限时间 t_f 内，衰减到零状态，从状态空间上说， $x^T = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ 是不完全能控的。

(3) 在 A 为约旦标准矩阵的情况下，每个约旦块所对应的一组状态变量间具有串联结构。由于前一个状态总是受下一个状态的控制，故只有当 b 中相应于约旦块的最后一行的元素为零时，相应地为一个一阶标量齐次微分方程，而成为不完全能控的。

(4) 不能控的状态，在结构图中表现为存在与 $u(t)$ 无关的孤立方块，它对应的是一阶齐次微分方程的模拟结构图，其自由解是 $x_i(0)e^{\lambda_i t}$ ，故为不能控的状态，也表现为与之相应的特征值的自然模式 $e^{\lambda_i t}$ 的不能控。

2) 具有一般系统矩阵的多输入系统

系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-12)$$

(1) 若令 $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, 式 (3-12) 可变换为约旦标准型

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-13)$$

或

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-14)$$

(2) 可以证明, 系统的线性变换不改变系统的能控性条件。

第 1 章已经证明, 线性变换不改变系统的特征值, 而从上一段可知, 若第 i 个状态 x_i 不能控, 就是 $x_i(0)e^{\lambda_i t}$ 的自由分量不能控, 也即相应特征值的自然模式 $e^{\lambda_i t}$ 不能控, 既然系统线性变换不改变系统特征值, 所以, 不改变系统的能控性。

(3) 据此可推得一般系统的能控性判据如下:

若系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值互异, 则式 (3-12) 可变换为式 (3-13) 的形式, 此时系统能控性的充分必要条件是控制矩阵 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ 没有全零行。

若系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值有相同的, 则式 (3-12) 可变换为式 (3-14) 的形式, 此时系统能控性的充分必要条件如下:

① 在 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ 中对应于相同特征值的部分, 它与每个约旦块最后一行相对应的一行的元素不全为零。

② $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ 中对于互异特征值部分, 它的各行元素不全为零。

(4) 应指出, $\mathbf{A}$ 的特征值互异时, 其对应的特征矢量必然互异, 故必然能变换为式 (3-13) 的对角线型。但即使 $\mathbf{A}$ 的特征值相同时, 其对应的特征矢量也有可能是互异的, 故也有可能变换为式 (3-13) 的对角线型。如此, 则在 $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 中, 将出现两个以上与同一特征值有关的约旦块。在这种情况下, 不能简单地按上述 (3) 的判据确定系统的能控性。可以证明, 在这种情况下, 对单输入系统是不能控的, 对多输入系统, 则尚需考察 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ 中, 与那些相同特征值对应的约旦块的最后一行元素所形成的矢量是否线性无关。若它们线性无关, 系统才是能控的。

【例 3-1】 判断下列系统的能控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} u$$

解 (1)、(3) 两系统属能控系统; (2) 系统为不能控系统。

【例 3-2】 判断下列系统的能控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$(4) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解 (4) 系统属能控系统；而 (1)、(2)、(3) 系统为不能控系统。

【例 3-3】 有系统如下，试判断其是否能控。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

解 将其变换成约旦型，先求其特征根

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -5 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$$

得 $\lambda_1 = -5$ ； $\lambda_2 = 1$ 。

再求变换矩阵

$$T = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

故

$$T^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得变换后的状态方程为

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}bu = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$T^{-1}b$ 有一行元素为零, 故系统是不能控的, 其不能控的自然模式为 e^t 。

【例 3-4】 有系统如下, 判断其是否能控。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ 互异, 将其变换为对角线阵时, 变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \bar{b} &= T^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对角线型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$T^{-1}b$ 中不含零元素, 系统为能控的。因此, 把凡是具有本例形式的状态方程, 称为能控标准型。即具有能控标准型的系统一定是状态完全能控的。

2. 直接从 A 与 b 判别系统的能控性

1) 单输入系统

线性连续定常单输入系统

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3-15)$$

其能控的充分必要条件是由 A 、 b 构成的能控性矩阵

$$M = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b] \quad (3-16)$$

满秩, 即 $\text{rank} M = n$ 。否则, 当 $\text{rank} M \neq n$ 时, 系统为不能控的。

证明 式 (3-15) 的解为

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3-17)$$

根据能控性定义, 对任意的初始状态矢量 $x(t_0)$, 应能找到 $u(t)$, 使之在有限时间 $t_f \geq t_0$ 内转移到零状态 $[x(t_f) = 0]$ 。

那么由式 (3-17), 并令 $t = t_f, x(t_f) = 0$, 得

$$\Phi(t_f - t_0)x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - \tau)bu(\tau)d\tau$$

即

$$x(t_0) = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0 - \tau)bu(\tau)d\tau \quad (3-18)$$

又因

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j \quad (3-19)$$

将式(3-19)代入式(3-18), 有

$$\mathbf{x}(t_0) = -\sum_{j=0}^{n-1} A^j \mathbf{b} \int_{t_0}^{t_f} \alpha_j(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau = -\sum_{j=0}^{n-1} A^j \mathbf{b} \gamma_j \quad (3-20)$$

其中

$$\gamma_j = \int_{t_0}^{t_f} \alpha_j(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau$$

由于 $u(t)$ 为标量, 又是定积分, 所以, γ_j 也是标量, 将式(3-20)写成矩阵形式, 有

$$\mathbf{x}(t_0) = -\begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

要使系统能控, 则对任意给定的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 应能从式(3-21)解出 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ 来, 即

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

因此, 必须保证

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

的逆存在, 即其秩必须等于 n 。判据得证。

【例 3-5】 系统同例 3-3, 判明其能控性。

解

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 50 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$

其秩为 1, 降秩, 故系统为不能控的。

【例 3-6】 系统同例 3-4, 判明其能控性。

解

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

其秩为 2, 系统总是能控的。

【例 3-7】 判明如下系统的能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解

$$M = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

其秩为 1, 降秩, 故系统为不能控的。

最后指出, 在单输入系统中, 根据 A 和 b 还可以从输入和状态矢量间的传递函数阵确定能控性的充分必要条件。

由第 1 章中式 (1-58), 知 $u-x$ 间的传递函数阵为

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1}b$$

在这种情况下, 状态完全能控的充分必要条件是 $W_{ux}(s)$ 没有零点和极点重合现象。否则, 被相消的极点就是不能控的模式, 系统为不能控系统。

这是很明显的, 因为若传递函数分子和分母约去一个相同公因子之后, 就相当于状态变量减少了一维, 系统出现了一个低维能控子空间和一个不能控子空间, 故属不能控系统。

【例 3-8】 系统同例 3-3, 从输入和状态矢量间的传递函数确定其能控性。

解 $u-x$ 间的传递函数阵为

$$W_{ux}(s) = (sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} s+4 & -5 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+5)(s-1)} \begin{bmatrix} -10(s-1) \\ 2(s-1) \end{bmatrix}$$

显然, 传递函数阵中有一个相同的零点和极点, 该极点所对应的自然模式为 e^t 为不能控的, 所以, 该系统为不能控系统。

【例 3-9】 系统同例 3-4, 从输入和状态矢量间的传递函数确定其能控性。

解 $u-x$ 间传递函数阵为

$$W_{ux}(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

显然, $W_{ux}(s)$ 中不可能出现相同的零点和极点, 即其分子和分母不存在公因子的可能性, 故能控标准型的状态方程一定是能控的。

【例 3-10】 系统同例 3-7, 从输入和状态矢量间的传递函数确定其能控性。

解 $u-x$ 间传递函数阵为

$$W_{ux}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+1 \\ s+1 \end{bmatrix}$$

显然, 传递函数阵中有一个相同的零点和极点, 该极点所对应的自然模式为 e^{-t} 为不能控的, 所以, 该系统为不能控系统。

2) 多输入系统

对多输入系统, 其状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3-22)$$

式中 B —— $n \times r$ 矩阵;

u —— r 维列矢量。

其能控的充分必要条件是矩阵 $M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ 的秩为 n 。

证明可仿照单输入系统的方法进行, 不赘述。所不同的是在式 (3-20) 中, 控制 u 不再是标量而是矢量, u 是 r 维列矢量, 相应地 γ_i 变为

$$\Gamma_j = \int_{t_0}^{t_f} \alpha_j(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau$$

也是一个 r 维列矢量, 故式 (3-21) 变为

$$\mathbf{x}(t_0) = - \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

它不再是有 n 个未知数的 n 个方程组, 而是有 nr 个未知数的 n 个方程组, 根据代数理论, 在非齐次方程 (3-23) 中, 有解的充分必要条件是它的系数矩阵 $\mathbf{M}$ 和增广矩阵 $[\mathbf{M} \quad \mathbf{x}(t_0)]$ 的秩相等, 即 $\text{rank} \mathbf{M} = \text{rank} [\mathbf{M} \quad \mathbf{x}(t_0)]$ 。

考虑到 $\mathbf{x}(t_0)$ 是任意给定的, 若使上面的关系式成立, $\mathbf{M}$ 的秩必须是满秩。

综上所述, 若要使式 (3-22) 的线性定常系统是状态完全能控的, 必须从式 (3-23) 线性方程组中解出 Γ_j , 而方程组有解的充分必要条件是矩阵 $\mathbf{M}$ 满秩, 故线性定常系统状态能控的充分必要条件是 $\mathbf{M}$ 满秩。

在上述证明过程中, 主要思路是围绕“把初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到零的控制作用 $\mathbf{u}(t)$ 是否存在”这个问题, 而没有要求求出具体的 $\mathbf{u}(t)$ 。对于多输入系统, $r > 1$, 故由式 (3-23) 线性方程组解出的 Γ_j 有无穷多个, 当然响应的 $\mathbf{u}(t)$ 也是无穷多个。对于单输入系统, $r = 1$, 虽然由式 (3-20) 线性方程组解出的 Γ_j 是唯一的, 但是由于

$$\Gamma_j = \int_{t_0}^{t_f} \alpha_j(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau$$

所以, 相应的 $u(t)$ 也是无穷多个。

此外, 在多输入系统中, $\mathbf{M}$ 是 $n \times nr$ 矩阵, 不像在单输入系统中是 $n \times n$ 方阵, 其秩的确定一般来说要复杂一些。由于矩阵 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{M}^T$ 的积 $\mathbf{MM}^T$ 是方阵, 而它的非奇异性等价于 $\mathbf{M}$ 的非奇异性, 所以, 在计算行比列少的矩阵的秩时, 常用 $\text{rank} \mathbf{M} = \text{rank} \mathbf{MM}^T$ 的关系, 通过计算方阵 $\mathbf{MM}^T$ 的秩确定 $\mathbf{M}$ 的秩。

附带指出, 不论单输入或多输入系统, 为简便计, 有时不写出 $\mathbf{M}$ 矩阵, 而记为 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ 对或 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ 对, $\mathbf{M}$ 满秩时, 也可以说 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ 或 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ 是能控对。

【例 3-11】 判别三阶两输入系统的能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & \vdots & 7 & * & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & \vdots & 13 & * & \vdots & * & * \\ 2 & 1 & \vdots & 16 & * & \vdots & * & * \end{bmatrix}$$

可控矩阵 $\mathbf{M}$ 计算到第三列就知道满秩, 系统是能控的, 以后各列就不必计算了。所以, 在多输入系统中, 有时并不一定要计算出全部 $\mathbf{M}$ 阵。这也说明, 在多输入系统中, 系统的

能控条件是较容易满足的。

【例 3-12】 判别三阶两输入系统的能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{M}\mathbf{M}^T) = 0$$

不满秩，系统不能控。

【例 3-13】 判别三阶两输入系统的能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -3 & \vdots & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{秩为 3, 系统能控。}$$

注意：此例是特征值有重根的对角线型，对应 $\mathbf{B}$ 阵中的行线性无关，则能控。

【例 3-14】 判别三阶两输入系统的能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 2 & \vdots & 1 & 2 \\ 2 & 4 & \vdots & 2 & 4 & \vdots & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -3 & \vdots & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{秩为 2, 不满秩, 系统不能控。}$$

注意：此例也是特征值有重根的对角线型，对应 $\mathbf{B}$ 阵中的行线性相关，则不能控。

3.2 能观性定义及能观性判据

前面提到，在构成一个闭环系统时，需要对受控过程的输出量的量测获得系统的状态信息，这一问题能否实现，实际上就是系统的状态观测性问题。如图 3-5 (a) 所示系统是状态能观测的，因为系统的每一个状态变量对输出都产生影响。如图 3-5 (b) 所示系统是状态不能观测的，因为状态 $\mathbf{x}_2$ 对输出 $\mathbf{y}$ 不产生任何影响，当然要从输出量 $\mathbf{y}$ 的信息中获得 $\mathbf{x}_2$ 的信息也是不可能的。

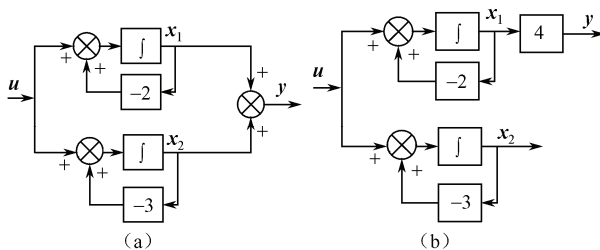


图 3-5 系统模拟结构图

1. 能观性定义

能观性所表示的是输出 $y(t)$ 反映状态矢量 $x(t)$ 的能力, 与控制作用没有直接关系, 所以分析能观性问题时, 只需从齐次状态方程和输出方程出发, 即

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax; x(t_0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (3-24)$$

如果对任意给定的输入 u , 在有限观测时间 $t_f > t_0$, 使得根据 $[t_0, t_f]$ 期间的输出 $y(t)$ 唯一地确定系统在初始时刻的状态 $x(t_0)$, 则称状态 $x(t_0)$ 是能观测的。若系统的每一个状态都是能观测的, 则称系统是状态完全能观测的, 或简称是能观的。

对上述定义作如下几点说明:

(1) 在定义能观测性时, 仅考虑无控制作用的自由系统, 其理由是显然的, 因为在初态作用下系统作自由运动时状态能通过 $y(t)$ 识别, 则在控制作用下系统作强迫运动时的状态也必然能通过 $y(t)$ 识别。

(2) 从输出方程可以看出, 如果输出量 y 的维数等于状态的维数, 即 $m = n$, 并且 C 是非奇异阵, 则求解状态是十分简单的, 即 $x(t) = C^{-1}y(t)$ 。

显然, 这是不需要观测时间的。可是在一般情况下, 输出量的维数总是小于状态变量的个数, 即 $m < n$ 。为了能唯一地求出 n 个状态变量, 不得不在不同的时刻多测量几组输出数据 $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_f)$, 使之能构成 n 个方程式。倘若 $t_0, t_1, \dots, t_f$ 相隔太近, 则 $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_f)$ n 个方程虽然在结构上是独立的, 但其数值可能相差无几, 而破坏了其独立性。因此, 在能观性定义中, 观测时间应满足 $t_f \geq t_0$ 的要求。

(3) 在定义中之所以把能观性规定为对初始状态的确定, 这是因为一旦确定了初始状态, 便可根据给定的控制量 (输入), 利用状态转移方程

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

求出各个瞬时的状态。

2. 定常系统能观性的判别

定常系统能观性的判别也有两种方法, 一种是对系统进行坐标变换, 将系统的状态空间表达式变换成约旦标准型, 然后根据标准型下的 C 阵, 判别其能观性; 另一种方法是直接根据 A 阵和 C 阵进行判别。

1) 转换成约旦标准型的判别方法

线性时不变系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (3-25)$$

现分两种情况叙述如下。

情况 1: $\mathbf{A}$ 为对角线矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

这时式 (3-25) 用方程组形式表示, 可有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n \end{cases}; \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_{10} \\ e^{\lambda_2 t} x_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} x_{n0} \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \end{cases} \quad (3-27)$$

从而可得结构如图 3-7 所示。将式 (3-26) 代入输出方程式 (3-27), 得

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_{10} \\ e^{\lambda_2 t} x_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} x_{n0} \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

由式 (3-28) 可知, 假使输出矩阵 $\mathbf{C}$ 中有某一列全为零, 例如, 第二列中 $c_{12}, c_{22}, \cdots, c_{m2}$ 均为零, 则在 $y(t)$ 中将不包含 $e^{\lambda_2 t} x_{20}$ 这个自由分量, 即不包含 $x_2(t)$ 这个状态变量, 很明显, 这个 $x_2(t)$ 不可能从 $y(t)$ 的测量值中推算出来, 即 $x_2(t)$ 是不能观的状态, 从状态矢量空间而言, 只有 $\mathbf{x}(t) = [x_1 \ 0 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T$ 是能观测子空间, 其余的是不能观的子空间。其系统模拟结构图如图 3-6 所示。

综上所述, 可得能观性判据如下:

在系统矩阵 $\mathbf{A}$ 为对角线型的情况下, 系统能观的充分必要条件是输出矩阵 $\mathbf{C}$ 中没有全为零的列。若第 i 列全为零, 则与之相对应的 $x_i(t)$ 为不能观的。

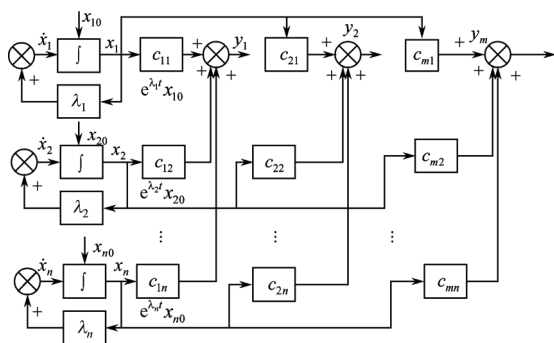


图 3-6 系统模拟结构图

【例 3-15】 判别系统的能观性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解 (1) 系统是状态不完全能观测的；(2) 系统是状态完全能观测的。

情况 2: A 为约旦标准型矩阵。以三阶为例:

$$A = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

这时, 状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_{10} + t e^{\lambda_1 t} x_{20} + \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} x_{30} \\ e^{\lambda_1 t} x_{20} + t e^{\lambda_1 t} x_{30} \\ e^{\lambda_1 t} x_{30} \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

由式 (3-29) 可知, 当且仅当输出矩阵 C 中第一列不全为零时, $\mathbf{y}(t)$ 中总包含着系统

的全部自由分量而为完全能观。

约旦标准型的系统具有串联型的结构,如图 3-7 所示,从图中可以看出,若串联结构中的最后一个状态变量能够测量到,则驱动该状态变量的前面的状态变量 x_2, x_3 也必然能够观测到,因此,只要 c_{11}, c_{21}, c_{31} 不全为零,就不可能出现与输出无关的孤立部分,系统就一定是能观的。

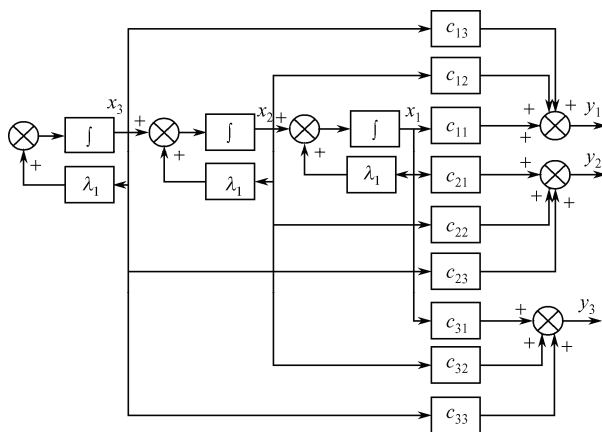


图 3-7 系统模拟结构图

因此,在系统矩阵为约旦标准型的情况下,系统能观的充分必要条件是输出矩阵 C 中,对应每一个约旦块开头的一列的元素不全为零。

由于任意系统矩阵 A 经 $T^{-1}AT$ 变换后,均可演化为对角线型或约旦型,此时只需根据输出矩阵 CT 是否有全为零的列,或对应约旦块的 CT 的第一列是否全为零,便可以确定系统的能观性。

【例 3-16】 判别系统的能观性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

解 (1) 系统是状态完全能观测的; (2) 系统是状态不完全能观测的。

2) 直接从 A 、 C 阵判断系统的能观性

从式 (3-24) 解得

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0$$

从式 (3-19) 有

$$\begin{aligned} \Phi(t - t_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t - t_0) A^j \\ y(t) = Cx(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t - t_0) CA^j x_0 \\ y(t) &= [\alpha_0 I \quad \alpha_1 I \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} I] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 \end{aligned} \quad (3-30)$$

因此, 根据在时间区间 $t_0 \leq t \leq t_f$ 测量到的 $y(t)$, 要能从式 (3-30) 唯一地确定 x_0 , 即完全能观的充分必要条件是 $nm \times n$ 矩阵, 即

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

的秩为 n 。式 (3-31) 称为能观性矩阵, 或称为 $[A, C]$ 对, 当 N 满秩, 则称 $[A, C]$ 为能观性对, 也可写成

$$N^T = [C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T] \quad (3-32)$$

【例 3-17】 判别系统的能观性。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

解 系统的能观测性判别阵为

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \text{ 秩为 } 3, \text{ 系统状态完全能观测。}$$

【例 3-18】 判别系统的能观性。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$\text{解 } N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \text{ 秩为 } 2, \text{ 系统状态不完全能观测。}$$

3.3 能控性与能观性的对偶关系

能控性与能观性有其内在关系, 这种关系是由卡尔曼提出的对偶原理确定的, 利用对偶关系可以把对系统能控性分析转化为对其对偶系统能观性的分析。从而也沟通了最优控制问题和最优估计问题之间的关系。

1. 线性系统的对偶关系

有两个系统, 一个系统 Σ_1 为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

另一个系统 Σ_2 为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

若满足以下条件, 则称 Σ_1 与 Σ_2 是互为对偶的, 即

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^T, \mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_1^T, \mathbf{C}_2 = \mathbf{B}_1^T \quad (3-33)$$

式中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ —— n 维状态矢量;

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ —— 各为 r 与 m 维控制矢量;

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ —— 各为 m 与 r 维输出矢量;

A_1, A_2 —— $n \times n$ 系统矩阵;

B_1, B_2 —— 各为 $n \times r$ 与 $n \times m$ 控制矩阵;

C_1, C_2 —— 各为 $m \times n$ 与 $r \times n$ 输出矩阵。

显然, Σ_1 是一个 r 维输入 m 维输出的 n 阶系统, 其对偶系统 Σ_2 是一个 m 维输入 r 维输出的 n 阶系统。图 3-8 是对偶系统 Σ_1 和 Σ_2 的方块结构图, 从图中可以看出, 互为对偶的两系统, 输入端与输出端互换, 信号传递方向相反, 信号引出点和综合点互换, 对应矩阵转置。

再从传递函数矩阵来看对偶系统的关系, 根据图 3-8 (a), 其传递函数矩阵 $W_1(s)$ 为 $m \times r$ 矩阵, 即

$$W_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 \quad (3-34)$$

根据图 3-8 (b), 其传递函数矩阵 $W_2(s)$ 为 $r \times m$ 矩阵, 即

$$\begin{aligned} W_2(s) &= C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 \\ &= B_1^T(sI - A_1^T)^{-1}C_1^T \\ &= B_1^T[(sI - A_1)^{-1}]^T C_1^T \end{aligned} \quad (3-35)$$

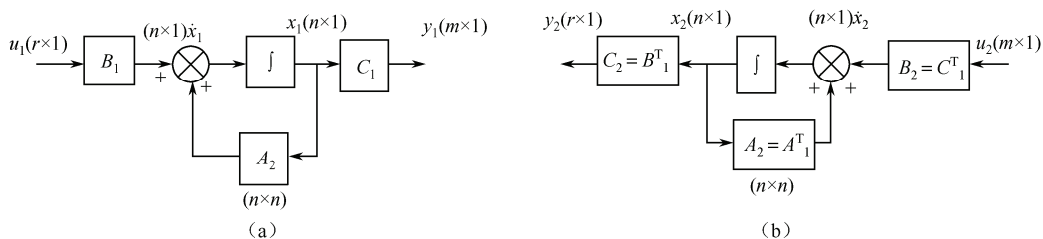


图 3-8 对偶系统的模拟结构图

对 $W_2(s)$ 取转置

$$[W_2(s)]^T = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = W_1(s) \quad (3-36)$$

由此可知, 对偶系统的传递函数矩阵是互为转置的。

同样可求得系统输入-状态的传递函数阵 $(sI - A_1)^{-1}B_1$, 是与其对偶系统的状态-输出的传递函数阵 $C_2(sI - A_2)^{-1}$ 互为转置的。而原系统的状态-输出的传递函数阵 $C_1(sI - A_1)^{-1}$ 是与其对偶系统输入-状态的传递函数阵 $(sI - A_2)^{-1}B_2$ 互为转置的。

此外, 还应指出, 互为对偶的系统, 其特征方程式是相同的, 即

$$|sI - A_1| = |sI - A_2|$$

因为 $|sI - A_2| = |sI - A_1^T| = |sI - A_1|$ 。

2. 对偶原理

系统 $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 是互为对偶的两个系统, 则 Σ_1 的能控性等价于 Σ_2 的能观性, Σ_1 的能观性等价于 Σ_2 的能控性。或者说, 若 Σ_1 是状态完全能控的 (完全能观的), 则 Σ_2 是状态完全能观的 (完全能控的)。

证明 对 Σ_2 而言, 能控性判别矩阵 ($n \times mn$)

$$M_2 = [B_2 \quad A_2 B_2 \quad \cdots \quad A_2^{n-1} B_2]$$

的秩为 n , 则系统状态为完全能控的。

将式 (3-33) 的关系式代入上式, 有

$$M_2 = [C_1^T \quad A_1^T C_1^T \quad \cdots \quad (A_1^T)^{n-1} C_1^T] = N_1^T$$

说明 Σ_1 的能观性判别矩阵 N_1 的秩也为 n , 从而说明 Σ_1 为完全能观的。

同理, 有

$$\begin{aligned} N_2^T &= [C_2^T \quad A_2^T C_2^T \quad \cdots \quad (A_2^T)^{n-1} C_2^T] \\ &= [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \cdots \quad A_1^{n-1} B_1] \end{aligned}$$

即若 Σ_2 的 N_2 满秩, 为完全能观时, 则 Σ_1 的 M_1 也满秩而为状态完全能控。

对偶原理是现代控制理论中一个十分重要的概念, 利用对偶原理可以把系统能控性分析方面所得到的结论用于其对偶系统, 从而很容易地得到其对偶系统能观性方面的结论。

3.4 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型

由于状态变量选择的非唯一性, 系统的状态空间表达式也不是唯一的。在实际应用中, 常常根据所研究问题的需要, 将状态空间表达式化成相应的几种标准形式: 如约旦标准型对于状态转移矩阵的计算, 可控性和可观性的分析是十分方便的; 而对于系统的状态反馈则化为能控标准型是比较方便的; 对于系统状态观测器的设计及系统辨识, 则将系统状态空间表达式化为能观标准型是方便的。

把状态空间表达式化成能控标准型 (能观标准型) 的理论根据是状态的非奇异变换不改变其能控性 (能观性), 只有系统是状态完全能控的 (能观的) 才能化成能控 (能观) 标准型。

下面讨论单变量系统的能控标准型和能观标准型。

1. 单输入系统的能控标准型

对于 n 维定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases}$$

如果系统是状态完全能控的, 即满足

$$\text{rank}[b \quad Ab \cdots A^{n-1}b] = n$$

在能控判别阵中只有唯一的一组线性无关矢量, 因此, 一旦组合规律确定, 其能控标准型的形式是唯一的。

1) 能控标准 I 型

若线性定常单输入系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3-37)$$

是能控的, 则存在线性非奇异变换

$$x = T_{cl} \bar{x} \quad (3-38)$$

$$T_{c1} = [A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \cdots \quad b] \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & a_{n-1} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & a_2 & a_3 & & \\ & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

使其状态空间表达式(3-37)化成

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \quad (3-40)$$

式中

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1}AT_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

$$\bar{C} = CT_{c1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (3-43)$$

称形如式(3-40)的状态空间表达式为能控标准 I 型。其中, a_i , $i=0,1,\dots,n-1$ 为特征多项式

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

的各项系数。

β_i , $i=0,1,\dots,n-1$ 是 CT_{c1} 相乘的结果, 即

$$\begin{cases} \beta_0 = C(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_1b) \\ \vdots \\ \beta_{n-2} = C(Ab + a_{n-1}b) \\ \beta_{n-1} = Cb \end{cases} \quad (3-44)$$

证明 因假设系统是能控的, 故 $n \times 1$ 矢量 $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ 是线性独立的。按下列组合方式构成的 n 个新矢量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 也是线性独立的。

$$\begin{cases} e_1 = A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \cdots + a_1b \\ e_2 = A^{n-2}b + a_{n-3}A^{n-3}b + \cdots + a_2b \\ \vdots \\ e_{n-1} = Ab + a_{n-1}b \\ e_n = b \end{cases} \quad (3-45)$$

式中, $a_i, i=0,1,\dots,n-1$ 是特征多项式各项系数。

由 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 组成变换矩阵 T_{c1} 为

$$T_{c1} = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \quad (3-46)$$

由

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1} A T_{c1}$$

得

$$T_{c1} \bar{A} = A T_{c1} = A [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] = [Ae_1 \quad Ae_2 \quad \cdots \quad Ae_n] \quad (3-47)$$

把式 (3-45) 分别代入上式, 有

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_1b) \\ &= (A^n b + a_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + a_1Ab + a_0b) - a_0b \\ &= -a_0b \\ &= -a_0e_n \\ Ae_2 &= A(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \cdots + a_2b) \\ &= (A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2Ab + a_1b) - a_1b \\ &= e_1 - a_1e_n \\ &\vdots \\ Ae_{n-1} &= A(Ab + a_{n-1}b) \\ &= (A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b) - a_{n-2}b \\ &= e_{n-2} - a_{n-2}e_n \\ Ae_n &= Ab = (Ab + a_{n-1}b) - a_{n-1}b \\ &= e_{n-1} - a_{n-1}e_n \end{aligned}$$

把上述 $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ 代入式 (3-47), 有

$$\begin{aligned} T_{c1} \bar{A} &= [Ae_1 \quad Ae_2 \quad \cdots \quad Ae_n] = [-a_0e_n \quad (e_1 - a_1e_n) \quad \cdots \quad (e_{n-1} - a_{n-1}e_n)] \\ &= [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \bar{b} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^T \end{aligned}$$

再证

由

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1} b$$

得

$$T_{c1} \bar{b} = b$$

把式 (3-45) 中 $b = e_n$ 代入, 有

$$T_{c1}\bar{b} = e_n = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而证得

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

最后推证 $\bar{C}$ 得

$$\bar{C} = CT_{c1} = C[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]$$

把式(3-45)中 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 的表达式代入上式, 有

$$\begin{aligned} \bar{C} &= C[(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_1b), \dots, (Ab + a_{n-1}b), b] \\ &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \beta_0 &= C(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_1b) \\ &\vdots \\ \beta_{n-2} &= C(Ab + a_{n-1}b) \\ \beta_{n-1} &= Cb \end{aligned}$$

或者写成

$$\bar{C} = C[A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \cdots \quad b] \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ a_{n-1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

显然

$$T_{c1} = [A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \cdots \quad b] \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ a_{n-1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

采用能控标准 I 型的 $\bar{A}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{C}$, 求系统的传递函数是很方便的。

$$\begin{aligned} W(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b} \\ &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (3-48)$$

从式(3-48)可以看出, 传递函数分母多项式的各项系数是 $\bar{A}$ 的最后一行的元素的负值; 分子多项式的各项系数是 $\bar{C}$ 阵的元素。那么根据传递函数的分母多项式和分子多项式的系数, 便可以直接写出能控标准 I 型的 $\bar{A}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{C}$ 。

【例 3-19】 试将下列状态空间表达式变换成能控标准 I 型。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 由能控性判据可知,系统是能控的。

再计算系统的特征多项式

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32$$

即

$$a_2 = -10, \quad a_1 = 32, \quad a_0 = -32$$

构造变换阵

$$\mathbf{T}_{c1} = [\mathbf{A}^2 \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 32 & -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

根据式(3-41)、式(3-42)及式(3-43),可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & -32 & 10 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} [\mathbf{A}^2 \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 16 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix} = [14 \quad -7 \quad 1] \end{aligned}$$

因此,系统的能控标准 I 型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & -32 & 10 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [14 \quad -7 \quad 1] \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

采用式(3-44)可以直接写出该系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{s^2 - 7s + 14}{s^3 - 10s^2 + 32s - 32}$$

本例也可先求出系统传递函数 $W(s)$, 而后再由传递函数 $W(s)$ 的分母多项式和分子多项式的系数, 写出能控标准 I 型的状态空间表达式。

2) 能控标准 II 型

若线性定常单输入系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \\ y = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-49)$$

是能控的, 则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad (3-50)$$

相应的状态空间表达式 (3-49) 转换成

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u \\ y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-51)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{c2} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (3-54)$$

称形如式 (3-51) 的状态空间表达式为能控标准 II 型。

式 (3-52) 中的 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 是系统特征多项式

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

的各项系数, 即系统的不变量。

式 (3-54) 中的 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 是 $\mathbf{C} \mathbf{T}_{c2}$ 相乘的结果, 即

$$\begin{cases} \beta_0 = \mathbf{C} \mathbf{b} \\ \beta_1 = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{cases} \quad (3-55)$$

证明 因为系统为能控的, 所以, 能控判别阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

是非奇异的, 令状态变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}}$$

的变换矩阵 $\mathbf{T}_{c2}$ 为

$$\mathbf{T}_{c2} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

其变换后的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{b}u \\ y &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

首先推证式 (3-52) 中的 $\bar{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{A} \mathbf{T}_{c2} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^n\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

利用凯来-哈密尔顿定理

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \cdots - a_1A - a_0I$$

将上式代入式 (3-57) 中, 有

$$AT_{c2} = \begin{bmatrix} Ab & A^2b & \cdots & (-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \cdots - a_0I)b \end{bmatrix}$$

写成矩阵形式为

$$AT_{c2} = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

即

$$AT_{c2} = T_{c2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

上式两边左乘 T_{c2}^{-1} , 得

$$\bar{A} = T_{c2}^{-1}AT_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

再推证式 (3-53) 的 $\bar{b}$

因

$$\bar{b} = T_{c2}^{-1}b$$

即

$$b = T_{c2}\bar{b} = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \bar{b}$$

显然, 要使上式成立, 必须有

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT_{c2} = \begin{bmatrix} Cb & CAb & \cdots & CA^{n-1}b \end{bmatrix}$$

即

$$\bar{C} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

【例 3-20】 试将例 3-19 中的状态空间表达式变换为能控标准 II 型。

解 例 3-19 中已经求得

$$a_2 = -10, \quad a_1 = 32, \quad a_0 = -32$$

由式 (3-52)、式 (3-53)、式 (3-54)、式 (3-55) 可得

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = [Cb \quad CA^1b \quad CA^2b] = [1 \quad 3 \quad 12]$$

状态空间表达式的能控标准 II 型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 3 \quad 12] \bar{x} \end{cases}$$

2. 单输出系统的能观标准型

与变换为能控标准型的条件相似, 只有当系统是状态完全能观时, 即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T = n$$

系统的状态空间表达式才可能导出能观标准型。

状态空间表达式的能观标准型也有两种形式, 能观标准 I 型和能观标准 II 型, 它们分别与能控标准 II 型和能控标准 I 型相对偶。

1) 能观标准 I 型

若线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3-58)$$

是能观的, 则存在非奇异变换

$$x = T_{o1} \tilde{x} \quad (3-59)$$

使其状态空间表达式 (3-58) 化成

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{b} u \\ y = \tilde{C} \tilde{x} \end{cases} \quad (3-60)$$

式中

$$\tilde{A} = T_{o1}^{-1} A T_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{01}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{01} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (3-63)$$

称形如式(3-60)的状态空间表达式为能观标准 I 型。式中, a_i , $i=0,1,\dots,n-1$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式的各项系数。

取变换阵 $\mathbf{T}_{01}$

$$\mathbf{T}_{01}^{-1} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

直接验证, 或者用对偶原理来证明。证明过程如下:

首先构造 $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 的对偶系统 $\Sigma^* = (\mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{C}^*)$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{C}^T$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{b}^T$$

然后写出对偶系统 $\Sigma^* = (\mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{C}^*)$ 的能控标准 II 型 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{C}})$, Σ 的状态空间表达式的能观标准 I 型和 Σ^* 的能控标准 II 型对偶。

即

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^T$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{C}}^T$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{b}}^T$$

式中 $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{C}}$ ——系统 $\Sigma^* = (\mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{C}^*)$ 的能控标准 II 型对应的系数阵;

$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{C}}$ ——系统 $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 的能观标准 I 型对应的系数阵;

$\mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{C}^*$ ——系统 $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ 的对偶系统的系数阵。

2) 能观标准 II 型

若线性定常单输出系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-65)$$

是能观的, 则存在非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{02} \tilde{\mathbf{x}} \quad (3-66)$$

$$\mathbf{T}_{02}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

使其状态空间表达式 (3-65) 变换为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-67)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-69)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{o2}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \quad (3-70)$$

称形如式 (3-67) 的状态空间表达式为能观标准 II 型。式中, a_i , $i=0,1,\dots,n-1$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式的各项系数。 β_i , $i=0,1,\dots,n-1$ 是 $\mathbf{T}_{o2}^{-1} \mathbf{b}$ 的相乘结果, β_i 的具体计算见式 (3-62)。

上述变换可根据对偶原理直接由其对偶系统的能控标准 I 型导出, 其过程与能观标准 I 型类同, 不再重复。

和能控标准 I 型一样, 根据状态空间表达式的能观标准 II 型, 也可以直接写出系统的传递函数, 为

$$W(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

式中, 分母多项式的各项系数是 $\tilde{\mathbf{A}}$ 阵的最后一列元素的负值, 分子多项式的各项系数是 $\tilde{\mathbf{b}}$ 阵的元素。这个现象用对偶原理不难解释。

【例 3-21】 试将例 3-19 中的状态空间表达式变换为能观标准型。

解 由约旦型判据可知, 系统状态完全能观。

(1) 求状态空间表达式的能观标准 I 型。

由式 (3-61)、式 (3-62)、式 (3-63), 可得

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & -32 & 10 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

状态空间表达式的能观标准 I 型为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & -32 & 10 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{\mathbf{x}} \end{cases}$$

和例 3-20 的状态空间表达式的能控标准 II 型相比较, 可知二者之间是互为对偶的。

(2) 求能观标准 II 型

由式 (3-67)、式 (3-68)、式 (3-69), 可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}; \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

状态空间表达式的能观标准 II 型为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 1] \tilde{x} \end{cases}$$

显然与例 3-19 得到的能控标准 I 型成对偶关系。

3.5 线性系统的结构分解

前已说过, 如果一个系统是不完全能控的, 则其状态空间中所有的能控状态构成能控子空间, 其余为不能控子空间。如果一个系统是不完全能观的, 则其状态空间中所有能观测的状态构成能观子空间, 其余为不能观子空间。但是, 在一般形式下, 这些子空间并没有被明显地分解出来。本节将讨论如何通过非奇异变换即坐标变换, 将系统的状态空间按能控性和能观性进行结构分解。

把线性系统的状态空间按能控性和能观性进行结构分解是状态空间分析中的一个重要内容。在理论上它揭示了状态空间的本质特征, 为最小实现问题的提出提供了理论依据。实践上, 它与系统的状态反馈、系统镇定等问题的解决都有密切的关系。

1. 按能控性分解

设线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3-71)$$

是状态不完全能控, 其能控性判别矩阵

$$M = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

的秩

$$\text{rank} M = n_1 < n$$

则存在非奇异变换

$$x = R_c \hat{x} \quad (3-72)$$

将状态空间表达式 (3-71) 变换为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{cases} \quad (3-73)$$

式中

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}_{n-n_1}^{n_1}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \underbrace{\mathbf{0}}_{n_1} & \underbrace{\hat{\mathbf{A}}_{22}}_{(n-n_1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} (n-n_1) \end{matrix} \quad (3-74)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} (n-n_1) \end{matrix} \quad (3-75)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{C}}_2 \\ \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{(n-n_1)} \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

可以看出, 系统状态空间表达式变换为式(3-73)后, 系统的状态空间就被分解成能控的和不能控的两部分, 其中 n_1 维子空间

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \hat{\mathbf{A}}_{11} \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_1 u + \hat{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{x}}_2$$

是能控的, 而 $(n-n_1)$ 维子系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \hat{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{x}}_2$$

是不能控的。对于这种状态结构的分解情况如图3-9所示, 因为 u 对 $\hat{\mathbf{x}}_2$ 不起作用, $\hat{\mathbf{x}}_2$ 仅作无控的自由运动。显然, 若不考虑 $(n-n_1)$ 维子系统, 便可得到一个低维的能控系统。

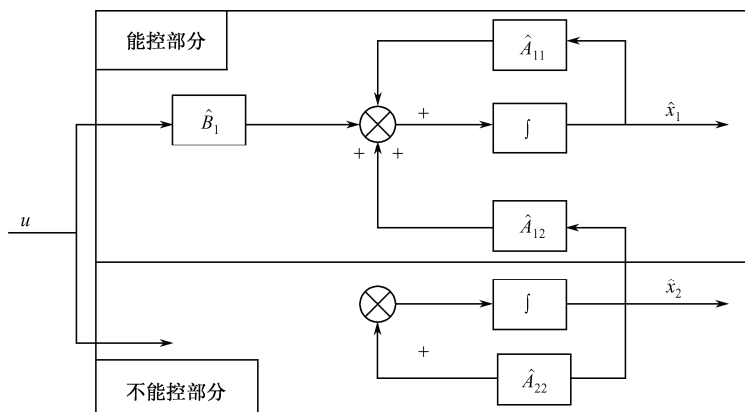


图 3-9 系统能控性的结构划分

至于非奇异变换阵

$$\mathbf{R}_c = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{n_1} \quad \cdots \quad \mathbf{R}_n] \quad (3-77)$$

式中, n 个列矢量可以按如下方法构成, 前 n_1 个列矢量 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{n_1}$ 是能控性矩阵 $\mathbf{M}$ 中的 n_1 个线性无关的列, 另外的 $(n-n_1)$ 个列 $\mathbf{R}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{R}_n$ 在确保 $\mathbf{R}_c$ 为非奇异的条件下, 完全是任意的。

【例 3-22】 设线性定常系统如下, 判别其能控性, 若不是完全能控的, 试将该系统按能控性进行分解。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 系统能控性判别矩阵

$$\mathbf{M} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} \mathbf{M} = 2 < n$$

所以, 系统是不完全能控的。

按式 (3-77) 构造非奇异变换阵 $\mathbf{R}_c$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $\mathbf{R}_3$ 是任意的, 只要能保证 $\mathbf{R}_c$ 为非奇异即可。

变换后系统的状态空间表达式

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_c \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{b} u \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{R}_c \hat{\mathbf{x}} = [1 \quad -1 \quad -2] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

在构造变换矩阵 $\mathbf{R}_c$ 时, 式中, $(n-n_1)$ 列的选取, 是在保证 $\mathbf{R}_c$ 为非奇异的条件下任选的。现将 $\mathbf{R}_3$ 选取为另一矢量 $\mathbf{R}_3 = [1 \quad 0 \quad 1]^T$, 则

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1 \quad -2] \hat{x} \end{cases}$$

从两个状态空间表达式可以看出, 它们都把系统分解成两部分, 一部分是二维能控子系统; 另一部分是一维不能控子系统, 且其二维能控子系统的状态空间表达式是相同的, 均属能控标准 II 型, 即

$$\dot{\hat{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

其实, 这一现象并非偶然, 因为变换矩阵的前 n_1 列是能控性判据中的 n_1 个线性无关列。

2. 按能观性分解

设线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3-78)$$

是状态不完全能观的, 其能观性判别矩阵

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

的秩

$$\text{rank} N = n_1 < n$$

则存在非奇异变换

$$x = R_0 \tilde{x} \quad (3-79)$$

将状态空间表达式 (3-78) 变换为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y = \tilde{C} \tilde{x} \end{cases} \quad (3-80)$$

式中

$$\tilde{A} = R_0^{-1} A R_0 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \underbrace{\tilde{A}_{21}}_{n_1} & \underbrace{\tilde{A}_{22}}_{n-n_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} (n-n_1) \end{matrix} \quad (3-81)$$

$$\tilde{B} = R_0^{-1} B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \cdots \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} (n-n_1) \end{matrix} \quad (3-82)$$

$$\tilde{C} = C R_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{(n-n_1)} \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} (n-n_1) \end{matrix}$$

可见, 经上述变换后系统分解为能观的 n_1 维子系统, 即

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1u \\ y = \tilde{C}_1\tilde{x}_1 \end{cases}$$

和不能观的 $(n-n_1)$ 维子系统, 即

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_2u$$

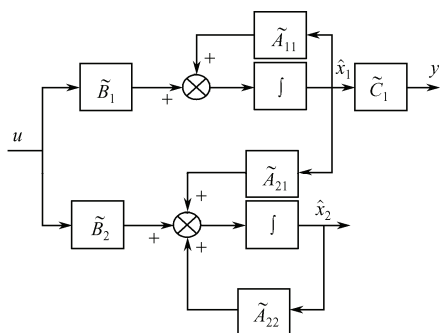


图 3-10 系统按能观性分解结构图

图 3-10 是其结构图。显然, 若不考虑 $(n-n_1)$ 维不能观测的子系统, 便得到一个 n_1 维的能观系统。

非奇异变换阵 R_0 是这样构成的, 取

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ \vdots \\ R'_{n_1} \\ \vdots \\ R'_n \end{bmatrix} \quad (3-84)$$

式中, 前 n_1 行矢量 $R'_1, R'_2, \dots, R'_{n_1}$ 是能观性判别阵中的 n_1 个线性无关的行, 另外的 $(n-n_1)$ 个行矢量 $R'_{n_1+1} \dots R'_n$ 在确保 R_0^{-1} 为非奇异的条件下, 完全是任意的。

【例 3-23】 设线性定常系统如下, 判别其能观性, 若不是完全能观的, 将该系统按能观性进行分解。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1 \quad -2]x \end{cases}$$

解 系统的能观性判别矩阵

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

其秩

$$\text{rank} N = 2 < n$$

所以, 该系统是状态不完全能观的。

为构造非奇异变换阵 R_0^{-1} , 取

$$R'_1 = C = [0 \quad 1 \quad -2]$$

$$R'_2 = CA = [1 \quad -2 \quad 3]$$

$$R'_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

得

$$\mathbf{R}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $\mathbf{R}'_3$ 是在保证 $\mathbf{R}_0^{-1}$ 为非奇异的条件下任意选取的。于是系统状态空间表达式变换为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{b} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \mathbf{C} \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{x}} = [1 \quad 0 \quad 0] \tilde{\mathbf{x}} \end{cases}$$

3. 按能控性和能观性进行分解

如果线性系统是不完全能控和不完全能观的, 若对该系统同时按能控性和能观性进行分解, 则可以把系统分解成能控且能观、能控不能观、不能控能观、不能控不能观四部分。当然, 并非所有系统都能分解成有这四个部分的。

若线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-85)$$

不完全能控不完全能观, 则存在非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{x}} \quad (3-86)$$

把式 (3-85) 的状态空间表达式变换为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \\ y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-87)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-89)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{R} = [\mathbf{C}_1 \quad 0 \quad \mathbf{C}_3 \quad 0] \quad (3-90)$$

从 $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 的结构可以看出, 整个状态空间分为能控能观、能控不能观、不能控能观、不能控不能观四个部分, 分别用 $\mathbf{x}_{co}$ 、 $\mathbf{x}_{c\bar{o}}$ 、 $\mathbf{x}_{\bar{c}o}$ 、 $\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ 表示。于是式 (3-87) 可以写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3-91)$$

$$y = [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

并且 (A_{11}, B_1, C_1) 是能控能观子系统。

式 (3-87) 的方块结构图如图 3-11 所示。

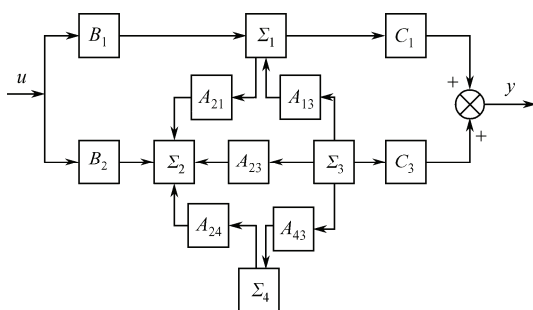


图 3-11 系统的结构图

从结构图可以清楚地看出四个子系统传递信息的情况。在系统的输入 u 和输出 y 之间，只存在唯一的单向控制通道，即 $u \rightarrow B_1 \rightarrow \Sigma_1 \rightarrow C_1 \rightarrow y$ 。显然，反映系统输入输出特性的传递函数阵 $W(s)$ 只能反映系统中能控且能观的那个子系统的动力学行为，即

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 \quad (3-92)$$

从而也说明，传递函数阵只是对系统的一种不完整的描述，如果在系统中添加（或去掉）不能控或不能观的子系统，并不影响系统的传递函数。因而根据给定传递函数阵求对应的状态空间表达式，其解将有无穷多个。但是其中维数最少的那个状态空间表达式是最常用的，这就是最小实现问题。

变换矩阵 R 确定之后，只需经过一次变换便可对系统同时按能控性和能观性进行结构分解，但是矩阵 R 的构造需要涉及较多的线性空间概念，下面介绍一种逐步分解的方法。这种方法虽然计算较繁，但较直观，易于掌握，其步骤如下：

(1) 先将系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 按能观性分解取状态变换

$$x = R_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (3-93)$$

将系统变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = R_c^{-1} A R_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + R_c^{-1} B u = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = \mathbf{C}\mathbf{R}_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (3-94)$$

式中 x_c ——能控状态；

$x_{\bar{c}}$ ——不能控状态；

$\mathbf{R}_c$ ——根据式 (3-77) 构造。

(2) 将上式中不能控的子系统 $\Sigma_{\bar{c}} = (\bar{\mathbf{A}}_4 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_2)$ 按能观性分解。

对 $x_{\bar{c}}$ 取状态变换

$$x_{\bar{c}} = \mathbf{R}_{02} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

将 $\Sigma_{\bar{c}} = (\bar{\mathbf{A}}_4 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_2)$ 分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{02}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_4 \mathbf{R}_{02} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{33} & 0 \\ A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{R}_{02} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

式中 $x_{\bar{c}o}$ ——不能控但能观的状态；

$x_{\bar{c}\bar{o}}$ ——不能控不能观的状态；

$\mathbf{R}_{02}$ ——根据式 (3-84) 构造的 $\Sigma_{\bar{c}} = (\bar{\mathbf{A}}_4 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_2)$ 按能观性分解的变换阵。

(3) 将能控子系统 $\Sigma_c = (\bar{\mathbf{A}}_1 \quad \bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{C}}_1)$ 按能观性分解。

对 x_c 取状态变换

$$x_c = \mathbf{R}_{01} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

由式 (3-94) 有

$$\dot{x}_c = \bar{\mathbf{A}}_1 x_c + \bar{\mathbf{A}}_2 x_{\bar{c}} + \bar{\mathbf{B}} u$$

把状态变换后的关系代入上式，有

$$\mathbf{R}_{01} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{R}_{01} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{R}_{02} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{B}} u$$

两边左乘 $\mathbf{R}_{01}^{-1}$ ，有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_{01}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{R}_{01} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{01}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{R}_{02} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{01}^{-1} \bar{\mathbf{B}} u \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} & 0 \\ A_{23} & A_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y_1 &= \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{R}_{01} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中 x_{co} ——能控能观状态；

$x_{c\bar{o}}$ ——能控不能观状态；

$\mathbf{R}_{01}$ ——根据式 (3-84) 构造的 $\Sigma_c = (\bar{\mathbf{A}}_1 \quad \bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{C}}_1)$ 按能观性分解的变换阵。

综合以上三次变换, 便可导出系统同时按能控性和能观性进行结构分解的表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

【例 3-24】 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

是状态不完全能控和不完全能观的, 试将该系统按能控性和能观性进行结构分解。

解 例 3-22 已将系统按能控性进行分解

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

经变换后, 系统分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

从上面可见, 不能控子空间 $\mathbf{x}_{\bar{c}}$ 仅一维, 且显见是能观的, 故无须再进行分解。

将能控子系统 Σ_c 按能观性进行分解, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c \end{cases}$$

按能观性分解, 根据式 (3-84) 构造非奇异变换阵, 即

$$\mathbf{R}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 Σ_c 按能观性进行分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

综合以上两次变换结果, 系统按能控性和能观性分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix} \end{cases}$$

3.6 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系

既然系统的能控且能观性与其传递函数阵的最小实现是同义的, 那么能否通过系统传递函数阵的特征来判别其状态的能控性和能观性呢? 可以证明, 对于单输入系统、单输出系统或者单输入-单输出系统, 要使系统是能控并能观的充分必要条件是其传递函数的分子分母间没有零极点对消。可是对于多输入-多输出系统来说, 传递函数阵没有零极点对消, 只是系统最小实现的充分条件, 也就是说, 即使出现零极点对消, 这种系统仍有可能是能控和能观的。鉴于这个原因, 本节只限于讨论单输入-单输出系统的传递函数中零极点对消与状态能控且能观之间的关系。

对于一个单输入-单输出系统 $\Sigma(A, b, c)$, 有

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \quad (3-95)$$

要使其是能控并能观的充分必要条件是传递函数

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b \quad (3-96)$$

的分子分母间没有零极点对消。

下面举例说明。

例如, 系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(s+2.5)}{(s+2.5)(s-1)}$$

分子分母有相同因式 $(s+2.5)$, 系统状态是不完全能控, 或不完全能观, 或是既不完全能控又不完全能观的。上述传递函数的实现可以是

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

可见系统是能控的, 但不能观。因此, 上述实现不是最小实现, 相应的结构图如图 3-12 (a) 所示。

上述传递函数的实现又可以是

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

这时系统是不能控但却是能观的。相应的系统结构, 如图 3-12 (b) 所示。上述传递函数的实现还可以是

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

系统是既不能控又不能观的。系统结构如图 3-12 (c) 所示。

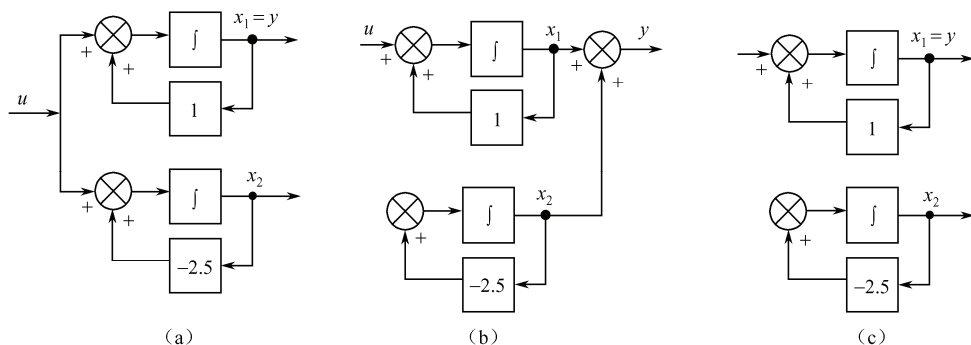


图 3-12 系统实现的模拟结构图

通过这个例子可以看到, 在经典控制理论中基于传递函数零极点对消原则的设计方法。虽然简单直观, 但是它破坏了系统状态的能控性或能观性。不能控部分的作用在某些情况下会引起系统品质的变坏, 甚至使系统成为不稳定的。

习 题

3-1 时不变系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试用两种方法判别其能控性与能观性。

3-2 确定使下列系统为状态完全能控和状态完全能观的待定常数 α_i, β_i 。

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0]$$

$$(3) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

3-3 线性系统的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+a}{s^3+10s^2+27s+18}$$

- (1) 试确定 a 的取值, 使系统或为不能控, 或为不能观的。
- (2) 在上述 a 的取值下, 求使系统为能控的状态空间表达式。
- (3) 在上述 a 的取值下, 求使系统为能观的状态空间表达式。

3-4 已知系统的微分方程为

$$\ddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

试写出其对偶系统的状态空间表达式及其传递函数。

3-5 已知能控系统的状态方程 $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ 阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试将该状态方程变换为能控标准型。

3-6 已知能控系统的状态方程 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [-1 \quad 1]$$

试将该状态方程变换为能观标准型。

3-7 已知系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$$

试求其能控标准型和能观标准型。

3-8 给定下列状态空间方程, 试判别其能否变换为能控和能观标准型。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

3-9 试将下列系统按能控性进行结构分解。

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1 \quad 1]$$

3-10 试将下列系统按能观性进行结构分解。

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1 \quad 1]$$

3-11 试将下列系统按能控性和能观性进行结构分解。

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [3 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

3-12 设 Σ_1, Σ_2 为两个能控且能观的系统

$$\Sigma_1: \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = [2 \quad 1]$$

$$\Sigma_2: \quad \mathbf{A}_2 = -2, \quad \mathbf{b}_2 = 1, \quad \mathbf{c}_2 = 1$$

(1) 试分析由 Σ_1, Σ_2 所组成的串联系统的能控性和能观性, 并写出其传递函数。

(2) 试分析由 Σ_1, Σ_2 所组成的并联系统的能控性和能观性, 并写出其传递函数。

第4章 控制系统的稳定性

稳定性是系统的一种重要的结构性质，它和系统的可控性和可观性一样是系统一种定性特性。对系统稳定性的分析和综合是系统控制理论的重要组成部分。系统的稳定性主要是研究系统受到外界干扰而偏离平衡状态时，系统是否有再返回平衡状态的性质。一个实际的系统必须是稳定的，只有稳定才能付诸工程应用。虽然稳定还不是系统达到成功的工程应用的全部，但是它是系统实际应用的前提和先决条件。

在经典控制理论中进行稳定性分析时，通常采用 Routh-Hurwitz 和 Nyquist 等稳定性判据。这些判据对线性定常系统的稳定性分析很有效，但对一些较复杂的线性时变系统，非线性系统的稳定性分析常常会遇到困难。在现代控制理论中，由于以状态空间法为出发点，因此，以状态方程为基础的李雅普诺夫直接法（或称第二方法）来分析系统的稳定性，得到越来越多的重视和应用。这种方法不仅能用于线性定常系统，而且能用于线性时变系统和非线性系统的稳定性分析，尤其是在最佳控制系统、自适应控制系统、模型参考系统、大系统等控制系统的分析和综合中，广泛地应用这种方法。

早在 1892 年，俄国数学家李雅普诺夫提出了两类解决运动稳定性问题的方法，第一种方法是通过求微分方程的解来分析运动稳定性，第二种方法则是一种定性方法，它无须求解微分方程，而是通过一类具有某些性质的函数 V （李雅普诺夫函数），研究它及其对于系统的全导数的有关性质，从而得出稳定性的结论。第二种方法又称直接方法，它具有科学的概念体系，判定方法和自成一套的理论，现今学术界广为应用且影响巨大的李雅普诺夫方法就是直接方法。

4.1 稳定性的基本概念

4.1.1 系统状态的运动及平衡状态

考虑由下列动态方程描述的系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4-1)$$

式中， $\mathbf{x}$ 是 n 维状态矢量； $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 为 n 维矢量函数，其各分量是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 t 的函数； t_0 和 $\mathbf{x}(t_0)$ 是系统的初始时刻和初始状态。 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 一般为时变的非线性函数，如果不含 t ，则为定常的非线性函数。

对于线性系统 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 可表示为 $\mathbf{x}$ 的线性矢量函数，或者习惯表示成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (4-2)$$

对于线性定常系统, 式 (4-1) 又可以习惯表示成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (4-3)$$

假设式 (4-1) 有唯一解, 其解为 $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ 。 $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ 是 t_0 到 t 的转移函数, 而且 $\Phi(t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ 。

$\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ 实际上描述了式 (4-1) 系统在 n 维状态空间中从初始条件 $(t_0, \mathbf{x}_0)$ 出发的一条状态运动的轨迹, 简称系统的运动或状态轨线。

由于这一运动是由初始状态的扰动引起的, 因此, 常称为系统的受扰运动。实质上, 它等同于系统状态的零输入响应。

研究系统的稳定性, 常限于研究没有外部输入作用时的系统。通常, 这类系统称为自治系统。自治系统一般表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (4-4)$$

对于所考察的式 (4-1) 系统, 如果存在某个状态 $\mathbf{x}_e$, 使成立有

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4-5)$$

则称 $\mathbf{x}_e$ 为系统的一个平衡状态。在大多数情况下, $\mathbf{x}_e = 0$, 即状态空间的原点为系统的一个平衡状态。除此之外, 系统也可以有非零平衡状态。进而, 如果系统的平衡状态在状态空间中呈现为彼此分隔的孤立点, 则称其为孤立平衡状态。对于孤立平衡状态, 总是可以通过移动坐标系而将其转换为状态空间的原点, 所以, 今后的讨论中将常假设平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 就是原点。

因此, 系统运动的稳定性, 就是研究其平衡状态的稳定性, 也即偏离平衡状态的受扰运动能否只依靠系统内部的结构性质而返回到平衡状态, 或者限制在它的一个有限邻域内。

4.1.2 预备知识

1. 球域

若用 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$ 表示状态矢量 $\mathbf{x}$ 与平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 的距离, 用点集 $s(\varepsilon)$ 表示以 $\mathbf{x}_e$ 为球心, ε 为半径的超球体, 那么 $\mathbf{x} \in s(\varepsilon)$, 则表示

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon \quad (4-6)$$

式中, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$ 为欧几里得范数。

在 n 维状态空间中, 有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = \left[(x_1 - x_{e1})^2 + (x_2 - x_{e2})^2 + \cdots + (x_n - x_{en})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-7)$$

当 ε 很小时, 则称 $s(\varepsilon)$ 为 $\mathbf{x}_e$ 的邻域。因此, 若有 $\mathbf{x}_0 \in s(\delta)$, 则意味着 $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$ 。同理, 若状态方程的解 $\Phi(t; \mathbf{x}_0; t_0)$ 位于球域 $s(\varepsilon)$ 内, 便有

$$\Phi(t; \mathbf{x}_0; t_0) \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad (4-8)$$

式 (4-8) 表明齐次方程式 (4-1) 由初始状态 $\mathbf{x}_0$ 或短暂扰动引起的自由响应是有界的。

2. 二次型

n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次多项式为

$$\begin{aligned}
 V(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\
 & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\
 & + \dots + \\
 & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2
 \end{aligned}$$

称为二次型。式中, a_{ik} , $i, k=1, 2, \dots, n$ 是二次型的系数。

用矩阵表示二次型较为方便, 即

$$V(\mathbf{x}) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

必须指出, 二次型是一个标量, 最基本的特征是它的定号性, 也就是 $V(\mathbf{x})$ 在坐标原点附近的特性。

1) 正定性

当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 时, 才有 $V(\mathbf{x})=0$; 对任意非零 $\mathbf{x}$, 恒有 $V(\mathbf{x})>0$, 则 $V(\mathbf{x})$ 为正定。

2) 负定性

当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 时, 才有 $V(\mathbf{x})=0$; 对任意非零 $\mathbf{x}$, 恒有 $V(\mathbf{x})<0$, 则 $V(\mathbf{x})$ 为负定。

3) 半正定性与半负定性

如果对于任意的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 恒有 $V(\mathbf{x}) \geq 0$, 则 $V(\mathbf{x})$ 为半正定, 或称非负定。

如果对于任意的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 恒有 $V(\mathbf{x}) \leq 0$, 则 $V(\mathbf{x})$ 为半负定, 或称非正定。

4) 不定性

如果无论取多么小的原点的某个邻域, $V(\mathbf{x})$ 可为正值也可为负值, 则 $V(\mathbf{x})$ 不定。

3. 塞尔维斯特准则

(1) 二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 或对称矩阵 $\mathbf{P}$ 为正定的充分必要条件是 $\mathbf{P}$ 的主子行列式均为正, 即

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

如果 $\Delta_1 = a_{11} > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\dots$, $\Delta_n = |\mathbf{P}| > 0$, 则 $\mathbf{P}$ 为正定, 即 $V(\mathbf{x})$ 为正定。

(2) 二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 或对称矩阵 $\mathbf{P}$ 为负定的充分必要条件是, $\mathbf{P}$ 的主子行列式满足 $\Delta_i < 0$, i 为奇数; $\Delta_i > 0$, i 为偶数; $i=1, 2, \dots, n$ 。

4.1.3 系统稳定性概念

李雅普诺夫根据系统响应是否有界把系统的稳定性定义为四种情况。

1. 李雅普诺夫意义下的稳定性

设 $\mathbf{x}_e$ 为式 (4-1) 系统的一个平衡状态。如果对给定的任一实数 $\varepsilon > 0$ ，都对应地存在一个实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$ ，使得由满足不等式

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$$

的任一初始状态 $\mathbf{x}_0$ 出发的运动轨迹都满足不等式

$$\|\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

则称此平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 为李雅普诺夫意义下稳定的。如果 δ 的选取只依赖于 ε 而与初始时刻 t_0 无关，则进一步称平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 是一致稳定的。

该定义的几何含义是，对任给正实数 ε ，在状态空间中以 $\mathbf{x}_e$ 为球心，构造半径为 ε 的一个超球体，其球域记为 $s(\varepsilon)$ ，则若存在对应的一个正实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$ ，其大小同时依赖于 ε 和 t_0 ，而可构造原点为球心，半径为 $\delta(\varepsilon, t_0)$ 的另一个超球体，相应的球域记为 $s(\delta)$ ，且由球域 $s(\delta)$ 内的任一点出发的运动轨迹 $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ ，对于所有 $t > t_0$ ，都不脱离球域 $s(\varepsilon)$ 。那么就称原点平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 是李雅普诺夫意义下稳定的。以二维情形为例，上述几何含义可以形象的用图 4-1 来描述。

对于定常系统， $\mathbf{x}_e$ 的稳定等价于一致稳定；但对时变系统， $\mathbf{x}_e$ 的稳定并不意味着其为一致稳定。而且，从实际的角度来说，常要求一致稳定，以便在任意时刻 t_0 出发的受扰运动都是李雅普诺夫意义下稳定的。

2. 渐近稳定和一致渐近稳定

设 $\mathbf{x}_e$ 为式 (4-1) 系统的一个平衡状态。如果 $\mathbf{x}_e$ 是李雅普诺夫意义下稳定的，并且当 t 无限增长时，系统轨线不仅不超出 $s(\varepsilon)$ ，而且还最终收敛于 $\mathbf{x}_e$ ，则称这种平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 渐近稳定，如图 4-2 所示。

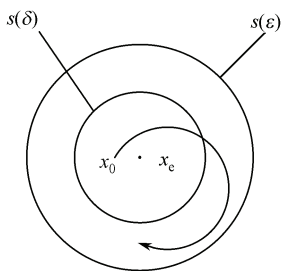


图 4-1 李雅普诺夫意义下稳定

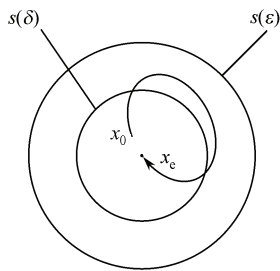


图 4-2 渐近稳定

从工程观点而言，渐近稳定比李雅普诺夫意义下稳定更重要。实际上，渐近稳定即为工程意义下的稳定，而李雅普诺夫意义下的稳定则是工程意义下的临界不稳定。但是由于渐近稳定是一个局部概念，通常只确定某平衡状态的渐近稳定性并不意味着整个系统就能正常运行。因此，如何确定渐近稳定的最大区域，并且尽量扩大其范围是尤其重要的，通常这个区域为平衡状态的吸引区。

3. 大范围渐近稳定

如果以状态空间中的任一有限点 $\mathbf{x}_0$ 为初始状态的受扰运动 $\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ 都是有界的, 且成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_e$$

则称式 (4-1) 系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 是大范围渐近稳定的。

通常, 也称大范围渐近稳定为全局渐近稳定, 而称小范围渐近稳定为局部渐近稳定。显然, 系统为大范围渐近稳定的必要前提是系统只有唯一一个孤立平衡状态。对于线性系统, 由于其满足叠加原理, 所以, 当它为渐近稳定时, 就一定是大范围渐近稳定的。在工程问题中, 通常总是希望系统具有大范围渐近稳定的特性。

4. 不稳定

如果对于不管取多大的有限实数 $\varepsilon > 0$, 都不可能找到相应的实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得由满足 $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ 的任一初态出发的运动满足不等式

$$\|\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

则称平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 为不稳定的, 如图 4-3 所示。

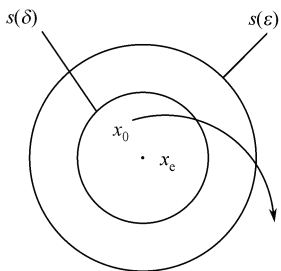


图 4-3 不稳定

4.2 李雅普诺夫稳定性理论

4.2.1 李雅普诺夫第一法

李雅普诺夫第一法又称间接法。它的基本思想是通过系统状态方程的解判别系统的稳定性。对于线性定常系统, 只需解出特征方程的根即可作出稳定性判断。对于非线性不很严重的系统, 可先将其非线性状态方程在平衡状态附近进行线性化, 即在平衡状态处对其求一次泰勒展开式, 得到线性化方程, 然后再根据其特征值来判断系统的稳定性。

1. 线性系统的稳定判据

线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4-9)$$

平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 渐近稳定的充分必要条件是系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值均具有负实部。

以上讨论的都是系统的状态稳定性, 或称内部稳定性。但从工程意义上看, 往往更重视系统的输出稳定性。

如果系统对于有界输入 u 所引起的输出 y 是有界的, 则称系统为输出稳定。

线性定常系统 $\Sigma = (A, b, c)$ 输出稳定的充分必要条件是其传递函数

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b$$

的极点全部位于 s 的左半平面。

2. 非线性系统的稳定性

设非线性动态系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

$\mathbf{x}_e$ 为其平衡状态; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 为与 $\mathbf{x}$ 同维的非线性矢量函数, 且对 $\mathbf{x}$ 具有连续的偏导数。为讨论系统在 $\mathbf{x}_e$ 处的稳定性, 可将非线性矢量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 在 $\mathbf{x}_e$ 邻域内展成泰勒级数, 得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \quad (4-10)$$

式中, $\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$ 为泰勒级数展开式中的高阶导数项; 而

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

称为雅可比矩阵。

若令 $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$, 并取式 (4-10) 的一次近似式, 可得系统的线性化方程为

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (4-11)$$

式中

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

在一次近似的基础上, 李雅普诺夫给出下述结论:

(1) 如果线性化系统的状态方程 (4-11) 中系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都具有负实部, 则原非线性系统 (4-10) 在平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 是渐近稳定的, 而且系统的稳定性与 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 无关。

(2) 如果线性化系统的系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 至少有一个具有正实部, 式 (4-11) 原非线性在平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 是不稳定的, 而且系统的稳定性与 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 无关。

(3) 如果线性化系统的系统矩阵 $\mathbf{A}$ 存在实部为零的特征值, 其余特征值都具有负实部, 系统处于临界情况, 则原非线性系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 的稳定性取决于高阶导数项 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$, 而不能由 $\mathbf{A}$ 的特征值符号来确定。

由上述结论可知, 李雅普诺夫第一法与经典控制理论中的稳定性判据的思路一致, 要求解线性化状态方程或线性化方程的特征值。区别在于, 经典控制理论讨论输出稳定性问题, 而李雅普诺夫方法讨论状态稳定性问题。

【例 4-1】 某装置的动力学特性用非线性矢量方程描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ k_1(x_1^2 - 1)x_2 - k_2x_1 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 > 0 \quad (4-12)$$

试确定系统在平衡状态的稳定性。

解 由方程可知, 原点为该系统的平衡状态, 即 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 。将系统在原点处线性化, 则系统矩阵为

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}$$

因此, 系统的特征方程为 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0$ 。

由李雅普诺夫第一法可知, 该非线性系统在平衡状态处渐近稳定的充分条件是

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0$$

4.2.2 李雅普诺夫第二法

李雅普诺夫第二法又称直接法。它的基本思想不是求解系统的运动方程, 而是借助于李雅普诺夫函数来直接对系统平衡状态的稳定性作出判断, 是从能量观点进行稳定性分析的。如果一个系统被激励后, 其储备的能量随着时间的推移逐渐衰减, 到达平衡状态时, 能量将达到最小值, 那么, 这个平衡状态就是渐近稳定的。反之, 如果系统不断地从外界吸收能量, 储能越来越大, 那么这个平衡状态就是不稳定的。如果系统的平衡状态既不增加, 也不消耗, 那么这个平衡状态就是李雅普诺夫意义下稳定的。

由于系统的复杂性和多样性, 往往不能直观地找到一个能量函数来描述系统的能量关系, 于是李雅普诺夫定义一个正定的标量函数 $V(\mathbf{x})$, 作为虚构的广义能量函数, 然后根据 $\dot{V}(\mathbf{x}) = dV(\mathbf{x})/dt$ 的符号特征来判别系统的稳定性。对于一个给定系统, 如果能够找到一个正定的标量函数 $V(\mathbf{x})$, 而 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的, 则这个系统是渐近稳定的, 这个 $V(\mathbf{x})$ 称为李雅普诺夫函数。任何一个标量函数只要满足李雅普诺夫稳定性判据所假设的条件, 均可作为李雅普诺夫函数。

由此可见, 应用李雅普诺夫的关键问题可归结为寻找李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$ 的问题。过去, 寻找李雅普诺夫函数几乎完全凭借设计者的经验和技巧, 严重地阻碍着李雅普诺夫第二法的推广应用。现在, 随着计算机技术的发展, 借助数字计算机不仅可以找到所需要的李雅普诺夫函数, 而且还能确定系统的稳定区域。但是要想找到一套对任何系统都普遍适用的方法仍很困难。

定理 4-1 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

式中, $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ ($t \geq t_0$)。如果存在一标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$, 其具有连续的一阶偏导数, 且满足以下条件:

$V(\mathbf{x}, t)$ 是正定的;

$\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 是负定的。

则在原点处的平衡状态是渐近稳定的。如果当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$, 则在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

【例 4-2】 设系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (4-13)$$

试确定其平衡状态的稳定性。

解 很明显, 原点是给定系统的唯一平衡状态, 选取一个正定的标量函数 $V(\mathbf{x})$ 为

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{正定})$$

其一阶导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

将系统方程 (4-13) 代入上式得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{负定})$$

又由于当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 因此, 系统在平衡点处是大范围渐近稳定的。

定理 4-2 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

式中, $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ ($t \geq t_0$)。如果存在一标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$, 其具有连续的一阶偏导数, 且满足以下条件:

$V(\mathbf{x}, t)$ 是正定的;

$\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 是半负定的;

$\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 对任意 t_0 和任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 在 $t \geq t_0$ 时不恒等于零。

则在原点处的平衡状态是渐近稳定的。如果当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$, 则在原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。

【例 4-3】 设系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (4-14)$$

确定系统平衡状态的稳定性。

解 显然, 原点为给定系统的唯一平衡状态。选李雅普诺夫函数为标准二次型函数, 即

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 \quad (\text{正定})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1x_2 + 4x_2(-x_1 - 2x_2) \quad (\text{半负定}) \\ &= -8x_2^2 \end{aligned}$$

当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$;

当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$;

其他情况 $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$, 因此, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是半负定的。

下面进一步分析 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 的定号性, 即当 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ 时, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是否恒等于零。由于 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -8x_2^2$ 恒等于零, 必须要求 x_2^2 在 $t \geq t_0$ 时恒等于零; 而 x_2^2 恒等于零必须要求 x_2 恒等于零, 从而 $\dot{x}_2$ 也必须恒等于零。但从状态方程 $\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$ 来看, 在 $t \geq t_0$ 时, 要使 $\dot{x}_2 = 0$ 和 $x_2 = 0$, 必须满足 $x_1 = 0$ 的条件。这表明 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 只可能在原点处 ($x_1 = 0, x_2 = 0$) 恒等于零, 因此, 系统在原点处的平衡状态是渐近稳定的。又由于当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$, 所以, 系统在原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。

若选取如下正定函数作为李雅普诺夫函数, 即

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \right]$$

则 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + 2x_2^2)$ 是负定的。而且当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$, 所以, 系统在原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。

定理 4-3 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

式中, $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ ($t \geq t_0$)。如果存在一标量函数 $V(\mathbf{x}, t)$, 其具有连续的一阶偏导数, 且满足以下条件:

$V(\mathbf{x}, t)$ 是正定的;

$\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 是半负定的, 但在某一状态值恒为零。

则在原点处的平衡状态是李雅普诺夫意义下稳定的, 而非渐近稳定。此时, 系统可以保持在一个等幅振荡状态上。

【例 4-4】 系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 \end{cases} \quad (4-15)$$

试确定平衡状态的稳定性。

解 显然, 原点为系统平衡状态。选取正定函数李雅普诺夫函数, 即

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_2^2$$

则其导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 6x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -6x_1x_2 + 6x_1x_2 = 0$$

由上式可见, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 在任意 x 值上均可保持为零, 则系统是李雅普诺夫意义下稳定的, 但不是渐近稳定的。

上述定理均只给出了系统稳定的充分条件, 而没有给出必要条件, 即对给定的系统, 如果可以找到满足条件李雅普诺夫函数, 则系统必定是稳定的; 但如果找不到满足条件李雅普诺夫函数, 也并不意味着系统是不稳定的。

定理 4-4 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

式中, $f(0, t) = 0$ ($t \geq t_0$)。如果存在一标量函数 $V(x, t)$, 其具有连续的一阶偏导数, 且满足以下条件:

$V(x, t)$ 在原点的某一邻域内是正定的;

$\dot{V}(x, t)$ 在同一邻域内是正定的。

则系统在原点处的平衡状态是不稳定的。

【例 4-5】 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (4-16)$$

坐标原点是其平衡状态。试判断系统在坐标原点处平衡状态的稳定性。

解 选取二次型函数 $V(x)$ 为李雅普诺夫函数

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

显然, $V(x)$ 为正定函数, 其沿系统轨迹的导数为

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$\dot{V}(x)$ 也是正定的, 因此, 根据定理 4-4 可知, 系统在坐标原点处的平衡状态是不稳定的。

4.3 线性系统的李雅普诺夫稳定性分析

设线性定常系统为

$$\dot{x} = Ax \quad (4-17)$$

式中, x 为 n 维状态矢量, A 为 $n \times n$ 维系统矩阵, 假设 A 为非奇异矩阵。因为判定系统的稳定性, 主要取决于系统的自由响应, 所以令 $u=0$, 由系统状态方程可知, 系统唯一的平衡状态是坐标原点 $x_e = 0$ 。

定理 4-5 式 (4-17) 线性定常连续系统的平衡状态 $x_e = 0$ 为渐近稳定的充分必要条件为, 对于任意给定的一个正定矩阵 Q , 都存在一个正定矩阵 P 为矩阵方程, 即

$$PA + A^T P = -Q \quad (4-18)$$

的解, 并且正定函数 $V(x) = x^T P x$ 即为系统的一个李雅普诺夫函数。

证明 充分性, 即证明对任意的正定矩阵 Q , 若存在正定矩阵 P 满足式 (4-18), 则平衡状态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的。

已知满足矩阵方程 (4-18) 的正定矩阵 P 存在, 故令 $V(x) = x^T P x$ 。 $V(x)$ 沿轨线对时间 t 的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{d}{dt}(x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x \end{aligned} \quad (4-19)$$

而 Q 为正定矩阵, 故 $\dot{V}(x)$ 为负定函数。根据定理 4-1, 即证明了系统的平衡状态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的。充分性得证。

必要性, 即证明若系统在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的, 则对任意给定的正定矩阵 $\mathbf{Q}$, 必存在正定矩阵 $\mathbf{P}$ 满足矩阵方程 (4-18)。对任意给定的正定矩阵 $\mathbf{Q}$, 令

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} dt \quad (4-20)$$

由矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{\mathbf{A} t}$ 的定义和性质可知, 上述被积矩阵函数的各元素一定具有 $t^k \mathbf{e}^{\lambda t}$ 形式的各项之和, 其中, λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值。因为系统是渐近稳定的, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值 λ 的实部一定小于零, 因此, 上述积分一定存在, 即 $\mathbf{P}$ 为有限对称矩阵。又由于 $\mathbf{Q}$ 为正定矩阵, 则有方程 (4-19) 可知, $\mathbf{P}$ 一定为有限的正定矩阵。

将矩阵 $\mathbf{P}$ 的表达式 (4-20) 代入矩阵方程 (4-18) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} &= \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} dt \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} dt = \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} \mathbf{e}^{\mathbf{A} t} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{Q} \end{aligned}$$

必要性得证。

在应用这个定理时, 应注意以下几点。

(1) 如果 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 沿任意一条轨迹都不恒等于零, 那么 $\mathbf{Q}$ 可取为半正定的。

(2) 该定理阐述的条件, 是充分且必要的。

(3) 只要矩阵 $\mathbf{Q}$ 是正定的, 可以任意选取, 并且系统渐近稳定性判定的最终结果与 $\mathbf{Q}$ 的具体选取无关。因此, 在确定是否存在一个正定的实对称矩阵 $\mathbf{P}$ 时, 可以简单地选 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, 这里 $\mathbf{I}$ 为 n 维单位矩阵。即根据

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$$

求得 $\mathbf{P}$, 然后检验 $\mathbf{P}$ 正定与否。

(4) 将上述定理同从矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值分布来分析系统稳定性联系起来看, 它实际上就是 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ 中矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值具有负实部的充分必要条件。

可以证明, 要求特征值均具有小于某一数值的负实部, 即 $\text{Re}(\lambda_i) < \sigma$ 的充分必要条件 (考虑衰减程度) 为

对于任意给定的正定对称矩阵 $\mathbf{Q}$, 存在正定对称矩阵 $\mathbf{P}$, 它为矩阵方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - 2\sigma \mathbf{P} = \mathbf{Q}$$

的解。

证明 用上述定理考察系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, 若特征值均具有负实部 (充分必要条件是对任意正定对称矩阵 $\mathbf{Q}$, 存在正定对称矩阵 $\mathbf{P}$, 满足 $\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$), 对系统做平移变换, 将 $\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}$ 替代上式中的 $\mathbf{A}$, 则

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}) + (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I})^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

即

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - 2\sigma \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

【例 4-6】 设系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

显然, 坐标原点是系统的一个平衡状态, 试判定该系统的稳定性。

解 设系统的李雅普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4-22)$$

式中, $\mathbf{P}$ 为对称矩阵, 由下式求得

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (4-23)$$

选取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p_{12} & -p_{11} - p_{12} \\ p_{22} & -p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \\ -p_{11} - p_{12} & -p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-24)$$

将矩阵方程展成代数方程组, 有

$$\begin{cases} 2p_{12} = -1 \\ -p_{11} - p_{12} + p_{22} = 0 \\ -2p_{12} - 2p_{22} = -1 \end{cases} \quad (4-25)$$

解得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

因为

$$\Delta_1 = p_{11} = \frac{3}{2} > 0 \quad (4-27)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{4} > 0 \quad (4-28)$$

所以, 由塞尔维斯特准则可知 $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ 。该系统是大范围渐近稳定的。

4.4 非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析

在线性系统中, 如果平衡状态是局部渐近稳定的, 那么它一定也是大范围渐近稳定的。但在非线性系统中, 在大范围内不是渐近稳定的平衡状态可能是局部渐近稳定的。线性系统中局部不稳定的平衡状态必然也是在大范围内不稳定的, 但在非线性系统中, 局部的不稳定并不能说明系统是不稳定的。

雅可比矩阵法, 又称克拉索夫斯基方法, 二者表达形式略有不同, 但基本思想是一致的。针对非线性系统, 仿照线性系统用状态 $\mathbf{x}$ 构成李雅普诺夫函数的形式, 该方法以状态变量的导数 $\dot{\mathbf{x}}$ 来构造李雅普诺夫函数。

设非线性定常连续系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4-29)$$

对该系统有如下假设:

(1) 所讨论的平衡态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$;

(2) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 对状态变量 $\mathbf{x}$ 是连续可微的, 即存在雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T}$ 。

定理 4-6 非线性定常连续式 (4-29) 系统的平衡态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为渐近稳定的充分条件是, 对任意给定的正定矩阵 $\mathbf{P}$, 下列矩阵

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{J}^T(\mathbf{x})\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{J}(\mathbf{x})] \quad (4-30)$$

为正定的矩阵函数, 且

$$V(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4-31)$$

为该系统的一个李雅普诺夫函数。更进一步, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 则该平衡状态是大范围渐近稳定的。

证明 选取二次型函数

$$V(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4-32)$$

为李雅普诺夫函数, 其中, $\mathbf{P}$ 为对称正定矩阵, 因而 $V(\mathbf{x})$ 正定。

其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} \right]^T \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} \right] \\ &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4-33)$$

如果 $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 正定, 则 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 必为负定。所以, 该非线性系统平衡态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是渐近稳定的。如果当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 则该非线性系统大范围渐近稳定。

关于定理的几点说明:

(1) 该定理对非线性系统的一个平衡状态只给出了稳定的充分条件, 若 $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 不是正定的, 则得不出任何结论, 此时这种方法无效。

(2) 使 $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 为正定的必要条件是, $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 主对角线上的所有元素不为零, 即

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \neq 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4-34)$$

这实际上要求状态方程中的第 i 个方程要含有 x_i 这个对应分量, 否则 $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 就不可能是正定的。这就是该定理的局限性。

如果取 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, 则

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})] \quad (4-35)$$

称式 (4-35) 为克拉索夫斯基表达式。这时有

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

和

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})] \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

上述两种方法是等价的。

推论 对于线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 若矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异, 且矩阵 $(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$ 为负定, 则系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围渐近稳定的。

【例 4-7】 设系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad (4-36)$$

试用克拉索夫斯基方法分析 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处的稳定性。

解 由系统可知

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

计算其雅可比矩阵

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

由于 $\mathbf{Q}$ 对所有 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 是负定的, 故系统在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是渐近稳定的。而当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 所以, 平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围渐近稳定的。

习 题

4-1 判断下列二次型函数的符号性质。

(1) $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

(2) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 4x_1x_3$

(3) $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2]$$

(4) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1+x_2^2}, \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2]$

4-2 试用李雅普诺夫第二法确定下列系统平衡状态的稳定性。

(1) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

(2) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

4-3 设非线性微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

试求其平衡点，然后对各平衡点进行线性化，并判断平衡点的稳定性。

4-4 非线性系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

试用雅可比矩阵法确定其平衡状态的稳定性。

4-5 著名的 Lorenz 混沌系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases}$$

式中， σ 、 r 和 b 是正常数。试用李雅普诺夫第二法分析该混沌系统的稳定性。

4-6 考虑 Van der pol 振子方程

$$\ddot{y} + y - \varepsilon \left(\frac{\dot{y}^3}{3} - \dot{y} \right) = 0$$

试用李雅普诺夫第二法分析其稳定性。

第 5 章 线性定常系统的综合

对于给定的受控系统，确定其控制规律，也就是设计控制器的结构和参数，使控制过程满足规定的性能指标，这便是系统的综合。通常总是先对所研究的工程问题初步设计一个系统，然后对该系统的性能进行各方面的分析研究，如果系统的品质不能令人满意，那么应按要求对初步设计的系统参数加以适当的修正，或者重新构造一个能符合要求的系统以满足需要。因此，系统的综合与性能指标密切相关。

研究控制系统的分析与综合是控制系统研究的两大课题。前者是在建立数学模型的基础上分析系统的各种性能（如前面各章讨论过的系统响应、能控性、能观性和稳定性等）及其与系统的结构、参数和外部作用间的关系。后者的任务在于设计控制器，寻求改善系统性能的各种控制规律，以保证系统的各项性能指标要求都得到满足。本章仅讨论一些典型问题。

5.1 控制系统的结构、特性及极点配置

在现代控制理论中，控制系统的基本结构和经典控制理论一样，仍然是由受控对象和反馈控制器两部分构成的闭环系统。不过在经典理论中通常采用输出反馈，而在现代控制理论中则更多地采用状态反馈。由于状态反馈能提供更丰富的状态信息和可供选择的自由度，因而容易使系统获得更为优异的性能。

5.1.1 状态反馈

状态反馈是将系统的每一个状态变量乘以相应的反馈系数，然后反馈到输入端与参考输入相加形成控制律，作为受控系统的控制输入。如图 5-1 所示是一个多输入-多输出系统状态反馈的基本结构。

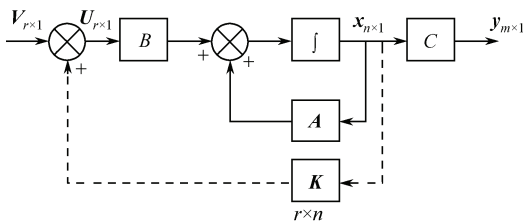


图 5-1 多输入-多输出系统的状态反馈结构

图中受控系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-1)$$

式中, $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{u} \in R^r$; $\mathbf{y} \in R^m$ 、 $\mathbf{A}_{n \times n}$ 、 $\mathbf{B}_{n \times r}$ 、 $\mathbf{C}_{m \times n}$ 。简记为 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 。

状态线性反馈控制律 $\mathbf{u}$ 为

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (5-2)$$

式中 $\mathbf{v}$ —— $r \times 1$ 维参考输入;

$\mathbf{K}$ —— $r \times n$ 维状态反馈系数阵或状态反馈增益阵。对单输入系统, $\mathbf{K}$ 为 $1 \times n$ 维行矢量。把式 (5-2) 代入式 (5-1), 整理可得状态反馈闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-3)$$

简记为 $\Sigma_k[(\mathbf{A} + \mathbf{BK}), \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ 。

闭环系统的传递函数矩阵

$$\mathbf{W}_k(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]\mathbf{B} \quad (5-4)$$

比较开环系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 与闭环系统 $\Sigma_k[(\mathbf{A} + \mathbf{BK}), \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ 可见, 状态反馈阵 $\mathbf{K}$ 的引入, 并不增加系统的维数, 但可通过 $\mathbf{K}$ 的选择自由地改变闭环系统的特征值, 从而使系统获得所要求的性能。

5.1.2 输出反馈

输出反馈是采用输出矢量 $\mathbf{y}$ 构成线性反馈律。在经典控制理论中主要讨论这种反馈形式。如图 5-2 所示为多输入-多输出系统输出反馈的基本结构。

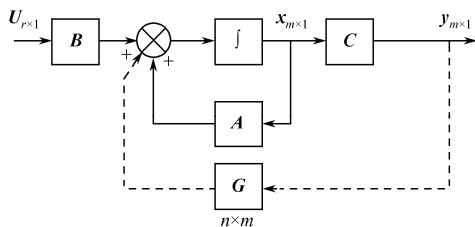


图 5-2 多输入-多输出系统的输出反馈结构

图中受控系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-5)$$

输出线性反馈控制律为

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{v} \quad (5-6)$$

式中, $\mathbf{H}$ 为 $r \times m$ 维输出反馈增益阵。对单输出系统, $\mathbf{H}$ 为 $r \times 1$ 维列矢量。

闭环系统状态空间表达式可把式 (5-5) 代入式 (5-6), 求得

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (5-7)$$

再把式 (5-7) 代入式 (5-5), 求得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BHC})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-8)$$

简记为 $\Sigma_H[(\mathbf{A} + \mathbf{BHC}), \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ 。由式 (5-8) 可知, 通过选择输出反馈增益阵 $\mathbf{H}$ 也可以改变闭环系统的特征值, 从而改变系统的控制特性。

输出反馈系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}_H(s) = \mathbf{C}[\mathbf{sI} - (\mathbf{A} + \mathbf{BHC})]^{-1} \mathbf{B} \quad (5-9)$$

比较上述两种基本形式的反馈可以看出, 输出反馈中的 $\mathbf{HC}$ 与状态反馈中的 $\mathbf{K}$ 相当。但由于 $m < n$, 所以, $\mathbf{H}$ 可供选择的自由度远比 $\mathbf{K}$ 小, 因而输出反馈只能相当于一种部分状态反馈。只有当 $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ 时, $\mathbf{HC} = \mathbf{K}$, 才能等同于全状态反馈。因此, 在不增加补偿器的条件下, 输出反馈的效果显然不如状态反馈系统好, 但输出反馈在技术实现上的方便性则是其突出优点。

5.1.3 从输出到状态矢量导数 $\dot{\mathbf{x}}$ 反馈

从系统输出到状态矢量导数 $\dot{\mathbf{x}}$ 的线性反馈形式在状态观测器中获得应用。图 5-3 表示了这种反馈结构。

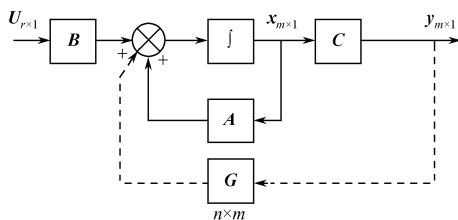


图 5-3 多输入-多输出系统从输出到 $\dot{\mathbf{x}}$ 反馈的结构

设受控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-10)$$

加入从输出矢量 $\mathbf{y}$ 到状态矢量导数 $\dot{\mathbf{x}}$ 的反馈增益阵 $\mathbf{G}_{n \times m}$, 可得闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-11)$$

将式 (5-11) 中的 $\mathbf{y}$ 代入 $\dot{\mathbf{x}}$ 整理得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{GC})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-12)$$

记为 $\Sigma_G[(\mathbf{A} + \mathbf{GC}), \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ 。

闭环系统的传递函数阵

$$\mathbf{W}_G(s) = \mathbf{C}[\mathbf{sI} - (\mathbf{A} + \mathbf{GC})]^{-1} \mathbf{B} \quad (5-13)$$

从式(5-12)看出,通过选择矩阵 $\mathbf{G}$ 也能改变闭环系统的特征值,从而影响系统的特性。

5.1.4 闭环系统的能控性与能观性

引入各种反馈构成闭环后,系统的能控性与能观性是关系到能否实现状态控制与状态观测的重要问题。

定理 5-1 状态反馈不改变受控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的能控性,但不保证系统的能观性不变。

证明 只证能控性不变。这只要证明它们的能控判别矩阵同秩即可。

受控系统 Σ_0 和状态反馈系统的 Σ_k 的能控性判别阵为

$$\mathbf{Q}_{c0} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (5-14)$$

$$\mathbf{Q}_{ck} = [\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}] \quad (5-15)$$

比较式(5-15)与式(5-14)两个矩阵的各对应分块,可以看到:

第一分块 $\mathbf{B}$ 相同。

第二分块 $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{B} = \mathbf{AB} + \mathbf{B}(\mathbf{KB})$, 其中 $(\mathbf{KB})$ 是一常阵,因此, $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{B}$ 的列矢量可表示成 $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]$ 的线性组合。

同理,第三分块 $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^2\mathbf{B} = \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB}(\mathbf{KB}) + \mathbf{B}(\mathbf{KAB}) + \mathbf{B}(\mathbf{KBKB})$ 的列矢量也可用 $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ 的线性组合表示。其余各分块类同。因此 $\mathbf{Q}_{ck}$ 可看做由 $\mathbf{Q}_{c0}$ 经初等变换得到的,而矩阵作初等变换并不改变矩阵的秩。所以, $\mathbf{Q}_{ck}$ 与 $\mathbf{Q}_{c0}$ 的秩相同,定理得证。

状态反馈不保持系统的能观性,可作如下解释。例如,对单输入-单输出系统,状态反馈会改变系统的极点,但不影响系统的零点。这样就有可能使传递函数出现零极点对消现象,因而破坏了系统的能观性。

实际上,受控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ 的传递函数为

$$\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \quad (5-16)$$

将 Σ_0 的能控标准 I 型代入上式,得

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} + d \\ &= \frac{ds^n + (b_{n-1} + da_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 + da_1)s + (b_0 + da_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (5-17)$$

引入状态反馈后,闭环系统的传递函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k(s) &= \mathbf{c}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{bK})]^{-1}\mathbf{b} + d \\ &= \frac{[(b_{n-1} + da_{n-1}) - d(a_{n-1} - k_{n-1})]s^{n-1} + \cdots + [(b_0 + da_0) - d(a_0 - k_0)]}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} \\ &= \frac{ds^n + (b_{n-1} + da_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 + da_1)s + (b_0 + da_0)}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} \end{aligned} \quad (5-18)$$

比较式(5-17)和式(5-18),可以看出,引入状态反馈后传递函数的分子多项式不变,即零点保持不变,但分母多项式的每一项系数均可通过选择 $\mathbf{K}$ 而改变,这就有可能使传递函数发生零极点相消而破坏系统的能观性。

【例 5-1】 试分析系统引入状态反馈 $\mathbf{K} = [-2 \ 0]$ 后的能控性与能观性。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 容易验证原系统是能控且能观的。

因为

$$\text{rank}[\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

和

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

加入 $\mathbf{K} = [-2 \ 0]$ 后,得闭环系统状态矩阵为

$$\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-2 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

相应地有

$$\text{rank}[\mathbf{b} \ (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K})\mathbf{b}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{满秩}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K}) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{满秩}$$

可见,引入状态反馈 $\mathbf{K} = [-2 \ 0]$ 后,闭环系统保持能控性、能观性不变。

若引入状态反馈 $\mathbf{K} = [-1 \ 0]$ 后,则闭环系统保持能控性不变,却破坏了系统的能观性。这实际上反映了在传递函数上出现的零极点相消的现象。因为

$$\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

$$\mathbf{W}_k(s) = \mathbf{c}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K})]^{-1}\mathbf{b} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s}$$

从以上论证可以看出,状态反馈保持了原系统的能控性,但却不一定能保持原系统的能观性。因为经反馈后的输入量包含状态变量的信息,会对系统输出产生影响。

定理 5-2 输出反馈不改变受控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的能控性和能观性。

证明 关于能控性不变。因为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (5-19)$$

若把 $(\mathbf{H}\mathbf{C})$ 看做等效的状态反馈阵 $\mathbf{K}$, 那么状态反馈便保持受控系统的能控性不变。

关于能观性不变。由能观性判别阵

$$\mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

和

$$\mathbf{Q}_{0H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BHC}) \\ \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BHC})^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

仿照定理 5-1 的证明方法, 同样可以把 $\mathbf{Q}_{0H}$ 看做是 $\mathbf{Q}_{00}$ 经初等变换的结果。而初等变换不改变矩阵的秩, 因此, 能观性保持不变。

一般地, 由输出引出的反馈不会改变系统的能观性。一个浅显解释是, 与状态反馈不同, 输出反馈中不含有不可测状态变量的信息值, 当然不会改变系统的能观性。

5.2 极点配置问题

一个控制系统的特性或品质指标, 很大程度上是由系统的极点位置决定的。因此, 通过选择适当的反馈阵以改变系统的极点值, 使其处于希望位置, 这就是极点配置问题。

5.2.1 采用状态反馈

定理 5-3 采用状态反馈对系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 任意配置极点的充分必要条件是 Σ_0 完全能控。

证明 充分性。若 Σ_0 完全能控, 通过状态反馈必成立

$$\det[\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{bK})] = f^*(\lambda) \quad (5-22)$$

式中, $f^*(\lambda)$ 为期望特征多项式。

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \cdots + a_1^* \lambda + a_0^* \quad (5-23)$$

式中, λ_i^* , $i=1, 2, \dots, n$ 为期望的闭环极点 (实数极点或共轭复数极点)。

(1) 若 Σ_0 完全能控, 必存在非奇异变换, 即

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{c1} \bar{\mathbf{x}}$$

式中, $\mathbf{T}_{c1}$ 为能控标准 I 型变换矩阵。

能将 Σ_0 化成能控标准 I 型

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}} u \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5-24)$$

式中

$$\bar{A} = T_{cl}^{-1} A T_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{cl}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = C T_{cl} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

受控系统 Σ_0 的传递函数为

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1} b = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (5-25)$$

(2) 加入状态反馈增益阵

$$\bar{K} = [\bar{k}_0 \quad \bar{k}_1 \quad \cdots \quad \bar{k}_{n-1}] \quad (5-26)$$

可求得对 $\bar{x}$ 的闭环状态方程表达式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{b}\bar{K})\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c}\bar{x} \end{cases} \quad (5-27)$$

式中

$$\bar{A} + \bar{b}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 - \bar{k}_0) & -(a_1 - \bar{k}_1) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} - \bar{k}_{n-1}) \end{bmatrix}$$

闭环特征多项式为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - (\bar{A} + \bar{b}\bar{K})| \\ &= \lambda^n + (a_{n-1} - \bar{k}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{k}_1)\lambda + (a_0 - \bar{k}_0) \end{aligned} \quad (5-28)$$

闭环传递函数为

$$\begin{aligned} W_k(s) &= \bar{C} [sI - (\bar{A} + \bar{b}\bar{K})]^{-1} \bar{b} \\ &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + (a_{n-1} - \bar{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{k}_1)s + (a_0 - \bar{k}_0)} \end{aligned} \quad (5-29)$$

(3) 使闭环极点与给定的期望极点相符, 必须满足

$$f(\lambda) = f^*(\lambda)$$

由等式两边 λ 同次幂系数对应相等, 可解出反馈阵各系数

$$\bar{k}_i = a_i - a_i^*, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \quad (5-30)$$

于是得

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} a_0 - a_0^* & a_1 - a_1^* & \cdots & a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{bmatrix}$$

(4) 把对应于 $\bar{\mathbf{x}}$ 的 $\bar{\mathbf{K}}$ ，通过如下变换，得到对应于状态 $\mathbf{x}$ 的 $\mathbf{K}$ ，即

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{cl}^{-1} \quad (5-31)$$

这是由于 $u = v + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}} = v + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}_{cl}^{-1}\mathbf{x}$ 的缘故。

必要性。已知可任意配置极点，要证系统状态能控。采用反证法，反设系统状态不完全能控。则经线性变换，化为如下的能控性结构规范形。

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

设一状态反馈增益阵 $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}_1 \quad \tilde{\mathbf{K}}_2]$ ，状态反馈系统特征方程为

$$\begin{aligned} \det[s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}})] &= \det \left[s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{K}}_1 \quad \tilde{\mathbf{K}}_2] \right] \\ &= \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11} - \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{K}}_1 & -\tilde{\mathbf{A}}_{12} - \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{K}}_2 \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11} - \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{K}}) \det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

式中， $\det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22}) = 0$ 为不能控子系统的特征方程，不能任意配置极点，与已知矛盾，反设不成立，系统能控。

【例 5-2】 设系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

试设计状态反馈控制器，使闭环系统的极点为 $-2, -1 \pm j1$ 。

解 (1) 因为传递函数没有零极点对消现象，所以，原系统能控且能观。可直接写出它的能控标准 I 型实现，其结构如图 5-4 所示。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(2) 加入状态反馈阵 $\mathbf{K} = [k_0, k_1, k_2]$ ，如图 5-4 虚线所示。闭环系统特征多项式为

$$f(\lambda) = \det[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K})] = \lambda^3 + (3 - k_2)\lambda^2 + (2 - k_1)\lambda + (-k_0)$$

(3) 根据给定的极点值，得期望特征多项式为

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$$

(4) 比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各对应项系数，可解得

$$k_0 = -4, \quad k_1 = -4, \quad k_2 = -1$$

即

$$\mathbf{K} = [-4 \quad -4 \quad -1]$$

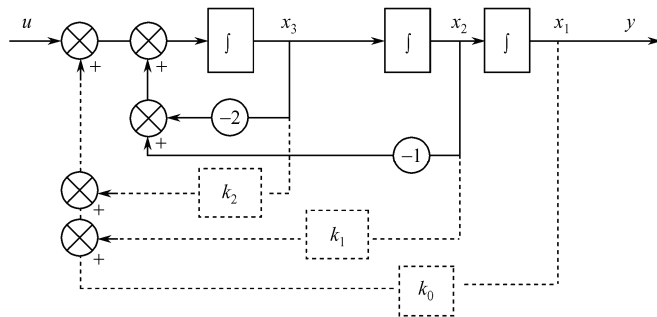


图 5-4 例 5-2 闭环系统结构图

几点讨论:

(1) 选择期望极点, 是确定综合指标的复杂问题。一般应注意以下两点:

① 对一个 n 维系统, 必须指定 n 个实极点或共轭复极点。

② 极点位置的确定, 要充分考虑它们对于系统性能的主导影响及其与系统零点分布状况的关系。同时还要兼顾系统抗干扰的能力和对参数漂移低敏感性的要求。

(2) 对于单输入系统, 只要系统能控, 必能通过状态反馈实现闭环极点的任意配置, 而且不影响原系统零点的分布, 但如果故意制造零极点对消, 那么, 此时闭环系统是不能观的。

(3) 上述原理同样适用于多输入系统, 但具体设计要困难得多。因为将综合指标化为期望极点需要凭借工程处理。其次, 把受控系统化为能控标准型也相当麻烦, 而且状态反馈阵 $\mathbf{K}$ 的解也非唯一。此外, 还可能改变系统零点的形态等。

5.2.2 采用输出反馈

定理 5-4 对完全能控的单输入-单输出系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, 不能采用输出线性反馈来实现闭环系统极点的任意配置。

证明 对单输入-单输出反馈系统 $\Sigma_h[(\mathbf{A} + \mathbf{b}hc), \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, 闭环传递函数为

$$\mathbf{W}_h(s) = \mathbf{c}[\mathbf{sI} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}hc)]^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{W}_0(s)}{1 + h\mathbf{W}_0(s)} \quad (5-32)$$

式中, $\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{c}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ 为受控系统的传递函数。

由闭环系统特征方程式可得闭环根轨迹方程为

$$h\mathbf{W}_0(s) = -1 \quad (5-33)$$

当 $\mathbf{W}_0(s)$ 已知时, 以 h ($0 \sim \infty$) 为参变量, 可求得闭环系统的一组根轨迹。很显然, 不管怎样选择 h , 也不能使根轨迹落在那些不属于根轨迹的期望极点位置上。定理因此得证。

不能任意配置极点, 正是输出线性反馈的基本弱点。为了克服这个弱点, 在经典控制理论中, 往往采取引入附加校正网络, 通过增加开环零极点的方法改变根轨迹走向, 从而使其落在指定的期望位置上。

经典控制中采用输出反馈方案,由于其可调参数有限,只能影响特征方程的部分系数,如根轨迹法仅能在根轨迹上选择极点,它们往往做不到任意配置极点;而状态反馈的待选参数多,如果系统能控,特征方程的全部 n 个系数都可独立任意设置,便获得了任意配置闭环极点的效果。一般 K 阵元素越大,闭环极点离虚轴越远,频带越宽,响应速度越快,但稳态抗干扰能力越差。

5.2.3 采用从输出到 $\dot{x}$ 反馈

定理 5-5 对系统 $\Sigma_0(A, b, c)$ 采用从输出到 $\dot{x}$ 的线性反馈实现闭环极点任意配置的充分必要条件是 Σ_0 完全能观。

证明 根据对偶原理,如果 $\Sigma_0(A, b, c)$ 能观,则 $\tilde{\Sigma}_0 = (A^T, c^T, b^T)$ 必能控,因而可以任意配置 $(A^T + c^T G^T)$ 的特征值。而 $(A^T + c^T G^T)$ 的特征值和 $(A^T + c^T G^T)^T$ 的特征值相同,又因为

$$(A^T + c^T G^T)^T = A + Gc$$

因此,对 $(A^T + c^T G^T)$ 任意配置极点就等价于对 $(A + Gc)$ 任意配置极点。于是设计 Σ_0 输出反馈阵 G 的问题便转化成对其对偶系统 $\tilde{\Sigma}_0$ 设计状态反馈阵 K 的问题。具体步骤如下:

(1) 取线性变换

$$x = T_{0II} \bar{x} \quad (5-34)$$

式中, T_{0II} 为能观标准 II 型变换矩阵。

将系统 $\Sigma_0(A, b, c)$ 化为能观标准 II 型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y = \bar{c} \bar{x} \end{cases} \quad (5-35)$$

式中

$$\bar{A} = T_{0II}^{-1} A T_{0II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{cII}^{-1} b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = c T_{cII} = [0 \cdots 1]$$

(2) 引入反馈阵 $\bar{G} = [\bar{g}_0 \quad \bar{g}_1 \quad \cdots \quad \bar{g}_{n-1}]^T$ 后,得闭环系统矩阵为

$$\bar{A} + \bar{G}\bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -(a_0 - \bar{g}_0) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 - \bar{g}_1) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -(a_2 - \bar{g}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1} - \bar{g}_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

和闭环特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - (\bar{A} + \bar{G}\bar{c})| = \lambda^n + (a_{n-1} - \bar{g}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 - \bar{g}_0) \quad (5-37)$$

(3) 由期望极点得期望特征多项式为

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \cdots + a_1^* \lambda + a_0^*$$

(4) 比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各项系数, 可解出

$$\bar{g}_i = a_i - a_i^*, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

即

$$\bar{G} = [a_0 - a_0^* \quad a_1 - a_1^* \quad \cdots \quad a_{n-1} - a_{n-1}^*]^T \quad (5-38)$$

(5) 将在 $\bar{x}$ 下求得的 $\bar{G}$ 变换到 x 状态下便得

$$G = T_{0II} \bar{G} \quad (5-39)$$

和求状态反馈阵 K 的情况类似, 当系统维数较低时, 只要系统能观, 也可以不化成能观标准 II 型, 通过直接比较特征多项式系数来确定 G 矩阵。

【例 5-3】 设系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] x \end{cases}$$

试选择反馈增益阵 G , 将其极点配置为 $-5, -8$ 。

解 (1) 检验能观性。因为

$$\text{rank } N = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

系统能观。

(2) 设 $G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$, 得闭环特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - (A + GC)| = \lambda^2 - g_0 \lambda + (1 - g_1)$$

(3) 期望特征多项式为

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 8) = \lambda^2 + 13\lambda + 40$$

(4) 比较系数得

$$G = \begin{bmatrix} -13 \\ -39 \end{bmatrix}$$

闭环系统模拟图如图 5-5 所示。

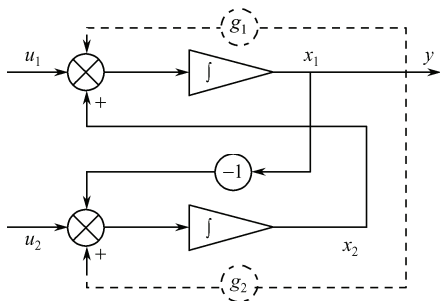


图 5-5 例 5-3 的闭环系统模拟图

5.3 系统镇定问题

镇定问题是一种特殊的闭环极点配置问题。可定义如下：

若被控系统通过状态反馈能使其闭环极点均具有负实部，即闭环系统渐近稳定，则称系统是状态反馈可镇定的。

显然，能控的非渐近稳定系统可通过状态反馈改变闭环极点，实现镇定。如果系统不能控，是否还可以镇定呢？基于状态反馈不改变系统能控性的认识，可得到如下定理：

定理 5-6 对系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ ，采用状态反馈能镇定的充分必要条件是其不能控子系统为渐近稳定。

证明 (1) 设系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 不完全能控，因此，通过线性变换可将其按能控性分解为

$$\tilde{A} = R_c^{-1} A R_c = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = R_c^{-1} B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = C R_c = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \quad (5-40)$$

式中 $\tilde{\Sigma}_c = (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ ——能控子系统；

$\tilde{\Sigma}_{\bar{c}} = (\tilde{A}_{22}, 0, \tilde{C}_2)$ ——不能控子系统。

(2) 由于线性变换不改变系统的特征值，所以，有

$$\begin{aligned} \det[sI - A] &= \det[sI - \tilde{A}] \\ &= \det \begin{bmatrix} sI_1 - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} \\ 0 & sI_2 - \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det[sI_1 - \tilde{A}_{11}] \cdot \det[sI_2 - \tilde{A}_{22}] \end{aligned} \quad (5-41)$$

(3) 由于 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 与 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 在能控性和稳定性上等价。考虑对 $\tilde{\Sigma}_0$ 引入状态反馈阵

$$\tilde{K} = [\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2] \quad (5-42)$$

于是得闭环系统的状态矩阵为

$$\begin{aligned}\tilde{A} + B\tilde{K} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1\tilde{K}_2 \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-43)$$

和闭环系统特征多项式为

$$\det[sI - (\tilde{A} + B\tilde{K})] = \det[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1)] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{22}] \quad (5-44)$$

比较式(5-44)和式(5-41)可见,引入状态反馈阵 $\tilde{K}$,只能通过选择 $\tilde{K}_1$ 使 $(\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1)$ 的特征值均具有负实部,从而使 $\tilde{\Sigma}_c$ 这个子系统为渐近稳定。但 $\tilde{K}$ 的选择并不能影响 $\tilde{\Sigma}_c$ 的特征值分布。因此,仅当 $\tilde{A}_{22}$ 的特征值均具有负实部,即不能控子系统 $\tilde{\Sigma}_c$ 为渐近稳定的,此时整个系统 Σ_0 才是状态反馈能镇定的。

定理 5-7 系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 通过输出反馈能镇定的充分必要条件是, Σ_0 结构分解中的能控且能观子系统是输出反馈能镇定的,其余子系统是渐近稳定的。

证明 (1) 对 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 进行能控性能观性结构分解,有

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [\tilde{C}_1 \quad \mathbf{0} \quad \tilde{C}_3 \quad \mathbf{0}] \quad (5-45)$$

因为 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 和 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 在能控性、能观性和能镇定性上完全等价,所以,对 $\tilde{\Sigma}_c$ 引入输出反馈阵 H ,可得闭环系统的状态矩阵为

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{H}\tilde{C} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{H} [\tilde{C}_1 \quad \mathbf{0} \quad \tilde{C}_3 \quad \mathbf{0}] \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_1 & \mathbf{0} & \tilde{A}_{13} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_3 & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} + \tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_1 & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} + \tilde{B}_2\tilde{H}\tilde{C}_3 & \tilde{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-46)$$

和闭环系统特征多项式为

$$\begin{aligned}\det[sI - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{H}\tilde{C})] &= \det[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_1)] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{22}] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{33}] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{44}] \\ &= \det[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_1)] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{22}] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{33}] \cdot \det[sI - \tilde{A}_{44}]\end{aligned}\quad (5-47)$$

式(5-47)表明,当且仅当 $(\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{H}\tilde{C}_1)$ 、 $\tilde{A}_{22}$ 、 $\tilde{A}_{33}$ 、 $\tilde{A}_{44}$ 的特征值均具负实部时,闭环系统才为渐近稳定。定理得证。

应当指出,对一个能控且能观的系统,既然不能通过输出线性反馈任意配置极点,自

然也不能保证这类系统一定具有输出反馈的能镇定性。

【例 5-4】 设系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试证明不能通过输出反馈使之镇定。

解 经检验, 该系统能控且能观, 但从特征多项式

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 - 1$$

看出各系数异号且缺项, 故系统是不稳定的。

若引入输出反馈阵 $\mathbf{H} = [h_0 \ h_1]$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{bHc} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [h_0 \ h_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h_0 & 0 & -1+h_1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{bHc})] &= \begin{vmatrix} s & 1 & 0 \\ h_0 & s & -1+h_1 \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 - h_0s + (h_1 - 1) \end{aligned}$$

由上式可见, 经 $\mathbf{H}$ 反馈闭环后的特征式仍缺少 s^2 项, 因此, 无论怎样选择 $\mathbf{H}$, 也不能使系统获得镇定。这个例子表明, 利用输出反馈未必能使能控且能观的系统得到镇定。

定理 5-8 对系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, 采用从输出到 $\dot{\mathbf{x}}$ 反馈实现镇定的充分必要条件是 Σ_0 的不能观子系统为渐近稳定。

证明 (1) 将系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 进行能观性分解, 得

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{R}_0 = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \mathbf{0}] \quad (5-48)$$

式中 $\bar{\Sigma}_0 = (\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{C}}_1)$ ——能观子系统;

$\bar{\Sigma}_0 = (\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{B}}_2, \mathbf{0})$ ——不能观子系统。

开环系统特征多项式为

$$\det[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{A}}_{21} & s\mathbf{I}_2 - \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} = \det[s\mathbf{I}_1 - \bar{\mathbf{A}}_{11}] \cdot \det[s\mathbf{I}_2 - \bar{\mathbf{A}}_{22}] \quad (5-49)$$

(2) 因为 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ 和 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的能观性、稳定性等价, 考虑对 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ 引入从输出到 $\dot{\mathbf{x}}$ 的反馈阵 $\bar{\mathbf{G}} = [\bar{\mathbf{G}}_1 \quad \bar{\mathbf{G}}_2]^T$, 于是有

$$\begin{aligned}\bar{A} + \bar{G}\bar{C} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{G}_1\bar{C}_1 & \mathbf{0} \\ \bar{A}_{21} + \bar{G}_2\bar{C}_1 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-50)$$

$$\begin{aligned}\det[sI - (\bar{A} + \bar{G}\bar{C})] &= \det \begin{bmatrix} sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{G}_1\bar{C}_1) & \mathbf{0} \\ -(\bar{A}_{21} + \bar{G}_2\bar{C}_1) & sI_2 - \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det[sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{G}_1\bar{C}_1)] \det[sI_2 - \bar{A}_{22}]\end{aligned}\quad (5-51)$$

式(5-51)表明, 引入反馈阵 $\bar{G}$, 只影响 $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 的特征值。因此, 要使系统获得镇定, 仅在 $(\bar{A}_{22}, \bar{B}_2, \mathbf{0})$ 为渐近稳定时才能做到。

5.4 状态观测器

对于线性定常系统, 在一定的条件下, 可以通过状态反馈实现任意的极点配置。但前提是状态变量必须能直接测量到, 这就给状态反馈的实现带来了困难。因此, 人们想到了通过系统的可测量参量(输入量和输出量)来重新构造估计状态的方法, 该重构状态在一定指标下和系统真实状态等价。实现状态重构的系统称为状态观测器。本节讲述在确定性控制条件下系统状态观测器的设计原理与方法。

5.4.1 状态观测器定义

设线性定常系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的状态矢量 x 不能直接检测。如果动态系统 $\hat{\Sigma}$ 以 Σ_0 的输入 u 和输出 y 作为其输入量, 能产生一组输出量 $\hat{x}$ 渐近于 x , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0$, 则称 $\hat{\Sigma}$ 为 Σ_0 的一个状态观测器。

根据上述定义, 可得构造观测器的原则为

- (1) 观测器 $\hat{\Sigma}$ 应以 Σ_0 的输入 u 和输出 y 为其输入量。
- (2) 为满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0$, Σ_0 必须完全能观, 或其不能观子系统是渐近稳定的。
- (3) $\hat{\Sigma}$ 的输出 $\hat{x}$ 应以足够快的速度渐近于 x 。即 $\hat{\Sigma}$ 应有足够宽的频带。但从抑制干扰角度看, 又希望频带不要太宽。因此, 要根据具体情况予以兼顾。
- (4) $\hat{\Sigma}$ 在结构上应尽量简单。即具有尽可能低的维数, 以便于物理实现。

5.4.2 状态观测器的实现

定理 5-9 若线性定常系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 完全能观, 则其状态矢量 x 可由输出 y 和输入 u 进行重构。

证明 将输出方程对 t 逐次求导，代以状态方程并整理可得

$$\begin{cases} y = Cx \\ \dot{y} - CBu = CAx \\ \ddot{y} - CB\dot{u} - CABu = CA^2x \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - CBu^{(n-2)} - CABu^{(n-3)} - \dots - CA^{(n-2)}Bu = CA^{n-1}x \end{cases} \quad (5-52)$$

将各式等号左边用矢量 z 表示，则有

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - CBu \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - CBu^{(n-2)} - CABu^{(n-3)} - \dots - CA^{(n-2)}Bu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = Nx \quad (5-53)$$

若系统完全能观， $\text{rank}N = n$ ，则有

$$x = N^{-1}z \quad (5-54)$$

根据式 (5-54) 可以构造一个新系统 z ，它以原系统的 y 、 u 为其输入，它的输出 z 经 N^{-1} 变换后便得到状态矢量 x 。换句话说，只要系统完全能观，那么状态矢量 x 便可由系统的输入 u 、输出 y 及其各阶导数估计出来，状态估计值记为 $\hat{x}$ 。观测器的结构如图 5-6 所示。系统 z 中包括 $0 \sim n-1$ 阶微分器，这些微分器将大大加剧测量噪声对于状态估计值的影响。因此，这样构造观测器是没有工程价值的。

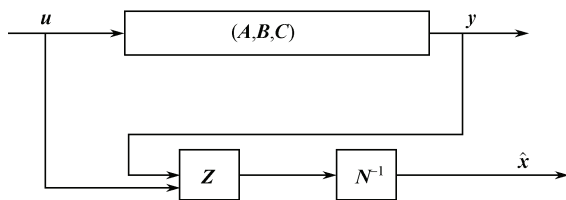


图 5-6 利用 u 和 y 重构状态 x

为了避免微分器，一个直观的想法是仿照系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的结构，设计一个相同的系统来观测状态 x ，如图 5-7 所示。

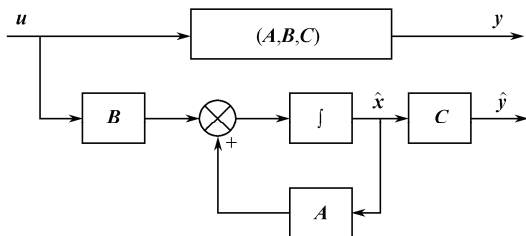


图 5-7 开环观测器

容易证明，这种状态观测器只有当观测器的初态与系统初态完全相同时，观测器的输出 $\hat{x}$ 才严格等于系统的实际状态 x 。否则，二者相差可能很大，但是要严格保持系统初态

与观测器初态完全一致，实际上是不可能的。此外，干扰和系统参数变化的不一致性也将加大它们之间的差别，所以，这种开环观测器是没有使用意义的。

如果利用输出信息对状态误差进行校正，便可构成渐近状态观测器，其原理结构如图 5-8 所示。它和开环观测器的差别在于增加了反馈校正通道。当观测器的状态 $\hat{x}$ 与系统实际状态 x 不相等时，反映到它们的输出 $\hat{y}$ 与 y 也不相等，于是产生一误差信号 $y - \hat{y} = y - C\hat{x}$ ，经反馈矩阵 $G_{n \times m}$ 馈送到观测器中每个积分器的输入端，参与调整观测器状态 $\hat{x}$ ，使其以一定的精度和速度趋近于系统的真实状态 x 。渐近状态观测器因此得名。

根据图 5-8 可得状态观测器方程为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + Gy - GC\hat{x}$$

即

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu \quad (5-55)$$

式中 $\hat{x}$ —— 状态观测器的状态矢量，是状态 x 的估值；

$\hat{y}$ —— 状态观测器的输出矢量；

G —— 状态观测器的输出误差反馈矩阵。

根据式 (5-55)，可将状态观测器表示成图 5-8 (b)。从图中可看出，它有两个输入，一个是待观测系统的控制作用 u ，另一个是待观测系统的输出 y 。它的一个输出就是状态估值 $\hat{x}$ 。

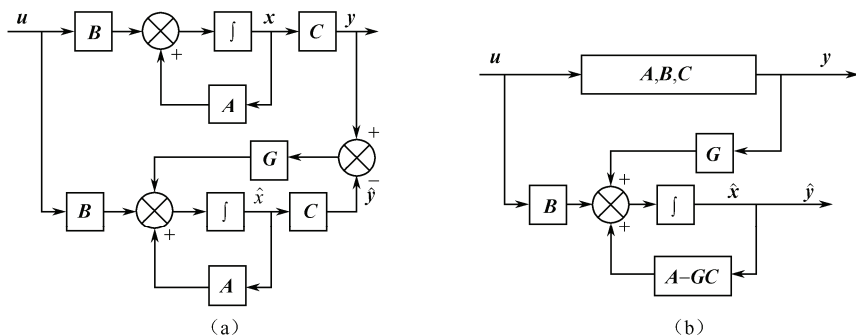


图 5-8 渐近状态观测器原理结构图

5.4.3 反馈矩阵 G 的设计

为了讨论状态估值 $\hat{x}$ 趋近于状态真值 x 的渐近速度，引入状态误差矢量

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (5-56)$$

可得状态误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A - GC)\hat{x} - Gy - Bu = Ax - (A - GC)\hat{x} - GCx \\ &= (A - GC)(x - \hat{x}) \end{aligned} \quad (5-57)$$

即

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} \quad (5-58)$$

式(5-58)是一个关于 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的齐次微分方程,其解为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{GC})t} \tilde{\mathbf{x}}(0), \quad t \geq 0 \quad (5-59)$$

由式(5-59)可以看出,若 $\tilde{\mathbf{x}}(0)=0$,则在 $t \geq 0$ 的所有时间内, $\tilde{\mathbf{x}} \equiv 0$,即状态估值 $\hat{\mathbf{x}}$ 与状态真值 $\mathbf{x}$ 严格相等。若 $\hat{\mathbf{x}}(0) \neq 0$,二者初值不相等,但 $(\mathbf{A}-\mathbf{GC})$ 的特征值均具有负实部,则 $\tilde{\mathbf{x}}$ 将渐近衰减至零,观测器的状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 将渐近地逼近实际状态 $\mathbf{x}$ 。状态逼近的速度将取决于 $\mathbf{G}$ 的选择和 $(\mathbf{A}-\mathbf{GC})$ 特征值的配置。关于矩阵 $\mathbf{G}$ 的设计方法和步骤,请参阅5.2节。

应当指出,当系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 不完全能观,但其不能观子系统是渐近稳定的,则仍可构造状态观测器。但这时, $\hat{\mathbf{x}}$ 趋近于 $\mathbf{x}$ 的速度将不能由 $\mathbf{G}$ 任意选择,而要受到不能观子系统极点位置的限制。

【例 5-5】 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

设计状态观测器使其极点为 $-1, -1$ 。

解 方法一: 状态变化法

(1) 检验能观性。

因

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ 满秩, 系统能观, 可构造观测器。}$$

(2) 将系统化成能观II型。

系统特征多项式为

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda$$

得

$$a_1 = -1, \quad a_0 = 0, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

及

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{LN} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

(3) 引入反馈阵 $\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{bmatrix}$ 得观测器特征多项式

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (\bar{A} - \bar{G}\bar{c})] = \det \begin{bmatrix} \lambda & \bar{g}_1 \\ -1 & \lambda - (1 - \bar{g}_2) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (1 - \bar{g}_2)\lambda + \bar{g}_1$$

(4) 根据期望极点得期望特征式

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

(5) 比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各项系数得

$$\bar{g}_1 = 1, \quad \bar{g}_2 = 3$$

即

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(6) 反变换到 $\mathbf{x}$ 状态下

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(7) 观测器方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}(y - \hat{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (y - \hat{y})$$

模拟结构图如图 5-9 所示。

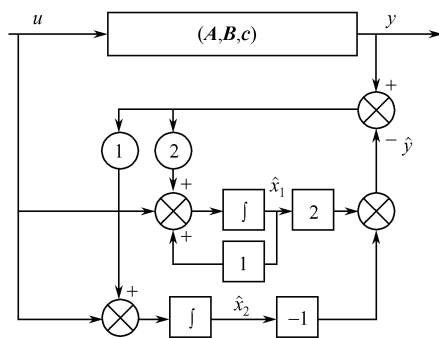


图 5-9 例 5-5 系统的状态观测器

方法二：直接法

当系统维数较低时，在检测能观性后也可不经过化成能观 II 型的步骤直接按特征式比较来确定反馈阵 $\mathbf{G}$ 。本例，有

$$\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2g_1 & g_1 \\ -2g_2 & g_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{c})] = \det \begin{bmatrix} \lambda - (1 - 2g_1) & -g_1 \\ 2g_2 & \lambda - g_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + (2g_1 - g_2 - 1)\lambda + g_2$$

与期望特征值比较, 得

$$\begin{cases} 2g_1 - g_2 - 1 = 2 \\ g_2 = 1 \end{cases}$$

故

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

两种方法, 答案一致, 显然直接法计算量少, 简单直观。

5.5 带状态观测器的状态反馈系统

状态观测器解决了被控系统的状态重构问题, 为系统实现状态反馈创造条件。这又带来两个问题: 在状态反馈系统中, 是否要用状态估计值重新计算状态反馈增益矩阵? 当观测器被引入系统后, 状态反馈部分是否会改变已经设计好的观测器的极点配置? 以下将分析这两个问题。状态观测器解决了受控系统的状态重构问题, 可使状态反馈系统得以实现。但是, 利用观测器进行状态估值反馈的系统, 与状态直接反馈的系统之间, 究竟有何异同, 是本节要讨论的问题。

5.5.1 系统结构

图 5-10 是一个带有全维状态观测器的状态反馈系统。包括原被控系统, 观测器和状态反馈三部分。

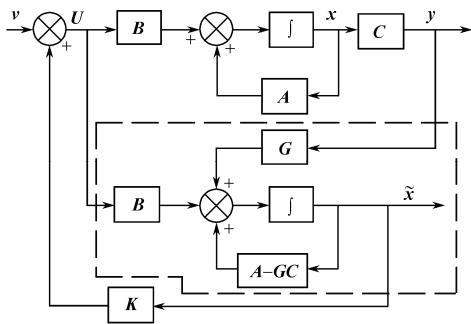


图 5-10 带有全维状态观测器的状态反馈系统

设能控能观的受控系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-60)$$

状态观测器 Σ_G 为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5-61)$$

反馈控制律为

$$u = v + K\hat{x} \quad (5-62)$$

将式(5-62)代入式(5-60)和式(5-61), 整理或直接由结构图得整个闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = GCx + (A - GC + BK)\hat{x} + Bv \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-63)$$

写成矩阵形式为 (A_1, B_1, C_1) , 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-64)$$

这是一个 $2n$ 维的闭环控制系统。

5.5.2 闭环系统的基本特性

1. 闭环极点的分离特性

闭环系统的极点包括 Σ_0 直接状态反馈系统 $\Sigma_k(A+BK, B, C)$ 的极点和观测器 Σ_G 的极点两部分。但二者独立, 相互分离。

设状态估计误差为 $\tilde{x} = x - \hat{x}$, 引入等效变换:

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \quad (5-65)$$

令变换阵为

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = T \quad (5-66)$$

经线性变换后的系统 $(\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 为

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= T^{-1}A_1T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A-GC \end{bmatrix} \\ \bar{B}_1 &= T^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C}_1 &= C_1T = [C \quad 0] \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = [C \quad 0] \end{aligned} \quad (5-67)$$

或者展开成

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + Bv \\ \dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-68)$$

其等效结构如图 5-11 所示。

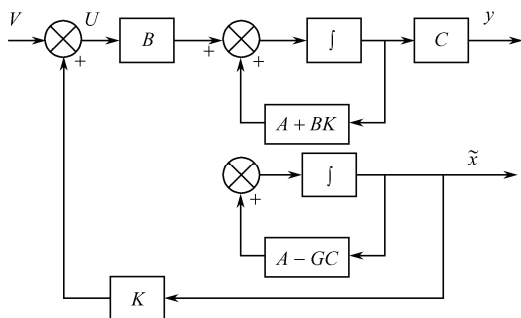


图 5-11 带状态观测器的状态反馈系统的等效结构图

由于线性变换不改变系统的极点，因此，有

$$\begin{aligned}\det[sI - \bar{A}_1] &= \det \begin{bmatrix} sI - (A + BK) & -BK \\ 0 & sI - (A - GC) \end{bmatrix} \\ &= \det[sI - (A + BK)] \cdot \det[sI - (A - GC)]\end{aligned}\quad (5-69)$$

式 (5-69) 表明，由观测器构成状态反馈的闭环系统，其特征多项式等于矩阵 $(A + BK)$ 与矩阵 $(A - GC)$ 的特征多项式的乘积。即闭环系统的极点等于直接状态反馈 $(A + BK)$ 的极点和状态观测器 $(A - GC)$ 的极点总和，而且二者相互独立。因此，只要系统 (A, B, C) 能控能观，则系统的状态反馈阵 K 和观测器反馈阵 G 可分别进行设计。这个性质称为闭环极点设计的分离性。

2. 传递函数矩阵的不变性

这个不变性表示用观测器构成的状态反馈系统和状态直接反馈系统具有相同的传递函数阵。根据分块矩阵的性质可知，对于一个分块矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & T \end{bmatrix}\quad (5-70)$$

若分块 R 和 T 均可逆，则成立

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}ST^{-1} \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}\quad (5-71)$$

利用上式计算 $[sI - \bar{A}_1]^{-1}$ ，可方便地求得 $(\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 的传递函数阵：

$$\begin{aligned}W(s) &= \bar{C}_1 [sI - \bar{A}_1]^{-1} \bar{B}_1 = [C \quad 0] \begin{bmatrix} sI - (A + BK) & -BK \\ 0 & sI - (A - GC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} [sI - (A + BK)]^{-1} & [sI - (A + BK)]^{-1} \cdot BK \cdot [sI - (A - GC)]^{-1} \\ 0 & [sI - (A - GC)]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-72) \\ &= C [sI - (A + BK)]^{-1} B\end{aligned}$$

式(5-72)表明,带观测器状态反馈闭环系统的传递函数阵等于直接状态反馈闭环系统的传递函数阵。或者说,它与是否采用观测器反馈无关,这一点可从图5-13上看的更清楚。实际上,由于观测器的极点已全部被闭环系统的零点相消了,因此,这类闭环系统是不完全能控的。但由于不能控的分状态是估计误差 $\tilde{x}$,所以,这种不完全能控性并不影响系统正常工作。

3. 观测器反馈与直接状态反馈的等效性

由式(5-68)看出,通过选择 G 可使 $(A-GC)$ 的特征值均具有负实部,所以,必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$,因此当 $t \rightarrow \infty$ 时,必有

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK)\hat{x} + Bv \\ y = C\hat{x} \end{cases} \quad (5-73)$$

成立。这就表明,带观测器的状态反馈系统只有当 $t \rightarrow \infty$,进入稳态时,才会与直接状态反馈系统完全等价。但是,可通过选择 G 来加速 $\tilde{x} \rightarrow 0$,即 $\hat{x}$ 渐近于 x 的速度。

5.5.3 带观测器状态反馈系统与带补偿器输出反馈系统的等价性

在工程实际中,往往更关心系统输入和输出之间的控制特性,即传递特性。可以证明,仅就传递特性而言,带观测器的状态反馈系统完全等效于同时带有串联补偿器和反馈补偿器的输出反馈系统,或者说用补偿器可以构成完全等效于观测器反馈的系统。

设带观测器的状态反馈系统如图5-12所示。图中, $\hat{W}_0(s)$ 为受控系统的 Σ_0 传递函数阵, Σ_G^* 为带反馈阵 K 的观测器系统。系统 Σ_G^* 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu \\ \hat{y} = K\hat{x} \end{cases} \quad (5-74)$$

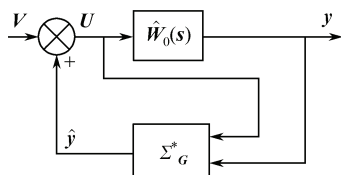


图5-12 带观测器的状态反馈系统

式中 A, B, C ——受控系统 Σ_0 的相应系数矩阵;

$(A - GC)$ ——状态观测器的系数矩阵,其特征值均具有负实部,但与 A 的特征值不相等;

K ——状态反馈矩阵。

将式(5-74)取拉普拉斯变换,可导出 Σ_G^* 的传递特性为

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= K[sI - (A - GC)]^{-1} [GY(s) + BU(s)] \\ &= K[sI - (A - GC)]^{-1} BU(s) + K[sI - (A - GC)]^{-1} GY(s) \end{aligned}$$

或

$$\hat{Y}(s) = W_{G1}^* U(s) + W_{G2}(s) Y(s) \quad (5-75)$$

式中

$$W_{G1}^*(s) = K[sI - (A - GC)]^{-1} B \quad (5-76)$$

$$W_{G2}(s) = K[sI - (A - GC)]^{-1} G \quad (5-77)$$

式(5-75)表明,从传递特性的角度看,观测器等效于两个子系统的并联:一个子系统以 u 为输入,以 $W_{G1}^*(s)$ 为传递函数阵;另一个子系统以 y 为输入,以 $W_{G2}(s)$ 为传递函数阵。由这两个子系统构成的闭环系统结构如图5-13(a)所示。将其变换又可等效于图5-13(b)、(c)。并且成立

$$W_{G1}(s) = [I - W_{G1}^*(s)]^{-1} \quad (5-78)$$

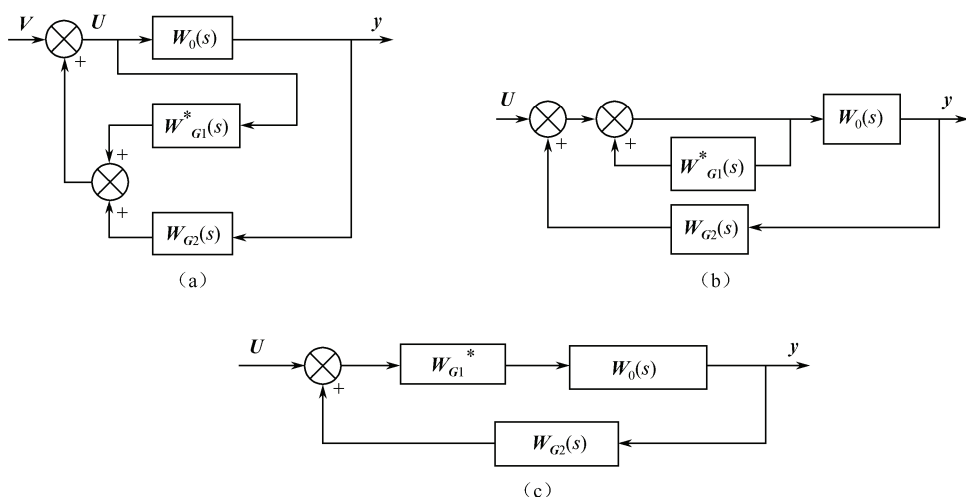


图 5-13 带观测器状态反馈系统传递特性的等效变换

现在来证明 $W_{G1}(s)$ 是物理可实现的。由于

$$\begin{aligned} & [I - W_{G1}^*(s)] \left\{ I + K[sI - (A - GC) - BK]^{-1} B \right\} \\ &= I - K[sI - (A - GC)]^{-1} B + K[sI - (A - GC) - BK]^{-1} B \\ & \quad - K[sI - (A - GC)]^{-1} BK[sI - (A - GC) - BK]^{-1} B \end{aligned} \quad (5-79)$$

及

$$I - [sI - (A - GC)]^{-1} BK = [sI - (A - GC)]^{-1} [sI - (A - GC) - BK] \quad (5-80)$$

得

$$[sI - (A - GC)]^{-1} BK = I - [sI - (A - GC)]^{-1} [sI - (A - GC) - BK] \quad (5-81)$$

将式(5-81)代入式(5-79)可得

$$[I - W_{G1}^*(s)] \left\{ I + K[sI - (A - GC) - BK]^{-1} B \right\} = I \quad (5-82)$$

于是

$$W_{G1}(s) = [I - W_{G1}^*(s)]^{-1} = I + K[sI - (A - GC) - BK]^{-1} B \quad (5-83)$$

式 (5-83) 表明 $W_{G1}(s)$ 是物理可实现的。因而证明, 一个带观测器的状态反馈系统, 在传递特性意义下, 完全等效于一个带串联补偿器和反馈补偿器的输出反馈系统。

两个补偿器的状态空间表达式根据式 (5-77) 和式 (5-83) 得

$$\begin{aligned}\dot{z}_{(2)} &= (A - GC)z_{(2)} + Gu_{(2)} \\ W_{(2)} &= Kz_{(2)}\end{aligned}\quad (5-84)$$

和

$$\begin{aligned}\dot{z}_{(1)} &= (A - GC + BK)z_{(1)} + Bu_{(1)} \\ W_{(1)} &= Kz_{(1)} + u_{(1)}\end{aligned}\quad (5-85)$$

由两个补偿器和 $\Sigma(A, B, C)$ 构成的闭环系统如图 5-14 所示。

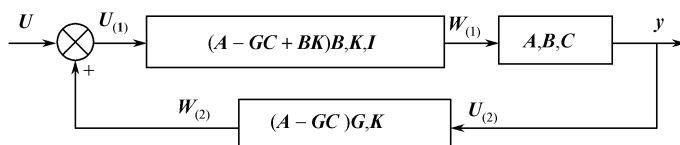


图 5-14 由补偿器构成的闭环系统结构图

闭环系统的状态方程表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw_{(1)} = Ax + BKz_{(1)} + Bu_{(1)} \\ \dot{z}_{(2)} = (A - GC)z_{(2)} + Gu_{(2)} \\ \dot{z}_{(1)} = (A - GC + BK)z_{(1)} + Bu_{(1)} \\ u_{(2)} = y = Cx \\ u_{(1)} = u + w_{(2)} = u + Kz_{(2)} \\ y = Cx \end{cases}\quad (5-86)$$

或写成矩阵形式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_{(2)} \\ \dot{x} \\ \dot{z}_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - GC) & GC & 0 \\ BK & A & BK \\ BK & 0 & (A - GC + BK) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{(2)} \\ x \\ z_{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ B \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{(2)} \\ x \\ z_{(1)} \end{bmatrix} \end{cases}\quad (5-87)$$

令

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -I & I & -I \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = T \quad (5-88)$$

作线性变换得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_{(2)} \\ \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}}_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-GC) & GC & 0 \\ 0 & (A+BK) & -BK \\ 0 & 0 & (A-GC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_{(2)} \\ \tilde{x} \\ \tilde{z}_{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad C \quad 0] \begin{bmatrix} \tilde{z}_{(2)} \\ \tilde{x} \\ \tilde{z}_{(1)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-89)$$

它的传递函数阵为

$$W_z(s) = C[sI - (A+BK)]^{-1}B = W_k(s) \quad (5-90)$$

可见, 从传递特性上看, 补偿器和观测器完全等效。

5.5.4 状态观测器期望特征值的配置原则

在状态观测器的状态反馈系统中, 状态反馈的设计与观测器的设计可以独立进行, 状态反馈系统的特征值按照对系统动态性能指标要求配置, 观测器的特征值要按对观测器动态性能指标要求来配置。通常为保持观测器所估计的状态更加逼近系统的状态, 应使状态观测器的动态过程比原系统的动态过程更快, 为此, 观测器的主导极点负实部通常取为状态反馈主导极点负实部的 2~3 倍。

【例 5-6】 设受控系统的状态方程 $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0]x \end{cases}$, 试设计实现上述反馈的全

维观测器 (设其极点为 -10 、 -10), 构成状态反馈系统, 将闭环系统极点配置为 $-4 \pm j6$ 。

解 (1) 判断能控性、能观性。

由已知的能控标准型可知系统是完全能控的, 直接写出对应的传递函数 $W(s) = \frac{1}{s(s+6)}$,

可知系统是能观的, 因而存在状态反馈及状态观测器。根据分离特性分别进行系统设计。

(2) 设计状态反馈阵 K 。

令 $K = [k_1 \quad k_2]$, 得对应闭环系统特征多项式

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (A + bK)] = \lambda^2 + (6 + k_2)\lambda + k_1$$

期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 4 - j6)(\lambda + 4 + j6) = \lambda^2 + 8\lambda + 52$$

比较得

$$K = [52 \quad 2]$$

(3) 设计全维观测器。

令 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, 得观测器特征多项式

$$\det[\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{c})] = \lambda^2 + (6 + g_1)\lambda + (6g_1 + g_2)$$

与期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

比较得

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

全维观测器方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{b}u \\ &= \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & 6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

习 题

5-1 已知系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \ 0 \ 1]\mathbf{x} \end{cases}$$

试设计一状态反馈使闭环系统极点配置为-1、-2 和-4。

5-2 设系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \ 0 \ 1]\mathbf{x} \end{cases}$$

试设计一状态反馈阵, 将其极点配置为-10、-1 和-2。是否可通过观测器重构系统状态?

5-3 有系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [1 \ 0]\mathbf{x} \end{cases}$$

- (1) 画出模拟结构图。
- (2) 若动态性能不满足要求, 可否通过状态反馈任意配置极点?
- (3) 若指定极点为-3、3, 求状态反馈阵。

5-4 设系统的传递函数为

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问可否利用状态反馈将其传递函数变成

$$\frac{s+2}{(s+4)(s+5)}$$

若有可能, 试求状态反馈阵, 并画出系统结构图。

5-5 试判断下列系统通过状态反馈能否镇定。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5-6 设系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

(1) 系统是否稳定?

(2) 能否通过状态反馈镇定? 若能, 试设计状态反馈使之稳定。

5-7 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] x \end{cases}$$

试设计一全维状态观测器, 使观测器的极点为 $-1, -2$ 。

5-8 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] x \end{cases}$$

设状态变量 x_2 不能测取, 试设计观测器重构 x_2 , 使观测器极点为 -3 。

5-9 已知系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

设计一全维观测器，使观测器极点为-4、-5 和-1。画出模拟结构图。

第6章 最优控制

在古典控制理论中，设计控制系统的各种方法大多建立在试凑的基础上，设计结果与设计人员的经验有很大关系，因此，这些方法存在很大的局限性。另外，对于多输入-多输出系统，或者要求高控制精度的复杂系统，这些设计方法往往不能得到令人满意的控制效果，迫切需要探索新的设计方法。20 世纪 60 年代初，由于空间技术的迅猛发展和计算机技术在控制领域的广泛应用，系统控制的优化理论得到了迅速发展，形成了最优控制这一重要的学科分支，受到了广泛的重视，并在控制工程、经济管理与决策及人口控制等领域得到了成功的应用，取得了显著的成效。本章将介绍最优控制的基本原理和常用方法。

6.1 最优控制的一般概念

6.1.1 最优控制的基本概念

最优控制的目的是使系统的某种性能指标达到最佳。因此，最优控制研究的主要问题是，根据已建立的被控对象的数学模型，选择一个容许的控制律，使得被控对象按预定要求运行，并使给定的某一性能指标达到最佳。对于不同的系统有不同的要求，对于同一系统，也可能有不同的要求。例如，在机床加工中可要求加工成本最低为最优；在导弹飞行控制中可要求燃料消耗最少为最优；在截击问题中可选时间最短为最优等。因此，最优是以选定的性能指标最优为依据的。

6.1.2 最优控制问题

一般来讲，达到一个目标的控制方式很多，但实际上在经济、时间、环境、制造等方面有各种限制，因此，可实行的控制方式是有限的。当需要实行具体控制时，有必要选择某一控制方式。考虑这些情况，引入控制的性能指标概念，使这种指标达到最优值（指标可以是极大值或极小值）就是一种选择方法。这样的问题就是最优控制问题。但一般来讲，不是把经济、时间等方面的要求全部表示为这种性能指标，而是把其汇总的一部分用这种指标来表示，其余部分用系统工作范围中的约束来表示。

例如，1969 年美国阿波罗 11 号实现了人类历史上的首次载人登月飞行，任务要求登月舱在月球表面实现软着陆，即登月舱到达月球表面时的速度为零，并在登月过程中，选择登月舱发动机推力的最优控制律，使燃料消耗最少，以便航天员到达月球完成考察任务后，登月舱有足够的燃料离开月球与母船会合，从而安全返回地球。由于登月舱发动机的

最大推力是有限的, 因而这是一个控制有闭集约束的最小燃耗控制问题。设登月舱软着陆示意图如图 6-1 所示。

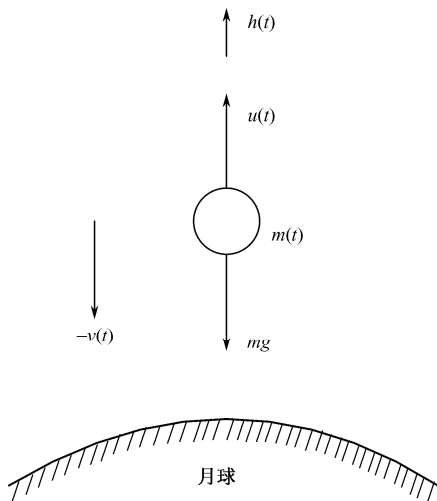


图 6-1 登月舱软着陆示意图

图中, $m(t)$ 为登月舱质量; $h(t)$ 为高度; $v(t)$ 为登月舱垂直速度; g 为月球重力加速度; $u(t)$ 为登月舱发动机推力。设登月舱不含燃料时的质量为 M , 登月舱所载燃料质量为 F , 登月舱发动机的末端时刻为 t_f , 发动机最大推力为 $u_{\max}$ 。已知登月舱登月时的初始高度为 h_0 , 初始垂直速度为 v_0 , 初始质量为 m_0 , 则控制有约束的最小燃耗控制问题可归纳如下:

运动方程

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} - g \end{cases} \quad (6-1)$$

边界条件

$$\dot{m}(t) = -ku(t), \quad k = \text{const}$$

初始条件

$$h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = m_0 = M + F$$

末端条件

$$h(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0$$

控制约束

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (6-2)$$

性能指标

$$J = m(t_f) \quad (6-3)$$

最优控制的任务是在满足控制约束条件下, 寻求发动机推力的最优变化律 $u^*(t)$, 使登月舱由已知初态转移到要求的末态, 并使性能指标 $J = m(t_f) = \max$, 从而使登月过程中燃料消耗量最小。

又如钢铁冶炼液压控制过程中,利用伺服电动机驱动液压缸进行工作。在控制过程中,要求液压缸有一定工作行程,从而要求伺服电动机从静止状态启动,转过一定角度后停止。在运动过程中,要求选择最优控制律,使电枢绕组上的损耗最小,则控制有约束的最小损耗控制问题可归纳如下。

电枢控制的直流电动机的动态方程为

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_L = C_M I_a \quad (6-4)$$

式中, M_L 为恒定复杂转矩; J 为转动惯量; I_a 为电枢电流; ω 为电动机的角速度; C_M 为转矩系数。

根据控制要求,考虑电动机在 t_f 时间内,从静止状态启动,转过一定的角度 θ_a 后停止,即

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(t_f) = 0, \quad \int_{t_0}^{t_f} \omega dt = \theta_a \quad (6-5)$$

在时间 $[0, t_f]$ 内,使电枢绕组上的损耗最小的最优控制问题性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} R I_a^2 dt \quad (6-6)$$

式中, R 为绕组电阻。

综上所述,将上述最优控制问题写成状态空间描述。

设状态变量 $x_1 = \theta$, $x_2 = \omega$, 则状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (6-7)$$

式中

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_M / J \end{bmatrix}; \quad u(t) = I_a - \frac{M_L}{C_M}。$$

初始状态和终点状态给定为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_1(t_f) &= 0 \\ x_2(0) &= 0, & x_2(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

状态变化量满足

$$\int_{t_0}^{t_f} x_2 dt = \theta_a \quad (6-8)$$

最优控制的目标是在满足控制约束条件下,寻求电动机的最优变化律 $u^*(t)$,使转速由已知初态转移到要求的末态,并使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} R \left[u(t) + \frac{M_L}{C_M} \right]^2 dt = \min \quad (6-9)$$

从而使电枢绕组损耗量最小。

上述最优控制表明,一个典型最优控制问题可以用如下的数学形式统一表达。

已知控制的最优性能指标为

$$J = \varphi[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-10)$$

附加约束为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6-11)$$

对应的边界条件（如给定的初始和终止条件等）为

$$\Psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (6-12)$$

即最优控制问题可用下列泛函形式表示：

$$\begin{cases} \min/\max_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} J = \varphi[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \\ \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \Psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \end{cases} \quad (6-13)$$

式中， Ω 是容许控制域。

需要指出，性能指标 J 在控制系统设计中又称为损失函数，在数学上称为泛函。通常，在实际系统中，特别是在工程项目中，损失函数的确定很不容易，需要多次反复。性能指标 J 是一个标量，在最优控制中它代替了传统的设计指标，如最大超调量、阻尼比、相位裕度等。适当选择性能指标，使系统设计符合物理上的标准，即性能指标既要系统做有意义的估价，又要使数学处理简单，这就是对于给定的系统很难选择一个合适的性能指标的原因，尤其是对于复杂系统，更是如此。最优控制系统的控制要求和性能指标之间的形式密切相关，因此，性能指标具有几种公式化的常用标准形式。

1) 积分型性能指标

数学描述为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-14)$$

积分型性能指标表示在整个控制过程中，系统的状态及控制应该满足的要求。如最优控制中常见的最短时间控制问题，其性能指标可表示为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (6-15)$$

还有最小能量控制问题、最小燃料控制问题、线性调节器问题、线性伺服问题等。

2) 末值型性能指标

数学描述为

$$J = \varphi[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (6-16)$$

其中末端时刻可以固定，也可自由。末值型性能指标表示在控制过程结束后，对系统末态 $\mathbf{x}(t_f)$ 的要求，例如，要求导弹的脱靶量最小，而对控制过程中的系统状态和控制不做任何要求。

3) 复合型性能指标

数学描述见式 (6-10)。复合型性能指标是最一般的性能指标形式，表示对整个过程和末端状态都有要求。

6.2 无约束最优控制的变分方法

从数学的观点看, 最优控制研究的是求解一类带有约束条件的泛函极值问题, 属于变分学的范畴。当控制作用不受约束时, 即容许控制属于开集的一类最优控制问题时, 其求解的数学基础为经典变分理论。

6.2.1 经典变分理论

无约束最优控制的提法如下。

已知受控系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-17)$$

在 $[t_0, t_f]$ 范围内有效。式中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态矢量; $\mathbf{u}$ 为 r 维控制矢量。这是等式约束。给定初端和终端的一种情况: 始点和终点的时间固定, 状态自由。

要求确定控制作用 $\mathbf{u}(t)$, 使性能指标

$$J = \varphi[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-18)$$

达到极小值。

由上述最优控制的提法知, 约束方程为状态方程, 所以, 现在的问题成为有约束条件的泛函极值问题, 即在状态空间中, 在曲面上找出极值曲线。求解的一种方法是先解状态方程, 求出 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 再将其代入 J 中求解, 此法很繁。另一种方法是组成新的泛函 J' , 求考虑约束的极值问题, 即拉格朗日乘子法, 它的具体步骤如下:

(1) 用一个矢量拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}(t)$, 将约束 (即系统的状态方程) 加到原来的性能指标 J 中去, 得到新的性能指标 J' 为

$$J' = \varphi[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}] \right\} dt \quad (6-19)$$

(2) 定义一个标量函数

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \Phi[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6-20)$$

称它为哈密顿 (Hamilton) 函数。由此新的性能指标为

$$J' = \varphi[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \right\} dt \quad (6-21)$$

(3) 对 J' 的最后一项进行分部积分

$$\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{x}(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{x}(t) dt \quad (6-22)$$

因此

$$J' = \left\{ \varphi[\mathbf{x}(t), t] - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{x}(t) \right\} \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{x}(t) \right\} dt \quad (6-23)$$

(4) 求 J 对控制矢量及状态矢量的一次变分, 并利用内积可换位性质 (为方便, 以下用 J 代替 J'), 有

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \delta x = \delta x^T \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) \quad (6-24)$$

得

$$\begin{aligned} \delta J &= \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^T \delta u = \delta x^T \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) + \delta u^T \left(\frac{\partial J}{\partial u}\right) \\ &= \left\{ \delta x^T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \right] \right\} \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \delta x^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right] + \delta u^T \frac{\partial J}{\partial u} \right\} dt \end{aligned} \quad (6-25)$$

(5) 因为极小值存在的必要条件是 J 对变分 δx 、 δu 的一次变分为零, 所以令

$$\delta J = 0 \quad (6-26)$$

得到

$$\begin{cases} \delta x^T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \right] \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 & \text{贯截方程} \\ \dot{x} = f(x, u, t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} & \text{系统方程} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} & \text{伴随方程} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 & \text{控制方程} \end{cases} \quad (6-27)$$

以上四个方程, 称为控制作用不受约束的庞特里亚金方程。

(6) 极小值存在的充分条件是, 沿着满足 $\dot{x} = f(x, u, t)$ 的一切轨线, J 的二次变分必须非负。取 $\Delta J = J(x + \delta x, u + \delta u) - J(x, u)$ 的台劳级数展开式的二次项为 J 的二次变分, 有一次变分

$$\delta J = \left\{ \delta x^T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \right] \right\} \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \delta x^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right] + \delta u^T \frac{\partial J}{\partial u} \right\} dt \quad (6-28)$$

二次变分

$$\begin{aligned} \delta^2 J &= \frac{1}{2} (\delta J)' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right) \delta x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial u} \right) \delta x \delta u + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial u^2} \right) \delta u^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta x^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta x \right] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta x^T \quad \delta u^T \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right]^T & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (6-29)$$

如果

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right]^T & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6-30)$$

半正定, 及

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \geq 0 \quad (6-31)$$

半正定, 则 $\delta^2 J$ 为非负值, 即上述两个半正定条件为 J 极小的充分条件。

由庞特里亚金方程知, 初端与终端的各种不同情况都将影响贯截方程, 即贯截条件, 这一点是较难掌握的。

6.2.2 贯截条件

前面研究的两端固定, 且初始时刻 t_0 和末端时刻 t_f 同时固定的情况, 是一种最简单的情况。在实际工程问题中, 初始时刻 t_0 和初始状态 $x(t_0)$ 往往是固定的, 但末端时刻 t_f 可以固定, 也可以自由, 末端状态 $x(t_f)$ 可以固定, 也可以自由, 也可以受约束。下面将讨论 t_f 固定和 t_f 自由时的两种贯截条件。

1. t_f 固定时的贯截条件

始点时间、状态固定及终点时间固定、状态自由时, 相应的新泛函指标为

$$J = \varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \Phi[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}(t)] \right\} dt \quad (6-32)$$

因为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 固定, 所以 $\delta \mathbf{x}(t_0) = 0$, 而 $\delta \mathbf{x}(t_f)$ 是完全任意的, 则由前面推导出的贯截方程

$$\delta \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda} \right] \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (6-33)$$

得到贯截条件为

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (6-34)$$

2. t_f 不固定时的贯截条件

系统的始点时间与状态都固定, 终点状态固定而时间不固定时, 因为 $\delta \mathbf{x}(t_0)$ 和 $\delta \mathbf{x}(t_f)$ 都为 0, 没有选择的余地, 所以, 始点与终点的状态对性能指标极小化不产生影响, 于是 J 中便没有末值项了, 即

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-35)$$

由于 $\varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$, 可得贯截条件方程为

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{a} \quad (6-36)$$

式中, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$ 为待定常数乘子。

6.3 有约束最优控制的极小值原理

应用经典变分法求解最优控制问题时, 要求控制矢量不受任何约束, 而且要求哈密尔顿函数对控制矢量连续可微分。但是, 在实际工程问题中, 控制变量往往受到一定的限制。例如, 高性能飞机的舵偏角一般不超过 $\pm 5^\circ$; 又如, 采用空气舵的地空战术导弹, 容许的最大偏舵角一般不超过 $\pm 20^\circ$ 。这就使得飞机和导弹的控制力矩受到一定的限制, 容许控制集形成一个有界闭集, 在容许控制集边界上, 控制变分 δu 不能任意, 最优控制的必要条件 $\partial H / \partial u = 0$ 也不满足。

为了解决控制有约束的变分问题, 庞特里亚金提出并证明了极小值原理, 其结论与经典变分法的结论有许多相似之处, 能够应用于控制变量受边界限制的情况, 并且不要求哈密尔顿函数对控制矢量连续可微分, 因此, 获得了广泛应用。

考虑如下定常系统、积分型性能指标、末端自由、控制受约束的最优控制问题:

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \\ \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (6-37)$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in R^n$; $\mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m$ 为任意分段连续函数; Ω 为容许控制域; 末端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 自由; 末端时刻 t_f 固定或自由。

极小值原理指出, 在上述条件下, 使 J 达到极小值的容许控制 $\mathbf{u}(t) \in \Omega, t \in [t_0, t_f]$ 是存在的, 其必要条件为

定义哈密尔顿函数

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6-38)$$

则有

(1) 正则方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6-39)$$

(2) 边界条件和贯截条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \text{ 为待定常数乘子}) \quad (6-40)$$

(3) 极小值条件

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \min_{\mathbf{u} \in \Omega} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] \quad (6-41)$$

式 (6-41) 的含义是, 在控制时间 $t \in [t_0, t_f]$ 内, 若 $\mathbf{u}^*(t)$ 是最佳控制, 由它构成的哈密尔顿函数 H , 是控制作用 $\mathbf{u}(t)$ 在容许空间 Ω 中构成所有的哈密尔顿函数 H 中的一个最小值。

前面叙述了极小值原理的含义, 其证明可参考相关文献, 此处略。

与上一节的变分法相比, 极小值原理的重要意义有如下几个方面:

(1) 容许控制条件放宽了。极小值条件对通常的控制约束均适用。

(2) 最优控制是哈密尔顿函数取全局极小值。当满足经典变分法的应用条件时, 其极值条件 $\partial H / \partial u = 0$ 是极小值原理中极小值条件 $H^* = \min_{\mathbf{u} \in \Omega} H$ 的一种特例。

(3) 极小值原理不要求哈密顿函数对控制矢量的可微性, 因而扩大了应用范围。

(4) 极小值原理给出的是最优解的必要而非充分条件。如果有实际工程问题的物理意义可以判断解是存在的, 而由极小值原理求出的控制又是唯一的, 则该控制为要求的最优控制。实际遇到的工程问题往往属于这种情况。

【例 6-1】 设一阶系统方程为

$$\dot{x}(t) = x(t) - u(t), x(0) = 5$$

其中控制约束: $0.5 \leq u(t) \leq 1$ 。试求使性能指标

$$J = \int_0^1 [x(t) + u(t)] dt$$

为极小值的最优控制 $u^*(t)$ 及最优轨线 $x^*(t)$ 。

解 本例为定常系统、积分型性能指标、 t_f 固定、末端自由、控制受约束的最优控制问题。令哈密顿函数

$$H = x + u + \lambda(x - u) = x(1 + \lambda) + u(1 - \lambda)$$

由于 H 是 u 的线性函数, 根据极小值原理知, 使 H 绝对极小就相当于使性能指标极小, 因此要求 $u(1 - \lambda)$ 极小。因 u 的取值上限为 1, 下限为 0.5, 故应取

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \lambda > 1 \\ 0.5, & \lambda < 1 \end{cases}$$

由协态方程

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda)$$

其解为 $\lambda(t) = ce^{-t} - 1$, 其中, 常数 c 待定。

由贯截条件

$$\lambda(1) = ce^{-1} - 1 = 0$$

求出 $c = e$ 。于是

$$\lambda(t) = e^{1-t} - 1$$

显然, 当 $\lambda(t_s) = 1$ 时, $u^*(t)$ 产生切换, 其中, t_s 为切换时间。令 $\lambda(t_s) = e^{1-t_s} - 1 = 1$, $t_s = 0.307$, 故最优控制

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

将 $u^*(t)$ 代入状态方程, 有

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} x(t) - 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ x(t) - 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

解得

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^t + 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ c_2 e^t + 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

代入 $x(0) = 5$, 求出 $c_1 = 4$, 因而

$$x^*(t) = 4e^t + 1, \quad 0 \leq t < 0.307$$

在上式中, 令 $t=0.307$, 可以求出 $0.307 \leq t \leq 1$ 时 $x(t)$ 的初态 $x(0.307)=6.44$, 从而求得 $c_2=4.37$ 。于是, 最优轨线为

$$x^*(t) = \begin{cases} 4e^t + 1, & 0 \leq t < 0.307 \\ 4.37e^t + 0.5, & 0.307 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

本例最优解曲线如图 6-2 所示。

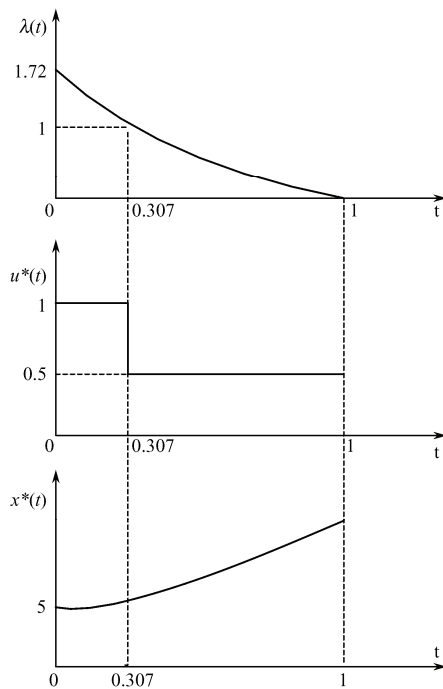


图 6-2 最优解响应曲线

6.4 线性二次型调节问题的最优控制

在现代控制理论中, 如果所研究的系统是线性的, 且性能指标为状态变量和控制变量的二次型函数, 则最优控制问题称为线性二次型问题。它是最优控制理论中的一个重要问题。由于利用变分法建立起来的无约束最优控制方法对线性二次型问题的最优解具有统一的解析表达式, 且可导致一个简单的状态反馈控制律, 易于构成闭环最优反馈控制, 便于工程实现, 因而在实际工程中得到了广泛应用。

6.4.1 线性二次型调节问题

给定 n 阶线性时变系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-42)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right\} dt \quad (6-43)$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$, 无约束; $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$ 为适当维数的时变矩阵, 其各元连续且有界; $\mathbf{S}, \mathbf{Q}(t)$ 是对称非负定矩阵, $\mathbf{R}(t)$ 对称正定; t_0 及 t_f 固定。要求确定 $\mathbf{u}^*(t)$, 使性能指标 J 最小。

在二次型性能指标中, 其各项都有明确的物理意义。式 (6-43) 右端第一项是末值项, 实际上它是对终端状态提出一个符合需要的要求, 表示给定的控制终端时刻 t_f 到来时, 系统的终态 $\mathbf{x}(t_f)$ 接近预定终态的程度。这一项对于控制大气层外导弹的拦截、飞船的会合等问题是很重要的。

式 (6-43) 右侧积分项是一项综合指标。积分中的第一项表示对所有的 $t \in [t_0, t_f]$ 对状态 $\mathbf{x}(t)$ 的要求, 用它来衡量整个控制期间系统的实际状态与给定状态之间的综合误差, 类似于古典控制理论中给定参考输入与被控制量之间的误差的平均积分, 这一积分项越小, 说明控制的性能越好。积分的第二项是对控制总能量的限制, 如果仅要求控制误差尽量小, 则可能造成求得的控制矢量 $\mathbf{u}(t)$ 过大, 控制能量消耗过大, 甚至在实际上难以实现。实际上, 上述两个积分项是互相制约的, 要求控制状态的误差平均积分减小, 必然导致控制能量的消耗增大; 反之, 为了节省控制能量, 就不得不降低对控制性能的要求。求两者之和的极小值, 实际上是求取在某种最优意义下的折中, 这种折中侧重哪一方面, 取决于加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\mathbf{R}(t)$ 的选取。如果重视控制的准确性, 则应增大加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 的各元, 反之则应增大加权矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 的各元。 $\mathbf{Q}(t)$ 中的各元体现了对 $\mathbf{x}(t)$ 中各分量的重视程度, 如果 $\mathbf{Q}(t)$ 中有些元素等于零, 则说明对 $\mathbf{x}(t)$ 中对应的状态分量没有任何要求, 这些状态分量往往对整个系统的控制性能的影响较微小, 由此也能说明加权矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 为什么可以是正定或非负定对称矩阵。因为对任一控制分量所消耗的能量都应限制, 又因为计算中需要用到矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 的逆矩阵, 所以, $\mathbf{R}(t)$ 必须是正定对称矩阵。

常见的二次型性能指标最优控制分为两类, 即线性调节器和线性伺服器, 它们在实际中已得到了广泛的应用。由于二次型性能指标最优控制的突出特点是其线性的控制规律, 即其反馈控制作用可以做到与系统状态的变化成比例, 即 $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ (实际上, 它是采用状态反馈的闭环控制系统), 因此, 这类控制易于实现, 也易于驾驭, 是很引人注意的一个课题。

1. 线性调节器问题

如果施加于控制系统的参考输入不变, 当被控对象的状态受到外界干扰或受到其他因素影响而偏离给定的平衡状态时, 就要对它加以控制使其恢复到平衡状态, 这类问题称为调节器问题。

2. 线性伺服器问题

对被控对象施加控制, 使其状态按照参考输入的变化而变化, 这就是伺服器问题。

从控制性质看以上两类问题, 虽然有差异, 但在寻求最优控制的问题上, 它们有许多一致的地方。

这两类问题，又可根据要求的性能指标不同，分为两种情况：

(1) 终端时间有限 ($t_f \neq \infty$) 的最优控制。因为所给控制时间 $t_0 \rightarrow t_f$ 是有限的，这就限制了终端状态完全进入终端稳定状态，所以，终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 可以是自由的，也可以是受限制的，往往不可能要求 $\mathbf{x}(t_f)$ 完全固定。此外，该问题中性能指标应该有末值项，因为积分项上限 t_f 是有限的。

(2) 终端时间无限 ($t_f \rightarrow \infty$) 的最优控制。当终端时间 $t_f \rightarrow \infty$ 时，终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 进入给定的终端稳定状态 $\mathbf{x}_f$ ，所以，性能指标中不应有末值项，此时积分项上限 t_f 为 ∞ 。

6.4.2 终端时间有限时变状态调节器

设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6-44)$$

给定初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ，寻求最优控制 $\mathbf{u}(t)$ ，使性能指标

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right\} dt \quad (6-45)$$

达到极小值。

由于控制矢量 $\mathbf{u}(t)$ 不受约束，故可用变分法原理解。

引入 n 维拉格朗日乘子矢量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ ，构建哈密顿函数

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] \quad (6-46)$$

则实现最优控制的条件如下：

(1) 正则方程组

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \partial H / \partial \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6-47)$$

协态方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\partial H / \partial \mathbf{x}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-48)$$

(2) 极值条件

$$\partial H / \partial \mathbf{u}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad (6-49)$$

(3) 贯截条件

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) \right] = \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) \quad (6-50)$$

(4) 初始条件

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad (6-51)$$

由式 (6-49) 得

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-52)$$

设

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (6-53)$$

式中, $\mathbf{P}(t)$ 为待求的时变矩阵。则有

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (6-54)$$

式中, $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ 为反馈增益矩阵。

由于 $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ 均为已知, 所以, 求最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 的问题就归结为求解矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 。

对式 (6-53) 中 t 求导, 并将式 (6-47) 及式 (6-54) 代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] \\ &= [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6-55)$$

将式 (6-53) 代入式 (6-48), 有

$$\dot{\lambda}(t) = [-\mathbf{Q}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (6-56)$$

令式 (6-55) 与式 (6-56) 相等, 可得

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (6-57)$$

式 (6-57) 为 $n \times n$ 维非线性矩阵微分方程, 称为黎卡提 (Riccati) 方程。

当 $t = t_f$ 时, 式 (6-53) 可写为

$$\lambda(t_f) = \mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}(t_f) \quad (6-58)$$

比较式 (6-50) 和式 (6-58), 可得黎卡提方程的边界条件, 为

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \quad (6-59)$$

由此可见, $\mathbf{P}(t)$ 是以式 (6-59) 为边界条件的黎卡提微分方程的解。已经证明, 对 $\forall t \in [t_0, t_f]$, $\mathbf{P}(t)$ 为对称矩阵, 对于一切 $t \in [t_0, t_f]$, $\mathbf{P}(t)$ 为非负定矩阵。由于 $\mathbf{P}(t)$ 是一个对称矩阵, 所以, 实际上只需解 $n(n+1)/2$ 个一阶微分方程, 便可确定 $\mathbf{P}(t)$ 的所有元素。

黎卡提方程是一个非线性微分方程, 虽然有一些求解方法, 但却相当繁琐, 只是在方程形式很简单, 才能求得解析形式的解, 大多数情况下只能通过计算机求其数值解。

进一步证明, 当按式 (6-54) 决定最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 后, 闭环系统是渐近稳定的。因为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}] &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{x}^T [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - 2\mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6-60)$$

由式 (6-57) 可得

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}] = \mathbf{x}^T [-\mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)] \mathbf{x} \quad (6-61)$$

已知 $\mathbf{R}$ 是正定矩阵, $\mathbf{Q}(t)$ 是半正定矩阵, 因此, 式 (6-61) 右端必永远为负。可用由黎卡提方程求得的矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 所构成的函数 $\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}$ 作为线性调节器的李雅普诺夫函数。由李雅普诺夫第二法知, $\mathbf{P}(t)$ 是一个正定矩阵, $\frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}]$ 永远为负, 可见由线性调节器构成的闭环系统是一个渐近稳定的系统。

还可以进一步证明, 当按式 (6-54) 决定最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 后, 则系统的最优性能指标为

$$J^*[\mathbf{x}(t), t] = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)_0 \quad (6-62)$$

【例 6-2】 二阶系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

二次性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u^2(t) \} dt$$

试求使系统的性能指标 J 为极小值的最优控制。

解 本题为定常线性系统。根据式 (6-54)，最优控制为

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &= -2p_{12}(t)x_1(t) - 2p_{22}(t)x_2(t) \end{aligned}$$

矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 满足黎卡提微分方程 (6-57)，即

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} = 0$$

或

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{p}_{11}(t) & \dot{p}_{12}(t) \\ \dot{p}_{21}(t) & \dot{p}_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据黎卡提方程的边界条件式 (6-59)，当 $t_f = 3$ 时，有

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11}(3) & \dot{p}_{12}(3) \\ \dot{p}_{21}(3) & \dot{p}_{22}(3) \end{bmatrix} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

黎卡提方程可分解为 3 个微分方程和相应的边界条件为

$$\begin{cases} \dot{p}_{11}(t) = 2p_{11}(t) - 2 \\ \dot{p}_{12}(t) = -p_{11}(t) + 2p_{12}(t)p_{22}(t) - 1 \\ \dot{p}_{22}(t) = -2p_{12}(t) + 2p_{22}^2(t) - 4 \\ p_{11}(3) = 1 \\ p_{12}(3) = 0 \\ p_{22}(3) = 2 \end{cases}$$

解此微分方程，则可得 $p_{11}(t), p_{12}(t), p_{22}(t)$ 。将 $p_{12}(t)$ 和 $p_{22}(t)$ 代入 $u^*(t)$ 的表达式，即可求得最优控制。显然，由于微分方程组的非线性，故不能直接求得其解析解，而只能利用计算机求得其数值解。

根据式 (6-54)，系统的反馈增益矩阵为

$$K(t) = R^{-1} B^T P(t) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$= 2p_{12}(t) + 2p_{22}(t)$$

本例中, 虽然矩阵 A, B, Q, R 均为常数矩阵, 但系统的最优控制的反馈增益仍然是时变的。

【例 6-3】 设被控对象的状态方程是

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

试求最优控制, 使性能指标

$$J = \frac{1}{2} S \mathbf{x}^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^2(t) + \mathbf{u}^2(t)] dt$$

为最小值。

解 根据式 (6-57) 的黎卡提矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}^2(t) - 2a\mathbf{P}(t) - 1$$

它是非线性标量微分方程。将黎卡提方程中的变量 t 用 τ 代换, 分离变量后, 对等式两端积分, 积分的下限为 t 及 $\mathbf{P}(t)$, 上限为终端时间 t_f 及 $\mathbf{P}(t_f)$, 则有

$$\int_{\mathbf{P}(t)}^{\mathbf{P}(t_f)} \frac{d\mathbf{P}(\tau)}{\mathbf{P}^2(\tau) - 2a\mathbf{P}(\tau) - 1} = \int_t^{t_f} dt$$

考虑到终端贯截条件

$$\mathbf{P}(t_f) = S$$

所以, 又可写成

$$\int_{\mathbf{P}(t)}^S \frac{d\mathbf{P}(\tau)}{\mathbf{P}^2(\tau) - 2a\mathbf{P}(\tau) - 1} = \int_t^{t_f} dt$$

将等式左侧被积函数的分母分解因式, 再写成部分分式, 则可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{P}(t)}^S \frac{d\mathbf{P}(\tau)}{\mathbf{P}^2(\tau) - 2a\mathbf{P}(\tau) - 1} &= \int_{\mathbf{P}(t)}^S \frac{-\frac{1}{2b} d\mathbf{P}(\tau)}{\mathbf{P}(\tau) - (a+b)} - \int_{\mathbf{P}(t)}^S \frac{\frac{1}{2b} d\mathbf{P}(\tau)}{\mathbf{P}(\tau) - (a-b)} \\ &= +\frac{1}{2b} \ln \frac{[\mathbf{P}(t) - (a+b)][S - (a-b)]}{[\mathbf{P}(t) - (a-b)][S - (a+b)]} = t_f - t \end{aligned}$$

式中, $b = \sqrt{a^2 + 1}$ 。

或写成

$$e^{-2b(t_f-t)} = \frac{[\mathbf{P}(t) - (a+b)][S - (a-b)]}{[\mathbf{P}(t) - (a-b)][S - (a+b)]}$$

经整理得

$$\mathbf{P}(t) = \frac{(a+b) + (a-b) \frac{[S - (a+b)]}{[S - (a-b)]} e^{-2b(t_f-t)}}{1 - \frac{[S - (a+b)]}{[S - (a-b)]} e^{-2b(t_f-t)}}$$

将求得的 $\mathbf{P}(t)$ 代入下式, 得最优控制

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

于是系统的最优轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 是下面标量时变微分方程的解, 即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{a} - \mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

或写成

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_0 e^{\int_0^t [\mathbf{a} - \mathbf{P}(t)] dt}$$

对黎卡提方程所解的 $\mathbf{P}(t)$ 进行分析, 得

当 $a = -1$, $b = 2$, $S = 0$ 时, 有

$$\mathbf{P}(t) = \frac{(\sqrt{2}-1) + (1-\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}(t_f-t)}}{1 - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}e^{-2\sqrt{2}(t_f-t)}}$$

当 $a = -1$, $b = 2$, $S = 1$ 时, 有

$$\mathbf{P}(t) = \frac{(\sqrt{2}-1) + (1+\sqrt{2})\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}e^{-2\sqrt{2}(t_f-t)}}{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}e^{-2\sqrt{2}(t_f-t)}}$$

在图 6-3 中画出了当 $t_f = 1, 4, 9$ 时, 对应于 $S = 0$ 与 $S = 1$ 的几何图形。

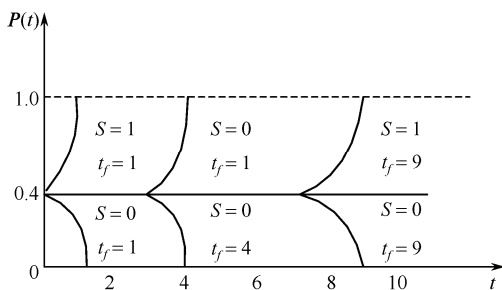


图 6-3 不同 S 的解

由图 6-3 可见:

(1) 当 $t = t_f$, 即当终端时间有限时, $\mathbf{P}(t_f)$ 由黎卡提方程的终端条件决定。事实上

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \mathbf{P}(t) = \lim_{t \rightarrow t_f} \frac{(a+b) + (a-b) \frac{[S-(a+b)]}{[S-(a-b)]} e^{-2b(t_f-t)}}{1 - \frac{[S-(a+b)]}{[S-(a-b)]} e^{-2b(t_f-t)}} = S$$

(2) 当 $t \rightarrow \infty$, 即当终端时间无限时, $\mathbf{P}(t_f)$ 趋于稳态值, 这是因为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a+b) + (a-b) \frac{[S-(a+b)]}{[S-(a-b)]} e^{-2b(t_f-t)}}{1 - \frac{[S-(a+b)]}{[S-(a-b)]} e^{-2b(t_f-t)}} = a+b = \sqrt{2}-1$$

这一点很重要, 它说明了黎卡提方程的解 $\mathbf{P}(t)$ 的一个重要性质, 这时黎卡提矩阵微分方程退化为黎卡提矩阵代数方程, 即

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (6-63)$$

6.4.3 终端时间无限状态调节器

由例 6-3 可知, 当终端时间 t_f 趋于无穷时, $P(t)$ 将趋于某常数, 即 $P(t)$ 可视为常数, 从而最优反馈时变系统随之转化为最优控制定常系统, 这样就得到无限时间状态调节器。

设线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-64)$$

给定初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 寻求最优控制 $\mathbf{u}(t)$, 使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-65)$$

达到极小值。其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ 。

可以证明, 最优控制存在且唯一, 即

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (6-66)$$

式中, $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, $\mathbf{P}$ 为 $n \times n$ 维正定常数矩阵, 满足黎卡提矩阵代数方程 (6-63), 该黎卡提方程的解实际上是黎卡提矩阵微分方程 (6-57) 的稳态解。因此, 问题最终归结到解黎卡提方程 (6-63)。

适用于线性定常系统的无限时间状态调节器, 要求系统完全能控, 这是因为在无限时间状态调节器中, 控制区间扩大至无穷, 倘若系统不能控, 则无论哪一个控制矢量都将由于 $t \rightarrow \infty$ 而使性能指标趋于无穷。而对于有限时间状态调节器, 由于系统性能指标中积分项的上限为有限值, 即使系统状态不完全能控, 但在有限的积分时间内, 积分值也是有限的。所以, 对有限时间状态调节器, 可不强调对系统的能控性的要求。

【例 6-4】 设被控对象的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

二次性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^2(t) \right\} dt$$

试求使系统的性能指标 J 为极小值的最优控制。

解 直接写出黎卡提代数方程, 设其解为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

则由式 (6-63) 可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展开写成方程组

$$\begin{cases} 2p_{11} - p_{12}^2 = -1 \\ 2p_{12} - p_{12}p_{22} = 0 \\ 2p_{22} - p_{22}^2 = -1 \end{cases}$$

解该方程组可得

$$\begin{cases} p_{11} = -\frac{1}{2} \\ p_{12} = 0 \\ p_{22} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

注意到 $\mathbf{P}$ 为正定矩阵的要求, 因此, 黎卡提代数方程 (6-63) 无解。无解的原因是被控系统不是完全能控的, 即因可控性条件

$$\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 2$$

不满秩。

【例 6-5】 二阶系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

二次性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ \mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u^2(t) \} dt$$

式中, $a - b^2 > 0$ 。试求使系统的性能指标 J 为极小值的最优控制。

解 验证系统能控性

$$\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

系统完全能控, 且 $R=1$ 及 $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} > 0$, 故最优控制存在且唯一。根据式 (6-66), 最优控制为

$$u^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = -p_{12} x_1(t) - p_{22} x_2(t)$$

矩阵 $\mathbf{P}$ 满足黎卡提代数方程 (6-63), 展开为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

写成方程组

$$\begin{cases} p_{12}^2 = 1 \\ p_{11} - p_{12} p_{22} + b = 0 \\ 2p_{12} - p_{22}^2 + a = 0 \end{cases}$$

解该方程组, 在保证 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{P}$ 正定的条件下, 可得解为

$$\begin{cases} p_{11} = 1 \\ p_{12} = \sqrt{a+2} \\ p_{22} = \sqrt{a+2} - b \end{cases}$$

则最优控制为

$$u^*(t) = -p_{12}x_1(t) - p_{22}x_2(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2}x_2(t)$$

最优状态调节器的闭环系统结构图如图 6-4 所示。

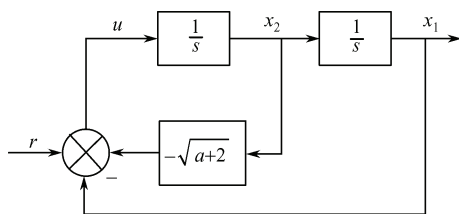


图 6-4 最优状态调节器闭环系统结构图

6.5 最短时间控制和最小能量控制

最短时间控制和最小能量控制，是可用极小值原理求最优解的最优控制类型。若把系统由初始状态转移到目标集的时间作为性能指标，使系统的转移时间为最短的控制称为时间最优控制，也称为最速控制。例如，要求导弹以最短时间击毁敌机或要求被控对象以最快速度达到平衡等。由于这种控制方式的目标泛函特别简单且实用价值较大，因此，受到了广泛的关注。

在航空航天控制问题中，无论是简单的高度控制或姿态控制，还是复杂的交会控制，都提出了节省燃料的共同要求，从而构成了最少燃料的最优控制，也称最小能量控制。最小能量控制是指在有限时间的控制过程中，要求控制系统的能量消耗为最小。由于这种控制方式的目标泛函中的被积函数为各控制分量绝对值的线性组合且比较复杂，因而远不如时间最优控制那样成熟。

本节在简要地介绍 Bang-Bang 控制原理的基础上，以线性定常系统为例，侧重讨论最短时间控制问题和最小能量控制问题。

6.5.1 Bang-Bang 控制原理

对线性定常系统，若系统非奇异，则可应用极小值原理求解最优控制问题。当控制过程具有继电器特性，即在容许控制域内，控制矢量的各个分量都取控制域的边界值，且不断地从一个边界值来回切换到另一个边界值，从而构成一种最强的控制作用，称为“Bang-Bang 控制”，也称为开关控制或“乒乓”控制。

设能控的线性定常系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (6-67)$$

边界条件为

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}, \text{ 且 } t_f \text{ 自由} \quad (6-68)$$

性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (6-69)$$

约束条件为

$$|u_i(t)| \leq 1 \quad (6-70)$$

寻求最优控制 $u^*(t)$ ，使系统以最短时间从给定初始状态 $x(t_0)$ 转移到原点 $x(t_f) = 0$ 。

应用最小值原理，取哈密尔顿函数为

$$H[x(t), u(t), t] = 1 + \lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t)] \quad (6-71)$$

状态方程为

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H[x(t), u(t), t]}{\partial \lambda(t)} = Ax(t) + Bu(t) \quad (6-72)$$

伴随方程为

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H[x(t), u(t), t]}{\partial x(t)} = -A^T \lambda(t) \quad (6-73)$$

贯截条件方程为

$$\lambda(t_f) = a \quad (a \text{ 为待定常数乘子})$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = 0$$

由于控制作用受不等式约束，根据极小值原理，当哈密尔顿函数取极小值时的容许控制 $u(t)$ 即为最优控制。为使哈密尔顿函数取极小值，从式 (6-71) 可看出

当 $\lambda^T B > 0$ 时，取 $u(t) = -1$ ；

当 $\lambda^T B < 0$ 时，取 $u(t) = 1$ 。

或

$$u^*(t) = -\text{sgn}(\lambda^T B) \quad (6-74)$$

式中， sgn 为符号函数。

这种根据 $\lambda^T B$ 符号取 $u(t)$ 的容许边界值的开关控制，即“Bang-Bang”控制，它要求的控制变量只取边界值，但符号与 $\lambda^T B$ 相反。

由状态方程与伴随方程求得 $\lambda(t)$ 与 $x(t)$ 的关系，再代入 $u^*(t)$ 中，就可得出状态反馈最优控制律。

将式 (6-74) 代入式 (6-67)，得

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) - B\text{sgn}(\lambda^T B) \quad (6-75)$$

式 (6-75) 为非线性常微分方程，当系统阶数不高时，可按分解求解解析解，但当阶数高时，一般用计算机求解。

6.5.2 最短时间控制

前述“Bang-Bang”控制原理所示的控制问题即最短时间控制问题。对于线性定常系统最短时间控制问题，经过理论推导和证明，可得出如下的重要结论。

(1) 当且仅当 m 个矩阵

$$G_j = [b_j \quad Ab_j \quad A^2b_j \quad \cdots \quad A^{n-1}b_j], \quad j=1, 2, \dots, m \quad (6-76)$$

至少有一个为奇异矩阵时, 则系统是奇异的; 而且仅当这 m 个矩阵全部为非奇异矩阵时, 系统是平凡的。式中, b_j 为 B 的第 j 列矢量。

(2) 线性定常系统中常数矩阵 A 的特征值全部具有非正的实部时, 系统的最优解存在。

(3) 系统是平凡的且最短时间控制存在, 则最短时间控制必然是唯一的。

总而言之, 根据式 (6-76) 判定系统是平凡的后, 若最短时间控制存在, 则最短时间控制是唯一的。

【例 6-6】 导弹飞行偏离预定轨道, 要求在最短时间内返回轨道, 如图 6-5 所示。设偏离角为 θ , 围绕质心的转动惯量为 J , 每个喷嘴产生的推力为 $F/2$, 则总的推力矩为 $2 \times \frac{F}{2} \times l = F \times l$, 围绕质心的角加速度 $\ddot{\theta} = \frac{F \cdot l}{J} = u$, 令 $x_1 = \theta$, 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u \end{cases}$$

即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

此系统为双积分系统。该方程也可能代表其他系统的运动方程, 如理想振荡器的运动方程或理想物体的运动方程。

对上述方程描述的二阶定常系统, 给定初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 且控制 $u(t)$ 受 $-1 \leq u(t) \leq 1$ 约束, 求使系统从初始状态 $\mathbf{x}_0$ 以最短时间转移到终止状态 $\mathbf{x}(t_f) = 0$ 的最优控制。

解 根据题意, 性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

哈密尔顿函数 H 为

$$H[\mathbf{x}(t), u(t), t] = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t)[A\mathbf{x}(t) + Bu(t)] = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

伴随方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -A^T \boldsymbol{\lambda}(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}(t) = -\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{a}$$

式中, $\mathbf{a}$ 为待定的常数乘子。由上式有

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(t) = c_1 \\ \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2 \end{cases}$$

式中, c_1, c_2 为由初始条件 $\mathbf{x}_0$ 决定的常量。

极值条件为

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}) = -\operatorname{sgn} \lambda_2(t) = -\operatorname{sgn}(c_2 - c_1 t) = \operatorname{sgn}(c_1 t - c_2)$$

不失一般性, 取 $t_0 = 0$ 。图 6-6 给出了 $\lambda_2(t)$ 和 $u(t)$ 在某一初始状态下的图形。

为了求出 $u(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 的关系, 即组成状态反馈系统, 需要将状态方程的解求出。已知控制 $u(t) = \pm 1$, 所以有:

(1) 当 $u(t) = -1$ 时, 状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t + x_{20} = -(t - x_{20}) \\ x_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + x_{20}t - \frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10} = -\frac{1}{2}(t - x_{20})^2 + (x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2) \\ &= -\frac{1}{2}x_2^2 + (x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2) \end{aligned} \quad (6-77)$$

(2) 当 $u(t) = 1$ 时, 状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t + x_{20} \\ x_1(t) &= \frac{1}{2}x_2^2 + (x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2) \end{aligned} \quad (6-78)$$

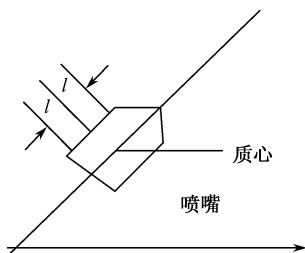


图 6-5 导弹飞行偏离轨道示意图

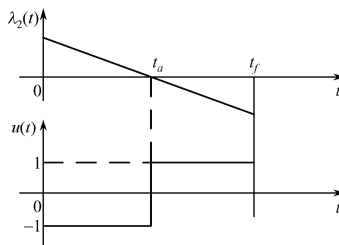


图 6-6 $\lambda_2(t)$ 和 $u(t)$ 的关系图

显然, 式 (6-77)、式 (6-78) 代表的是初始状态时的两个抛物线族, 如图 6-7 所示。

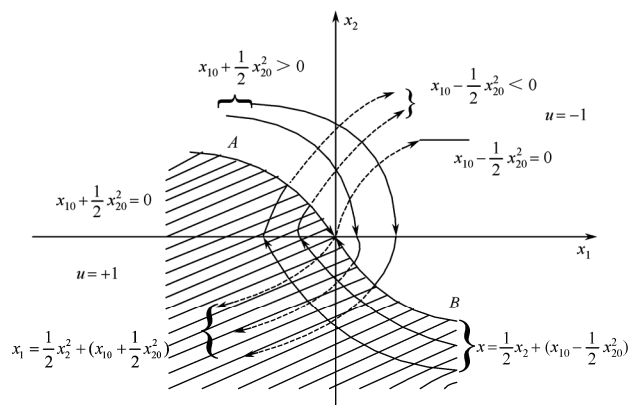


图 6-7 抛物线族

图中阴影部分表示式(6-78)的曲线族,非阴影部分表示式(6-77)的曲线族。从图(6-7)中可以看出, x_1 轴上面的相点的移动方向是从左向右(因为 $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ 为正); x_1 轴下面的相点的移动方向是从右向左(因为 $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ 为负)。在 $u = +1$ 区域内, 由于 $x_2 = \frac{dx_1}{dt} = u$ 为正, 所以, 式(6-78)的曲线族的运动方向是从下向上; 在 $u = -1$ 区域内, 由于 $x_2 = \frac{dx_1}{dt} = u$ 为负, 所以, 式(6-77)的曲线族的运动方向是从上向下。以上两族曲线中各有一条曲线能进入坐标原点, 这就是在 $u = +1$ 区域内的曲线 $x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2 = 0$, 以及在 $u = -1$ 区域内的曲线 $x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 = 0$, 两条曲线在坐标原点处相遇, 它们对应的方程是

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2 \\ x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2 \end{cases}$$

将两式合写成

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|$$

这条通过坐标原点的相轨迹(图 6-7 中的曲线 AB)将整个相平面划分成 $u = +1$ 和 $u = -1$ 两个区域, 曲线 AB 称为系统的最小时间开关曲线。

实现最佳快速控制的方法如下:

设系统的初始状态 $x(t_0) = x_0$, 它在 $u = -1$ 的区域内, 在控制 $u = -1$ 的作用下, 相点 x_0 沿它所在的那条抛物线运动, 直到与最小时间开关曲线 BO 相交为止, 如图 6-8 所示。相点到达 B 点后, 将开关打至 $u = +1$, 于是系统沿着曲线 BO 由 B 点运动到坐标原点, 这一控制过程, 即最佳快速控制。

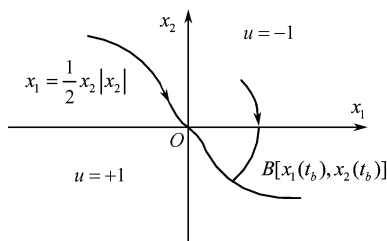


图 6-8 最佳快速控制示意图

控制方程求解如下。

根据式(6-78), 并令

$$K(x) = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 = x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2 \leq 0, \quad u = +1$$

根据式(6-77), 并令

$$K(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \geq 0, \quad u = -1$$

将上两式合并写成

$$K(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$$

令

$$F(x_2) = \frac{1}{2}x_2|x_2|$$

则

$$K(x) = x_1 + F(x_2)$$

此结果与例 6-6 的控制方程相对应, 即将 c_1, c_2 用 x_1, x_2 来表示, 得

$$u = -\operatorname{sgn}[x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|]$$

系统方框图如图 6-9 所示。

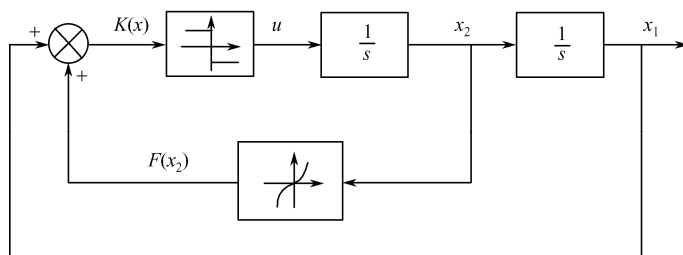


图 6-9 控制系统方框图

由以上分析可见:

(1) 为实现“Bang-Bang”控制, 系统中使用了继电器, 并在相应过程中最多切换了一次, 因此, 最佳转移时间 T 及性能指标 J , 可由式 (6-77)、式 (6-78) 求出。

例如, 初始状态 $x_{10} = 1, x_{20} = 2$ (图 6-8)。系统由初始状态 $x_{10} = 1, x_{20} = 2$ 转移到 $x_1(t_b)$, $x_2(t_b)$, 所经由的相轨迹方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2 + (x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2) = -\frac{1}{2}x_2^2 + 3$$

系统由初始状态 $x_1(t_b), x_2(t_b)$ 转移到坐标原点所经过的相轨迹就是开关曲线, 即

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2$$

当 $t = t_b$ 时, 两条相轨迹上的点重合, 即有

$$\frac{1}{2}x_2^2 = -\frac{1}{2}x_2^2 + 3$$

解得 $x_2(t_b) = \pm\sqrt{3}$, 其中 $+\sqrt{3}$ 不合理, 故应取

$$x_2(t_b) = -\sqrt{3}$$

于是

$$x_1(t_b) = \frac{3}{2}$$

下面可以求出 t_b 和总的响应时间。首先将 $x_2(t_b) = -\sqrt{3}$ 代入式 (6-77), 得

$$t_b = x_{20} - x_2(t_b) = 2 + \sqrt{3}$$

对于 $t > t_b$ 以后的一段时间, 可以用 $x_2(t_b) = -\sqrt{3}$ 作为后一段响应的初态, 而以 $x_2(t_f - t_b) = 0$ 作为终态, 将它们代入式 (6-78) 中, 得到

$$t_f - t_b = x_2(t_f - t_b) - x_2(t_b) = \sqrt{3}$$

则系统由初态 $x_{10} = 1, x_{20} = 2$ 按时间最优控制所确定的最佳轨迹转移到坐标原点所需要的时间为

$$t_f = t_b + \sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3} = 5.46(\text{s})$$

当 x_{10} 和 x_{20} 不同时, 得到的 t_f 也不同, 但都是最短时间。

(2) $u(t)$ 和 $x(t)$ 的关系是非线性的, 这与前面介绍的二次型性能指标最优控制形成的线性反馈是不同的。

同理, 根据上述计算过程, 如初始状态 $x_{10} = -4, x_{20} = -8$, 按时间最优控制转移到坐标原点所需时间为 20s。

6.5.3 最小能量控制

设线性定常系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-79)$$

该系统完全能控, 且容许控制 $\mathbf{u}(t)$ 的各个分量满足约束条件

$$|u_i(t)| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m \quad (6-80)$$

试确定最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$, 使系统从已知初始状态 $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}$ 在给定时间 t_f 内转移到预定终态 $\mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\beta}$ 时, 目标函数

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^m |u_j(t)| dt \quad (6-81)$$

取极小值。

应用最小值原理, 系统的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] &= \sum_{j=1}^m |u_j(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \\ &= \sum_{j=1}^m |u_j(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (6-82)$$

要使性能指标 $J[\mathbf{u}(t)]$ 达最小值, 以实现最优控制的必要条件如下:

(1) 正则方程组

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t]}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) \quad (6-83)$$

协态方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-84)$$

(2) 极值条件

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m |u_j^*(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) \\ &= \min_{|u_j(t)| \leq 1} \left[\sum_{j=1}^m |u_j(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \right] \end{aligned} \quad (6-85)$$

(3) 控制不等式约束

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6-86)$$

(4) 初始、终端条件

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\beta} \quad (6-87)$$

为了阐明最少燃料控制系统的基本性质, 先侧重分析上述的极值条件。式(6-85)可改写为如下的分量形式

$$\sum_{j=1}^m |u_j^*(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) = \min_{|u_j(t)| \leq 1} \left[\sum_{j=1}^m |u_j(t)| + \sum_{j=1}^m u_j(t) \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} \lambda_i(t) \right) \right] \quad (6-88)$$

式中, b_{ij} 为矩阵 $\mathbf{B}$ 中的第 i 行第 j 列上的元素。

为了讨论方便, 定义函数

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \lambda_i(t) \quad (6-89)$$

或等价于 m 维矢量

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-90)$$

将式(6-89)代入式(6-88), 可得

$$\sum_{j=1}^m |u_j^*(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) = \min_{|u_j(t)| \leq 1} \sum_{j=1}^m \{ |u_j(t)| + u_j(t) q_j(t) \} \quad (6-91)$$

为了确立 $u_j^*(t)$ 对 $q_j(t)$ 的依从关系, 必须要确定 $u_j^*(t)$ 的极性和大小。由式(6-91)可知, 要达到最小值, 则要求括号中第二项为非正, 即 $u_j(t) q_j(t) \leq 0$, $u_j^*(t)$ 应取与 $q_j(t)$ 相反的符号。利用这一关系, 式(6-91)可改写为

$$\sum_{j=1}^m |u_j^*(t)| + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) = \min_{|u_j(t)| \leq 1} \sum_{j=1}^m \{ |u_j(t)| (1 - q_j(t)) \} \quad (6-92)$$

由式(6-92)可以推出 $|u_j(t)|$ 和 $|q_j(t)|$ 的关系为:

当 $|q_j(t)| < 1$ 时, 则 $|u_j(t)| = 0$;

当 $|q_j(t)| > 1$ 时, 则 $|u_j(t)| = 1$;

当 $|q_j(t)|=1$ 时, 则 $0 \leq |u_j(t)| \leq 1$ 。

将确定 $u_j^*(t)$ 的极性和大小的规则结合起来, 即得 $u_j^*(t)$ 对 $q_j(t)$ 应满足的关系为:

当 $-1 < q_j(t) < 1$ 时, 则 $u_j^*(t) = 0$;

当 $q_j(t) < -1$ 时, 则 $u_j^*(t) = 1$;

当 $q_j(t) > 1$ 时, 则 $u_j^*(t) = -1$;

当 $q_j(t) = -1$ 时, 则 $0 \leq u_j^*(t) \leq 1$;

当 $q_j(t) = 1$ 时, 则 $-1 \leq u_j^*(t) \leq 0$ 。

定义死区函数 $a = \text{dez}\{b\}$, 则有

$$a = \text{dez}\{b\} = \begin{cases} 0 & , \text{当 } |b| < 1 \\ \text{sgn}\{b\} & , \text{当 } |b| > 1 \\ [0, 1] \text{ 中任意值} & , \text{当 } b = 1 \\ [-1, 0] \text{ 中任意值} & , \text{当 } b = -1 \end{cases} \quad (6-93)$$

由此推出线性定常系统的最优控制为

$$\mathbf{u}^*(t) = -\text{dez}\{\mathbf{q}(t)\} = -\text{dez}[\boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{B}] \quad (6-94)$$

对于线性定常系统最少燃料控制问题, 经过理论推导和证明, 可得出如下的重要结论:

(1) 平凡最少燃料控制的充分条件为

$$\det[\mathbf{G}_j^T \mathbf{A}^T] \neq 0$$

对 $j=1, \dots, m$ 中的每个值均成立。

奇异最少燃料控制的充分条件为

$$\det[\mathbf{G}_j^T \mathbf{A}^T] = 0$$

至少对 $j=1, 2, \dots, m$ 中的某一个值均成立。

式中, $\mathbf{G}_j = [b_j \quad \mathbf{A}b_j \quad \mathbf{A}^2b_j \quad \dots \quad \mathbf{A}^nb_j]$ 为 $n \times n$ 矩阵。

(2) 系统是平凡的且燃料最优控制存在, 则燃料最优控制必然是唯一的。

(3) 在最少燃料控制中, 目标泛函的相对极小值也是唯一的。

【例 6-7】 已知二阶系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

不等式控制约束为

$$|u(t)| \leq 1$$

试确定最优控制 $u^*(t)$, 使系统由任意初态 $\mathbf{x}(0) = [x_{10} \quad x_{20}]^T$ 转移到终态 $\mathbf{x}(t_f) = [0 \quad 0]^T$ 时,

目标函数

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

取极小值。式中, t_f 是自由的。

解 应用最小值原理, 系统的哈密尔顿函数为

$$H[\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = |u(t)| + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

考虑最少燃料控制, 为使 H 函数全局最小, 最优控制应为

$$u^*(t) = -\text{dez}\{\lambda_2(t)\} \begin{cases} 0 & , \text{当 } |\lambda_2(t)| < 1 \\ \text{sgn}\{b\} & , \text{当 } |\lambda_2(t)| > 1 \\ [0, 1] \text{中任意值} & , \text{当 } |\lambda_2(t)| = -1 \\ [-1, 0] \text{中任意值} & , \text{当 } |\lambda_2(t)| = 1 \end{cases} \quad (6-95)$$

为了确定最优控制 $u^*(t)$, 必须求解 $\lambda_2(t)$ 。由协态方程可知

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) \end{cases} \quad (6-96)$$

解得

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = \lambda_{10} \\ \lambda_2(t) = -\lambda_{10}t + \lambda_{20} \end{cases} \quad (6-97)$$

式中, λ_{10} , λ_{20} 为由初始条件决定的常量。

由于 H 函数不显含时间 t , 且 t_f 自由, 所以, 沿最优轨线 H 函数等于零, 即

$$H[\mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = 0 \quad (6-98)$$

$\lambda_2(t)$ 的变化规律有两种不同情况:

(1) 当 $\lambda_{10} = 0$ 时, 由式 (6-95) 知, 为满足式 (6-98), 应有 $\lambda_{20} = \pm 1$ 。这时, 只能利用式 (6-96) 确定最优控制 $u^*(t)$ 的符号及取值范围, 而无法确定其变换规律, 从而出现奇异现象。此时, 最优控制为

$$u^*(t) = -\text{sgn}\{\lambda_{20}\} \cdot v(t) \quad (6-99)$$

式中, $v(t)$ 为任意不恒等于零的非负分段连续函数。

(2) 当 $\lambda_{10} \neq 0$ 时, 由式 (6-97) 知, $\lambda_2(t) = -\lambda_{10}t + \lambda_{20}$ 是时间的线性函数。这时, 在区间 $[0, t_f]$ 内, $\lambda_2(t)$ 最多出现一次 1 和一次 -1, 即最多有两个点满足 $|\lambda_2(t)| = 1$, 这属于平凡系统, 最优控制必是三位控制, 即在 -1, 0, 1 之间最多只能进行两次切换。 $\lambda_2(t)$ 与 $u(t)$ 的对应关系如图 6-10 所示。

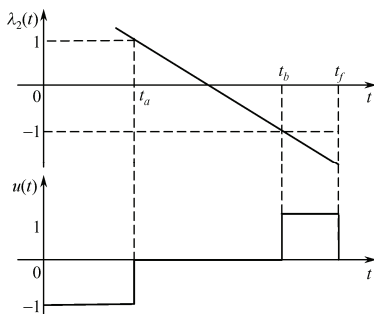


图 6-10 $\lambda_2(t)$ 与 $u(t)$ 的对应关系图

应用相平面分析法绘制状态轨线，并寻找最优控制 $u^*(t)$ 与最优状态轨线 $\mathbf{x}^*(t)$ 之间的关系。

当 $0 \leq t \leq t_a$ 时， $u^*(t) = -1$ ，状态方程的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + x_{20}t - \frac{1}{2}t^2 \\ x_2(t) = x_{20} - t \end{cases} \quad (6-100)$$

消去时间变量 t ，相应的轨线方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (6-101)$$

最优轨线为自左向右的抛物线族，其行进方向自上向下，如图 6-11 所示。

当 $t_a \leq t \leq t_b$ 时， $u^*(t) = 0$ ，状态方程的解为

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(t_a) = x_{20} - t_a = \text{const} \\ x_1(t) = (x_{20} - t)(t - t_a) + x_{10} + x_{20}t_a - \frac{1}{2}t_a^2 \end{cases} \quad (6-102)$$

由于 $x_2(t) = \text{const}$ ，最优轨线为平行于 x_1 轴的直线族，如图 6-11 所示。

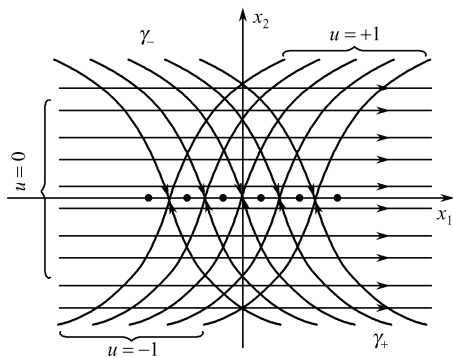


图 6-11 最优轨线图

当 $t_b \leq t \leq t_f$ 时， $u^*(t) = +1$ ，状态方程的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}(t - t_b)^2 - (x_{20} + t)(t - t_a) + x_{10} + x_{20}t - \frac{1}{2}t_a^2 \\ x_2(t) = t - t_a - t_b + x_{20} \end{cases} \quad (6-103)$$

消去时间变量 t ，相应的轨线方程为

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (6-104)$$

最优轨线为自左向右的抛物线族，其行进方向自下向上，如图 6-11 所示。

显然，通过坐标原点的开关曲线方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \quad (6-105)$$

进一步根据给定的终端条件 $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ ，令 $t = t_f$ 代入式 (6-103)，则可得出切换时间的 t_a 和 t_b 计算公式，即

$$\begin{cases} t_a = \frac{1}{2}[(t_f + x_{20}) - (t_f^2 - x_{20}^2 - 2t_f x_{20} - 4x_{10})^{1/2}] \\ t_b = \frac{1}{2}[(t_f + x_{20}) + (t_f^2 - x_{20}^2 - 2t_f x_{20} - 4x_{10})^{1/2}] \end{cases} \quad (6-106)$$

习 题

6-1 已知系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

初始条件为 $x_1(0) = x_2(0) = 1$ 。试求使性能指标

$$J = \int_0^\infty [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

为极小值的最优控制。

6-2 设某一 LC 振荡器的时间常数 $T = \frac{1}{LC} = 1$ ，其状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

式中， u 为控制电压。求使性能指标

$$J = \int_0^\infty [x_1^2(t) + \rho u^2(t)] dt, \quad \rho > 0$$

为最小值的最优控制。

6-3 已知二阶系统如图 6-12 所示。

求使性能指标

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{R} u^2(t)] dt, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0, \quad \mathbf{R} > 0$$

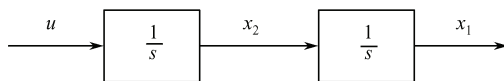


图 6-12 习题 6-3 图

为最小值的最优控制。

6-4 已知一阶系统

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) + u(t)$$

求使性能指标

$$J = \frac{1}{2}[10x^2(1)] + \frac{1}{2} \int_0^1 [2x^2(t) + u^2(t)] dt$$

为最小值的最优控制 $u^*(t)$ 。

6-5 设二阶系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

若设 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ 。试确定使性能指标

$$J = -\int_0^\infty [x_1^2(t) + q x_2^2(t) + r u^2(t)] dt, \quad q > 0, \quad r > 0$$

最小的线性二次型最优控制 $u^*(t)$, 并绘制最优闭环系统的结构图。

6-6 已知一阶系统

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 3$$

(1) 试确定最优控制, 使系统在 $t_f = 2$ 时转移到 $x(2) = 0$, 并使性能指标

$$J = \int_0^2 [1 + u^2(t)] dt = \min$$

(2) 如果使系统转移到 $x(t_f) = 0$ 的终端时间 t_f 自由, 问 $u^*(t)$ 应如何确定?

6-7 设系统状态方程及初始条件为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2 \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

要求达到 $x(t_f) = 0$, 试求

(1) $t_f = 5$ 时的最优控制 $u^*(t)$;

(2) t_f 自由时的最优控制 $u^*(t)$ 。

6-8 在磁场控制直流电动机的系统中, 若令电动机轴的转角 $\theta(t)$ 为 $x_1(t)$, 电动机负载的转动惯量为 J 。当摩擦力 f 忽略不计, 且假设磁场电感量 $L=0$ 时, 可得系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

式中, K 为比例常数; $x_2(t)$ 为电动机转速; $u(t)$ 为磁场控制电压。

磁场消耗的能量可表示为

$$E_u = \int_0^T u^2(t) dt$$

求在满足能量消耗最少的条件下, 在 T 时间内使系统从初始状态转移到 $[\theta, 0]$ 状态需要的控制作用。

6-9 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

不等式控制约束为 $-1 \leq u(t) \leq 1$ 。试求给定的 $\mathbf{x}(t_0)$ 到 $\mathbf{x}(t_f) = 0$ 的最短时间控制, 并在 (x_1, x_2) 空间中画出用这个最优控制的最优轨线。

6-10 设二阶系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

不等式控制约束为 $|u(t)| \leq 1$ 。试证明使系统由初态 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1]^T$ 转移到终态 $\mathbf{x}(4) = [0 \ 0]^T$ 时所消耗燃料为最少时的最优控制为

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}) \\ 0, & \frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}) \leq t \leq \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3}) \\ +1, & \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3}) \leq t \leq 4 \end{cases}$$

参 考 文 献

- [1] 刘豹. 现代控制理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [2] 于长官. 现代控制理论及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2007.
- [3] 王孝武. 现代控制理论基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [4] 谢克明. 现代控制理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [5] 王冀. 现代控制理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [6] 赵光宙. 现代控制理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [7] 王金城. 现代控制理论[M]. 北京: 化学工业出版社, 2007.
- [8] 吴立成. 现代控制理论[M]. 北京: 水利水电出版社, 2011.
- [9] 宋丽蓉. 现代控制理论基础[M]. 北京: 中国电力出版社, 2006.
- [10] 王军平. 现代控制工程[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2010.
- [11] 赵明旺. 现代控制理论[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.
- [12] 王积伟. 现代控制理论与工程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010) 88254396; (010) 88258888

传 真：(010) 88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036

高等学校 电气自动化类规划教材

电路分析

模拟电子技术

数字电子技术基础

信号与系统

微机原理与接口技术

电机学

控制电机

自动控制原理

现代控制理论

过程控制系统

工程电磁场

电力系统分析

高电压工程

电力电子技术

电力系统继电保护

供电技术

开关电源技术

电子测量

传感器技术

单片机原理与应用

电气控制与PLC

现场总线技术

计算机控制技术

.....

本教材配有PPT课件等教学资源，请登录

www.hxedu.com.cn 免费下载



责任编辑：陈韦凯

封面设计：一克米工作室

ISBN 978-7-121-15166-8



9 787121 151668 >

定价：29.00元