

重庆市高等教育教学成果奖  
电子电气基础课程规划教材

# 电路、信号与系统

徐昌彪 主 编  
管 春 冯志宇 褚言正 彭海英 副主编



电子电气基础课程规划教材

# 电路、信号与系统

徐昌彪 主编

管 春 冯志宇 副主编  
褚言正 彭海英

電子工業出版社

**Publishing House of Electronics Industry**

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书共 14 章，分为 4 部分，即基础知识、电路分析、信号分析、系统分析与模拟。基础知识部分介绍“电路的基本概念与两类约束”、“信号与系统的基本概念”、“电路、信号与系统相互关系及分析方法概述”；电路分析部分含有“电路的等效变换分析”、“电路的一般分析法及基本定理”、“直流一阶动态电路的时域分析”、“正弦稳态电路分析”；信号分析部分涉及“连续时间信号的频谱分析”、“连续时间信号的复频域分析”、“离散时间信号的 z 变换”；系统分析与模拟部分包括“连续时间系统的分析”、“离散时间系统的分析”、“系统模拟”、“状态变量分析”。

本书可作为高等院校非电类专业本科以及电类专业专科学生和自考学生的教学用书，还适用于各类专业自学者使用，亦可供有关技术人员和高校教师参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

电路、信号与系统 / 徐昌彪主编. —北京：电子工业出版社，2012.8

电子电气基础课程规划教材

ISBN 978-7-121-17103-1

I . ①电… II . ①徐… III. ①电路理论—高等学校—教材②信号分析—高等学校—教材③信号系统—高等学校—教材 IV. ①TM13②TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 102558 号

策划编辑：章海涛

责任编辑：周宏敏 章海涛

印 刷：

装 订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编：100036

开 本：787×1092 1/16 印张：15.5 字数：400 千字

印 次：2012 年 8 月第 1 次印刷

定 价：35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系及邮购电话：(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 [zlts@phei.com.cn](mailto:zlts@phei.com.cn)，盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线：(010) 88258888。

# 前　　言

长期以来,《电路、信号与系统》课程在国内各高等院校非电类专业本科以及通信工程、电子信息工程、电气工程、自动化等电类专业专科广泛开设。已有的相关教材在内容的取舍和编排上各有千秋。譬如,有的主要偏向于电路与信号两方面的内容,较少涉及系统分析;有的涉及了系统分析,但内容不多。我们本着加强系统分析在本课程中的地位以及强化分析方法或手段的统一性编写了本教材。本书可作为高等院校非电类专业本科以及电类专业专科学生和自考学生的教学用书,还适用于各类专业自学者使用,亦可供有关技术人员和高校教师参考。

与其他已有的同类教材相比,本书的特色主要体现在以下几方面:(1)按电路分析、信号分析、系统分析与模拟三者并重的方式组织内容,特别是将系统分析与信号分析独立成章,提升了系统分析的地位;(2)把同类分析手段或方法集中起来讨论,便于强化分析手段或方法的统一性。同时,侧重各分析手段或方法的应用性,而不片面追求其理论的严密性;(3)正文每段文字不超过6行,图形版式采用“上下型”而非“四周型”,从而使版面更加清晰和清爽,以提高可读性。

全书共14章,分为4部分:基础知识、电路分析、信号分析、系统分析与模拟。第1章至第3章为基础知识部分,介绍“电路的基本概念与两类约束”、“信号与系统的基本概念”、“电路、信号与系统相互关系及分析方法概述”;第4章至第7章为电路分析部分,含有“电路的等效变换分析”、“电路的一般分析法及基本定理”、“直流一阶动态电路的时域分析”、“正弦稳态电路分析”;第8章至第10章为信号分析部分,涉及“连续时间信号的频谱分析”、“连续时间信号的复频域分析”、“离散时间信号的z变换”;第11章至第14章为系统分析与模拟部分,包括“连续时间系统的分析”、“离散时间系统的分析”、“系统模拟”、“状态变量分析”。

本书的参编老师有徐昌彪、管春、冯志宇、褚言正、彭海英。其中,徐昌彪(教授,博士)编写第2、3、11、13、14章,并负责全书的统稿和修改;管春(博士)编写第5、7章;冯志宇(博士)编写第8、9章;褚言正(副教授)编写第1、4、6章;彭海英(副教授)编写第10、12章。另外,本书的编写还得到了重庆邮电大学电路与电工基础教研中心全体同事的支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

鉴于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请广大师生及读者批评指正。

本书为读者提供配套的教学资料包(含电子课件、习题答案),有需要者,请登录到<http://www.hxedu.com.cn>进行下载。读者反馈: [unicode@phei.com.cn](mailto:unicode@phei.com.cn) 或 122802331(QQ群)。

编者  
2012年4月



# 目 录

<b>第1章 电路的基本概念与两类约束</b>	1
1.1 电路与电路模型	1
1.1.1 电路的概念	1
1.1.2 电路模型	1
1.2 电路分析的基本变量	2
1.2.1 电流	2
1.2.2 电压	3
1.2.3 功率	5
1.3 电路的基本元件	7
1.3.1 电阻元件	7
1.3.2 电感元件	9
1.3.3 电容元件	11
1.3.4 独立电源	12
1.3.5 受控电源	14
1.4 基尔霍夫定律	15
1.4.1 相关术语	15
1.4.2 基尔霍夫电流定律	15
1.4.3 基尔霍夫电压定律	16
练习题	17
<b>第2章 信号与系统的基本概念</b>	23
2.1 信号及其分类	23
2.1.1 信号的概念	23
2.1.2 信号的分类	23
2.2 典型信号	24
2.2.1 单位阶跃信号	24
2.2.2 单位冲激信号	26
2.2.3 单位序列	27
2.2.4 单位阶跃序列	28
2.3 信号波形变换与基本运算	28
2.3.1 信号的波形变换	28
2.3.2 信号的基本运算	29
2.4 卷积积分	31
2.4.1 卷积积分的定义及其性质	31
2.4.2 卷积积分的计算	32
2.5 卷积和	35

2.5.1 卷积和的定义及其性质	35
2.5.2 卷积和的计算	36
2.6 系统及其分类	38
2.6.1 系统的概念	38
2.6.2 系统的分类	39
2.6.3 系统的数学模型	41
练习题	41
<b>第3章 电路、信号与系统相互关系及分析方法概述</b>	<b>45</b>
3.1 电路、信号与系统的相互关系	45
3.1.1 电路与系统	45
3.1.2 信号、电路与系统	45
3.2 线性时不变电路分析方法概述	45
3.2.1 一般分析法	46
3.2.2 简化电路的分析法	47
3.2.3 动态电路的分析方法	47
3.2.4 相量法	48
3.3 信号分析方法概述	48
3.3.1 正变换	48
3.3.2 反变换	49
3.4 线性时不变系统分析方法概述	49
3.4.1 直接法	49
3.4.2 间接法	49
3.4.3 状态变量分析法	51
练习题	51
<b>第4章 电路的等效变换分析</b>	<b>52</b>
4.1 单口网络的等效条件	52
4.1.1 单口网络的概念	52
4.1.2 等效条件	52
4.2 典型单口网络的等效化简	53
4.2.1 电阻与电导的串并联	53
4.2.2 电阻的星形-三角形变换	55
4.2.3 理想电源的串并联	57
4.2.4 实际电源	58
4.3 一般单口网络的等效化简	60
4.3.1 一般单口网络的最简等效电路	60
4.3.2 最简等效电路的求取	61
4.4 等效变换分析法的应用	62
练习题	62
<b>第5章 电路的一般分析法及基本定理</b>	<b>66</b>
5.1 支路电流法与支路电压法	66

5.1.1 支路电流法.....	66
5.1.2 支路电压法.....	67
5.2 回路电流法.....	68
5.2.1 回路电流的概念.....	68
5.2.2 回路电流法及其应用.....	68
5.3 节点电压法.....	71
5.3.1 节点电压的概念.....	71
5.3.2 节点电压法及其应用.....	71
5.4 叠加定理.....	74
5.4.1 叠加定理的含义.....	74
5.4.2 叠加定理的应用.....	74
5.5 戴维南定理与诺顿定理 .....	76
5.5.1 戴维南定理.....	76
5.5.2 诺顿定理.....	78
练习题.....	79
<b>第6章 直流一阶动态电路的时域分析 .....</b>	<b>84</b>
6.1 换路与过渡过程 .....	84
6.1.1 电路的状态与过渡过程 .....	84
6.1.2 换路及换路定理.....	85
6.1.3 初始值的计算 .....	85
6.2 直流一阶电路时域经典分析与响应的分解 .....	87
6.2.1 直流一阶电路时域经典分析 .....	87
6.2.2 响应分解 .....	89
6.3 直流一阶电路响应的三要素法 .....	90
6.4 阶跃响应与冲激响应 .....	92
6.4.1 阶跃响应 .....	92
6.4.2 冲激响应 .....	94
6.5 动态电路的时域卷积分析 .....	95
6.5.1 时域卷积分析法的含义 .....	95
6.5.2 时域卷积分析法的应用 .....	96
练习题.....	96
<b>第7章 正弦稳态电路分析 .....</b>	<b>101</b>
7.1 正弦信号及其相量表示 .....	101
7.1.1 正弦信号的时域表示.....	101
7.1.2 复数及其运算 .....	103
7.1.3 正弦信号的相量表示 .....	104
7.2 两类约束的相量形式 .....	105
7.2.1 基本元件的正弦稳态特性及其相量模型 .....	105
7.2.2 相量形式的基尔霍夫定律 .....	108
7.3 相量法及其应用 .....	110

7.3.1 阻抗与导纳.....	110
7.3.2 正弦稳态电路的分析.....	113
7.3.3 正弦稳态电路中的功率.....	116
7.4 椭合电感与理想变压器 .....	120
7.4.1 椭合电感.....	120
7.4.2 理想变压器.....	123
练习题 .....	125
<b>第8章 连续时间信号的频谱分析.....</b>	<b>132</b>
8.1 周期信号的频谱分析 .....	132
8.1.1 周期信号的傅里叶级数 .....	132
8.1.2 周期信号的频谱.....	134
8.2 非周期信号的傅里叶变换.....	137
8.2.1 傅里叶正变换与反变换 .....	138
8.2.2 从傅里叶级数到傅里叶变换 .....	138
8.2.3 非周期信号的频谱 .....	139
8.2.4 常见信号的傅里叶变换 .....	139
8.3 傅里叶变换的性质 .....	143
8.3.1 线性性 .....	143
8.3.2 比例性（尺度变换） .....	143
8.3.3 对称性 .....	144
8.3.4 时移性 .....	145
8.3.5 频移性 .....	146
8.3.6 卷积定理 .....	147
8.3.7 时域微积分性 .....	147
8.3.8 频域微积分性 .....	149
练习题 .....	150
<b>第9章 连续时间信号的复频域分析.....</b>	<b>153</b>
9.1 连续时间信号的拉普拉斯变换.....	153
9.1.1 拉普拉斯正变换与反变换 .....	153
9.1.2 常见信号的拉普拉斯变换 .....	154
9.2 拉普拉斯变换的性质 .....	155
9.2.1 线性性 .....	155
9.2.2 比例性（尺度变换） .....	155
9.2.3 时移性 .....	156
9.2.4 频移性 .....	156
9.2.5 时域微分性 .....	157
9.2.6 时域积分性 .....	157
9.2.7 初值定理 .....	158
9.2.8 终值定理 .....	159
9.2.9 时域卷积定理 .....	159

9.2.10 复频域微分性 .....	160
9.2.11 复频域积分性 .....	160
9.3 拉普拉斯反变换 .....	161
9.3.1 基于拉氏变换性质的方法 .....	161
9.3.2 部分分式展开法 .....	161
练习题 .....	163
<b>第 10 章 离散时间信号的 z 变换 .....</b>	<b>165</b>
10.1 z 变换 .....	165
10.1.1 z 变换的定义 .....	165
10.1.2 z 变换的收敛域 .....	165
10.1.3 常见离散时间信号的 z 变换 .....	166
10.2 z 变换的性质 .....	166
10.2.1 线性性 .....	166
10.2.2 移位 (移序) 性 .....	167
10.2.3 比例性 .....	168
10.2.4 z 域微分性 .....	168
10.2.5 时域卷积定理 .....	168
10.2.6 序列求和 .....	169
10.2.7 初值定理 .....	169
10.2.8 终值定理 .....	170
10.3 z 反变换 .....	171
10.3.1 幂级数展开法 .....	171
10.3.2 部分分式展开法 .....	172
练习题 .....	173
<b>第 11 章 连续时间系统的分析 .....</b>	<b>175</b>
11.1 时域经典分析法 .....	175
11.1.1 齐次解与特解 .....	175
11.1.2 零输入响应与零状态响应 .....	176
11.2 卷积积分分析法 .....	177
11.2.1 卷积积分分析法的含义 .....	177
11.2.2 单位冲激响应 .....	177
11.3 傅里叶变换分析法 .....	179
11.3.1 傅里叶变换分析法的含义 .....	179
11.3.2 频域系统函数 .....	179
11.4 无失真传输系统 .....	182
11.4.1 无失真传输系统的含义 .....	182
11.4.2 无失真传输系统的特性 .....	183
11.4.3 理想滤波器 .....	184
11.5 信号的时域抽样与时域抽样定理 .....	185
11.5.1 信号的时域抽样 .....	185

11.5.2 时域抽样定理 .....	186
11.6 拉普拉斯变换分析法 .....	187
11.6.1 微分方程的复频域求解 .....	187
11.6.2 电路的复频域分析 .....	188
11.6.3 复频域系统函数 .....	190
11.7 复频域系统函数零、极点对系统特性的影响 .....	191
11.7.1 零点与极点 .....	191
11.7.2 冲激响应模式 .....	192
11.7.3 频率响应特性 .....	193
11.8 连续时间系统的稳定性 .....	195
11.8.1 稳定系统的含义 .....	195
11.8.2 系统稳定性 .....	196
练习题 .....	197
<b>第 12 章 离散时间系统的分析 .....</b>	<b>200</b>
12.1 时域经典分析法 .....	200
12.1.1 齐次解与特解 .....	200
12.1.2 零输入响应与零状态响应 .....	201
12.2 时域卷积和分析法 .....	202
12.2.1 单位函数响应 .....	202
12.2.2 时域卷积和分析法及其应用 .....	204
12.3 z 变换分析法 .....	204
12.3.1 零输入响应 .....	204
12.3.2 零状态响应 .....	205
12.3.3 全响应 .....	206
12.4 系统函数零、极点对系统特性的影响 .....	208
12.4.1 单位函数响应模式 .....	208
12.4.2 频率响应特性 .....	209
12.5 离散时间系统的稳定性 .....	210
12.5.1 稳定系统的含义 .....	210
12.5.2 系统稳定性 .....	210
练习题 .....	211
<b>第 13 章 系统模拟 .....</b>	<b>214</b>
13.1 基于数学模型的模拟 .....	214
13.1.1 基于微分方程的系统模拟 .....	214
13.1.2 基于差分方程的系统模拟 .....	215
13.2 基于系统函数的模拟 .....	216
13.2.1 基于 $H(s)$ 的系统模拟 .....	216
13.2.2 基于 $H(z)$ 的系统模拟 .....	218
练习题 .....	219

第 14 章 状态变量分析	220
14.1 状态变量与状态方程	220
14.1.1 状态与状态变量	220
14.1.2 状态方程	220
14.2 状态方程的建立	221
14.2.1 由电路建立状态方程	221
14.2.2 从输入-输出方程导出状态方程	222
14.2.3 从模拟图建立状态方程	224
14.3 状态方程的求解	225
14.3.1 连续时间系统状态方程的 s 域求解	225
14.3.2 离散时间系统状态方程的 z 域求解	227
14.4 系统的可控性与可观测性	228
14.4.1 系统的可控性	228
14.4.2 系统的可观测性	229
练习题	230
参考文献	233

# 第1章 电路的基本概念与两类约束

电路分析的主要内容是在电路结构和元件参数已知的情况下，确定输入（又称激励）与输出（亦称响应）之间的关系；而在已知输入与输出关系时确定具体的电路结构和元件参数则是电路综合的主要内容。本书只讨论电路分析，其理论基础（或依据）为两类约束关系——元件约束和拓扑约束。元件约束描述了构成电路元件的电压与电流之间的关系，亦称为元件的伏安关系（VAR）；拓扑约束表现为基尔霍夫定律（KCL、KVL），反映了电路的拓扑结构。

本章介绍电路基本概念与两类约束，涉及电路的概念及电路模型、电路分析的基本变量、电路基本元件的伏安关系（VAR）、基尔霍夫定律（KCL 和 KVL）等。

## 1.1 电路与电路模型

### 1.1.1 电路的概念

由若干电子元器件（如电阻器、电容器、电感线圈、晶体管、集成块、电子管、电池、开关等）或电气设备（如发电机、变压器、电动机等）按照一定方式用导线连接起来以实现特定功能的整体称为电路。譬如，如图 1-1-1（a）所示是一个简单照明电路示意图。每一类电子器件或电气设备都可用一个图形符号来表示。将电路中各器件和设备用相应的图形符号来表示，导线用连线来表示，便得到实际电路的电气图。譬如，图 1-1-1（b）是如图 1-1-1（a）所示简单照明电路的电气图。

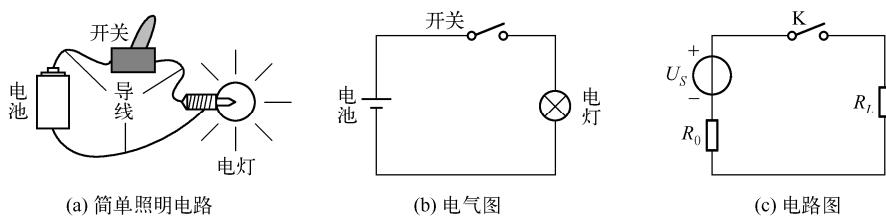


图 1-1-1 简单照明电路及其电气图与电路图

电路的形式、结构和繁简不同，其功能（或作用）亦各异。电路的基本功能可分为两大类：一类电路进行能量的传输、分配和转换，如电力线路；另一类电路则实现信号的传输、加工和处理，如通讯线路。

习惯上，人们把以传输电力或者以传输信号为目的的纵横交错的复杂电路称为电网络（简称网络）。例如，电力传输网、电话网等。显然，网络是电路的特例。本书将不区分电路与网络的概念，谈到网络，即指电路。

### 1.1.2 电路模型

组成实际电路的元器件通常具有较为复杂的物理特性。譬如，实际电阻器在电流流过时，不

仅有热效应，还有一定的磁场和电场效应；实际电感线圈中有变化的电流时，不仅会储存和交换磁场能量，还会消耗一定的热能，并伴随着一定的电场能；实际电容器极板间的电压发生变化时，电容器中有变化的电场和变化的磁场，极板间的绝缘介质中还有热损耗。

在分析电路时，如果把元器件的全部物理特性都加以考虑，将使分析变得非常复杂，而且从工程的需求来看，过分“精确”也没有必要。为此，在一定的条件下需要对实际元器件加以理想化和模型化，即保留其主要的电磁特性而略去其次要特性，并用一种抽象的足以表征其主要特性的元件模型来表示，这种元件模型称为电路的理想元件。譬如，只表示消耗电能并转换成热能的电阻元件；只表示存储和交换磁场能量的电感元件；只表示存储和交换电场能量的电容元件。

如图 1-1-2 所示为几种基本元件模型的符号图形，其中标注的  $R$ 、 $L$ 、 $C$ 、 $u_s$ 、 $i_s$  等既是元件的代表符号，也是元件的参数。

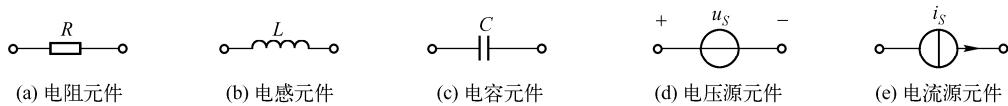


图 1-1-2 几种基本的元件模型

由理想元件构成的电路称为电路模型或电路图。譬如，图 1-1-1 (c) 为如图 1-1-1 (a) 所示简单照明电路的电路模型。

实际电阻、电感、电容等元件中， $R$ 、 $L$ 、 $C$  等是连续分布的，即在元件的任何部分都存在着电阻、电感和电容。但当元件的几何尺寸远小于元件正常工作的电磁波的最小波长时，其分布性便可忽略，而认为元件的参数“集总”于一点上，形成所谓的集总参数元件。由集总参数元件构成的电路称为集总参数电路。本书只讨论集总参数电路。

## 1.2 电路分析的基本变量

电路的工作状态可以用电荷、磁链、电流、电压、功率、能量等物理量来描述。它们通常是指时间的函数，也是电路分析的基本变量。电路分析的任务就是求解这些变量。本节着重讨论其中最常用的电流、电压和功率。

电路分析中，不随时间变化的各物理量一般用大写字母表示；随时间变化的物理量用小写字母表示。需要指出的是，小写字母可以替代大写字母，但大写字母不可以替代小写字母。这是因为“不随时间变化的物理量”可以视为“随时间变化的物理量”的特例。

### 1.2.1 电流

电路中电荷在外电场作用下定向移动形成电流。电流的大小即电流强度是单位时间内通过导体横截面的电荷量，用字母  $i$  表示，即

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-2-1)$$

式中， $q$  代表电荷量， $t$  为时间。电流、电荷、时间等的国际单位分别为安培 (A) (简称安)、库仑 (C)、秒 (s)。

电流不仅有大小，而且有方向。大小和方向均不随时间而变化的电流称为恒定电流或直流电流，用大写字母  $I$  表示。

习惯上规定正电荷流动的方向即是电流的方向，称其为真实方向或实际方向。对于较复杂的电路，往往事先无法判定电流的真实方向；对于交变电流，电流的真实方向随时间而变化，更不可能用一个固定的方向来表示。为此，在电路分析中通常人为任意规定一个电流的方向，称其为参考方向。

在电路图中，参考方向可用实线箭头表示；在计算式中，亦可用带有下标的符号表示，即  $I_{ab}$  表示电流  $I$  的参考方向由  $a$  指向  $b$ ，而  $I_{ba}$  则表示电流  $I$  的参考方向由  $b$  指向  $a$ 。譬如，如图 1-2-1 (a) 所示电路中， $I_{ab} = 3\text{ A}$  表示 3A 电流从  $a$  端流向  $b$  端；如图 1-2-1 (b) 所示电路中， $I_{ab} = -3\text{ A}$  表示 3A 电流从  $b$  端流向  $a$  端。

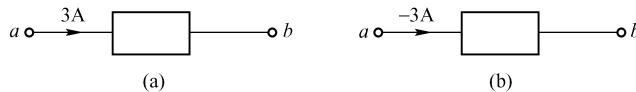


图 1-2-1 电流参考方向

虽然电流参考方向是人为任意指定的，但一经指定，分析过程中不得更改。在指定参考方向下电流数值的正负反映了其参考方向与实际方向的关系，即电流数值为正表示其参考方向与实际方向相同；反之，两者相反。

显然，同一电流，若指定的参考方向不同，则计算所得的电流数值相差一个负号。譬如，对图 1-2-1 (a) 而言， $I_{ba} = -I_{ab} = -3\text{ A}$ 。

需要强调的是，在未标明电流参考方向的情况下，电流数值的正负是没有意义的；如果不加声明，本书电路图中标出的电流方向都是电流的参考方向。

**例 1-2-1** 如图 1-2-2 所示元件，设每 2 秒有 6 库仑电荷由  $a$  端移至  $b$  端，则

- (1) 电荷为正， $I = ?$     $I_{ab} = ?$     $I_{ba} = ?$
- (2) 电荷为负， $I = ?$     $I_{ab} = ?$     $I_{ba} = ?$

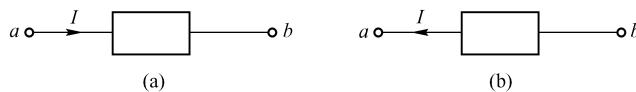


图 1-2-2 例 1-2-1 用图

**解：**根据电流的定义及真实方向的规定，并结合参考方向的标示，有

(1) 若为正电荷，对于图 1-2-2 (a)， $I_{ab} = I = \frac{6}{2} = 3\text{ A}$ ， $I_{ba} = -I_{ab} = -3\text{ A}$ ，因为  $I$  和  $I_{ab}$  的参考方向与真实方向一致；对于图 1-2-2 (b)， $I_{ab} = I = \frac{6}{2} = 3\text{ A}$ ， $I = I_{ba} = -I_{ab} = -3\text{ A}$ 。

(2) 若为负电荷，对于图 1-2-2 (a)， $I_{ab} = I = -\frac{6}{2} = -3\text{ A}$ ， $I_{ba} = -I_{ab} = 3\text{ A}$ ，因为  $I$  和  $I_{ab}$  的参考方向与真实方向相反；对于图 1-2-2 (b)， $I_{ab} = -3\text{ A}$ ， $I = I_{ba} = -I_{ab} = 3\text{ A}$ 。

## 1.2.2 电压

### 1.2.2.1 电压及其参考方向

电路中的电荷具有电位（势）能，电荷只有在电场力的作用下才能做规则的定向移动。电场力对单位电荷所做功的大小用电压来衡量。电路中  $a$  点对  $b$  点的电压，在数值上等于电场力把单

位正电荷由  $a$  点移动到  $b$  点所做的功，也就是此单位正电荷在移动过程中获得或失去的能量，用字母  $u$  表示，即

$$u = \frac{dw}{dq} \quad (1-2-2)$$

式中， $w$  是电场力所做的功。电压和功的国际单位分别为伏特 (V) (简称伏)、焦耳 (J)。

电压不仅有大小，而且有方向。大小和方向均不随时间而变化的电压称为恒定电压或直流电压，用大写字母  $U$  表示。

如果正电荷从  $a$  点移到  $b$  点失去能量，则电位降低，即  $a$  点电位高于  $b$  点；反之，若正电荷从  $a$  点移到  $b$  点获得能量，则电位升高，即  $a$  点电位低于  $b$  点。习惯上规定电位降低的方向为电压的真实方向或实际方向。

如同电流需要指定参考方向一样，在电路分析中，电压也需要指定参考方向。在电路图中标注电压参考方向有两种方式。一种方式是在电路中用“+”、“-”号标出电压的参考极性，并规定电压的参考方向由“+”指向“-”，如图 1-2-3 (a) 所示。另一种方式是在电路图中用实线箭头标出电压的参考方向，如图 1-2-3 (b) 所示，箭尾为“+”，箭头为“-”。

在计算式中，亦可用带有下标的符号表示，即  $U_{ab}$  表示电压  $U$  的参考方向由  $a$  指向  $b$ ，而  $U_{ba}$  则表示电压  $U$  的参考方向由  $b$  指向  $a$ 。

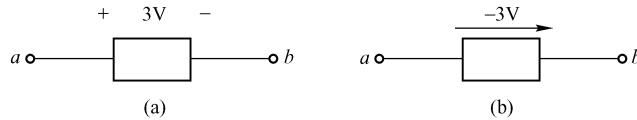


图 1-2-3 电压参考方向

在指定参考方向下电压数值的正负反映了其参考方向与实际方向的关系，即电压数值为正表示其参考方向与实际方向相同；反之，两者相反。

显然，同一电压，若指定的参考方向不同，则计算所得的电压数值相差一个负号。譬如，对图 1-2-3 (a) 而言， $U_{ba} = -U_{ab} = -3V$ 。

例 1-2-2 如图 1-2-4 所示元件，2 库仑电荷由  $a$  端移至  $b$  端，能量改变为 10 焦耳，则

- (1) 电荷为正，且失去能量， $U = ?$   $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$
- (2) 电荷为正，且获得能量， $U = ?$   $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$
- (3) 电荷为负，且失去能量， $U = ?$   $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$
- (4) 电荷为负，且获得能量， $U = ?$   $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$

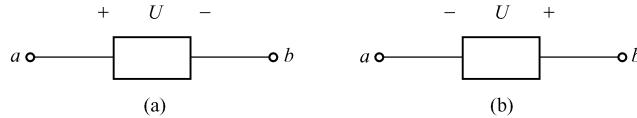


图 1-2-4 例 1-2-2 用图

解：根据电压的定义及真实方向的规定，并结合参考方向的标示，有

(1) 电荷为正，且失去能量，对于图 1-2-4 (a)， $U_{ab} = U = \frac{10}{2} = 5V$ ， $U_{ba} = -U_{ab} = -5V$ ，因为  $U$  和  $U_{ab}$  的参考方向与真实方向一致；对于图 1-2-4 (b)， $U_{ab} = \frac{10}{2} = 5V$ ， $U = U_{ba} = -U_{ab} = -5V$ ；

- (2) 电荷为正, 且获得能量, 对于图 1-2-4 (a),  $U_{ab} = U = -\frac{10}{2} = -5 \text{ V}$ ,  $U_{ba} = -U_{ab} = 5 \text{ V}$ ;  
 因为  $U$  和  $U_{ab}$  的参考方向与真实方向相反; 对于图 1-2-4 (b),  $U_{ab} = -5 \text{ V}$ ,  $U = U_{ba} = -U_{ab} = 5 \text{ V}$ ;  
 (3) 电荷为负, 且失去能量。此时, 与情形 (2) 相同;  
 (4) 电荷为负, 且获得能量。此时, 与情形 (1) 相同。

### 1.2.2.2 电位

若选择电路中的某点为参考点 (通常用 “ $\perp$ ” 表示), 并设参考点的电位为零, 则电路中任一点的电位等于该点相对于参考点的电压。为此, 电路中任意两点之间的电压 (或电位差) 等于它们的电位之差。

需要说明的是: (1) 参考点的选择是任意的。对同一电路而言, 参考点的选择不同, 各点的电位通常亦不同; (2) 参考点的选择只影响电路中各点的电位, 但不会影响电路中两点之间的电压。

譬如, 如图 1-2-5 所示电路, 选择  $d$  点为参考点,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  各点的电位分别为  $U_a = 2 \text{ V}$ ,  $U_b = 5 \text{ V}$ ,  $U_c = 3 \text{ V}$ ; 从而  $U_{ab} = U_a - U_b = 2 - 5 = -3 \text{ V}$ ,  $U_{bc} = U_b - U_c = 5 - 3 = 2 \text{ V}$ 。

借助电位的概念, 可以简化电路的作图。电子电路的一种习惯画法是在电路图中不画出电压源符号而只标出其极性和量值。譬如, 如图 1-2-6 (a) 所示电路, 可以画成如图 1-2-6 (b) 所示的形式。

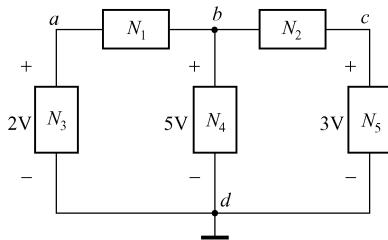


图 1-2-5 电位示例图

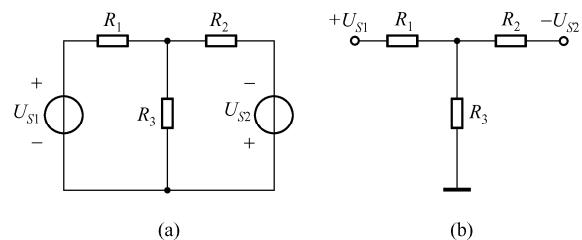


图 1-2-6 电子电路习惯画法示例图

### 1.2.2.3 关联参考方向

电路分析中, 电流和电压的参考方向都是人为任意指定的, 彼此无关。不过, 为了分析方便, 对电路中的某一支路 (支路的概念参见 1.4 节) 而言, 常取其电压参考方向和电流参考方向一致, 称电压和电流取关联参考方向, 或称电压和电流的参考方向是关联的, 如图 1-2-7 (a) 所示; 反之, 若电压参考方向和电流参考方向相反, 称电压和电流取非关联参考方向, 或称电压和电流的参考方向是非关联的, 如图 1-2-7 (b) 所示。

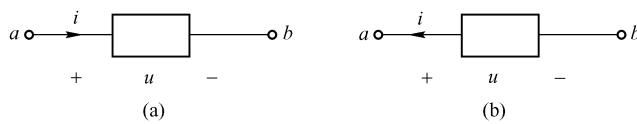


图 1-2-7 关联参考方向与非关联参考方向

### 1.2.3 功率

电功率 (简称功率) 是描述电路中能量变化速率的物理量, 定义为单位时间内电场力所做的功, 国际单位为瓦特 (W) (简称瓦), 用字母  $p$  表示。

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (1-2-3)$$

若电流和电压取关联参考方向, 如图 1-2-7 (a) 所示, 上式还可进一步写为

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i \quad (1-2-4)$$

当  $u$ 、 $i$  随时间变化时, 功率  $p$  也是时间的函数, 称为瞬时功率。在直流电路中, 功率是恒定不变的, 用大写字母  $P$  表示, 即

$$P = UI \quad (1-2-5)$$

若电流和电压取非关联参考方向, 如图 1-2-7 (b) 所示, 则有

$$p = -ui \quad \text{或} \quad P = -UI \quad (1-2-6)$$

由于电流和电压的数值有正有负, 因此  $p$  亦有可能为正或为负。 $p > 0$  表明电流的实际方向和电压的实际方向相同, 电场力推动正电荷做正功, 电场能降低, 即此元件或电路消耗功率或吸收功率; 反之,  $p < 0$  表明此元件或电路产生(输出)或释放功率。

任一瞬间, 孤立网络内部各元件吸收电能的功率总和等于各元件输出电能的功率总和, 这称为功率平衡或功率守恒, 即

$$\sum p_{\text{吸收}} = \sum p_{\text{释放}} \quad (1-2-7)$$

如果规定: 吸收功率为正, 输出功率为负, 则上式也可写为

$$\sum p = 0 \quad (1-2-8)$$

**例 1-2-3** 如图 1-2-8 所示网络, 求各网络的吸收功率或输出功率。

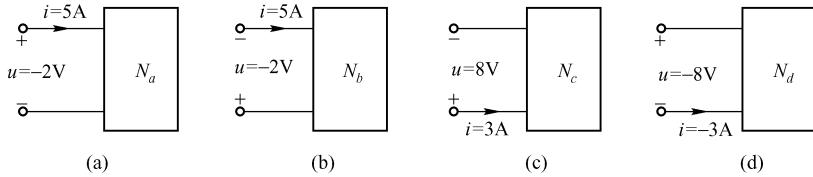


图 1-2-8 例 1-2-3 用图

**解:** 令如图 1-2-8 所示  $N_a$ 、 $N_b$ 、 $N_c$ 、 $N_d$  各网络的功率分别为  $p_a$ 、 $p_b$ 、 $p_c$ 、 $p_d$ , 则

$$p_a = ui = (-2) \times 5 = -10 \text{ W}$$

$$p_b = -ui = -(-2) \times 5 = 10 \text{ W}$$

$$p_c = ui = 8 \times 3 = 24 \text{ W}$$

$$p_d = -ui = -(-8) \times (-3) = -24 \text{ W}$$

因此,  $N_a$  输出  $10 \text{ W}$ ,  $N_b$  吸收  $10 \text{ W}$ ,  $N_c$  吸收  $24 \text{ W}$ ,  $N_d$  输出  $24 \text{ W}$ 。

**例 1-2-4** 如图 1-2-9 所示电路, 设  $d$  点为参考点。

(1) 求图中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  各点的电位  $U_a$ 、 $U_b$ 、 $U_c$ 、 $U_d$  和电压  $U_{ab}$ 、 $U_{bc}$ 、 $U_{ac}$ ;

(2) 试计算各网络的功率及电路的总功率。

**解:** (1) 因  $d$  点为参考点, 故  $U_d = 0 \text{ V}$ , 其余各点的电位及电压  $U_{ab}$ 、 $U_{bc}$ 、 $U_{ac}$  如下。

$$U_a = -1 \text{ V}, \quad U_b = 2 \text{ V}, \quad U_c = 4 \text{ V};$$

$$U_{ab} = U_a - U_b = -3 \text{ V}$$

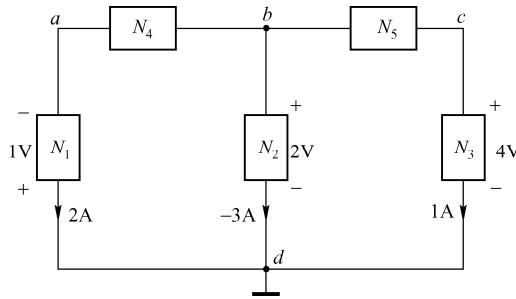


图 1-2-9 例 1-2-4 用图

$$U_{bc} = U_b - U_c = -2 \text{ V}$$

$$U_{ac} = U_a - U_c = -5 \text{ V}$$

(2) 令  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  分别为网络  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$ 、 $N_5$  的功率，则有

$$P_1 = -(1 \times 2) = -2 \text{ W}$$

$$P_2 = 2 \times (-3) = -6 \text{ W}$$

$$P_3 = 4 \times 1 = 4 \text{ W}$$

$$P_4 = -U_{ab} \times 2 = 6 \text{ W}$$

$$P_5 = U_{bc} \times 1 = -2 \text{ W}$$

电路的总功率  $P_{\text{总}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0 \text{ W}$

### 1.3 电路的基本元件

本节介绍电阻、电感、电容等基本无源元件，且为线性时不变，即元件参数恒定，不随电压或电流而变化，亦与时间无关。此外，本节还将介绍独立电源和受控电源。

#### 1.3.1 电阻元件

电阻元件（简称电阻）为二端钮元件（简称二端元件），是所有消耗电能类电路器件（如白炽灯、电炉丝）的理想化模型，其模型符号如图 1-1-2（a）所示。

##### 1.3.1.1 电阻元件的伏安关系与欧姆定律

在电阻的端电压与通过它的电流取关联参考方向的情况下，电压正比于电流。譬如，如图 1-3-1（a）所示电阻，有

$$u_R = R i_R \quad (1-3-1)$$

式中， $R$  是电阻元件的参数值，称为电阻，国际单位为欧姆（ $\Omega$ ）（简称欧）。式（1-3-1）即为电阻元件的伏安特性，反映了电阻元件的电压电流关系，称为欧姆定律。伏安特性曲线如图 1-3-1（b）所示。

式（1-3-1）还可改写为

$$i_R = \frac{u_R}{R} = Gu_R \quad (1-3-2)$$

式中， $G = \frac{1}{R}$  称为电导，国际单位为西门子（S）（简称西）。电导  $G$  与电阻  $R$  互为倒数关系。

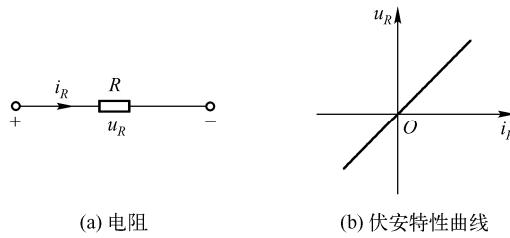


图 1-3-1 线性电阻及其伏安特性曲线

若电阻  $R$  的电压  $u_R$  和电流  $i_R$  取非关联参考方向，则其伏安关系为

$$u_R = -Ri_R \quad \text{或} \quad i_R = -\frac{u_R}{R} = -Gu_R \quad (1-3-3)$$

由电阻元件的伏安关系可知，它在任一瞬间的电压（或电流）只取决于该时刻的电流（或电压），而与历史时刻的电压（或电流）无关。由此说明，电阻元件是一个即时（或静态）的无记忆元件。

电阻元件的两种特殊情形是电阻值为零和无穷大。 $R = 0$  时称为短路； $R \rightarrow \infty$  时称为开路（或断路）。

### 1.3.1.2 电阻元件的功率

若电阻  $R$  在某一时刻的电压、电流分别为  $u_R$  和  $i_R$ ，则其在此时刻吸收的瞬时功率为  $p_R = u_R i_R$  ( $u_R$ 、 $i_R$  取关联参考方向) 或  $p_R = -u_R i_R$  ( $u_R$ 、 $i_R$  取非关联参考方向)，结合欧姆定律有

$$p_R = R i_R^2 = \frac{u_R^2}{R} \quad (1-3-4)$$

由式 (1-3-4) 知  $p_R \geq 0$ ，由此表明电阻元件只消耗电能而不储存电能。

### 1.3.1.3 电阻元件的能量与设备的额定值

在一段时间  $(t_1, t_2)$  内，电阻消耗的能量为

$$W_R = \int_{t_1}^{t_2} p_R(t) dt \quad \text{或} \quad W_R = P(t_2 - t_1) \quad (\text{功率恒定时}) \quad (1-3-5)$$

在电力系统中，能量的单位常采用“千瓦时”或“度”，且有 1 度=1 千瓦×1 小时。

电阻吸收的电能以热的形式散发出来，故实际使用中，电阻消耗电能的功率不应该大于电阻标定的额定散热功率，否则电阻可能因过热而损坏。一般情况下，电阻应该标明其电阻值、电阻值的误差范围和额定散热功率。但在特别的情况下，电阻也可能标明其额定电压值，或者额定电流值，或者其他，以代替电阻值等。例如，电灯泡通常只标明其额定电压和额定功率。

**例 1-3-1** 某一电阻  $R$  的电压  $u_R$  和电流  $i_R$  取非关联参考方向，且  $u_R = 12 \text{ V}$ ， $i_R = -3 \text{ A}$ ，额定功率为  $P_N = 40 \text{ W}$ 。

(1) 试计算电阻值、电导值，并验证电阻的发热功率是否超过其额定功率；

(2) 计算电阻元件 10 小时耗电的度数。

解：(1) 求电阻  $R$ 、电导  $G$  及电阻的功率  $p_R$

$$R = -\frac{u_R}{i_R} = -\frac{12}{-3} = 4 \Omega$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ S}$$

$$p_R = -u_R i_R = -12 \times (-3) = 36 \text{ W}$$

显然,  $P_R < P_N$ , 即发热功率没有超过其额定功率值, 故电阻元件是安全的。

(2) 求电阻元件 10 小时耗电的度数

$$W_R = p \cdot \Delta t = 0.036 \times 10 = 0.36 \text{ 度}$$

### 1.3.2 电感元件

实际电感线圈是用漆包线绕制的多匝线圈, 如图 1-3-2 (a) 所示。电感元件 (简称电感) 为二端元件, 是实际电感线圈的理想化模型, 其模型符号如图 1-3-2 (b) 所示。

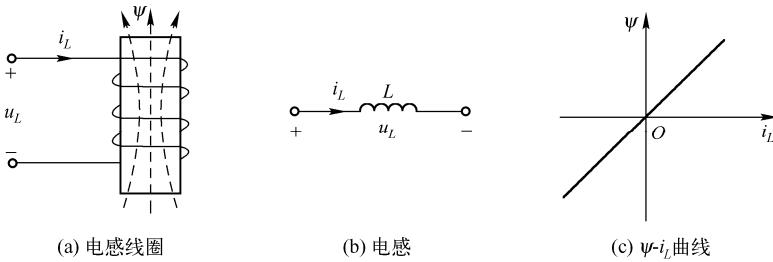


图 1-3-2 线性电感及  $\psi$ - $i_L$  曲线

#### 1.3.2.1 电感元件的伏安关系

如图 1-3-2 (a) 所示的电感线圈, 设线圈匝数为  $N$ 。电感线圈中通以电流后线圈的内外便建立起磁场, 形成磁通, 用  $\phi$  表示; 穿过各匝线圈的磁通的代数和称为磁链, 用  $\psi$  表示。在不考虑漏磁的条件下有

$$\psi = N\phi \quad (1-3-6)$$

磁通  $\phi$  和磁链  $\psi$  的国际单位为韦伯 (Wb)。对于线性电感, 磁链与电流成正比, 其比值定义为电感线圈的自感系数 (简称电感), 用符号  $L$  表示, 即

$$L = \frac{\psi}{i_L} \quad (1-3-7)$$

电感  $L$  的国际单位为亨利 (H)。 $\psi$ - $i_L$  关系如图 1-3-2 (c) 所示。

根据电磁感应定律, 结合式 (1-3-7) 得

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad (1-3-8)$$

此式为电感元件伏安特性的微分形式。此伏安关系表明, 电感的端电压与流过它的电流的变化率成正比。也就是说, 只有在电流随时间的延伸而变化时, 电压才不等于 0, 故电感属动态元件。对于直流, 电流不随时间而变化, 电压等于 0, 电感相当于短路。由此可见, 电感有隔离交流信号、传输直流信号的功能, 简称“隔交通直”。

式 (1-3-8) 还可改写为积分形式, 即

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau \quad (1-3-9)$$

此式表明, 电感在某一时刻  $t$  的电流不仅与这一时刻的电压有关, 还与  $t$  时刻之前的所有电压有关, 即电感电流能记忆历史时刻的电压, 具有记忆特性, 因此电感元件为记忆元件。

式 (1-3-9) 可进一步改写为

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau \quad (1-3-10)$$

式中,  $i_L(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L(\tau) d\tau$  为  $t_0$  时刻的电流值。此式表明, 欲确定  $t > t_0$  以后任一时刻  $t$  的电流  $i_L(t)$ , 只要知道  $t_0$  时刻的电流值和  $t > t_0$  以后的电压  $u_L(t)$  即可。

若电感  $L$  的电压  $u_L$  和电流  $i_L$  取非关联参考方向, 则其伏安关系为

$$\begin{cases} u_L(t) = -L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t) = -\frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(t_0) - \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1-3-11)$$

### 1.3.2.2 电感元件的功率与储能

若电感  $L$  在某一时刻的电压、电流分别为  $u_L$  和  $i_L$ , 且为关联参考方向, 则电感在此时刻吸收的瞬时功率为

$$p_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt} \quad (1-3-12)$$

显然,  $p_L$  可正可负。 $p_L > 0$  时电感吸收功率, 将电能转换为磁场能存储起来, 磁场逐渐建立;  $p_L < 0$  时电感释放功率, 将磁场能转换为电能输出, 磁场逐渐消失。

在任一时刻, 电感的储能为

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_{-\infty}^t p_L(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t L i_L(\tau) \frac{di_L(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} L i_L(\tau) di_L(\tau) = \frac{1}{2} L [i_L^2(t) - i_L^2(-\infty)] \\ &= \frac{1}{2} L i_L^2(t) \end{aligned} \quad (1-3-13)$$

此式表明电感元件任一时刻的储能与该时刻电流的平方成正比, 且恒大于等于零。因此, 电感元件具有储能特性, 为储能元件。

电感元件在  $(t_1, t_2)$  时段内吸收的电能为

$$\begin{aligned} w_L(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} p_L(t) dt = \frac{1}{2} L i_L^2(t_2) - \frac{1}{2} L i_L^2(t_1) \\ &= w_L(t_2) - w_L(t_1) \end{aligned} \quad (1-3-14)$$

$w_L(t_1, t_2) > 0$  表明电感在  $(t_1, t_2)$  时段吸收电能; 反之, 电感在此时段内释放电能。

**例 1-3-2** 某一电感  $L$  的电压  $u_L$  和电流  $i_L$  取关联参考方向, 且  $i_L(t) = \sin(3t)$  A,  $L = 10$  H。

(1) 求电感的端电压  $u_L(t)$  和电感的功率  $p_L(t)$ ;

(2) 求电感的储能  $w_L(t)$  及最大储能  $W_{L\max}$ 。

解: (1) 求  $u_L(t)$  和  $p_L(t)$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 10 \cdot \frac{d}{dt} [\sin(3t)] = 30 \cos(3t) \text{ V}$$

$$p_L(t) = u_L(t) \cdot i_L(t) = 30 \cos(3t) \sin(3t) = 15 \sin(6t) \text{ W}$$

(2) 求  $w_L(t)$  和  $W_{L\max}$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot [\sin(3t)]^2 = 5 \sin^2(3t) \text{ J}$$

$$W_{L\max} = 5 \text{ J}$$

### 1.3.3 电容元件

实际电容器是用两片相隔一定距离的金属板制成的，其间填充有绝缘材料，如图 1-3-3 (a) 所示。电容元件（简称电容）为二端元件，是实际电容器的理想化模型，其模型符号如图 1-3-3 (b) 所示。

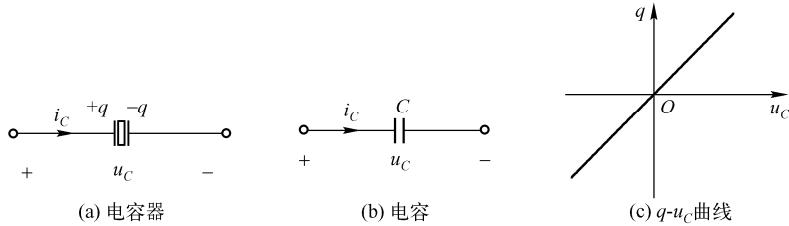


图 1-3-3 线性电容及  $q-u_C$  曲线

#### 1.3.3.1 电容的伏安关系

如图 1-3-3 (a) 所示的电容器，在其两端外加电压时便在电容器内部建立起电场，两个极片上分别储有电量为  $q$  的正、负电荷。对于线性电容，电荷量  $q$  与电压成正比，其比值定义为电容器的电容，用符号  $C$  表示，即

$$C = \frac{q}{u_C} \quad (1-3-15)$$

电容  $C$  的国际单位为法拉 (F)。 $q-u_C$  关系如图 1-3-3 (c) 所示。

根据电流与电荷之间的关系，结合式 (1-3-15) 得

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \quad (1-3-16)$$

此式为电容元件伏安特性的微分形式。此伏安关系表明，流过电容的电流与其端电压的变化率成正比。也就是说，只有在电压随时间的延伸而变化时，电流才不等于 0，故电容属动态元件。对于直流，电压不随时间而变化，电流等于 0，电容相当于短路。由此可见，电容有隔离直流信号、传输交流信号的功能，简称“隔直通交”。

式 (1-3-16) 还可改写为积分形式，即

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \quad (1-3-17)$$

此式表明，电容在某一时刻  $t$  的电压不仅与这一时刻的电流有关，还与  $t$  时刻之前的所有电流有关，即电容电压能记忆历史时刻的电流，具有记忆特性，因此电容元件为记忆元件。

式 (1-3-17) 可进一步改写为

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau \quad (1-3-18)$$

式中， $u_C(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C(\tau) d\tau$  为  $t_0$  时刻的电压值。此式表明，欲确定  $t > t_0$  以后任一时刻  $t$  的电压  $u_C(t)$ ，只要知道  $t_0$  时刻的电压值和  $t > t_0$  以后的电流  $i_C(t)$  即可。

若电容  $C$  的电压  $u_C$  和电流  $i_C$  取非关联参考方向，则其伏安关系为

$$\begin{cases} i_C(t) = -C \frac{du_C(t)}{dt} \\ u_C(t) = -\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = u_C(t_0) - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1-3-19)$$

### 1.3.3.2 电容元件的功率与储能

若电容  $C$  在某一时刻的电压、电流分别为  $u_C$  和  $i_C$ ，且为关联参考方向，则电容在此时刻吸收的瞬时功率为

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt} \quad (1-3-20)$$

显然， $p_C$  可正可负。 $p_C > 0$  时电容吸收功率，将电能转换为电场能存储起来，电场逐渐建立； $p_C < 0$  时电容释放功率，将电场能转换为电能输出，电场逐渐消失。

与电感类似，在任一时刻，电容的储能为

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau = \frac{1}{2} C u_C^2(t) \quad (1-3-21)$$

此式表明电容元件任一时刻的储能与该时刻电压的平方成正比，且恒大于等于零。因此，电容元件具有储能特性，为储能元件。

电容元件在  $(t_1, t_2)$  时段内吸收的电能为

$$\begin{aligned} w_C(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} p_C(t) dt = \frac{1}{2} C u_C^2(t_2) - \frac{1}{2} C u_C^2(t_1) \\ &= w_C(t_2) - w_C(t_1) \end{aligned} \quad (1-3-22)$$

**例 1-3-3** 某一电容  $C$  的电压  $u_C$  和电流  $i_C$  取非关联参考方向，且电容在  $t=0$  时的电压为  $u_C(0)=10$  V，电流  $i_C(t)=-3$  A， $C=100 \mu\text{F}$ ，耐压 1000V。

- (1) 求  $t=10^{-4}$  s 时的端电压、功率和在此过程中电容吸收的电能；
- (2) 求  $t=10^{-2}$  s 时的端电压，并指出电容是否安全。

解：(1)  $t=10^{-4}$  s 时电压和功率如下：

$$\begin{aligned} u_C(t) \Big|_{t=10^{-4}\text{s}} &= u_C(0) - \frac{1}{C} \int_0^{10^{-4}} i_C(\tau) d\tau = 10 - \frac{1}{100 \times 10^{-6}} \int_0^{10^{-4}} (-3) d\tau = 13 \text{ V} \\ p_C(t) \Big|_{t=10^{-4}\text{s}} &= -u_C(t) \cdot i_C(t) \Big|_{t=10^{-4}} = -13 \cdot (-3) = 39 \text{ W} \end{aligned}$$

在此过程中电容吸收的电能为

$$w(0, 10^{-4}) = \frac{1}{2} C u_C^2(10^{-4}) - \frac{1}{2} C u_C^2(0) = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \cdot 13^2 - \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-6} \times 10^2 = 3.45 \times 10^{-3} \text{ J}$$

(2)  $t=10^{-2}$  s 时电容端电压为

$$u_C(t) \Big|_{t=10^{-2}\text{s}} = u_C(0) - \frac{1}{C} \int_0^{10^{-2}} i_C(\tau) d\tau = 10 - \frac{1}{100 \times 10^{-6}} \int_0^{10^{-2}} (-3) d\tau = 310 \text{ V}$$

此电压未超过其耐压，故电容安全。

### 1.3.4 独立电源

独立电源（简称独立源）包含独立电压源和独立电流源，能独立地为电路提供能量。此处的“独立”意指电源本身独立于与之连接的电路。因此，独立电源是一种理想电源。

通常，独立电源向与之连接的电路提供功率，真正起电源的作用。不过，有时也从与之连接

的电路获取功率，作为负载出现在电路中。

#### 1.3.4.1 理想电压源

理想电压源是一个二端元件，其模型符号如图 1-3-4 (a) 或 (b) 所示（注意“+”、“-”是模型符号的一部分，不能省略）。其中图 1-3-4 (a) 是理想电压源的通用符号，图 1-3-4 (b) 是理想直流电压源（主要表示电池）的专用符号。如图 1-3-4 (c) 所示为理想电压源的伏安特性曲线。

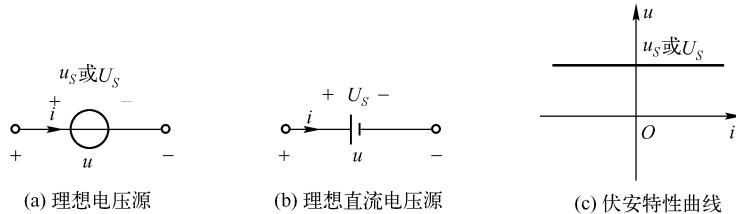


图 1-3-4 理想电压源及其伏安特性

理想电压源的端电压与流过它的电流无关，其电流取决于与之相连接的电路。特别是，当理想电压源开路时，输出电流为零，但其端电压仍保持为  $u_s$ （或  $U_s$ ）；而在理想电压源电压为零时，它相当于一条短路线。

#### 1.3.4.2 理想电流源

理想电流源是一个二端元件，其模型符号如图 1-3-5 (a) 所示（注意靠近圆圈的箭头“→”是模型符号的一部分，不能省略）。如图 1-3-5 (b) 所示为理想电流源的伏安特性曲线。



图 1-3-5 理想电流源及其伏安特性

理想电流源的输出电流与其端电压无关，其端电压取决于与之相连接的电路。特别是，当理想电流源短路时，端电压为零，但输出电流仍保持为  $i_s$ （或  $I_s$ ）；而在理想电流源输出电流为零时，它相当于开路。

**例 1-3-4** 如图 1-3-6 所示的理想电源，试计算各电源的功率，并判断它们是输出电能还是吸收电能。

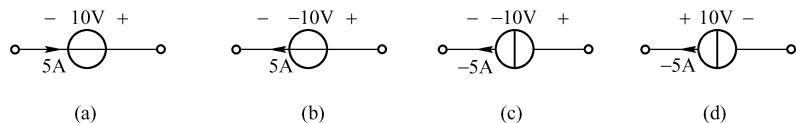


图 1-3-6 例 1-3-4 用图

解：令如图 1-3-6 (a)、(b)、(c)、(d) 所示各电源的功率分别为  $P_{sa}$ 、 $P_{sb}$ 、 $P_{sc}$ 、 $P_{sd}$ ，则有

$$P_{Sa} = -10 \times 5 = -50 \text{ W}$$

$$P_{Sb} = (-10) \times 5 = -50 \text{ W}$$

$$P_{Sc} = (-10) \times (-5) = 50 \text{ W}$$

$$P_{Sd} = -10 \times (-5) = 50 \text{ W}$$

因此, 图 1-3-6 (a) 和 (b) 所示为电压源输出电能; 图 1-3-6 (c) 和 (d) 所示为电流源吸收电能。

### 1.3.5 受控电源

受控电源(简称受控源)是表征电路中某处电压或电流受另一处电压或电流控制的理想化模型。受控源是四端元件, 亦是双口元件, 控制端(又称输入端)和受控端(亦称输出端)各有两个端钮。

控制量和受控量均可以是电压或电流。为此, 根据控制量和受控量的不同, 有四种受控源: 电压控制电压源(VCVS)、电流控制电压源(CCVS)、电压控制电流源(VCCS)、电流控制电流源(CCCS)。它们的模型符号如图 1-3-7 所示, 各受控源的控制量与受控量之间的关系如式(1-3-23)所示。

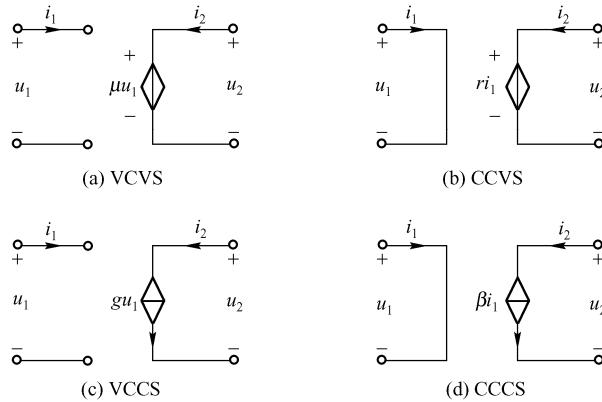


图 1-3-7 理想受控源

$$\begin{cases} \text{VCVS: } u_2 = \mu u_1 \\ \text{CCVS: } u_2 = ri_1 \\ \text{VCCS: } i_2 = gu_1 \\ \text{CCCS: } i_2 = \beta i_1 \end{cases} \quad (1-3-23)$$

式中,  $\mu$ 、 $r$ 、 $g$ 、 $\beta$  为控制系数:  $\mu$  无量纲, 称为转移电压比;  $r$  具有电阻的量纲, 称为转移电阻;  $g$  具有电导的量纲, 称为转移电导;  $\beta$  无量纲, 称为转移电流比。在控制系数为常数时, 受控量与控制量成正比, 受控源是线性时不变的。本书只讨论线性时不变受控源。

与独立源不同, 受控源为非独立源, 不能独立地为电路提供能量。受控源向外界提供电能或者从外界吸收电能均受到控制量的控制。对于线性受控源, 如果控制量为零, 受控量也必然为零, 受控源输出或吸收电能的功率也就为零。

## 1.4 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律反映了电路的拓扑结构，与构成电路的元件无关，包含两个方面的内容：基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。

### 1.4.1 相关术语

在介绍基尔霍夫定律之前，先介绍几个与电路结构有关的名词或术语。

支路：一个二端元件或若干二端元件组合而成的一段电路称为一条支路；

节点：支路端点称为节点。由短路线相连的多个端点视为一个节点；

回路：电路中任意闭合路径称为回路；

网孔：内部不含支路的回路称为网孔。

如图 1-4-1 所示电路，元件 1、2、3、4、5 可以分别看成支路，此时有  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  等 4 个节点；若把元件 1 与元件 3 串联、元件 2 与元件 5 串联、元件 4 等看成支路，则只有两个节点，即  $b$  和  $d$ ；有三个回路，即  $abcda$ 、 $abda$ 、 $bcdb$ ，而只有  $abda$  和  $bcdb$  为网孔。

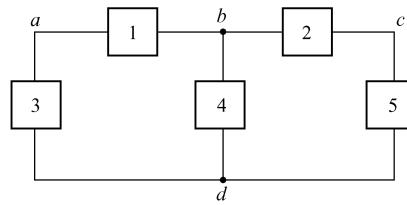


图 1-4-1 说明支路、节点、回路、网孔等用图

### 1.4.2 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律（KCL）可表述为：在集总参数电路中，任一时刻与节点相连的各支路电流的代数和等于零。写成数学表达式为

$$\sum i = 0 \quad (1-4-1)$$

此式亦称为 KCL 方程。对于“代数和”可做这样的规定：沿参考方向流入节点的支路电流为正，流出节点的支路电流为负；或者做相反的规定。不过，同一表达式中规定要一致。

譬如，如图 1-4-2 所示的电路，对节点  $a$ 、 $b$  而言，其 KCL 方程如下。

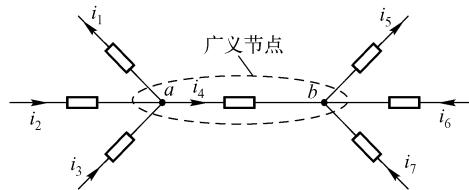


图 1-4-2 KCL 示例图

节点  $a$ ：

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

节点  $b$ ：

$$i_4 - i_5 + i_6 + i_7 = 0$$

节点  $a$  的 KCL 方程可改写如下：

$$i_2 + i_3 = i_1 + i_4$$

式中，左端的项为流入节点  $a$  的电流之和，右端的项为流出节点  $a$  的电流之和。因此，KCL 也可以表述为：在集总参数电路中，任一时刻流入节点的各支路电流之和等于流出节点的各支路电流之和。写成数学表达式为

$$\sum i_{\text{入}} = \sum i_{\text{出}} \quad (1-4-2)$$

另外，由节点  $a$  和  $b$  的 KCL 方程可得

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_5 + i_6 + i_7 = 0$$

此式表明，KCL 对图中虚线所示的假想封闭面（称为广义节点）仍然成立。

KCL 体现了电流连续性原理，它给连接于同一节点的各支路电流施加了约束，而与各支路元件的性质无关。

### 1.4.3 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律（KVL）可表述为：在集总参数电路中，任一时刻按一定方向沿回路绕行一周，回路中各支路电压的代数和等于零。写成数学表达式为

$$\sum u = 0 \quad (1-4-3)$$

此式亦称为 KVL 方程。对于“代数和”可做这样的规定：参考方向与回路绕行方向一致的支路电压为正（即沿回路绕行方向电压降），参考方向与回路绕行方向相反的支路电压负（即沿回路绕行方向电压升）；或者做相反的规定。不过，同一表达式中规定要一致。

譬如，如图 1-4-3 所示电路，回路  $L$  绕行方向为顺时针，其 KVL 方程如下。

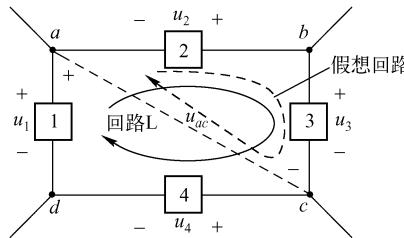


图 1-4-3 KVL 示意图

$$\text{回路 } L: \quad -u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

此 KVL 可改写为

$$u_3 + i_4 = u_1 + u_2$$

式中，左端的项为沿回路绕行方向电压降的电流之和，右端的项为沿回路绕行方向电压升的电压之和。因此，KVL 也可以表述为：在集总参数电路中，任一时刻按一定方向沿回路绕行一周，回路中电压降的各支路电压之和等于电压升的各支路电压之和。写成数学表达式为

$$\sum u_{\text{降}} = \sum u_{\text{升}} \quad (1-4-4)$$

另外，KVL 对任意假想回路仍然成立。譬如，对图 1-4-3 中虚线所示的假想回路而言，有假想回路： $-u_2 + u_3 - u_{ac} = 0$

此式还可改写为  $u_{ac} = -u_2 + u_3$ ，同理可得  $u_{ac} = u_1 - u_4$ 。由此表明，两点之间的电压与选择的

回路无关, 从而可通过如下方式计算电路中两点 (譬如节点  $a$  和  $c$ ) 之间的电压  $u_{ac}$ : 从节点  $a$  至节点  $c$ , 任意找一路径, 则  $u_{ac}$  等于沿此路径上各支路电压的代数和, 其中沿路径方向 ( $a \rightarrow c$ ) 电压降的支路电压为正, 电压升的支路电压为负。

KVL 是能量守恒定律在集总参数电路中的具体反映, 它给闭合回路中的各支路电压施加了约束, 而与各支路元件的性质无关。

例 1-4-1 如图 1-4-4 所示电路,  $u_{bd} = -6 \text{ V}$ , 其余已知条件已在图中标出, 求  $i_a$ 、 $u_1$  和  $u_2$ 。

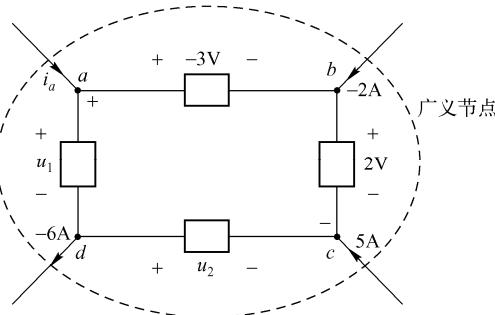


图 1-4-4 例 1-4-1 用图

解: 对广义节点, 由 KCL 知:  $i_a + (-2) + 5 - (-6) = 0$

得:  $i_a = -9 \text{ A}$

根据 KVL 有:  $u_{bd} = -(-3) + u_1 = 2 - u_2$

代入  $u_{bd} = -6 \text{ V}$  得:  $u_1 = -9 \text{ V}$ ,  $u_2 = 8 \text{ V}$

## 练习题

### A. 基本概念类

- 1-1 简要解释电路分析的理论基础。
- 1-2 简要说明电路分析与电路综合之间的联系。
- 1-3 电流和电压的定义及其真实方向是如何规定的?
- 1-4 关于电位与电压:
  - (1) 电位是如何定义的?
  - (2) 已知电路中两点的电位, 如何求取它们之间的电压?
  - (3) 参考点的选择是否会影响两点间的电压?
- 1-5 关于电流和电压的参考方向:
  - (1) 为什么需要引入参考方向?
  - (2) 参考方向的表示方式有哪些?
  - (3) 参考方向与真实方向有何关系?
  - (4) 关联参考方向的含义是什么?
- 1-6 关于电路中的功率:
  - (1) 功率是如何定义的? 怎样计算电路中的功率?
  - (2) 电流和电压的参考方向是否会影响功率的计算方式?

(3) 电流和电压的参考方向是否会影响功率的数值?

(4) 功率数值为正或负的含义是什么?

(5) 功率守恒的含义是什么?

1-7 说明元件类型及其伏安关系之间的对应关系。

1-8 说明独立电源与受控电源之间的异同。

1-9 举例说明 KCL 和 KVL。

1-10 结合示例说明广义节点和假想回路的含义及其应用。

## B. 分析计算类

1-11 若每 4 秒有 8 库仑电荷由某一元件的  $a$  端移至  $b$  端, 则

(1) 电荷为正,  $I_{ab} = ?$   $I_{ba} = ?$ ;

(2) 电荷为负,  $I_{ab} = ?$   $I_{ba} = ?$ 。

1-12 若 4 库仑电荷由电路的  $a$  端移至  $b$  端, 能量改变为 12 焦耳, 则

(1) 电荷为正, 且获得能量,  $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$ ;

(2) 电荷为正, 且失去能量,  $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$ ;

(3) 电荷为负, 且获得能量,  $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$ ;

(4) 电荷为负, 且失去能量,  $U_{ab} = ?$   $U_{ba} = ?$ 。

1-13 如题图 1-1 所示元件。

(1) 若元件 A 吸收功率 10W, 求  $U_a$ ;

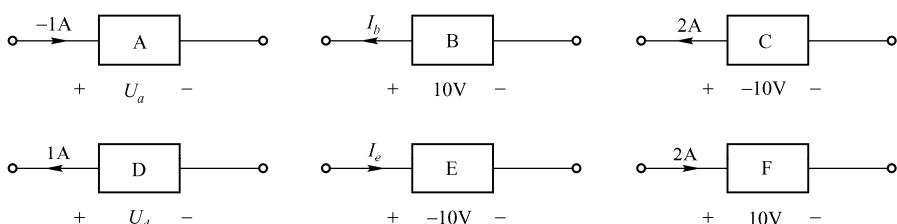
(2) 若元件 B 吸收功率 10W, 求  $I_b$ ;

(3) 求元件 C 吸收的功率;

(4) 若元件 D 输出的功率为 10W, 求  $U_d$ ;

(5) 若元件 E 输出功率为 -10W, 求  $I_e$ ;

(6) 求元件 F 输出的功率。



题图 1-1

1-14 如题图 1-2 所示电路, 元件 1、2、3 的功率分

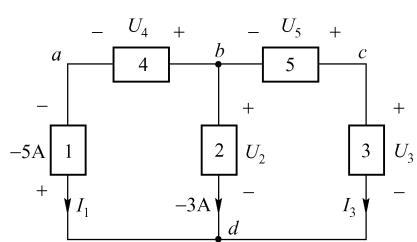
别为  $P_1 = -10 \text{ W}$ 、 $P_2 = 3 \text{ W}$ 、 $P_3 = -20 \text{ W}$ 。

(1) 求  $U_2$ 、 $U_3$ 、 $U_4$  和  $U_5$ ;

(2) 选  $c$  点为参考点, 试确定各点的电位;

(3) 求  $U_{ab}$ 、 $U_{db}$  和  $U_{ad}$ 。

1-15 某电路中需要一个电阻, 要求流过该电阻的电流为 0.25A, 在电路中需承受 100V 的端电压, 现有三个电阻可供选择: 一个是散热功率 10W, 阻值  $400 \Omega$ ;



题图 1-2

另一个是散热功率 25W，阻值  $200\Omega$ ；还有一个是散热功率 100W，阻值  $400\Omega$ 。试问哪一个能满足要求？

1-16 已知电灯额定功率为 100W，额定电压为 10V。

(1) 求电灯的电导值；

(2) 设电灯实际工作在 8V 的电压下，求电灯 10 小时耗电的度数。

1-17 已知两个电灯的额定功率分别为 60W、100W，额定电压均为 220V，若将它们串在一起后施加 380V 的电压。

(1) 求两个电灯的功率，其中哪个更亮？

(2) 两个电灯是否能安全工作。

1-18 电感  $L$  的电压  $u_L(t)$  和电流  $i_L(t)$  取关联参考方向，且  $L = 10\text{ H}$ ， $t > 0$  时  $i_L(t) = e^{-3t}\text{ A}$ ，求  $t > 0$  时电感的电压  $u_L(t)$ 、功率、储能和最大储能。

1-19 电感  $L$  的电压  $u_L(t)$  和电流  $i_L(t)$  取非关联参考方向，且  $L = 2\text{ H}$ ， $i_L(0) = 0\text{ A}$ ， $u_L(t) = 2\text{ V}$ ，求  $t > 0$  时的  $i_L(t)$ 。

1-20 电容  $C$  的电压  $u_C$  和电流  $i_C$  取关联参考方向，且  $t = 0$  时  $u_C(0) = 100\text{ V}$ ， $i_C(t) = 3\text{ A}$ ， $C = 0.01\text{ F}$ ，电容耐压 500V。

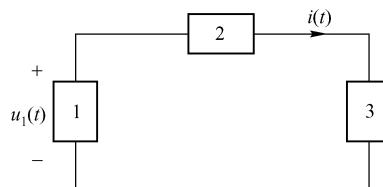
(1) 求  $t = 1\text{ s}$  时电容的端电压、功率和储能；

(2)  $t = 2\text{ s}$  时电容是否安全？

1-21 如题图 1-3 所示电路由一个电阻  $R$ 、一个电感  $L$  和一个电容  $C$  组成。 $t \rightarrow 0$  时  $i(t) = 4e^{-t} - 6e^{-2t}\text{ A}$ ， $u_1(t) = 8e^{-t} - 6e^{-2t}\text{ V}$ 。

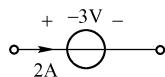
(1) 求参数  $R$ 、 $L$  和  $C$  的值；

(2) 求电路在  $t = 0$  时的总储能。

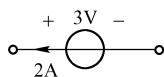


题图 1-3

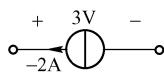
1-22 如题图 1-4 所示电源，求各电源的功率，并指出它们是吸收功率还是释放功率。



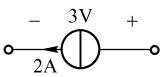
(a)



(b)



(c)



(d)

题图 1-4

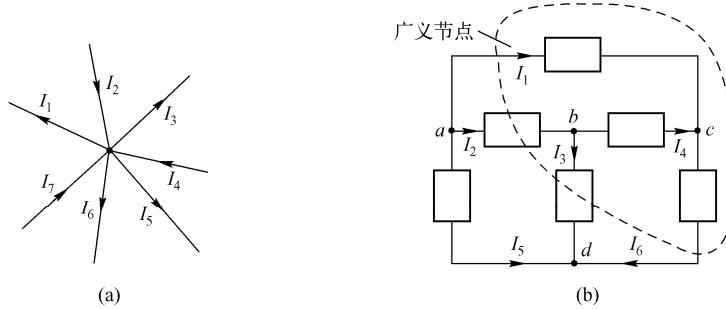
1-23 如题图 1-5 所示电路，试列写各节点的 KCL 方程。

1-24 如题图 1-6 所示电路，试列写所有回路的 KVL 方程。

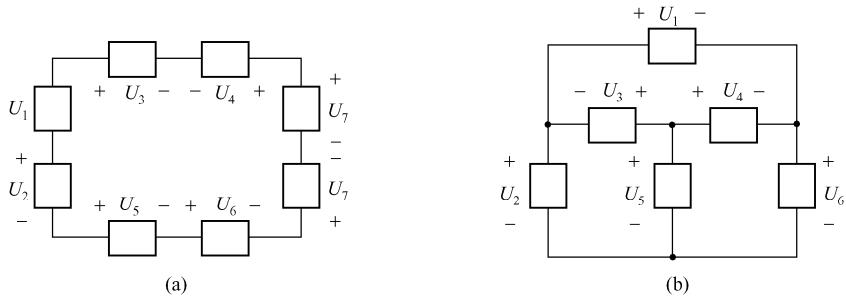
1-25 如题图 1-7 所示电路，求其中的未知电流。

1-26 如题图 1-8 所示电路，求其中的未知电压。

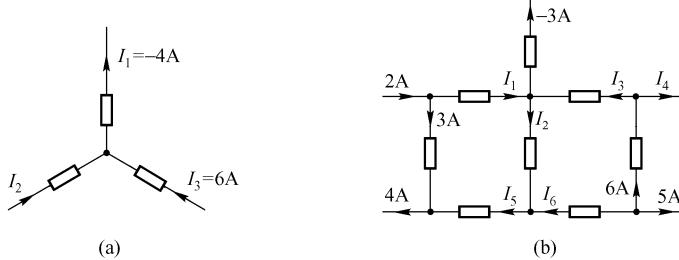
1-27 如题图 1-9 所示电路，求其中的未知量。



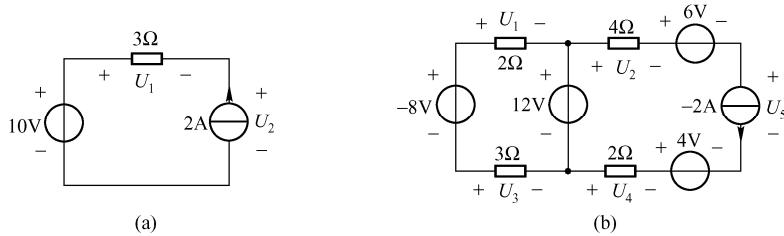
题图 1-5



题图 1-6



题图 1-7



题图 1-8

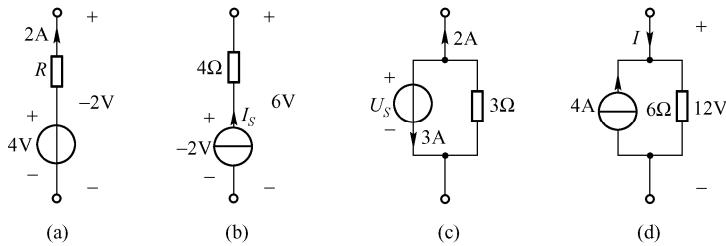
1-28 如题图 1-10 所示电路, 求电压  $U_{ab}$ 、 $U_{bc}$ 、 $U_{ca}$ 。

1-29 如题图 1-11 所示电路, 求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三点的电位  $U_a$ 、 $U_b$ 、 $U_c$ 。

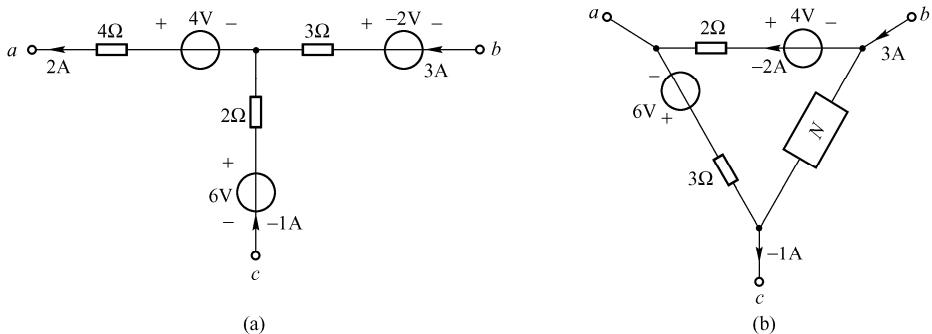
1-30 如题图 1-12 所示电路：

(1) 求  $a$ 、 $b$  两点的电位；

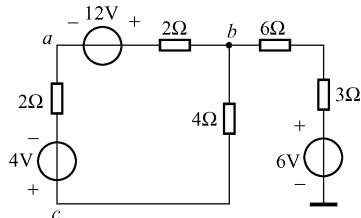
(2) 如将  $a$ 、 $b$  两点直接连接或接一个电阻，对电路工作有无影响？



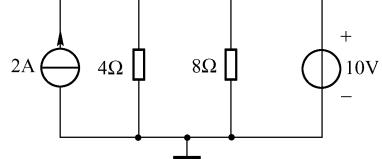
题图 1-9



题图 1-10



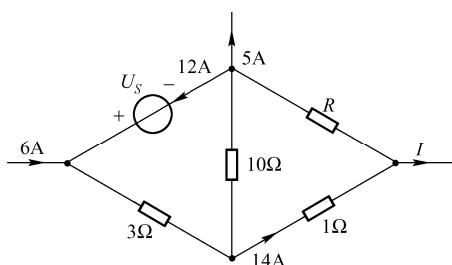
题图 1-11



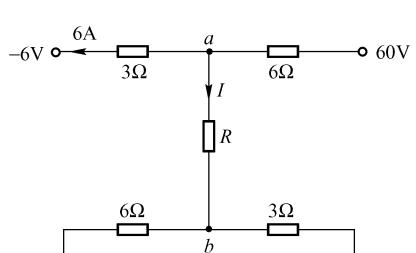
题图 1-12

1-31 如题图 1-13 所示电路，求  $I$ 、 $U_S$  和  $R$ 。

1-32 如题图 1-14 所示电路，求  $a$ 、 $b$  两点的电位  $U_a$ 、 $U_b$ 、电流  $I$  以及  $R$  的阻值。



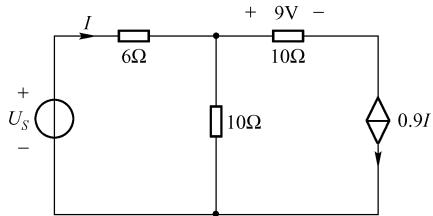
题图 1-13



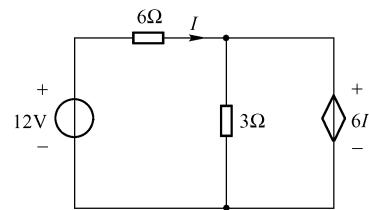
题图 1-14

1-33 如题图 1-15 所示电路, 求理想电压源端电压  $U_s$ 。

1-34 如题图 1-16 所示电路, 求各元件的功率。



题图 1-15



题图 1-16

## 第2章 信号与系统的基本概念

信号与系统理论涉及范围广泛，内容十分丰富。本书主要讨论信号分析和系统分析。信号分析的主要任务是了解信号的表示、性质和特征；系统分析的主要任务则是在已知系统的条件下，确定输入与输出之间的关系。

本章介绍信号与系统的基本概念，涉及信号的概念及其分类、典型信号、信号波形变换与基本运算、卷积积分和卷积和、系统的概念及其分类等。

### 2.1 信号及其分类

#### 2.1.1 信号的概念

广义地说，信号是随时间变化的某种物理量，是消息的表现形式，包含光信号、声信号、电信号等。譬如，古代人利用点燃烽火台而产生的滚滚狼烟，向远方军队传递敌人入侵的消息，这属于光信号；当人们说话时，声波传递到他人耳朵，使他人了解到说话人的意图，这属于声信号；遨游太空的各种无线电波、四通八达的电话网中的电流等，都可以用来向远方表达各种消息，这属于电信号。

本书只讨论目前广泛应用的电信号，它通常是随时间变化的电压或电流。由于信号是随时间而变化的，在数学上可以用时间的函数来表示。因此，“信号”与“函数”两个名词常常互用。

信号的特性可以从两个方面来描述：时间特性和频率特性。信号是时间的函数，因而表现出一定的时间特性，如出现的先后、持续时间的长短、随时间变化的快慢等；信号也是频率的函数，因而也表现出一定的频率特性，如含有哪些频率成分、各频率分量的幅度及相位、信号的有效带宽等。

#### 2.1.2 信号的分类

按照时间函数的确定性划分，信号可分为确定信号与随机信号。确定信号是时间的确定函数，即对于指定的某一时刻，可确定其相应的函数值，如正弦信号  $f(t) = \sin t$ ；随机信号具有不可预知的不确定性，无法给出确切的时间函数，如通信中的干扰信号。但是，在一定条件下，随机信号通常会表现出某种统计特性，例如，在指定时刻取某一值的概率。

按照函数的时间取值的连续性划分，信号可分为连续时间信号（亦称为模拟信号）和离散时间信号，分别简称为连续信号和离散信号。连续信号是指在考察的时间内，除若干个不连续点外，对于其他任意时刻都有定义的信号，通常用  $f(t)$  表示，如图 2-1-1 (a) 所示；离散信号仅在一些离散时刻有定义，通常用  $f(t_k)$  或  $f(kT)$ （简写为  $f(k)$ ）表示，如图 2-1-1 (b) 所示。离散信号表示为  $f(k)$  时亦称序列。为此，离散信号的分析方法也可应用于序列的分析。

如果离散信号的函数取值具有离散性，则称其为数字信号。显然，数字信号是离散信号的特例。模拟信号变换为数字信号一般需要经过三个过程：抽样、量化、编码。其中，抽样和量化即是对模拟信号的时间轴取值和函数取值分别进行离散化。

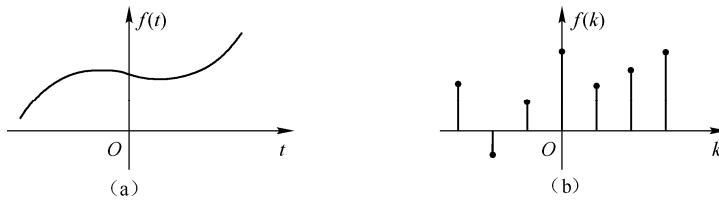


图 2-1-1 连续信号与离散信号示例

按信号的周期性划分, 信号可分为周期信号与非周期信号。时域周期信号每隔一定时间  $T$  (称为周期) 重复变化, 如图 2-1-2 所示。通常约定周期  $T$  为最小重复间隔; 非周期信号则没有这种重复性。

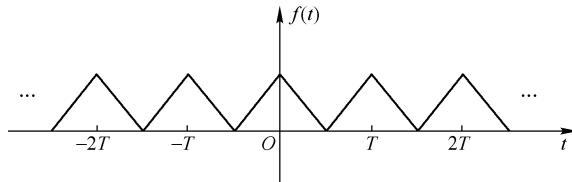


图 2-1-2 周期信号示例

## 2.2 典型信号

### 2.2.1 单位阶跃信号

单位阶跃信号记为  $\varepsilon(t)$ , 定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2-2-1)$$

$\varepsilon(t)$  的波形如图 2-2-1 (a) 所示。

如果单位阶跃信号在  $t = t_0$  处跃变, 则可用  $\varepsilon(t - t_0)$  表示, 如图 2-2-1 (b) 所示, 定义为

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2-2-2)$$

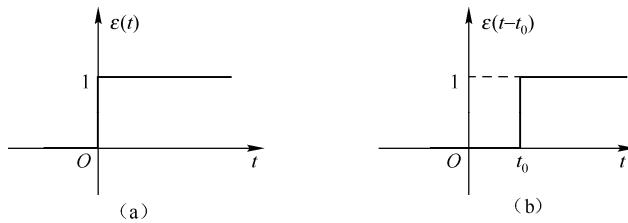


图 2-2-1 单位阶跃信号

单位阶跃信号作为电压源或电流源时, 其物理意义为: 电路在  $t = 0$  时刻接入直流电源, 且不再变化, 其示意图如图 2-2-2 所示。

单位阶跃信号具有截取信号的能力, 即信号  $f(t)$  与  $\varepsilon(t)$  的乘积  $f(t)\varepsilon(t)$  所表示的信号是  $f(t)$  中  $t > 0$  的部分; 同理,  $f(t)\varepsilon(t - t_0)$  表示的信号是  $f(t)$  中  $t > t_0$  的部分, 如图 2-2-3 所示。

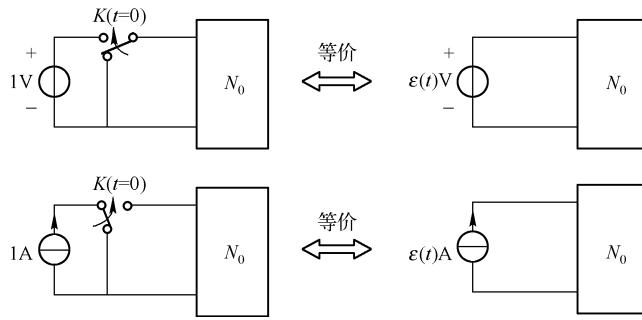


图 2-2-2 单位阶跃信号的物理意义

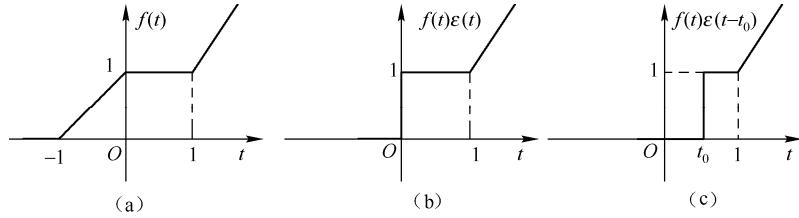


图 2-2-3 阶跃信号截取信号示例

由阶跃信号可以组成另一个重要信号——门信号  $G_\tau(t)$ ，如图 2-2-4 所示，定义为

$$G_\tau(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2-2-3)$$

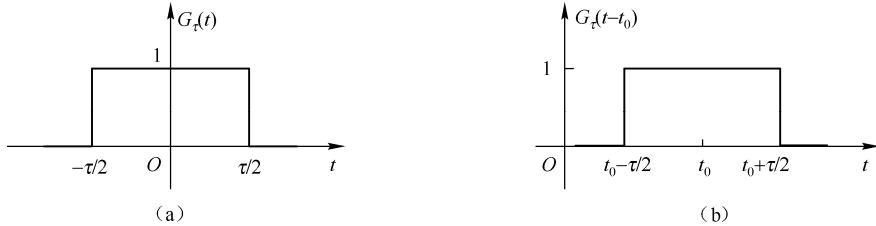


图 2-2-4 门信号

$G_\tau(t-t_0)$  波形如图 2-2-4 (b) 所示。门信号也可以用来截取信号，即  $f(t)G_\tau(t-t_0)$  所表示的信号是  $f(t)$  中  $t_0 - \frac{\tau}{2} < t < t_0 + \frac{\tau}{2}$  的部分，如图 2-2-5 所示。

利用阶跃信号和门信号截取信号的能力，可以把分段信号用闭合表达式来表示，而不必写出分区间的定义式，如图 2-2-6 所示信号可表示为

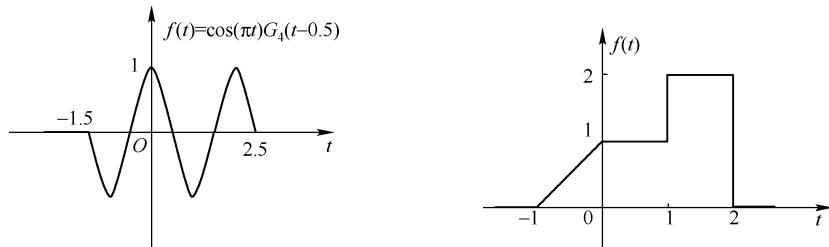


图 2-2-5 门信号截取信号示例

图 2-2-6 信号  $f(t)$

$$\begin{aligned}
f(t) &= (t+1)[\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t)] + [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + 2[\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)] \\
&= (t+1)[\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t)] + \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)
\end{aligned}$$

此例说明：利用阶跃信号，可以把任一复杂的信号分解成几个简单的基本信号之和。

## 2.2.2 单位冲激信号

单位冲激信号记为  $\delta(t)$ ，工程定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-2-4)$$

式中， $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$  表示单位冲激信号的强度为 1。 $\delta(t)$  的图形如图 2-2-7 (a) 所示。

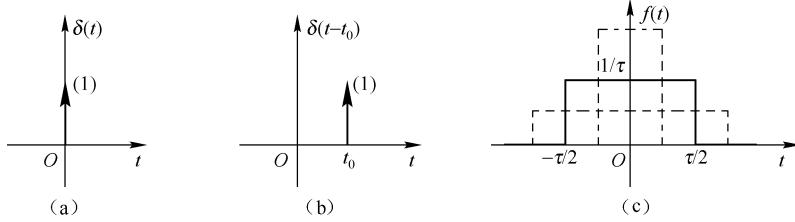


图 2-2-7 单位冲激信号及矩形脉冲信号

如果在  $t = t_0$  处出现强度为 1 的冲激，则可用  $\delta(t-t_0)$  表示，如图 2-2-7 (b) 所示，定义为

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (2-2-5)$$

单位冲激信号可由矩形脉冲信号演变而来，譬如，如图 2-2-7 (c) 所示的  $f(t)$ ，在  $\tau \rightarrow 0$  时即为  $\delta(t)$ 。

另外，根据单位冲激信号的定义，易知  $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \varepsilon(t)$ ，故单位阶跃信号与单位冲激信号之间有如下关系。

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \\ \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2-2-6)$$

同理有

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = \frac{d\varepsilon(t-t_0)}{dt} \\ \varepsilon(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau-t_0) d\tau \end{cases} \quad (2-2-7)$$

冲激信号具有如下性质：

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (2-2-8)$$

$$\begin{cases} f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases} \quad (2-2-9)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0) \end{cases} \quad (2-2-10)$$

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \quad (2-2-11)$$

式 (2-2-10) 称为冲激信号的抽样性 (或筛选性)。

例 2-2-1 计算下列各式:

$$(1) t\delta(t)$$

$$(2) (2e^{-t} - e^{-2t})\delta(t)$$

$$(3) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta(t+1)$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\delta(t-2)dt$$

$$(5) \int_{-1.5}^{1.5} (5t-3)[\delta(t+2)+\delta(t-1)]dt$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+2t)\delta(-2t+4)dt$$

$$(7) \int_{-\infty}^t (2\tau+4)\delta(\tau-1)d\tau$$

$$\text{解: (1)} t\delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

$$(2) (2e^{-t} - e^{-2t})\delta(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})|_{t=0} \delta(t) = \delta(t)$$

$$(3) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta(t+1) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta(t+1) = -\delta(t+1)$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\delta(t-2)dt = (2t+1)|_{t=2} = 5$$

$$(5) \int_{-1.5}^{1.5} (5t-3)[\delta(t+2)+\delta(t-1)]dt = \int_{-1.5}^{1.5} (5t-3)\delta(t+2)dt + \int_{-1.5}^{1.5} (5t-3)\delta(t-1)dt \\ = 0 + (5t-3)|_{t=1} = 2$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+2t)\delta(-2t+4)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+2t) \frac{1}{2}\delta(t-2)dt = \frac{1}{2}(t^2+2t)|_{t=2} = 4$$

$$(7) \int_{-\infty}^t (2\tau+4)\delta(\tau-1)d\tau = \int_{-\infty}^t 6\delta(\tau-1)d\tau = 6\delta(t-1)$$

### 2.2.3 单位序列

单位序列也称为单位函数, 用  $\delta(k)$  表示, 其定义为

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (2-2-12)$$

$\delta(k)$  的图形如图 2-2-8 (a) 所示。

若单位序列在  $k = m$  处取值, 可用  $\delta(k-m)$  表示, 如图 2-2-8 (b) 所示, 定义为

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad (2-2-13)$$



图 2-2-8 单位序列

单位序列具有如下抽样性质：

$$\begin{cases} f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k) \\ f(k)\delta(k-m) = f(m)\delta(k-m) \end{cases} \quad (2-2-14)$$

根据单位序列的抽样性，任一离散信号  $f(k)$  均可表示为单位序列的加权和，即

$$f(k) = \cdots + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \cdots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-m) \quad (2-2-15)$$

### 2.2.4 单位阶跃序列

单位阶跃序列记做  $\varepsilon(k)$ ，定义为

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2-2-16)$$

$\varepsilon(k)$  的图形如图 2-2-9 (a) 所示。若单位阶跃序列从  $k = m$  处开始取值，可用  $\varepsilon(k-m)$  表示，如图 2-2-9 (b) 所示，定义为

$$\varepsilon(k-m) = \begin{cases} 1 & k \geq m \\ 0 & k < m \end{cases} \quad (2-2-17)$$

与单位阶跃信号类似，单位阶跃序列亦具有截取信号的能力，即信号  $f(k)$  与  $\varepsilon(k)$  的乘积  $f(k)\varepsilon(k)$  所表示的是  $f(k)$  中  $k \geq 0$  的部分； $f(k)\varepsilon(k-m)$  表示的是  $f(k)$  中  $k \geq m$  的部分。

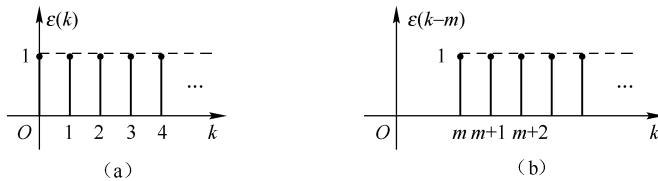


图 2-2-9 单位阶跃序列

## 2.3 信号波形变换与基本运算

### 2.3.1 信号的波形变换

#### 2.3.1.1 时移

信号  $f(t)$  的时移是将其中的自变量  $t$  替换为  $t \pm t_0$  而成为  $f(t \pm t_0)$ 。从波形上看， $f(t \pm t_0)$  的波形是  $f(t)$  的波形向左或向右移动  $t_0$ ，如图 2-3-1 所示。

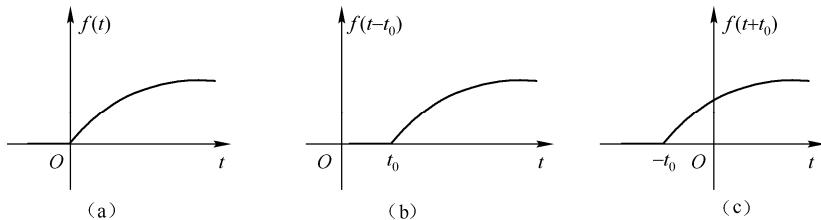


图 2-3-1 信号  $f(t)$  的时移

离散信号  $f(k)$  的时移亦称为移序。类似地,  $f(k \pm m)$  的图形是将  $f(k)$  的图形向左或向右移  $m$  位。

### 2.3.1.2 折叠

信号  $f(t)$  的折叠 (亦称为对折或反折) 是将其中的自变量  $t$  替换为  $-t$  而成为  $f(-t)$ 。从波形上看,  $f(-t)$  的波形是  $f(t)$  的波形相对于纵轴的镜像, 即沿纵轴对折, 如图 2-3-2 所示。

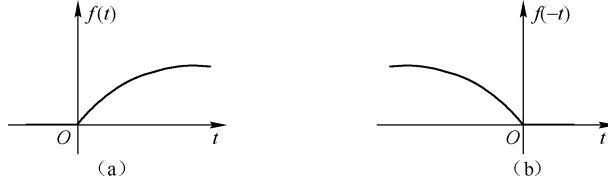


图 2-3-2 信号  $f(t)$  的折叠

类似地, 信号  $f(k)$  的折叠即是将其中的自变量  $k$  替换为  $-k$  而成为  $f(-k)$ 。

### 2.3.1.3 尺度变换

信号  $f(t)$  的尺度变换 (亦称压扩变换或伸缩变换) 是将其中的自变量  $t$  替换为  $at$  而成为  $f(at)$ 。从波形上看,  $f(at)$  的波形是把  $f(t)$  的波形沿时间轴压缩至原来的  $1/a$ 。如果  $0 < a < 1$ , 实际是把  $f(t)$  的波形进行了扩展, 如图 2-3-3 所示。

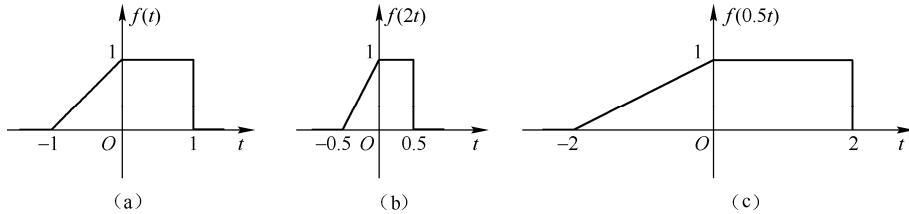


图 2-3-3 信号  $f(t)$  的尺度变换

**例 2-3-1** 回答如下问题:

- (1)  $f(-t)$  向右时移  $t_0$  成为  $f(-t+t_0)$  还是  $f(-t-t_0)$  ?
- (2)  $f(t-t_0)$  折叠成为  $f(-t+t_0)$  还是  $f(-t-t_0)$  ?
- (3)  $f(t-t_0)$  尺度变换成为  $f(at-t_0)$  还是  $f(at-at_0)$  ?
- (4)  $f(at)$  向右时移  $t_0$  成为  $f(at-t_0)$  还是  $f(at-at_0)$  ?

解: (1)  $f(-t)$  向右时移  $t_0$  成为  $f(-t+t_0)$ ;

(2)  $f(t-t_0)$  折叠成为  $f(-t-t_0)$ ;

(3)  $f(t-t_0)$  尺度变换成为  $f(at-t_0)$ ;

(4)  $f(at)$  向右时移  $t_0$  成为  $f(at-at_0)$ 。

**例 2-3-2** 已知  $f(t)$  的波形如图 2-3-4 (a) 所示, 试画出  $f(-0.5t+1)$  的波形。

解: (1) 将  $f(t)$  左移, 得到  $f(t+1)$ , 如图 2-3-4 (b) 所示;

(2) 将  $f(t+1)$  折叠, 得到  $f(-t+1)$ , 如图 2-3-4 (c) 所示;

(3) 将  $f(-t+1)$  进行尺度变换, 得到  $f(-0.5t+1)$ , 如图 2-3-4 (d) 所示。

## 2.3.2 信号的基本运算

### 2.3.2.1 相加与相乘

两个信号相加 (或相乘) 后在某一时刻的值等于两个信号在此时刻的值相加 (或相乘)。

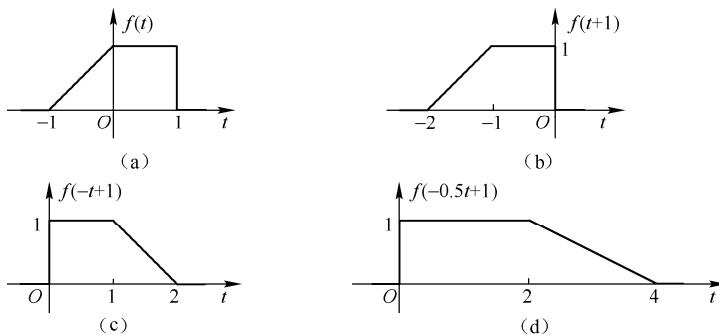


图 2-3-4 例 2-3-2 用图

例 2-3-3  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  如图 2-3-5 (a) 和 (b) 所示, 试画出  $f_1(t)+f_2(t)$  和  $f_1(t)-f_2(t)$  的波形。

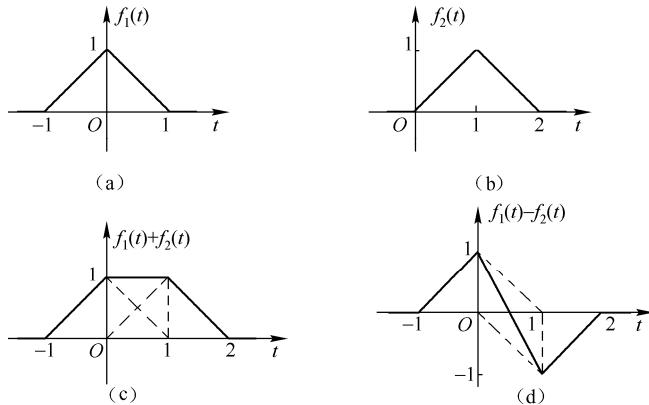


图 2-3-5 例 2-3-3 用图

解: (1) 将  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  画在同一坐标系中, 画出  $f_1(t)+f_2(t)$  的波形, 如图 2-3-5 (c) 所示;

(2) 将  $f_1(t)$  和  $-f_2(t)$  画在同一坐标系中, 画出  $f_1(t)-f_2(t)$  的波形, 如图 2-3-5 (d) 所示。

例 2-3-4  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  如图 2-3-6 (a) 和 (b) 所示, 试画出  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  的波形。

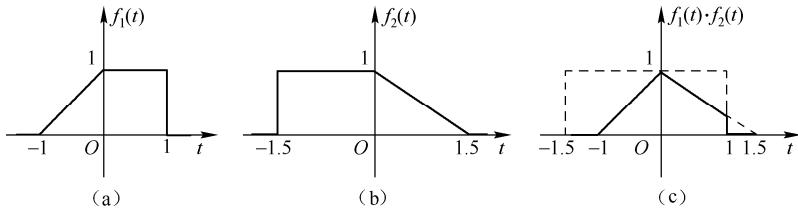


图 2-3-6 例 2-3-4 用图

解: 将  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  画在同一坐标系中, 画出  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  的波形, 如图 2-3-6 (c) 所示。

### 2.3.2.2 微分与积分

信号微分与积分针对的是连续时间信号。 $f(t)$  在  $t$  时刻的微分的几何含义是  $f(t)$  在该时刻的斜率, 记做  $\frac{df(t)}{dt}$  或  $f'(t)$ 。在不连续点处,  $\frac{df(t)}{dt}$  为冲激信号, 其强度为  $f(t)$  在此处的变化量;  $f(t)$  的积分的几何含义是  $f(t)$  在区间  $(-\infty, t]$  上与时间轴围成的面积, 记做  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$  或  $f^{(-1)}(t)$ 。

例 2-3-5 如图 2-3-7 (a) 所示的  $f(t)$ , 试画出  $f'(t)$  和  $f^{(-1)}(t)$  的波形。

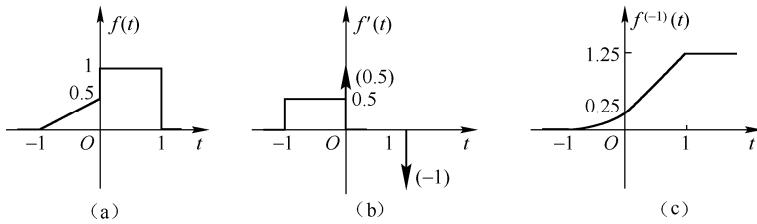


图 2-3-7 例 2-3-5 用图

解: 根据微分与积分的定义及其几何含义, 易画出  $f'(t)$  与  $f^{(-1)}(t)$  的波形, 分别如图 2-3-7 (b) 和 (c) 所示。

### 2.3.2.3 差分与累加

信号差分与累加针对的是离散时间信号, 分别对应于连续时间信号的微分与积分。连续时间信号的微分和积分可以将其离散化后分别用差分和累加近似。

$f(k)$  的一阶前向差分记为  $\Delta f(k)$ , 定义为

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) \quad (2-3-1)$$

$f(k)$  的一阶后向差分记为  $\nabla f(k)$ , 定义为

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1) \quad (2-3-2)$$

以此类推,  $f(k)$  的二阶前向差分  $\Delta^2 f(k)$  和二阶后向差分  $\nabla^2 f(k)$  分别为

$$\Delta^2 f(k) = \Delta(\Delta f(k)) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) \quad (2-3-3)$$

$$\nabla^2 f(k) = \nabla(\nabla f(k)) = \nabla f(k+1) - \nabla f(k) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2) \quad (2-3-4)$$

例 2-3-6 求  $\Delta \varepsilon(k)$  和  $\nabla \varepsilon(k)$ 。

解:  $\Delta \varepsilon(k) = \varepsilon(k+1) - \varepsilon(k) = \delta(k+1)$ ;  $\nabla \varepsilon(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) = \delta(k)$

信号  $f(k)$  的累加运算定义为

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^k f(n) \quad (2-3-5)$$

## 2.4 卷积积分

### 2.4.1 卷积积分的定义及其性质

卷积积分是针对连续时间信号的运算。 $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的卷积积分记做  $f_1(t) * f_2(t)$ , 定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (2-4-1)$$

卷积积分具有如下性质。

#### (1) 卷积代数

卷积积分满足交换律、分配律和结合律, 即

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2-4-2)$$

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2-4-3)$$

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2-4-4)$$

## (2) 卷积的比例性与时移性

若  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，则

$$f_1(at) * f_2(at - t_0) = \frac{1}{|a|} y(at - t_0) \quad (2-4-5)$$

特别是当  $a = -1$ ， $t_0 = 0$  时有

$$f_1(-t) * f_2(-t) = y(-t) \quad (2-4-6)$$

## (3) 卷积的微积分性

若  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，则

$$f_1^{(i)}(t) * f_2^{(j)}(t) = y^{(i+j)}(t) \quad (2-4-7)$$

式中， $i$ 、 $j$  和  $i+j$  为整数，可正可负。当它们为正整数时，表示导数的阶数；为负整数时，表示重积分的次数。应用上述性质时， $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  均应为可积函数。

由式 (2-4-7) 可得以下几种特殊情形：

$$f_1'(t) * f_2(t) = y'(t) \quad (2-4-8)$$

$$f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = y^{(-1)}(t) \quad (2-4-9)$$

$$f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = y(t) \quad (2-4-10)$$

## (4) 含有冲激信号的卷积积分

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (2-4-11)$$

特别是当  $t_0 = 0$  时有

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2-4-12)$$

此式表明，任意信号  $f(t)$  可以表示为具有强度为  $f(\tau) d\tau$  的冲激信号  $[f(\tau) d\tau] \delta(t - \tau)$  的积分，也就是说，任意信号  $f(t)$  可以分解为连续的冲激信号之和。

## 2.4.2 卷积积分的计算

### 2.4.2.1 解析法

解析法是由卷积积分的定义直接进行解析求解的一种方法。此方法有两个关键点：一是被积函数非零积分区间的确定；二是时间  $t$  的定义域。下面结合例子来予以说明。

**例 2-4-1**  $f_1(t) = e^{-2t} \varepsilon(t+1)$ ， $f_2(t) = \varepsilon(t-2)$ ，求  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

解：由卷积积分的定义，有

$$\begin{aligned} y(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} \varepsilon(\tau+1) \varepsilon(t - \tau - 2) d\tau \\ &= \int_{-1}^{t-2} e^{-2\tau} d\tau \cdot \varepsilon[t - 2 - (-1)] \\ &= \frac{1}{2} e^2 (1 - e^{-2(t-1)}) \varepsilon(t-1) \end{aligned}$$

从此例可以看出，被积函数非零积分区间可利用阶跃信号截取信号的能力来确定，譬如  $e^{-2\tau} \varepsilon(\tau+1) \varepsilon(t - \tau - 2)$  非零的条件应为  $(\tau+1) > 0$  且  $(t - \tau - 2) > 0$ ，即  $-1 < \tau < t - 2$ 。另外，时间  $t$  的定义域为被积函数非零积分区间存在的  $t$  的取值范围，即上限应大于下限。譬如  $-1 < t - 2$  即  $t > 1$ ，

等同于  $\varepsilon(t-1)$ 。也就是说，只有在  $t > 1$  时才会有  $-1 < \tau < t-2$  成立，否则被积函数不存在非零积分区间，积分结果自然也就为零。

### 2.4.2.2 图解法

图解法是借助图形确定卷积积分的方法。若求  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，涉及以下几个步骤。

- (1) 改换变量:  $f_1(t) \rightarrow f_1(\tau)$ ,  $f_2(t) \rightarrow f_2(\tau)$
- (2) 折叠:  $f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$
- (3) 时移:  $f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t-\tau)$
- (4) 相乘:  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$
- (5) 积分:  $\int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$ , 其中  $t_1$  和  $t_2$  构成  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  非零的积分区间

例 2-4-2 如图 2-4-1 所示  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ ，求  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

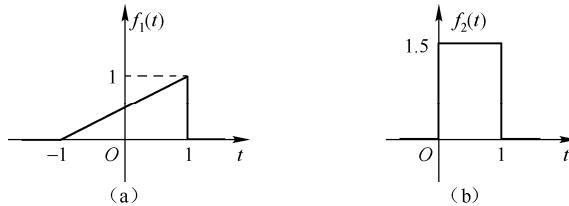


图 2-4-1 例 2-4-2 用图

解: (1) 改换变量:  $f_1(t) \rightarrow f_1(\tau)$ ,  $f_2(t) \rightarrow f_2(\tau)$ , 波形与图 2-4-1 相同, 只是把其中的自变量改成  $\tau$ ;

- (2) 折叠:  $f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$ , 如图 2-4-2 (a) 所示;
- (3) 时移:  $f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t-\tau)$ , 如图 2-4-2 (b) 所示;

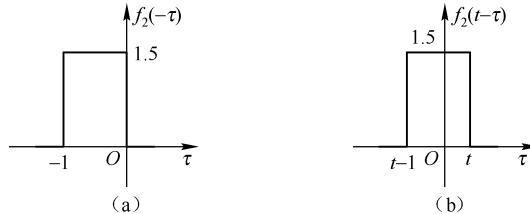


图 2-4-2  $f_1(-\tau)$  和  $f_2(t-\tau)$  的波形

- (4) 相乘:  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ , 如图 2-4-3 所示;
- (5) 积分: 对图 2-4-3 中各种情况求积分, 即阴影部分的面积。

- 1) 当  $t < -1$  时, 如图 2-4-3 (a) 所示:  $y(t) = 0$
- 2) 当  $t \dots -1$  且  $t-1 < -1$ , 即  $-1 \dots t < 0$  时, 如图 2-4-3 (b) 所示:  $y(t) = \frac{3}{8}(t+1)^2$
- 3) 当  $t-1 > -1$  且  $t < 1$ , 即  $0 < t < 1$  时, 如图 2-4-3 (c) 所示:  $y(t) = \frac{3}{8}(2t+1)$
- 4) 当  $t \dots 1$  且  $t-1 < 1$ , 即  $1 \dots t < 2$  时, 如图 2-4-3 (d) 所示:  $y(t) = \frac{3}{8}(4-t^2)$
- 5) 当  $t-1 \dots 1$  即  $t \dots 2$  时, 如图 2-4-3 (e) 所示:  $y(t) = 0$

于是可画出  $y(t)$  的波形, 如图 2-4-3 (f) 所示。

例 2-4-3 如图 2-4-4 所示  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 若  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 求  $y(0.5)$ 。

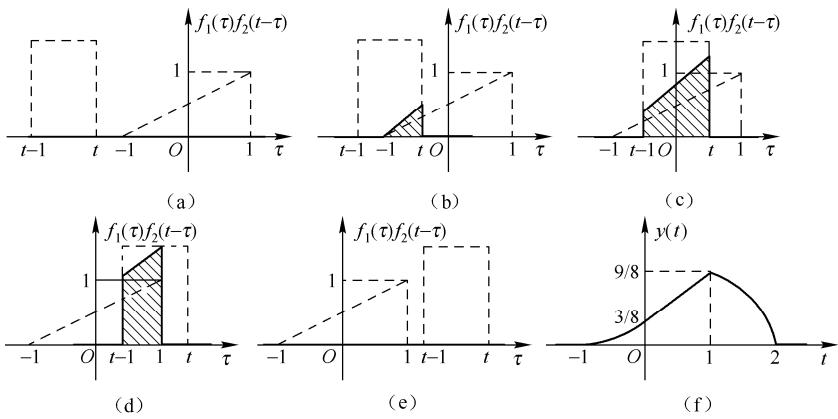


图 2-4-3  $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$  的波形以及  $y(t)$  的波形

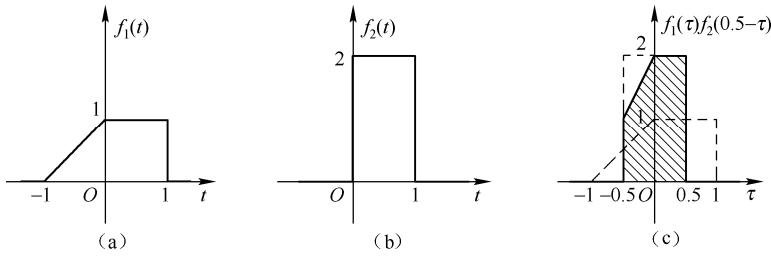


图 2-4-4 例 2-4-3 用图

解: 由  $y(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ , 知  $y(0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(0.5-\tau)d\tau$ 。

根据图解法, 可画出  $f_1(\tau)f_2(0.5-\tau)$  的波形, 如图 2-4-4 (c) 所示, 而  $y(0.5)$  即为其中阴影部分的面积, 于是得

$$y(0.5) = \frac{1}{2}(1+2) \times 0.5 + 0.5 \times 2 = \frac{7}{4}$$

由上述例子不难看出, 图解法比较直观, 易于确定非零积分区间以及时间  $t$  的定义域。不过, 当参与卷积积分的两个信号在多个分段区间上有定义时, 图解法是比较烦琐的。

### 2.4.2.3 借助性质

在某些情况下, 利用卷积积分的性质可以大大简化卷积积分的计算, 其中尤其以微积分性以及含有冲激信号的卷积积分为基础。

**例 2-4-4** 对例 2-4-2, 借助卷积积分性质重新求解。

解: 由卷积积分的微积分性, 有

$$\begin{aligned} y(t) &= f_1(t) * f_2(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2'(t) = f_1^{(-1)}(t) * [1.5\delta(t) - 1.5\delta(t-1)] \\ &= 1.5f_1^{(-1)}(t) - 1.5f_1^{(-1)}(t-1) \end{aligned}$$

相应的波形如图 2-4-5 所示。

**例 2-4-5** 如图 2-4-6 (a) 和 (b) 所示  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的波形, 试求  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

解: 此例不能直接利用微积分性质, 因为  $f_1(t)$  不可积。不过,  $f_1(-t)$  却是可积的, 因此可以利用式 (2-4-6) 先求出  $y(-t)$ , 然后折叠得  $y(t)$ 。求解过程如图 2-4-7 所示。

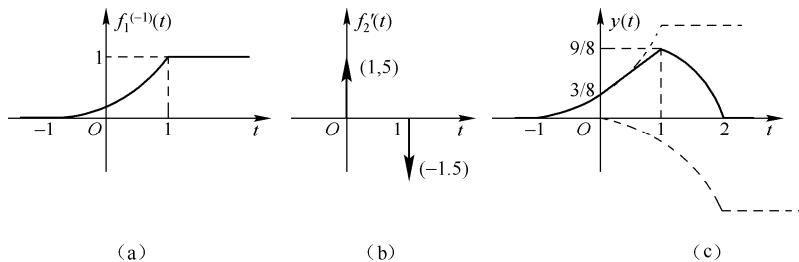


图 2-4-5 例 2-4-4 借助性质求卷积积分示意图

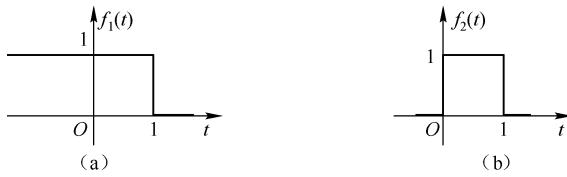


图 2-4-6 例 2-4-5 用图

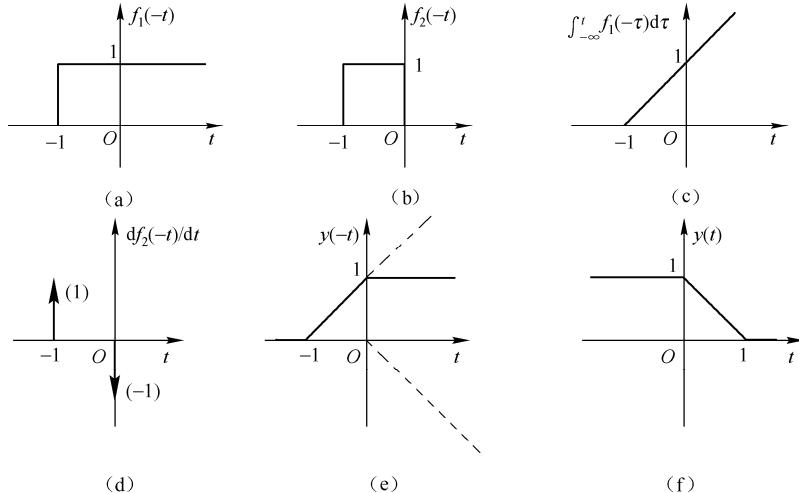


图 2-4-7 例 2-4-5 卷积积分示意图

## 2.5 卷 积 和

### 2.5.1 卷积和的定义及其性质

卷积和（简称卷和）是针对离散时间信号的运算。 $f_1(k)$  和  $f_2(k)$  的卷积和记做  $f_1(k)*f_2(k)$ ，定义为

$$f_1(k)*f_2(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)f_2(k-n) \quad (2-5-1)$$

与连续信号的卷积积分类似，序列的卷积和具有如下性质。

(1) 卷积代数

卷积和满足交换律、分配律和结合律，即

$$f_1(k) * f_2(k) = f_2(k) * f_1(k) \quad (2-5-2)$$

$$f_1(k) * [f_2(k) + f_3(k)] = f_1(k) * f_2(k) + f_1(k) * f_3(k) \quad (2-5-3)$$

$$[f_1(k) * f_2(k)] * f_3(k) = f_1(k) * [f_2(k) * f_3(k)] \quad (2-5-4)$$

(2) 移位性

若  $y(k) = f_1(k) * f_2(k)$ ，则

$$f_1(k - m_1) * f_2(k - m_2) = y(k - m_1 - m_2) \quad (2-5-5)$$

(3) 含有单位序列的卷积和

$$f(k) * \delta(k - m) = f(k - m) \quad (2-5-6)$$

## 2.5.2 卷积和的计算

### 2.5.2.1 解析法

解析法是由卷积和的定义直接进行解析求解的一种方法。其中求和序列非零求和区间以及  $k$  的定义域的确定与卷积积分类似。

例 2-5-1  $f_1(k) = 2^k \varepsilon(k+1)$ ， $f_2(k) = \varepsilon(k-2)$ ，求  $y(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 。

解：由卷积和的定义，有

$$\begin{aligned} y(k) &= f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n) f_2(k-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \varepsilon(n+1) \varepsilon(k-n-2) \\ &= \sum_{n=-1}^{k-2} 2^n \varepsilon[k-2-(-1)] = (2^{k-2} - 0.5) \varepsilon(k-1) \end{aligned}$$

### 2.5.2.2 图解法

图解法是借助图形确定卷积和的方法。与卷积积分类似，求解步骤涉及改换变量、折叠与移位、相乘、求和等。

例 2-5-2 如图 2-5-1 所示  $f_1(k)$  和  $f_2(k)$ ，求  $y(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 。

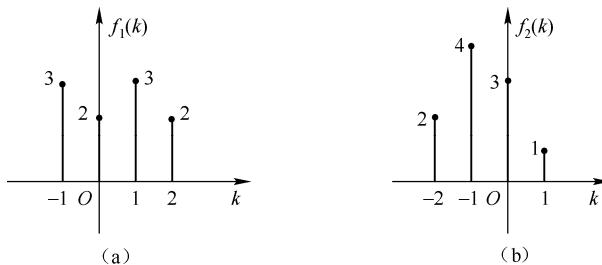


图 2-5-1 例 2-5-2 用图

解：(1) 改换变量： $f_1(k) \rightarrow f_1(n)$ ， $f_2(k) \rightarrow f_2(n)$ ，波形与图 2-5-1 相同，只是把其中的自变量改成  $n$ ；

(2) 折叠： $f_2(n) \rightarrow f_2(-n)$ ，如图 2-5-2 (a) 所示；

(3) 移位： $f_2(-n) \rightarrow f_2(k-n)$ ，如图 2-5-2 (b) 所示；

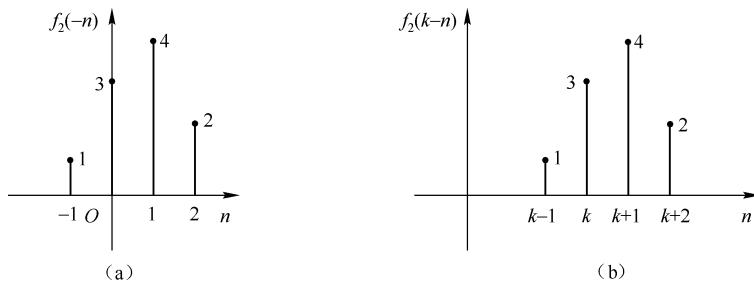


图 2-5-2 序列  $f_2(-n)$  和  $f_2(k-n)$

(4) 相乘:  $f_1(n)f_2(k-n)$ 。 $f_1(n)f_2(k-n)$  随  $k$  的不同取值而不同。如图 2-5-3 (a)、(b) 和 (c) 分别对应  $k = -3$ 、 $k = -1$  和  $k = 1$  的情形;

(5) 求和: 将  $f_1(n)f_2(k-n)$  在各  $n$  时刻下的值求和。譬如, 对图 2-5-3 所示的各种情形:

$k = -3$  时,  $y(k) = 6$ ;

$k = -1$  时,  $y(k) = 9 + 8 + 6 = 23$ ;

$k = 1$  时,  $y(k) = 2 + 9 + 8 = 19$ 。

从而可得

$$y(k) = \{6, 16, 23, 25, 19, 9, 2\}$$

其中下面有符号 “↑” 的数值是序列在  $k = 0$  时的数值。

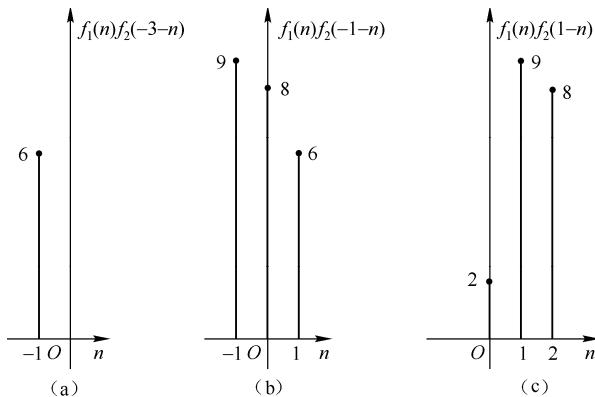


图 2-5-3 序列  $f_1(n)f_2(k-n)$

### 2.5.2.3 不进位乘法

对于有限长序列的卷积和, 可以采用不进位乘法。此方法与通常意义上两个数的乘法类似, 只是相乘和相加均不进位。

例 2-5-3 对例 2-5-2, 采用不进位乘法重新求解。

解: 由例 2-5-2 知:  $f_1(k) = \{3, 2, 3, 2\}$ ,  $f_2(k) = \{2, 4, 3, 1\}$ , 从而可列出如下不进位乘法算式。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ \times & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 6 \\ 12 & 8 & 12 & 8 \\ + & 6 & 4 & 6 & 4 \\ \hline 6 & 16 & 23 & 25 & 19 & 9 & 2 \end{array}
 \end{array}$$

于是可得:  $y(k) = \{6, 16, 23, 25, 19, 9, 2\}$

## 2.6 系统及其分类

### 2.6.1 系统的概念

系统是由一些“单元”按照一定规则相互连接而成、具有一定功能的有机整体，譬如生态系统、通信系统、电力系统、交通系统等。复杂的电路通常称为电网络或电系统。可以从以下三个方面来理解系统。

(1) 单元和系统之间没有明显的界限，它们是相对而言的。一个单元可以看成是一个系统；一个系统相对于由此而构成的更大系统而言则可以看成是一个单元。例如，一个音频放大器可以看成一个系统，因为它是由电阻、电感、电容、晶体管等元件所组成的；然而，它在扩音机系统中却可以被视为一个单元。

(2) 单元之间按照一定的规则相互连接而成，不同的连接规则和连接方式所组成的系统亦不同。譬如，同样是电阻、电感、电容、晶体管等元件，按某种连接规则和方式可以组成一个放大器，按另一种连接规则和方式可以组成一个振荡器。

(3) 系统具有一定的功能。系统功能是系统对外部环境而言所表现出来的某种特性。例如，信息系统的功能是进行信息的收集、传递、存储、加工等。通常把系统的操作对象称为系统的输入或激励，而把经过系统处理的结果称为系统的输出或响应。

系统分析的重点是分析系统输入与输出之间的关系，而不涉及系统的内部情况。因此，可以用一个方框来表示一个系统，如图 2-6-1 所示。其中， $f(t)$  或  $f(k)$  是系统的输入， $y(t)$  或  $y(k)$  是系统的输出，箭头表示信号的流向，方框中的  $S$  既是系统的符号，又是表征系统主要特性的某种运算，即输入信号经过系统的某种运算得到输出，如式 (2-6-1) 所示。

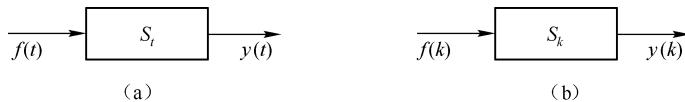


图 2-6-1 单输入单输出系统

$$\begin{cases} y(t) = S_t[f(t)] \\ y(k) = S_k[f(k)] \end{cases} \quad (2-6-1)$$

相加、相乘、倍乘、延时（或移序）和积分单元是系统的基本运算单元，其方框图及其运算如图 2-6-2 所示（离散时间信号相应的运算类似）。

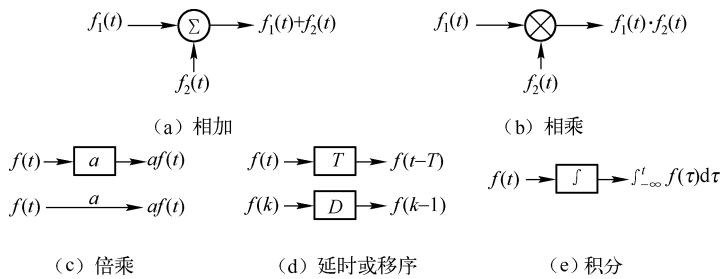


图 2-6-2 系统的基本运算单元

譬如, 如图 2-6-3 所示系统, 其输入与输出之间的关系为

$$\text{图 2-6-3 (a) 所示系统: } \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 f(t)$$

$$\text{图 2-6-3 (b) 所示系统: } \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{df(t)}{dt} - b_0 f(t)$$

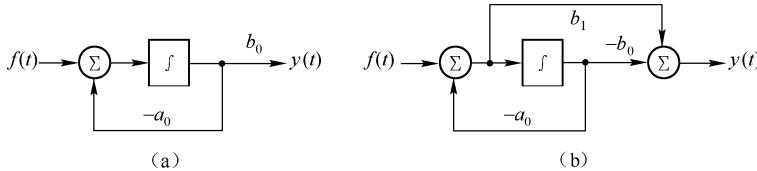


图 2-6-3 基本运算单元构成的系统实例

## 2.6.2 系统的分类

### 2.6.2.1 连续时间系统与离散时间系统

输入和输出均为连续时间信号的系统称为连续时间系统; 输入和输出均为离散时间信号的系统称为离散时间系统。模拟通信系统为连续时间系统, 而数字计算机则为离散时间系统。

### 2.6.2.2 线性系统与非线性系统

线性系统是指具有线性特性的系统。线性特性包含两个方面的内容: 齐次性和叠加性。若系统输入增大为原先的  $K$  倍, 则输出也增大为原先的  $K$  倍, 此为齐次性; 若有多个输入共同作用于系统, 而系统总的输出等于每一个输入单独作用所引起的输出之和, 此为叠加性。譬如, 对连续时间系统 (如图 2-6-4 所示), 数学表示如式 (2-6-2) 所示。

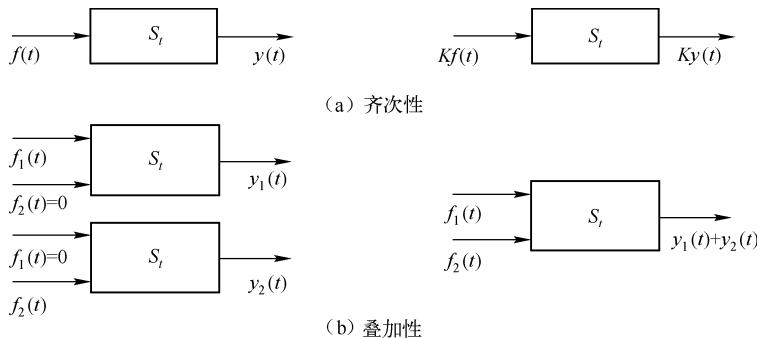


图 2-6-4 齐次性和叠加性

$$\begin{cases} f_1(t) & \rightarrow y_1(t) \\ f_2(t) & \rightarrow y_2(t) \\ K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t) & \rightarrow K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) \end{cases} \quad (2-6-2)$$

一个系统的输出不仅与输入有关, 还与系统的初始状态 (初始储能) 有关。其中, 初始状态为零时仅由输入引起的响应称为零状态响应; 输入为零时仅由初始状态引起的响应称为零输入响应。因此, 线性系统必须具有:

- (1) 分解性。系统响应=零输入响应+零状态响应;
- (2) 零输入线性。当系统有多个初始状态时, 零输入响应对每个初始状态呈现线性;
- (3) 零状态线性。当系统有多个输入时, 零状态响应对每个输入呈现线性。

**例 2-6-1** 判别如下系统是否为线性系统并说明理由。其中  $f(t)$  为激励,  $q(0)$  为初始状态,  $y(t)$  为  $t > 0$  时的响应。

$$(1) \quad y(t) = q(0)f(t)$$

$$(2) \quad y(t) = q^2(0) + f(t)$$

$$(3) \quad y(t) = q(0) + \frac{d}{dt}f(t)$$

$$(4) \quad y(t) = q(0) + |f(t)|$$

解: (1) 非线性。不满足分解性;

(2) 非线性。零输入响应  $q^2(0)$  非线性;

(3) 线性。满足线性条件;

(4) 非线性。零状态响应  $|f(t)|$  非线性。

### 2.6.2.3 时变系统与时不变系统

在初始状态不变的前提下, 若系统输出与激励施加于系统的时刻无关, 这种性质称为时不变性。具有时不变性的系统称为时不变系统, 如图 2-6-5 所示, 数学表示如式 (2-6-3) 所示; 反之称为时变系统。



图 2-6-5 时不变性

$$\begin{cases} f(t) \rightarrow y(t) \\ f(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0) \end{cases} \quad (2-6-3)$$

**例 2-6-2** 判别如下系统是否为时不变系统并说明理由。其中  $f(t)$  为激励,  $y(t)$  为响应。

$$(1) \quad y(t) = tf(t)$$

$$(2) \quad y(t) = \frac{d}{dt}f(t)$$

$$(3) \quad y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$(4) \quad y(t) = |f(t)|$$

解: (1) 时变。 $f(t-t_0) \rightarrow tf(t-t_0) \neq y(t-t_0)$

$$(2) \text{ 时不变。 } f(t-t_0) \rightarrow \frac{d}{dt}f(t-t_0) = \frac{d}{d(t-t_0)}f(t-t_0) = y(t-t_0)$$

$$(3) \text{ 时变。 } f(t-t_0) \rightarrow \int_0^t f(\tau-t_0) d\tau = \int_{-t_0}^{t-t_0} f(\xi) d\xi \neq y(t-t_0)$$

$$(4) \text{ 时不变。 } f(t-t_0) \rightarrow |f(t-t_0)| = y(t-t_0)$$

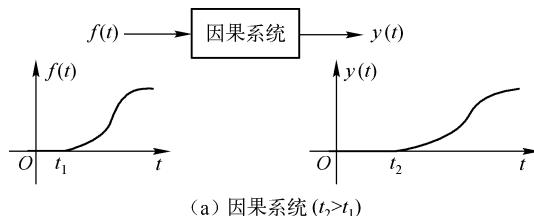
另外, 线性时不变 (LTI) 系统除了具有上述线性和时不变性外, 对于其零状态响应还具有微积分性, 即将激励信号微分或积分, 则响应也相应地进行微分或积分, 数学表达如下:

$$\begin{cases} f(t) \rightarrow y_{zs}(t) \\ \frac{df(t)}{dt} \rightarrow \frac{dy_{zs}(t)}{dt} \\ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^t y_{zs}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2-6-4)$$

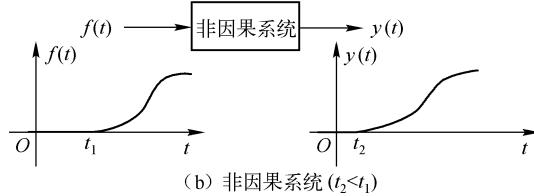
### 2.6.2.4 因果系统与非因果系统

因果系统是指响应不会领先于激励的一类系统, 即系统在没有施加激励以前, 响应为零。譬如, 图 2-6-6 (a) 所示为因果系统, 而图 2-6-6 (b) 所示为非因果系统, 其中  $f(t)$  为激励,  $y(t)$  为响应。实际可实现的物理系统均为因果系统; 非因果系统不是真实系统。

另外, 借用“因果”这一名词, 常把  $t < 0$  或  $k < 0$  时,  $f(t) = 0$  或  $f(k) = 0$  的信号称为因果信号, 否则称为非因果信号。譬如,  $t\varepsilon(t-1)$  为因果信号, 而  $e^{-2t}\varepsilon(t+2)$  为非因果信号。



(a) 因果系统 ( $t_2 > t_1$ )



(b) 非因果系统 ( $t_2 < t_1$ )

图 2-6-6 因果系统与非因果系统示意图

### 2.6.2.5 稳定系统与不稳定系统

稳定系统是指对于任意有界激励均产生有界响应的系统。如果系统存在某一有界激励产生无界响应，则称其为不稳定系统。稳定性是系统的固有特性，与激励信号的情形无关。

### 2.6.3 系统的数学模型

描述系统输入-输出关系的数学表达式称为系统的数学模型。静态系统的数学模型为代数方程，动态系统的数学模型为微分方程或差分方程。代数方程的解（即输出）只与输入有关，而微分方程或差分方程的解由输入和初始条件共同决定。

动态连续时间系统的数学模型为微分方程。对于线性时不变（LTI）连续时间系统，其数学模型为常系数线性微分方程，即

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (2-6-5)$$

动态离散时间系统的数学模型为差分方程。对于 LTI 离散时间系统，其数学模型为常系数线性差分方程，即

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) \\ = b_m f(k+m) + b_{m-1} f(k+m-1) + \cdots + b_1 f(k+1) + b_0 f(k) \end{aligned} \quad (2-6-6)$$

或者

$$\begin{aligned} a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) \\ = b_m f(k-m) + b_{m-1} f(k-m+1) + \cdots + b_1 f(k-1) + b_0 f(k) \end{aligned} \quad (2-6-7)$$

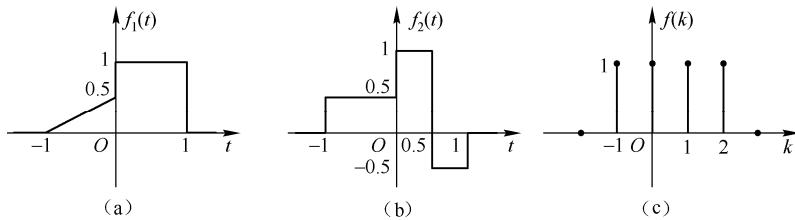
式 (2-6-6)、式 (2-6-7) 分别称为前向差分方程和后向差分方程。对于同一系统，既可以用前向差分方程描述，也可以用后向差分方程描述，两者是等价的。

## 练习题

### A. 基本概念类

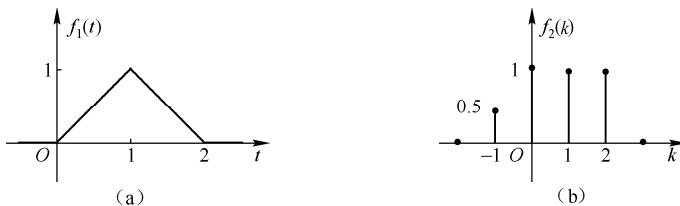
2-1 说明信号的时域特性和频域特性。

- 2-2 信号有哪几种分类方式?
- 2-3 说明单位阶跃信号与单位冲激信号之间的关系。
- 2-4 单位冲激信号的性质有哪些? 举例说明。
- 2-4 解释信号几种波形变换的几何含义。
- 2-5 信号同时存在多种波形变换时需要注意什么?
- 2-6 解释信号微分与积分的几何含义。
- 2-7 卷积积分和卷积求和的计算方法分别有哪些? 说明其适用条件。
- 2-8 用解析法计算卷积积分和卷积求和时如何确定非零积分区间或非零求和区间和时间的定义域?
- 2-9 系统有哪几种分类方式?
- 2-10 如何判断系统的线性性、时变性、因果性和稳定性? 举例说明。
- 2-11 线性时不变系统有何特性?
- 2-12 说明描述连续时间系统和离散时间系统的数学模型。
- B. 分析计算类**
- 2-13 画出下列各信号。
- (1)  $t\varepsilon(t+1)$       (2)  $(1-t)[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]$       (3)  $(t-1)\varepsilon(t-1)$   
 (4)  $2k\varepsilon(k+1)$       (5)  $(k+1)[\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-1)]$       (6)  $(k-1)\varepsilon(k-1)$
- 2-14 试写出题图 2-1 所示各信号的表达式。



题图 2-1

- 2-15 求解下列各式。
- (1)  $\cos(\pi t) \cdot \delta(t+1)$       (2)  $e^{-2t} \delta(t)$       (3)  $(t-1)\delta(t-1)$   
 (4)  $\int_{-\infty}^{\infty} 2t \delta(t-2) dt$       (5)  $\int_{-2}^1 (2t+2) \delta(t-1.5) dt$       (6)  $(2^k - 1)\delta(k-1)$
- 2-16 如题图 2-2 所示信号, 试画出下列各信号。
- (1)  $f_1(t-1)$       (2)  $f_1(-t+1)$       (3)  $f_1(-2t)$   
 (4)  $f_1(-0.5t+2)$       (5)  $f_2(k-2)$       (6)  $f_2(-k+1)$



题图 2-2

- 2-17 如题图 2-3 所示信号, 试画出下列各信号。

$$(1) \frac{d}{dt} f_1(t)$$

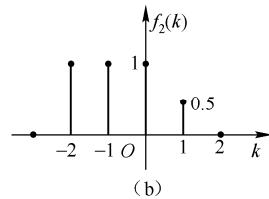
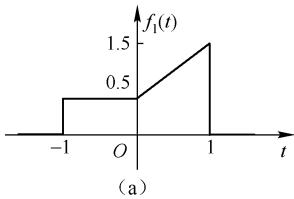
$$(2) \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau$$

$$(3) f_1(t) + f_1(-t+1)$$

$$(4) \Delta f_2(k)$$

$$(5) \sum_{n=-\infty}^k f_2(n)$$

$$(6) f_2(k) \cdot f_2(-k+1)$$



题图 2-3

2-18 试用解析法计算下列各式。

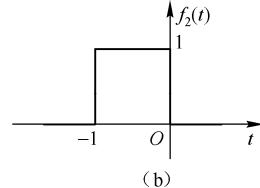
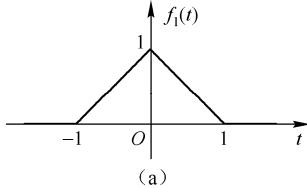
$$(1) e^{-2t} \varepsilon(t-1) * \varepsilon(t+1)$$

$$(2) t \varepsilon(t) * [\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)]$$

$$(3) 3^k \varepsilon(k-1) * 2^k \varepsilon(k+1)$$

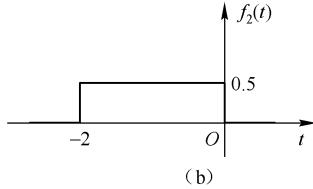
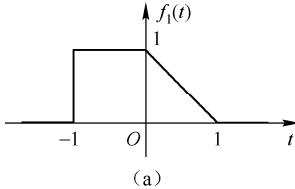
$$(4) 2^k \varepsilon(k) * [\varepsilon(k+1) - \varepsilon(k-1)]$$

2-19 如题图 2-4 所示信号, 试用图解法求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。



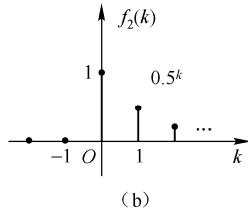
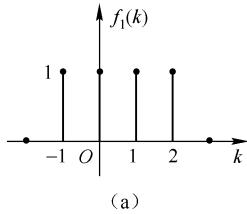
题图 2-4

2-20 如题图 2-5 所示信号  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 若  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 求  $y(-0.5)$ 。



题图 2-5

2-21 如题图 2-6 所示信号, 试用图解法求  $f_1(k) * f_2(k)$ 。



题图 2-6

2-22 计算下列各式。

$$(1) \cos(\pi t) * \delta(t-1)$$

$$(2) e^{-2(t+1)} \varepsilon(t-1) * [\delta(t+1) + \delta(t-1)]$$

$$(3) t\varepsilon(t) * [\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)]$$

$$(4) e^{-t} \varepsilon(t) * \varepsilon(t) * \delta(t-1)$$

$$(5) 2^k \varepsilon(k) * \delta(k-2)$$

$$(6) [\varepsilon(k+1) - \varepsilon(k-1)] * (-0.25)^k \varepsilon(k)$$

2-23 如题图 2-4 所示信号, 借助卷积积分的性质求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

2-24  $f_1(k) = \{-3, 2, -2, 6, 4\}$ ,  $f_2(k) = \{2, 4, 6, 3, 1\}$ , 采用不进位乘法求  $f_1(k) * f_2(k)$ 。

2-25 判别如下系统是否为线性系统, 是否为时不变系统, 并说明理由。其中  $f(t)$  或  $x(k)$  为激励,  $q(0)$  为初始状态,  $y(t)$  或  $y(k)$  为响应。

$$(1) y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

$$(2) y(t) = q(0) \frac{d}{dt} f(t)$$

$$(3) y(t) = e^{f(t)}$$

$$(4) y(t) = \sin t \cdot f(t)$$

$$(5) y(t) = 2q(0) + f(t)$$

$$(6) y(k) = f(-k)$$

$$(7) y(k) = |f(k)|$$

$$(8) y(k+1) + ky(k) = f(k)$$

$$(9) y(k) = \sum_{n=0}^k f(n)$$

2-26 某线性系统,  $f(t) = 0$ ,  $q(0) = 2$  时,  $y(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ ;  $f(t) = 2\varepsilon(t)$ ,  $q(0) = 0$  时,  $y(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$ , 求  $f(t) = 3\varepsilon(t)$ ,  $q(0) = -3$  时的  $y(t)$ 。

2-27 某线性时不变系统, 激励  $f(t) = 2\varepsilon(t)$  时的全响应  $y(t) = 6e^{-2t} + 7e^{-3t}$ ,  $t > 0$ ; 若初始状态不变,  $f(t) = 3\varepsilon(t)$  时的全响应  $y(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-3t}$ ,  $t > 0$ 。

(1) 求系统的零输入响应;

(2) 求系统在  $\delta(t)$  激励下的零状态响应。

# 第3章 电路、信号与系统相互关系及分析方法概述

本章介绍电路、信号与系统的相互关系，概述电路分析方法、信号分析方法、系统分析方法等。

## 3.1 电路、信号与系统的相互关系

### 3.1.1 电路与系统

系统的概念不局限于电路，它涉及的范围十分广泛，譬如生态系统、经济系统、管理系统等。本书研究由电路所构成的电路系统。

(1) 电路是电路系统功能的具体实现。给定系统的功能，可以有多种电路实现。譬如，多种功能相同的电子电气设备，其具体电路可以不一样。系统分析和设计更多关心的是系统对外所表现出来的功能和特性，常常将实现系统功能的具体电路视为一个黑匣子。

(2) 系统问题注意全局，电路问题则关心局部。例如，仅由一个电阻和一个电容组成的简单电路，在电路分析中，注意其各支路的电流和电压；而从系统的观点来看，可以研究它如何构成微分或积分功能的运算器。

### 3.1.2 信号、电路与系统

信号、电路与系统之间有着十分密切的联系。离开了信号，电路与系统将失去意义。电路系统中的信号通常是电路中的电压和电流。

(1) 作为消息的运载工具，信号需要电路或系统来实现传输和加工。从传输的观点来看，信号通过系统后，由于系统的运算作用而使信号的时间特性及频率特性发生变化，从而产生新的信号。从系统响应的观点来看，系统在信号的激励下，将必然做出相应的反应，从而完成系统的运算作用。

(2) 系统的主要任务是对信号进行传输与处理，分析系统的功能和特性必然首先涉及对信号的分析。信号分析与系统分析关系密切又各有侧重，信号分析侧重于讨论信号的表示、性质、特征；系统分析则着眼于系统的特性、功能。

(3) 信号类别取决于系统所要实现的功能。譬如，模拟通信系统要求输入信号和输出信号均为模拟信号，数字通信系统则要求输入信号和输出信号均是数字信号。另一方面，电路类型通常取决于系统输入与输出的信号类别，即针对系统输入和输出不同类别信号的特点，设计相应类型的电路。例如，各种类别信号的发生电路、用于处理模拟信号的模拟电路和用于加工数字信号的数字电路等。

## 3.2 线性时不变电路分析方法概述

电路的分析方法可分为两大类：一般分析法和简化电路的分析法。一般分析法是以多个电量

为自变量联立方程组，从而可同时求取多条支路的电压或电流，适用于简单电路和复杂电路的分析，亦是计算机辅助电路分析的基础。简化电路的分析法是将待求量所在支路之外的电路予以简化，然后求取单一支路上的电压或电流，适用于简单电路的分析。

另外，对于动态电路的分析，可采用时域经典法、时域卷积分析法和复频域分析法；对于正弦稳态电路的分析，可采用相量法。

### 3.2.1 一般分析法

#### 3.2.1.1 基本分析法（亦称为支路法）

电压和电流是电路分析的基本物理量，电路分析的目的通常是求解电路中各支路上的电流和支路两端的电压，分析的基本依据是电路中的两类约束：元件约束（VAR）和拓扑约束（KCL、KVL）。

VAR 表达了电路中元件两端电压及流过元件的电流之间的约束关系，这种约束关系用数学的方式定义了构成电路的各元件；KCL 和 KVL 分别表达了电路中各支路上电流之间的约束关系及各支路两端电压之间的约束关系，这种约束关系用数学的方式定义了电路的拓扑结构。

由两类约束出发，可得电路分析的基本数学模型，如式（3-2-1）所示，其中  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{i}$  分别为支路电压矢量和支路电流矢量。

$$\begin{cases} \text{VAR: } \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \mathbf{0} \\ \text{KCL: } \sum \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \text{KVL: } \sum \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-2-1)$$

此式中的方程相互独立，即不同类型约束的方程之间相互独立，同一类型约束的方程之间也相互独立。若电路的支路数为  $b$ ，节点数为  $n$ ，则变量总数为  $2b$ 。这样，方程总数为  $2b$ ，其中独立的 VAR 方程数为  $b$ ，独立的 KCL 方程数为  $n-1$ ，独立的 KVL 方程数为  $b-(n-1)$ 。

显然，基本分析法的方程数较多，求解较为烦琐。这可以通过改变待求量减少方程数，从而达到简化计算的目的。为此，通过改变待求量，基于式（3-2-1）可得其他变形分析法，如支路电流法、支路电压法、节点电压法、回路电流法等。

#### 3.2.1.2 支路电流法

支路电流法是以支路电流作为待求量的分析方法，其数学模型如式（3-2-2）所示，其中  $f_u(\cdot)$  函数实现由支路电流表示支路电压。与式（3-2-1）相比，减少了 VAR 方程，将其融入到 KVL 方程中。

$$\begin{cases} \text{KCL: } \sum \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \text{KVL: } \sum f_u(\mathbf{i}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-2-2)$$

#### 3.2.1.3 支路电压法

支路电压法是以支路电压作为待求量的分析方法，其数学模型如式（3-2-3）所示，其中  $f_i(\cdot)$  函数实现由支路电压表示支路电流。与式（3-2-1）相比，减少了 VAR 方程，将其融入到 KCL 方程中。

$$\begin{cases} \text{KCL: } \sum f_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \\ \text{KVL: } \sum \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-2-3)$$

#### 3.2.1.4 节点电压法

节点电压法是以节点电压作为待求量的分析方法，其数学模型如式（3-2-4）所示，其中  $f_n(\cdot)$

函数实现由节点电压表示支路电流。与式 (3-2-1) 相比, 减少了 VAR 方程, 将其融入到 KCL 方程中, 同时亦减少了 KVL 方程, 因为用节点电压表示支路电压后的 KVL 方程自然成立。

$$\text{KCL: } \sum f_n(u_n) = 0 \quad (3-2-4)$$

### 3.2.1.5 回路电流法

回路电流法是以回路电流作为待求量的分析方法, 其数学模型如式 (3-2-5) 所示, 其中  $f_l(\cdot)$  函数实现由回路电流表示支路电压。与式 (3-2-1) 相比, 减少了 VAR 方程, 将其融入到 KVL 方程中, 同时亦减少了 KCL 方程, 因为用回路电流表示支路电流后的 KCL 方程自然成立。

$$\text{KVL: } \sum f_l(I_l) = 0 \quad (3-2-5)$$

### 3.2.2 简化电路的分析法

电路的一般分析方法通常不改变原有电路结构, 一次可以求解多个量。如果一次只需要求解一个待求量, 则可采用等效变换分析法、戴维南定理或诺顿定理, 其基本思想是保留待求量所在支路, 将待求量所在支路外的电路简化为实际电压源或实际电流源, 如图 3-2-1 (a) 所示。

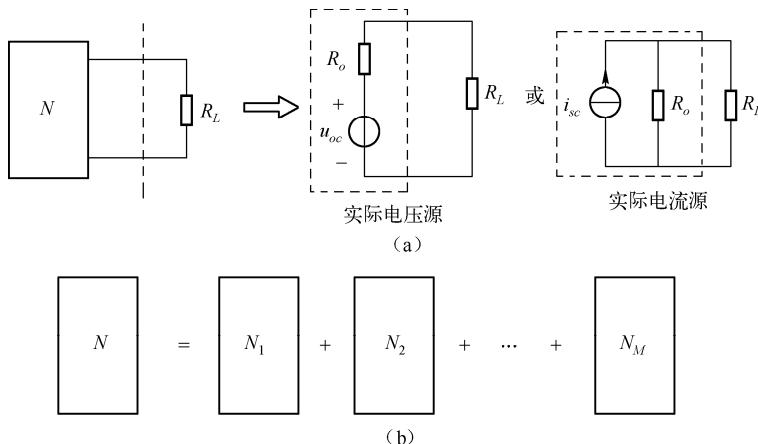


图 3-2-1 简化电路分析法

等效变换分析法采用逐步化简的方式将电路  $N$  简化为实际电压源或实际电流源; 戴维南定理和诺顿定理则直接结合上述分析法分别求取实际电压源和实际电流源中的两个参数。

叠加定理利用电路的线性特性, 将一个由多个独立源共同激励的电路  $N$  分解为每个独立源单独作用下的相对简单电路的叠加, 然后采用前述分析方法求取每个独立源单独作用下的响应, 再把它们予以叠加即可得多个独立源共同作用下的响应, 如图 3-2-1 (b) 所示。

### 3.2.3 动态电路的分析方法

#### 3.2.3.1 时域经典分析法

电路时域经典分析法的基本思想是建立描述电路响应(电压或电流)与激励关系的微分方程, 并对其进行直接求解。譬如, 对于一阶动态电路, 首先建立一阶微分方程, 即

$$\frac{dy(t)}{dt} + sy(t) = f(t) \quad (3-2-6)$$

式中,  $y(t)$  为响应,  $f(t)$  为激励及其导数的线性组合,  $s$  为实常数。然后对式 (3-2-6) 直接求解, 得

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \quad t > 0 \quad (3-2-7)$$

其中,  $y_h(t) = Ae^{-st}$  ( $A$  为待定系数) 为方程的通解或齐次解,  $y_p(t)$  为方程的特解。

特别地, 对于直流一阶动态电路, 其响应为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0 \quad (3-2-8)$$

式中,  $y(0_+)$ 、 $y(\infty)$ 、 $\tau$  等分别为初始值、终值、时间常数。按此式求取电路中任一响应的方法称为三要素法。采用三要素法求取直流一阶电路响应, 回避了建立微分方程、解方程、确定待定系数等烦琐的演算过程。

### 3.2.3.2 时域卷积分析法

电路时域卷积分析法是利用时域卷积积分求解电路零状态响应的一种分析法, 即

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \quad (3-2-9)$$

式中,  $y_{zs}(t)$  为电压或电流的零状态响应,  $f(t)$  为激励,  $h(t)$  为单位冲激信号  $\delta(t)$  作用下电路的零状态响应, 称为单位冲激响应。此方法克服了时域经典法中求解特解的困难。

### 3.2.3.3 复频域分析法

电路复频域分析法的基本思想是首先将电路时域模型转换为复频域模型, 求解电压或电流的复频域解, 然后得到相应的时域解。此方法回避了时域经典法中建立微分方程和求解特解的困难, 与时域卷积分析法相比, 除了能够求解零状态响应外, 也能求解零输入响应。而且, 在求解零状态响应方面, 通常也较时域卷积分析法简单。

可以采用 3.2.1 节和 3.2.2 节介绍的方法求取复频域模型中电压或电流的复频域解, 只不过是采用这些分析方法的复频域形式。另外, 由于复频域下的两类约束与直流稳态电路时域中的两类约束在形式上相似, 故各种分析法在复频域和时域也具有相似的形式。

### 3.2.4 相量法

相量法与动态电路复频域分析法类似。相量法用于分析正弦稳态电路, 其基本思想是首先将电路的时域模型转换为相量模型, 求取电压或电流的相量解, 然后得到相应的时域解。此方法回避了直接采用时域分析时三解函数的相加、相减、微分、积分等运算。

可以采用 3.2.1 节和 3.2.2 节介绍的方法求取电路相量模型中电压或电流的相量解, 只不过是采用这些分析方法的相量形式。由于相量形式的两类约束与直流稳态电路时域中的两类约束在形式上相似, 故各种分析法的相量形式和时域形式亦相似。

## 3.3 信号分析方法概述

从不同域来看, 信号具有不同的特性。譬如, 信号除了具有时域特性外, 还具有其他域的特性。信号分析方法是获取信号时域特性之外其他域特性的方法, 或者时域和其他域特性兼而有之的方法。

### 3.3.1 正变换

信号分析方法即对时域信号进行数学运算, 或者数学变换, 通常将时域信号变换为以其他量作为自变量的函数, 如式 (3-3-1) 所示。其中,  $T(\cdot)$  函数实现信号变换,  $\xi$  为变换之后的自变量, 不同的变换对应不同的自变量。通过这种变换, 进一步分析  $F(\xi)$  的特性。当然, 自变量可以既是

时间, 又是其他量。

$$F(\xi) = T[f(t)] \text{ 或 } T[f(k)] \quad (3-3-1)$$

本书重点介绍几种典型的变换: 傅里叶变换 (FT)、拉普拉斯变换 (LT)、z 变换 (ZT), 其中 FT 和 LT 针对的是连续时间信号, ZT 针对的是离散时间信号。

$$\text{FT: } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-3-2)$$

$$\text{LT: } F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3-3-3)$$

$$\text{ZT: } F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} \quad (3-3-4)$$

### 3.3.2 反变换

信号分析方法的逆过程 (即逆变换或反变换) 体现了信号的一种分解。不同逆变换所对应的基本分量不同。对应于 FT、LT、ZT, 其逆变换分别为 IFT、ILT、IZT, 相应基本分量为  $e^{j\omega t}$ 、 $e^{st}$ 、 $z^k$ 。譬如, 式 (3-3-5) 表明,  $f(t)$  可以分解为无限多个频率为  $\omega$ 、复振幅为  $\frac{F(\omega)}{2\pi} d\omega$  的指数分量  $e^{j\omega t}$  的连续和 (即积分)。

$$\text{IFT: } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-3-5)$$

$$\text{ILT: } f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (3-3-6)$$

$$\text{IZT: } f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz \quad (3-3-7)$$

## 3.4 线性时不变系统分析方法概述

线性时不变系统分析方法有两大类: 外部法, 内部法。

外部法又称为端口分析法, 适用于基于输入与输出关系描述的系统, 强调系统外部特性的分析, 不关心系统内部的情况。在描述系统输入与输出关系的数学模型已知的情况下, 可以采用直接法或间接法求取系统给定输入和初始状态下的输出。

内部法也称为状态变量分析法, 面向基于状态变量描述的系统, 分析系统内部状态的特性, 并通过状态变量将系统的输入和输出联系起来, 获得系统的外部特性。

### 3.4.1 直接法

直接法是对系统的微分方程或差分方程直接进行求解的一种方法。对于线性时不变系统, 通常分别求解零输入响应和零状态响应, 然后将二者相加即得到全响应, 如图 3-4-1 所示, 其中  $f(\cdot)$  为激励,  $y(\cdot)$  为全响应,  $y_{zi}(\cdot)$ 、 $y_{zs}(\cdot)$  分别表示零输入响应和零状态响应。

### 3.4.2 间接法

直接法的最大困难是求系统的零状态响应, 特别是其中的特解。间接法可分为两类: 时域间接法和变换域间接法, 如图 3-4-2 所示。

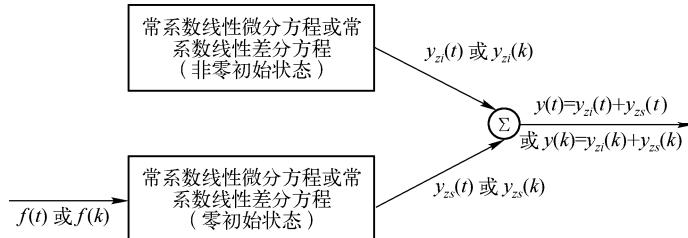


图 3-4-1 线性时不变系统的直接法

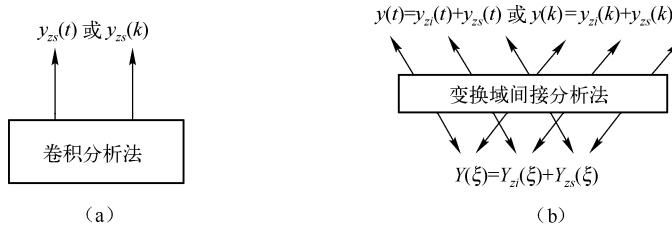


图 3-4-2 间接法

时域间接法即卷积分析法，对应于 LTI 连续时间系统和 LTI 离散时间系统，分别为卷积积分分析法和卷积和分析法，且仅用于求解系统的零状态响应。卷积积分分析法即上述介绍的电路时域卷积分析法，采用式 (3-2-9) 求系统的零状态响应；卷积和分析法采用下式求系统的零状态响应。

$$y_{zs}(k) = f(k) \times h(k) \quad (3-4-1)$$

式中， $y_{zs}(k)$  为系统的零状态响应， $f(k)$  为激励， $h(k)$  为单位序列  $\delta(k)$  作用下系统的零状态响应，称为单位函数响应。

基于前述信号分析法，变换域间接法先求解响应的变换域解，然后进行逆变换得到时域响应。部分变换域间接法既可以用于求解零状态响应，也可以用于求解零输入响应。

无论是时域间接法，还是变换域间接法，在求解系统零状态响应方面，其基本思想是一样的：(1) 把输入信号用基本分量进行分解；(2) 求取单位基本分量作用下的零状态响应；(3) 根据线性时不变系统的线性和时不变性，求取所有基本分量作用下的零状态响应和输入信号作用下的零状态响应。

各种分析法求解系统零状态响应的示意图分别如图 3-4-3~图 3-4-7 所示。

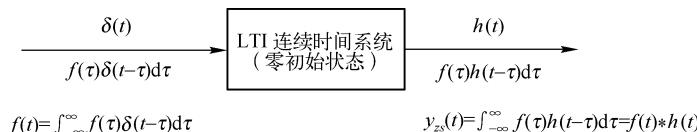


图 3-4-3 卷积积分分析法

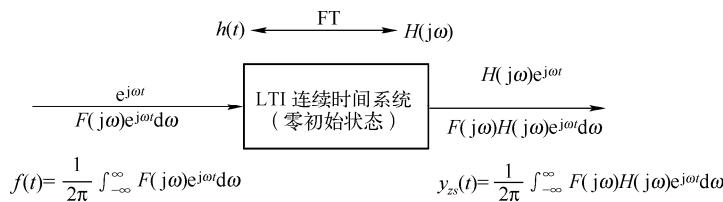


图 3-4-4 傅里叶变换分析法

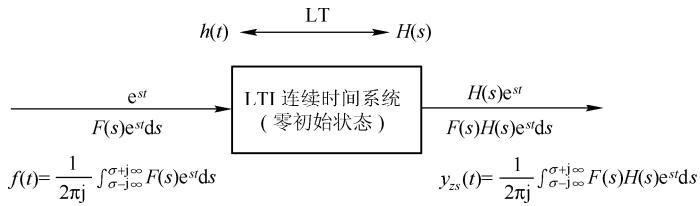


图 3-4-5 拉普拉斯变换分析法

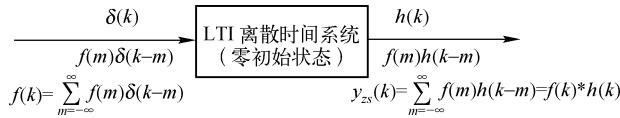


图 3-4-6 卷积和分析法

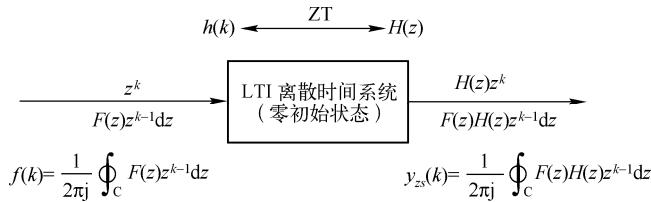


图 3-4-7 z 变换分析法

### 3.4.3 状态变量分析法

状态变量分析法强调系统内部特性的分析，其中系统用相互独立的一组变量（称为状态变量）来描述。对于动态的连续时间系统和离散时间系统而言，相应的数学模型分别为一阶微分方程组和一阶差分方程组，称为状态方程。由状态变量和输入表示输出的方程称为输出方程。

可以从时域直接求解状态方程和输出方程，也可以在变换域求解状态方程和输出方程得出状态变量和输出的变换域解，然后利用反变换求得相应的时域解。

## 练习题

- 3-1 简述电路、信号、系统三者之间的关系。
- 3-2 简述电路分析与系统分析的异同。
- 3-3 电路的一般分析法有哪些？请简要说明它们的基本思想。
- 3-4 电路简化分析法的基本思想是什么？简化电路的方法或手段有哪些？
- 3-5 信号分析的主要内容是什么，如何进行信号的分析？
- 3-6 系统的分析法有哪些？请简要说明它们的基本思想。

## 第4章 电路的等效变换分析

等效变换分析法的基本思想是将待求支路外接的较为复杂的部分经过一次或多次等效变换，化为非常简单的电路（或称为最简等效电路），然后列写一个 KCL 方程或一个 KVL 方程予以求解，从而避免了列写方程组和解方程组的烦琐过程。

本章介绍电路的等效变换分析法，涉及单口网络的等效条件、典型单口网络的等效化简、一般单口网络的等效化简、等效变换分析的应用等。

### 4.1 单口网络的等效条件

#### 4.1.1 单口网络的概念

单口网络是对外只有两个端钮的电路，亦称为二端网络，其图形符号如图 4-1-1（a）所示。如图 4-1-1（b）所示虚线方框部分为单口网络实例。如果单口网络  $N$  内部不含独立源，则称其为无源单口网络，通常用  $N_0$  表示。单口网络可以非常复杂，也可以非常简单，譬如一个二端元件。本章只讨论由电阻、受控源、独立源等构成的单口网络。

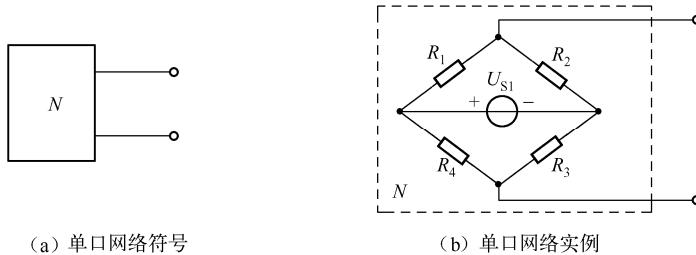


图 4-1-1 单口网络

#### 4.1.2 等效条件

如图 4-1-2 所示两单口网络  $N_1$  和  $N_2$ ，若其端口的电压电流关系（VAR）相同，则它们对外部（外电路）而言是等效的，它们的内部结构和元件参数可以完全不同。

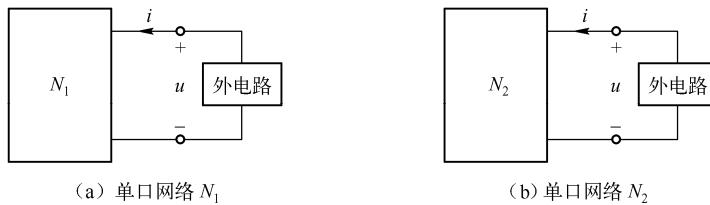


图 4-1-2 等效概念用图

具体讲，若  $N_1$  和  $N_2$  的端口伏安关系分别如式（4-1-1）和式（4-1-2）所示，则它们对任意外

电路而言等效的条件是式 (4-1-1) 和式 (4-1-2) 等价。

$$f_1(u, i) = 0 \quad (4-1-1)$$

$$f_2(u, i) = 0 \quad (4-1-2)$$

## 4.2 典型单口网络的等效化简

### 4.2.1 电阻与电导的串并联

#### 4.2.1.1 电阻的串联

如图 4-2-1 (a) 所示由  $n$  个电阻串联的单口网络, 其等效电路如图 4-2-1 (b) 所示。

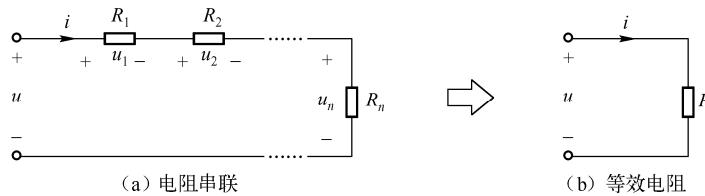


图 4-2-1 电阻串联及其等效电阻

根据 KVL, 如图 4-2-1 (a) 和 (b) 所示电路的端口伏安关系为

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i \quad (4-2-1)$$

$$u = R i \quad (4-2-2)$$

为使图 4-2-1 (a) 和 (b) 等效, 则有

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4-2-3)$$

此式表明, 多个电阻串联, 可以用一个电阻来等效, 其值为串联的多个电阻之和。

如图 4-2-1 (a) 中单个电阻上的电压可通过如下公式 (亦称为分压公式) 求取。

$$u_k = \frac{R_k}{R} u, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4-2-4)$$

#### 4.2.1.2 电导的并联

如图 4-2-2 (a) 所示由  $n$  个电导并联的单口网络, 其等效电路如图 4-2-2 (b) 所示。

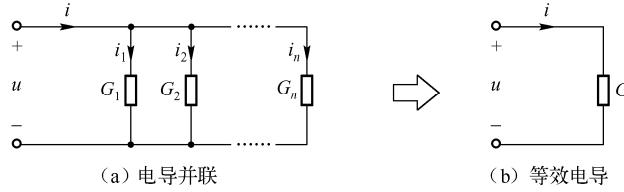


图 4-2-2 电导并联及其等效电导

根据 KCL, 如图 4-2-2 (a) 和 (b) 所示电路的端口伏安关系为

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = G_1 u + G_2 u + \dots + G_n u \quad (4-2-5)$$

$$i = G u \quad (4-2-6)$$

为使图 4-2-2 (a) 和 (b) 等效, 则有

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \quad (4-2-7)$$

此式表明, 多个电导并联, 可以用一个电导来等效, 其值为并联的多个电导之和。

图 4-2-2 (a) 中单个电导上的电流可通过如下公式 (亦称为分流公式) 求取。

$$i_k = \frac{G_k}{G} i, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4-2-8)$$

等效电阻  $R = 1/G$ 。特别地, 当  $n = 2$  时 (如图 4-2-3 所示), 有

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (4-2-9)$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \\ i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \end{cases} \quad (4-2-10)$$

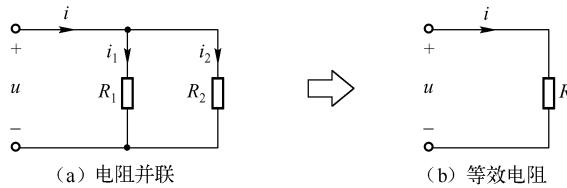


图 4-2-3 两电阻并联及其等效电阻

另外, 有时为了简化表达, 常用符号 “//” 来表示并联。譬如, 如图 4-2-3 (a) 所示电路的等效电阻  $R$  可表达为  $R = R_1 // R_2$ 。

#### 4.2.1.3 电阻的混联

既有串联又有并联的电阻电路称为混联电阻电路。混联电阻电路的等效电阻的计算一般可采用电阻的串、并联等效逐一化简而得。下面举例予以说明。

**例 4-2-1** 求如图 4-2-4 (a) 所示电路的等效电阻  $R_{ab}$ 。

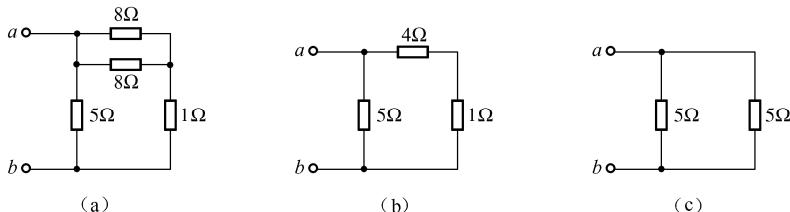


图 4-2-4 例 4-2-1 用图

**解:** 将如图 4-2-4 (a) 所示电路逐步进行串、并联等效化简, 可得到图 4-2-4 (b) 和 (c), 有

$$R_{ab} = 5 // 5 = 2.5\Omega$$

**例 4-2-2** 如图 4-2-5 (a) 所示电路,  $I_S = 1 \text{ A}$ 。

(1) 求开关  $K$  断开时的电压  $U_{cd}$  和  $U_{ab}$ ;

(2) 求开关  $K$  闭合时的电流  $I_{cd}$  和电压  $U_{ab}$ 。

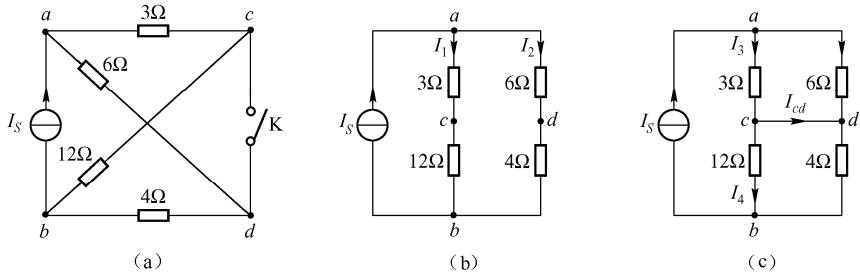


图 4-2-5 例 4-2-2 用图

解: (1) 当开关  $K$  断开时, 电路改画为如图 4-2-5 (b) 所示, 依据分流公式和 KCL, 有

$$I_1 = \frac{6+4}{(3+12)+(6+4)} \times 1 = 0.4 \text{ A}$$

$$I_2 = I_S - I_1 = 0.6 \text{ A}$$

从而

$$U_{cd} = U_{cb} - U_{db} = 12I_1 - 4I_2 = 12 \times 0.4 - 4 \times 0.6 = 2.4 \text{ V}$$

$$U_{ab} = (3+12)I_1 = 15 \times 0.4 = 6 \text{ V}$$

(2) 当开关  $K$  闭合时, 电路改画为如图 4-2-5 (c) 所示, 依据分流公式, 有

$$I_3 = \frac{6}{3+6} \times 1 = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{4}{12+4} \times 1 = \frac{1}{4} \text{ A}$$

从而

$$I_{cd} = I_3 - I_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ A}$$

$$U_{ab} = 3I_3 + 12I_4 = 3 \times \frac{2}{3} + 12 \times \frac{1}{4} = 5 \text{ V}$$

## 4.2.2 电阻的星形-三角形变换

如图 4-2-6 所示的电桥电路, 电阻之间的连接关系无法用串联或并联来描述, 因此也无法用串、并联进行等效化简。为此, 引入电阻的星形-三角形变换, 亦称  $T-\pi$  变换。电阻的星形 (Y) 联接和三角形 ( $\Delta$ ) 联接分别如图 4-2-7 (a) 和 (b) 所示。

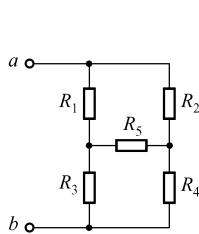


图 4-2-6 电桥电路

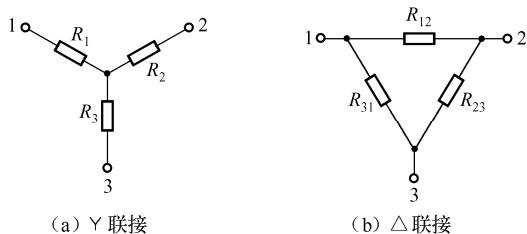


图 4-2-7 电阻的  $\text{Y}$  联接与  $\Delta$  联接

根据等效的定义,  $\text{Y}$  联接和  $\Delta$  联接等效的条件为任意对应两端的伏安关系等价, 即对应两端的等效电阻相等 (因为是纯电阻电路), 于是有

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = R_{12} // (R_{23} + R_{31}) \\ R_2 + R_3 = R_{23} // (R_{31} + R_{12}) \\ R_3 + R_1 = R_{31} // (R_{12} + R_{23}) \end{cases} \quad (4-2-11)$$

从而得到图 4-2-7 (a) 等效变换为图 4-2-7 (b) 的条件为

$$\begin{cases} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{cases} \quad (4-2-12)$$

相应地, 图 4-2-7 (b) 等效变换为图 4-2-7 (a) 的条件为

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases} \quad (4-2-13)$$

特别地, 当  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  时,  $R_{12} = R_{23} = R_{31} = 3R$ 。

基于上述电阻  $\text{Y}$  联接和  $\Delta$  联接的等效变换, 可画出如图 4-2-6 所示电桥电路的等效电路, 如图 4-2-8 所示。

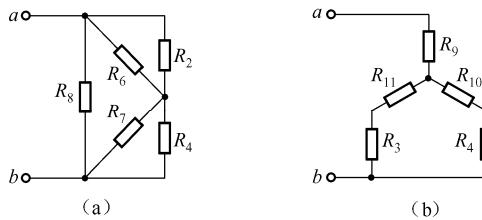


图 4-2-8 如图 4-2-6 所示电路的等效电路

其中,  $R_6 \sim R_{11}$  如下:

$$\begin{cases} R_6 = \frac{R_1 R_5 + R_5 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_7 = \frac{R_1 R_5 + R_5 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_8 = \frac{R_1 R_5 + R_5 R_3 + R_3 R_1}{R_5} \end{cases} \quad \begin{cases} R_9 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_5} \\ R_{10} = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} \\ R_{11} = \frac{R_5 R_1}{R_1 + R_2 + R_5} \end{cases}$$

从而得

$$R_{ab} = R_8 // [R_6 // R_2 + R_7 // R_4] = R_9 + (R_{11} + R_3) // (R_{10} + R_4)$$

### 4.2.3 理想电源的串并联

#### 4.2.3.1 理想电压源的串并联

如图 4-2-9 (a) 所示  $n$  个理想电压源串联的单口网络可用单个理想电压源等效, 如图 4-2-9 (b) 所示, 等效条件如下:

$$u_S = u_{S1} + u_{S2} + \dots + u_{Sn} \quad (4-2-14)$$

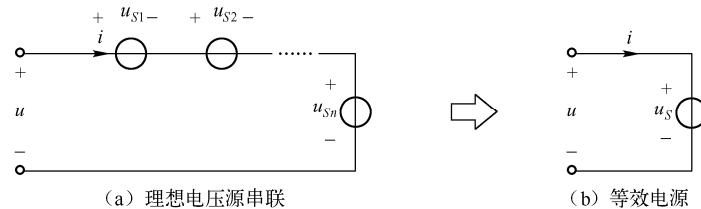


图 4-2-9 理想电压源串联及其等效电源

相同理想电压源的并联可用一个理想电压源等效, 而且理想电压源与任一单口网络的并联也可用一个理想电压源等效, 如图 4-2-10 所示。

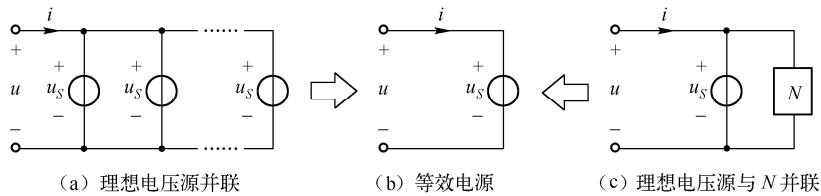


图 4-2-10 理想电压源并联及其等效电源

需要指出: 不同的理想电压源不能并联。

#### 4.2.3.2 理想电流源的串并联

如图 4-2-11 (a) 所示  $n$  个理想电流源并联的单口网络可用单个理想电流源等效, 如图 4-2-11 (b) 所示, 等效条件如下:

$$i_S = i_{S1} + i_{S2} + \dots + i_{Sn} \quad (4-2-15)$$

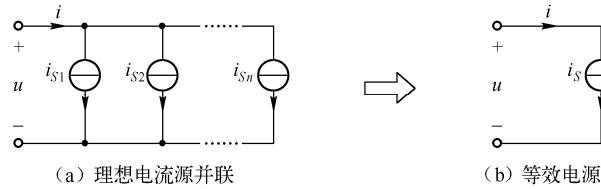


图 4-2-11 理想电流源并联及其等效电源

相同理想电流源的串联可用一个理想电流源等效, 而且理想电流源与任一单口网络的串联也可用一个理想电流源等效, 如图 4-2-12 所示。

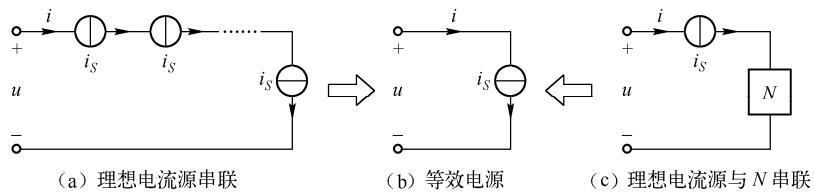


图 4-2-12 理想电流源串联及其等效电源

需要指出：不同的理想电流源不能串联。

例 4-2-3 如图 4-2-13 (a) 所示单口网络，试求其最简等效电路。

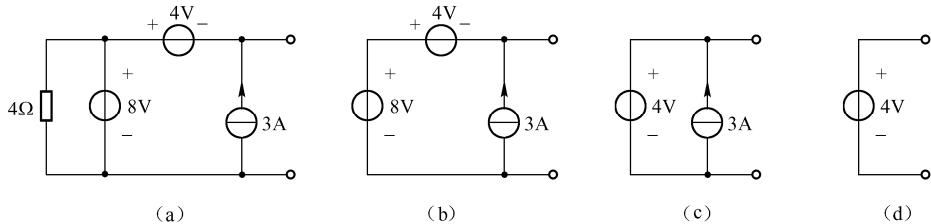


图 4-2-13 例 4-2-3 用图

解：(1) 如图 4-2-13 (a) 所示单口网络中 8V 理想电压源与  $4\Omega$  并联可等效为 8V 理想电压源，得到图 4-2-13 (b)；

(2) 图 4-2-13 (b) 中两个理想电压源串联等效为一个理想电压源，得到图 4-2-13 (c)；

(3) 图 4-2-13 (c) 中理想电压源与理想电流源并联等效为理想电压源，得到图 (d)，此图即为最简等效电路。

例 4-2-4 如图 4-2-14 (a) 所示单口网络，试求其最简等效电路。

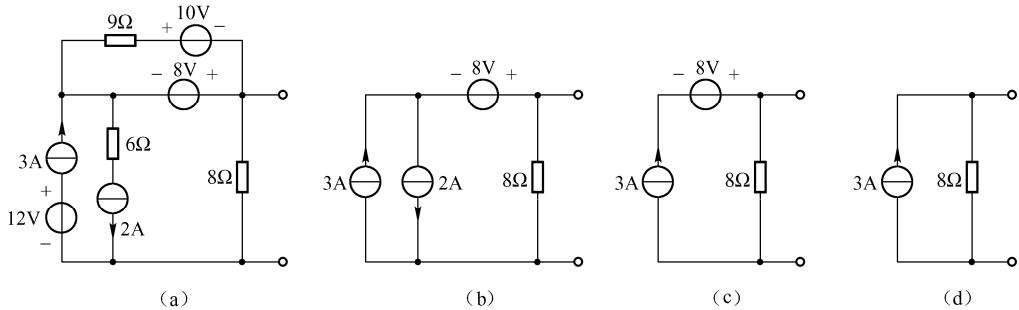


图 4-2-14 例 4-2-4 用图

解：(1) 如图 4-2-14 (a) 所示，8V 理想电压源与单口网络 ( $9\Omega$  和  $10V$  串联部分) 并联等效为 8V 理想电压源；3A 理想电流源与  $12V$  理想电压源串联等效为 3A 理想电流源；2A 理想电流源与  $6\Omega$  电阻串联等效为 2A 理想电流源，得到图 4-2-14 (b)；

(2) 图 4-2-14 (b) 中两个理想电流源并联等效为一个理想电流源，得到图 4-2-14 (c)；

(3) 图 4-2-14 (c) 所示理想电流源与理想电压源的串联等效为一个理想电流源，得到图 4-2-14 (d)，此图即为最简等效电路。

#### 4.2.4 实际电源

第 1 章介绍的理想电源实际上是不存在的。实际电源有实际电压源和实际电流源两种，其输出电压或电流受与其相连接的外部电路的影响，不再独立。

##### 4.2.4.1 实际电压源

实际电压源可以用理想电压源与电阻的串联来表征，如图 4-2-15 (a) 所示，其端口伏安关系如下：

$$u = u_s - R_s i \quad (4-2-16)$$

由此式可画出伏安特性曲线, 如图 4-2-15 (b) 所示。

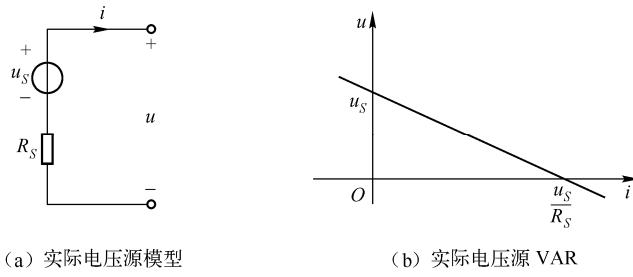


图 4-2-15 实际电压源

$u_s$  为实际电压源开路时的端电压 (简称开路电压),  $R_s$  为实际电压源的内阻。 $R_s$  越小实际电压源越接近于理想电压源, 特别在  $R_s = 0$  时实际电压源即为理想电压源。

#### 4.2.4.2 实际电流源

实际电流源可以用理想电流源与电阻的并联来表征, 如图 4-2-16 (a) 所示, 其端口伏安关系如下:

$$i = i_s - \frac{u}{R_s} \quad (4-2-17)$$

由此式可画出伏安特性曲线, 如图 4-2-16 (b) 所示。

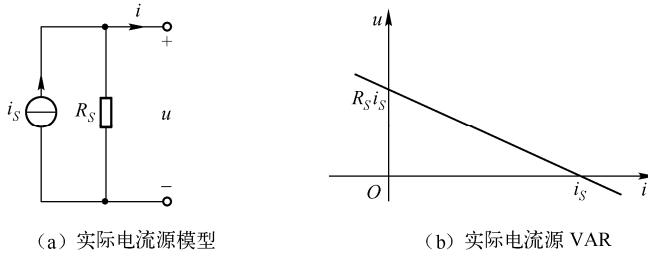


图 4-2-16 实际电流源

$i_s$  为实际电流源短路时的电流 (简称短路电流),  $R_s$  为实际电流源的内阻。 $R_s$  越大实际电流源越接近于理想电流源, 特别是在  $R_s \rightarrow \infty$  时实际电流源即为理想电流源。

#### 4.2.4.3 实际电压源与实际电流源之间的等效变换

实际电压源与实际电流源之间可以相互等效变换, 等效条件是它们的内阻相同, 而且满足式 (4-2-18), 如图 4-2-17 所示。进行等效变换时, 注意  $u_s$  参考方向与  $i_s$  参考方向相反。

$$u_s = R_s i_s \quad \text{或} \quad i_s = \frac{u_s}{R_s} \quad (4-2-18)$$

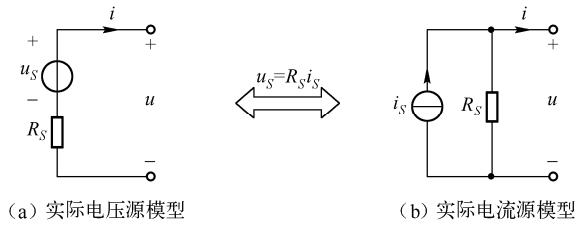


图 4-2-17 实际电源之间的等效变换

需要指出：理想电压源与理想电流源之间不能相互等效变换。

例 4-2-5 如图 4-2-18 (a) 所示单口网络，试求其最简等效电路。

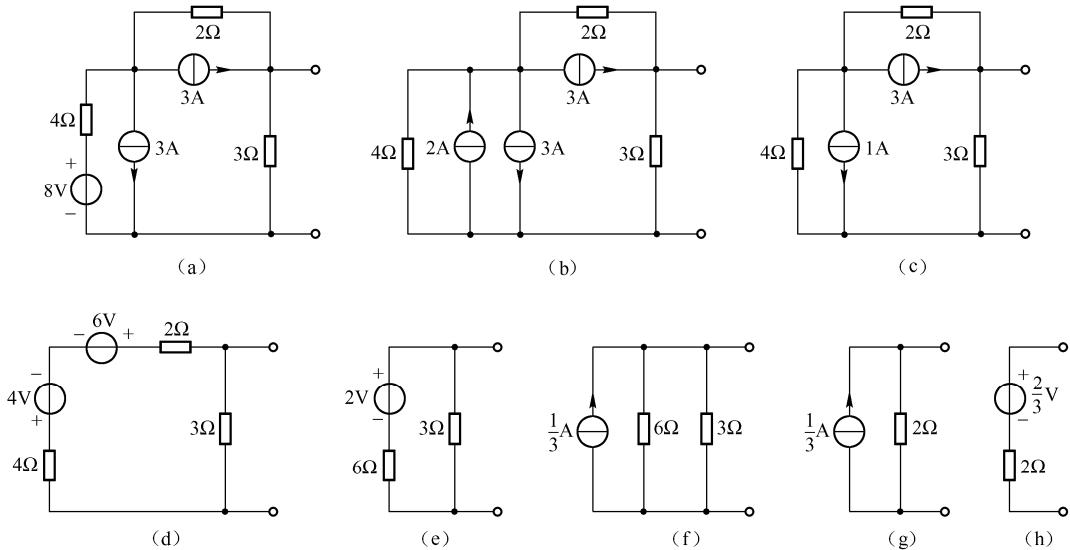


图 4-2-18 例 4-2-5 用图

- 解：(1) 如图 4-2-18 (a) 所示，实际电压源等效为实际电流源，如图 4-2-18 (b) 所示；  
 (2) 图 4-2-18 (b) 中两理想电流源并联等效为一个理想电流源，得到图 4-2-18 (c)；  
 (3) 图 4-2-18 (c) 中两个实际电流源分别等效为实际电压源，得到图 4-2-18 (d)；  
 (4) 图 4-2-18 (d) 中两理想电压源等效为一个理想电压源，得到图 4-2-18 (e)；  
 (5) 图 4-2-18 (e) 中实际电压源等效为实际电流源，得到图 4-2-18 (f)；  
 (6) 图 4-2-18 (f) 中两电阻并联等效为一个电阻，得到图 4-2-18 (g)，此图所示实际电流源即为最简等效电路。也可将其等效为实际电压源，如图 4-2-18 (h) 所示。

### 4.3 一般单口网络的等效化简

#### 4.3.1 一般单口网络的最简等效电路

通常，由电阻、受控源和独立源构成的有源单口网络  $N$  的最简等效电路为实际电压源或实际电流源，如图 4-3-1 (a) 所示；只含电阻和受控源的无源单口网络  $N_0$  的最简等效电路为电阻，如图 4-3-1 (b) 所示。

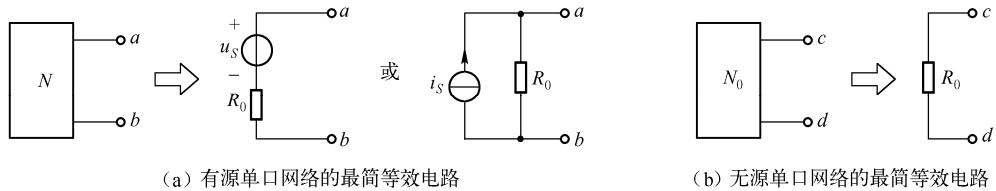


图 4-3-1 一般单口网络的最简等效电路

### 4.3.2 最简等效电路的求取

一般而言，在单口网络内部不含受控源时，可利用 4.2 节中介绍的典型单口网络的等效化简方法逐一化简电路，最终求得最简等效电路（譬如，例 4-2-5 采用的即是这种方法）。不过，在单口网络内部含有受控源时，一般无法通过此方法最终得到最简等效电路。此时，在对单口网络尽可能等效化简的情况下，再列出其端口 VAR，然后，根据 VAR 直接画出最简等效电路。对于无源单口网络，此方法亦称为外施电源法（或外施激励法）。

例 4-3-1 求如图 4-3-2 所示单口网络的等效电阻  $R_{ab}$  和  $R_{cd}$ 。

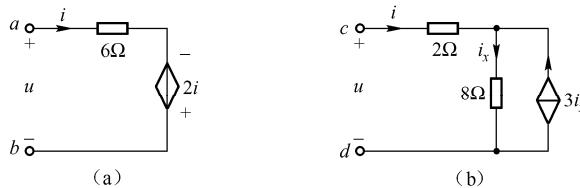


图 4-3-2 例 4-3-1 用图

解：(1) 如图 4-3-2 (a) 所示单口网络的 VAR 为

$$u = 6i - 2i = 4i$$

从而得

$$R_{ab} = \frac{u}{i} = 4\Omega$$

(2) 据图 4-3-2 (b)，有

$$\begin{cases} i = i_x - 3i_x = -2i_x \\ u = 2i + 8i_x = 2 \times (-2i_x) + 8i_x = 4i_x \end{cases}$$

从而得

$$R_{cd} = \frac{u}{i} = -2\Omega$$

需要特别注意：此例中  $R_{cd} = -2\Omega < 0$ ，是单口网络中含有受控源所致，表明当其与其他有源单口网络相连时，会释放电能。因此，含受控源的无源单口网络有可能等效为负电阻。

例 4-3-2 求如图 4-3-3 (a) 所示单口网络的最简等效电路。

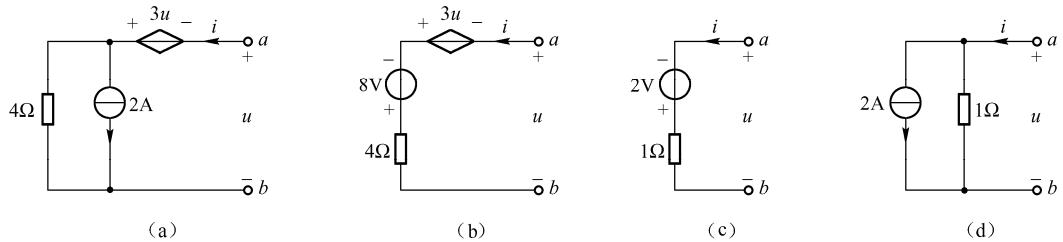


图 4-3-3 例 4-3-2 用图

解：(1) 如图 4-3-3 (a) 所示单口网络中的实际电流源可等效为实际电压源，得到图 4-3-3 (b)；

(2) 图 4-3-3 (b) 的端口 VAR 为

$$u = -3u - 8 + 4i$$

由此得

$$u = -2 + 1 \times i \quad \text{或} \quad i = 2 + \frac{u}{1}$$

从而可得其最简等效电路如图 4-3-3 (c) 或 (d) 所示。

## 4.4 等效变换分析法的应用

等效变换分析法用于电路分析的基本步骤如下：

- (1) 将电路分割成两部分：待求支路、与待求支路相连的单口网络，分别记为  $N_L$ 、 $N_s$ ；
- (2) 求取  $N_s$  的最简等效电路（实际电压源或实际电流源），记为  $N_s$ ；
- (3) 把  $N_L$  与  $N_s$  相连，求解待求量。

例 4-4-1 如图 4-4-1 所示电路，用等效变换分析法求电流  $I_L$ 。

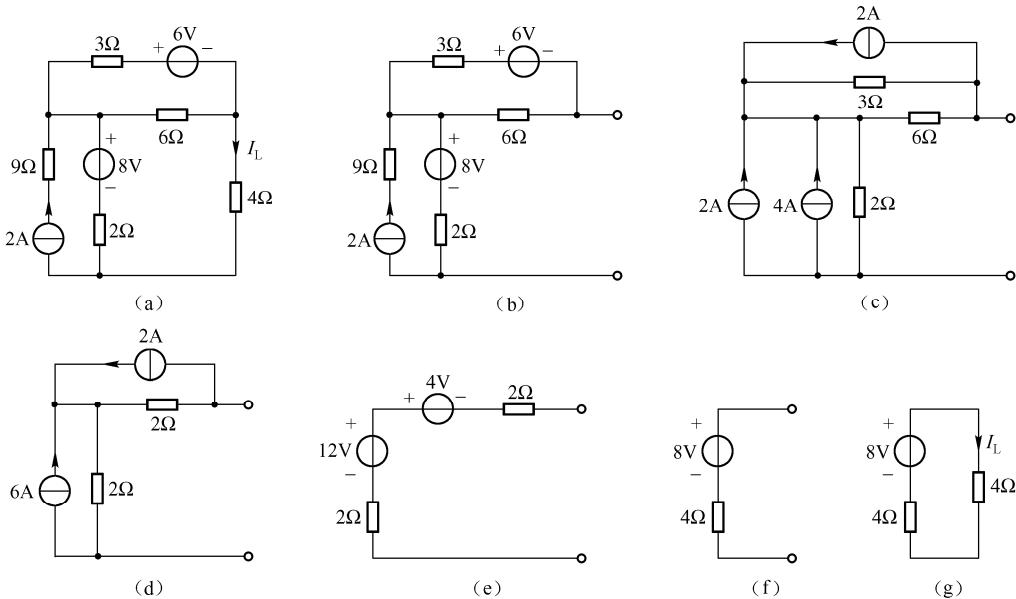


图 4-4-1 例 4-4-1 用图

- 解：(1) 如图 4-4-1 (a) 所示，得到与待求支路相连的单口网络  $N_s$ ，如图 4-4-1 (b) 所示；  
 (2) 将图 4-4-1 (b) 逐一等效化简，最终得到图 4-4-1 (f) 所示的最简等效电路；  
 (3) 将最简等效电路与待求支路相连，如图 4-4-1 (g) 所示，从而得

$$I_L = \frac{8}{4+4} = 1 \text{ A}$$

## 练习题

### A. 基本概念类

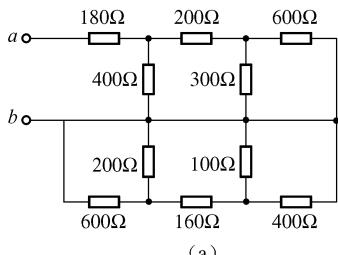
4-1 简要解释等效的含义。

4-2 两单口网络等效是否与它们的端口电压参考方向和电流参考方向有关？为什么？

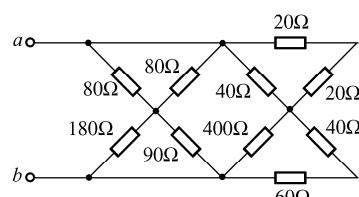
- 4-3 举例说明电阻的串联等效化简和电导的并联等效化简。
- 4-4 举例说明分压公式和分流公式的应用。
- 4-5 实际电压源与实际电流源等效变换的条件是什么？请举例说明？
- 4-6 举例说明理想电压源的串联等效化简和理想电流源的并联等效化简。
- 4-7 为什么理想电源之间不能等效变换？
- 4-8 为什么不同的理想电压源不能并联，不同的理想电流源不能串联？
- 4-9 含源单口网络和无源单口网络的最简等效电路分别是什么？
- 4-10 什么情况下等效电阻可能为负值？
- 4-11 电路等效化简有哪些手段或方法？
- 4-12 解释等效变换分析法的含义，其基本步骤是什么？请举例说明其应用。
- 4-13 说明等效变换分析法的局限性。

### B. 分析计算类

- 4-14 如题图 4-1 所示电路，求等效电阻  $R_{ab}$ 。



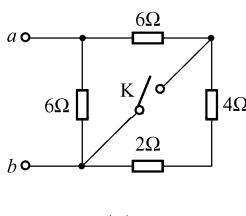
(a)



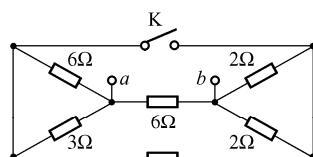
(b)

题图 4-1

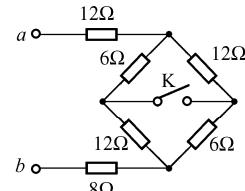
- 4-15 如题图 4-2 所示电路，求开关  $K$  断开和闭合两种状态下的等效电阻  $R_{ab}$ 。



(a)



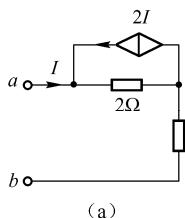
(b)



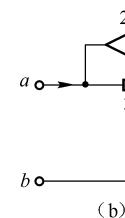
(c)

题图 4-2

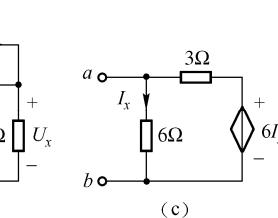
- 4-16 如题图 4-3 所示电路，求等效电阻  $R_{ab}$ 。



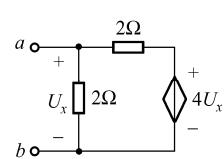
(a)



(b)



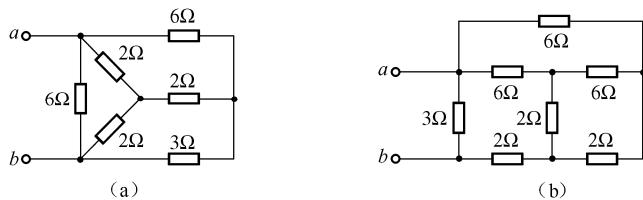
(c)



(d)

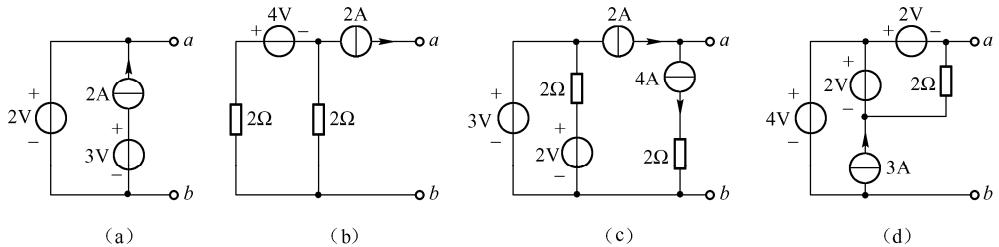
题图 4-3

4-17 如题图 4-4 所示电路, 求等效电阻  $R_{ab}$ 。



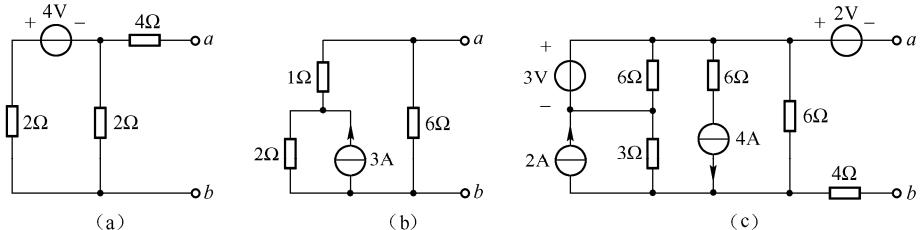
题图 4-4

4-18 如题图 4-5 所示电路, 求其最简等效电路。



题图 4-5

4-19 如题图 4-6 所示电路, 求其等效电压源模型。

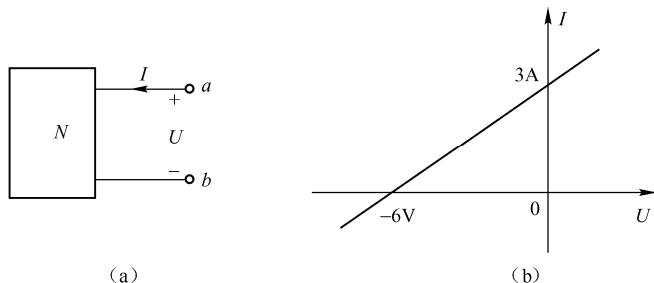


题图 4-6

4-20 求如题图 4-6 所示电路的等效电流源模型。

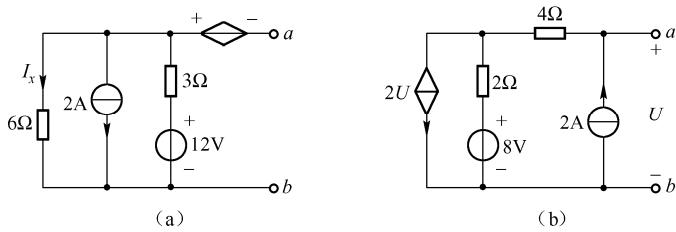
4-21 如题图 4-7 所示单口网络  $N$  及其端口伏安特性曲线:

- (1) 写出单口网络  $N$  的端口 VAR;
- (2) 画出单口网络  $N$  的最简等效电路。



题图 4-7

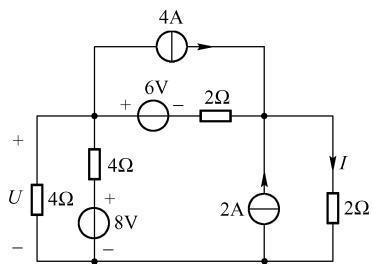
4-22 如题图 4-8 所示电路, 求其最简等效电路。



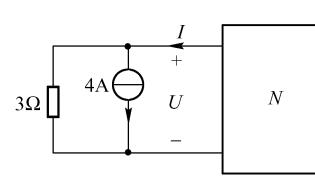
题图 4-8

4-23 如题图 4-9 所示电路, 试用等效变换分析法求电路中的电压  $U$  和电流  $I$ 。

4-24 如题图 4-10 所示电路, 单口网络  $N$  的端口 VAR 为  $U = -6 - 3I$ , 求电压  $U$  和电流  $I$ 。



题图 4-9



题图 4-10

# 第5章 电路的一般分析法及基本定理

电路一般分析法的基本思想是以两类约束为依据,以某一自变量为待求量,建立相应的方程组,并予以求解,最终由自变量求取支路电流或支路电压。电路中的基本定理是电路固有特性的体现。

本章介绍电路的一般分析法及基本定理,涉及支路电流法与支路电压法、回路电流法、节点电压法、叠加定理、戴维南定理、诺顿定理等。

## 5.1 支路电流法与支路电压法

### 5.1.1 支路电流法

支路电流法是以支路电流为未知变量,根据基尔霍夫定律(KCL、KVL)建立方程组求解各支路电流的分析方法,也是一种最基本的电路分析方法,其步骤如下:

- (1) 标出各支路电流及其参考方向;
- (2) 标明节点,列写各独立节点的KCL方程;
- (3) 标明回路,列写各独立回路的KVL方程;
- (4) 求解方程组得到各支路电流,并由此计算其他待求量。

例5-1-1 如图5-1-1所示电路,其中 $R_1=2\Omega$ , $R_2=1\Omega$ , $R_3=20\Omega$ , $U_{S1}=15V$ , $U_{S2}=12V$ ,试求各支路电流 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 。

解:标明节点和回路,如图5-1-1所示,采用支路电流法,依题意有

(1) KCL方程

独立节点 $N_1$ :  $I_1+I_2-I_3=0$

(2) KVL方程

独立回路 $L_1$ :  $R_1I_1-R_2I_2=U_{S1}-U_{S2}$

独立回路 $L_2$ :  $R_2I_2+R_3I_3=U_{S2}$

代入已知参数的值,联立上述方程解得

$I_1=1.21A$ ,  $I_2=-0.58A$ ,  $I_3=0.63A$

例5-1-2 试用支路电流法求解图5-1-2所示电路的电压 $U_1$ 、 $U_2$ 。

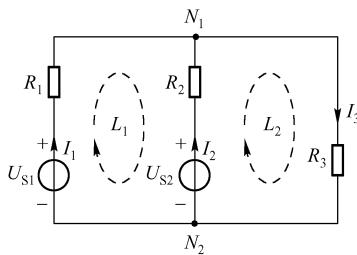


图5-1-1 例5-1-1用图

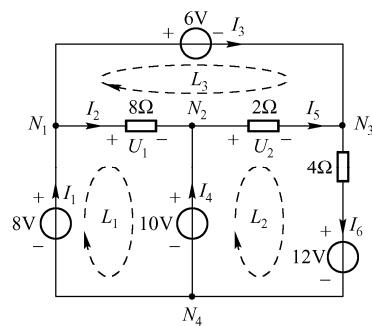


图5-1-2 例5-1-2用图

解：标明各支路电流及其参考方向、节点与回路，如图 5-1-2 所示，于是有

(1) KCL 方程

$$\text{独立节点 } N_1: I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\text{独立节点 } N_2: I_2 + I_4 - I_5 = 0$$

$$\text{独立节点 } N_3: I_3 + I_5 - I_6 = 0$$

(2) KVL 方程

$$\text{独立回路 } L_1: 8I_2 = 8 - 10$$

$$\text{独立回路 } L_2: 2I_5 + 4I_6 = 10 - 12$$

$$\text{独立回路 } L_3: -8I_2 - 2I_5 = -6$$

联立上述方程解得

$$I_1 = -6.75\text{A}, I_2 = -0.25\text{A}, I_3 = -6.5\text{A}, I_4 = 4.25\text{A}, I_5 = 4\text{A}, I_6 = -2.5\text{A}$$

根据欧姆定律得

$$U_1 = 8I_2 = -2\text{V}, U_2 = 2I_5 = 8\text{V}$$

### 5.1.2 支路电压法

支路电压法是以支路电压为未知变量，根据基尔霍夫定律（KCL、KVL）建立方程组求解各支路电压的分析方法，其步骤如下：

- (1) 标出各支路电压及其参考方向；
- (2) 标明节点，列写各独立节点的 KCL 方程；
- (3) 标明回路，列写各独立回路的 KVL 方程；
- (4) 求解方程组得各支路电压，并由此求出其他待求量。

例 5-1-3 如图 5-1-3 所示电路，其中  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 2\Omega$ ， $U_{S1} = 10\text{V}$ ， $U_{S2} = 16\text{V}$ ，试分析各支路电压。

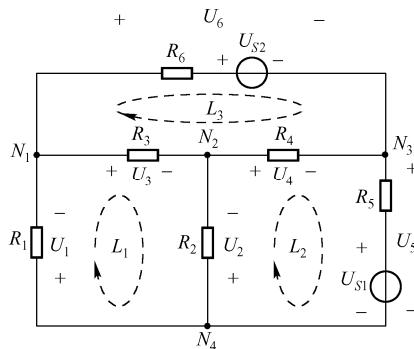


图 5-1-3 例 5-1-3 用图

解：标明各支路电压及其参考方向、节点与回路，如图 5-1-3 所示，于是有

(1) KCL 方程

$$\text{独立节点 } N_1: \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_6 - U_{S2}}{R_6} = 0$$

$$\text{独立节点 } N_2: \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} = 0$$

$$\text{独立节点 } N_3: \frac{U_4}{R_4} - \frac{U_5 - U_{S1}}{R_5} + \frac{U_6 - U_{S2}}{R_6} = 0$$

(2) KVL 方程

$$\text{独立回路 } L_1: U_1 - U_2 + U_3 = 0$$

$$\text{独立回路 } L_2: U_2 + U_4 + U_5 = 0$$

$$\text{独立回路 } L_3: -U_3 - U_4 + U_6 = 0$$

代入已知参数的值, 联立上述方程解得

$$U_1 = 9.5V, U_2 = 5.5V, U_3 = -4V, U_4 = 1.5V, U_5 = -7V, U_6 = -2.5V$$

原则上支路电流法和支路电压法适用于各种电路。不过, 当支路数很多时, 方程数亦会很多, 计算量大, 求解较为烦琐。因此, 支路电流(电压)法一般适用于支路数较少的电路。

## 5.2 回路电流法

### 5.2.1 回路电流的概念

电路中所假想的沿回路环流的电流称为回路电流。如果回路电流对应于电路中的网孔, 则亦称其为网孔电流。虽然回路电流只是一种假想电流, 但却可以用它们非常方便地表示支路电流。

譬如, 如图 5-2-1 所示电路, 对于回路  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ , 假设它们的回路电流分别为  $I_{L1}$ 、 $I_{L2}$ 、 $I_{L3}$ , 其中  $I_{L1}$  和  $I_{L2}$  的参考方向为顺时针方向,  $I_{L3}$  的参考方向为逆时针方向。 $I_{L1}$ 、 $I_{L2}$ 、 $I_{L3}$  亦为网孔电流, 而且是相互独立的。各支路电流用回路电流可分别表示为:  $I_1 = I_{L1}$ ,  $I_2 = -I_{L1} + I_{L2}$ ,  $I_3 = I_{L1} + I_{L3}$ ,  $I_4 = I_{L2} + I_{L3}$ ,  $I_5 = I_{L2}$ ,  $I_6 = -I_{L3}$ 。

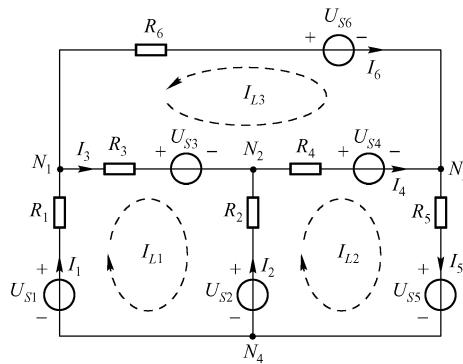


图 5-2-1 回路电流示意图

另外, 用回路电流表示的 KCL 方程自然满足。也就是说, 基于回路电流的 KCL 自然成立。譬如, 如图 5-2-1 所示电路中的节点  $N_1$ , 用支路电流表示的 KCL 方程为  $I_1 - I_3 - I_6 = 0$ , 若用回路电流表示, 则为:  $I_{L1} - (I_{L1} + I_{L3}) + I_{L3} \equiv 0$ 。

### 5.2.2 回路电流法及其应用

#### 5.2.2.1 回路电流法的含义

回路电流法(亦称为回路分析法)是以独立的回路电流为未知变量, 根据基尔霍夫电压定律

(KVL) 建立方程组求解各回路电流以获取其他待求量的分析方法。如果所选取的回路电流均为网孔电流，则亦称其为网孔电流法（或网孔分析法）。不过，由于“网孔”只有在平面电路中才有意义，因此网孔电流法只适用于平面电路。

譬如，如图 5-2-1 所示电路，所标明的三个独立回路的 KVL 方程如下。

(1) 用支路电流表示的 KVL 方程

$$\text{回路 } L_1: -U_{S1} + R_1 I_1 + R_3 I_3 + U_{S3} - R_2 I_2 + U_{S2} = 0$$

$$\text{回路 } L_2: -U_{S2} + R_2 I_2 + R_4 I_4 + U_{S4} + R_5 I_5 + U_{S5} = 0$$

$$\text{回路 } L_3: R_6 I_6 + U_{S6} - U_{S4} - R_4 I_4 - U_{S3} - R_3 I_3 = 0$$

(2) 用回路电流表示的 KVL 方程

将上述方程中的支路电流用回路电流表示，整理后得

$$\text{回路 } L_1: (R_1 + R_2 + R_3) I_{L1} - R_2 I_{L2} + R_3 I_{L3} = U_{S1} - U_{S2} - U_{S3}$$

$$\text{回路 } L_2: -R_2 I_{L1} + (R_2 + R_4 + R_5) I_{L2} + R_4 I_{L3} = U_{S2} - U_{S4} - U_{S5}$$

$$\text{回路 } L_3: R_3 I_{L1} + R_4 I_{L2} + (R_3 + R_4 + R_6) I_{L3} = -U_{S3} - U_{S4} + U_{S6}$$

不难发现，用回路电流表示的 KVL 方程有一定的规律。譬如：对于回路  $L_1$  的 KVL 方程而言， $I_{L1}$  前面的系数是构成回路  $L_1$  各支路上的电阻之和； $I_{L2}$  前面的系数是回路  $L_1$  和回路  $L_2$  共同支路上的电阻，取负值（ $I_{L1}$  和  $I_{L2}$  在共同支路上方向相反）； $I_{L3}$  前面的系数是回路  $L_1$  和回路  $L_3$  共同支路上的电阻，取正值（ $I_{L1}$  和  $I_{L3}$  在共同支路上方向相同）；等式右侧为构成回路  $L_1$  各支路上的电压源电压的代数和，且与  $I_{L1}$  方向相反的取正值，反之取负值。

### 5.2.2.2 回路电流方程的一般形式

根据上述规律，可以由电路直接列出用回路电流表示的 KVL 方程（简称为回路电流方程或回路方程）。对于具有  $m$  个独立回路的电路而言，其回路方程的一般形式如下：

$$\begin{cases} R_{11} I_{L1} + R_{12} I_{L2} + \cdots + R_{1m} I_{Lm} = U_{S11} \\ R_{21} I_{L1} + R_{22} I_{L2} + \cdots + R_{2m} I_{Lm} = U_{S22} \\ \vdots \\ R_{m1} I_{L1} + R_{m2} I_{L2} + \cdots + R_{mm} I_{Lm} = U_{Sm} \end{cases} \quad (5-2-1)$$

式中各参数的含义如下，其中  $i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

$I_{Li}$ ：回路  $L_i$  的回路电流；

$R_{ii}$ ：回路  $L_i$  的自电阻，其值为构成回路  $L_i$  各支路上的电阻之和；

$R_{ij}$  ( $i \neq j$ )：回路  $L_i$  与回路  $L_j$  之间的互电阻，其值为回路  $L_i$  与回路  $L_j$  共同支路上的电阻之和，取正值或负值。具体为： $I_{Li}$  和  $I_{Lj}$  在同一条支路上方向相同时取正，反之取负；

$U_{Si}$ ：回路  $L_i$  的电压源电压，其值为构成回路  $L_i$  各支路上的电压源电压的代数和，且与  $I_{Li}$  方向相反的取正值，反之取负值。

### 5.2.2.3 回路电流法的应用

回路电流法的一般步骤如下：

- (1) 标出相互独立的回路电流及其参考方向；
- (2) 列写一般形式（如式 (5-2-1) 所示）的回路电流方程；
- (3) 求解方程组得到各回路电流，并由此求出其他待求量。

需要指出的是：

(1) 如果电路中含有理想电流源支路，可假设其两端电压，并视其为电压源电压。由于额外引入了变量，因此需要补充方程。补充的方程即为用回路电流表示理想电流源电流的方程；或者让理想

电流源电流成为某一回路的回路电流，于是此回路的回路电流已知，而不再需要列写其KVL方程；

(2) 如果电路中含有受控源，可将其按独立电源对待，并补充用回路电流表示受控源中的控制量的方程。

**例 5-2-1** 如图 5-2-2 所示电路，其中  $R_1 = R_2 = 2\Omega$ ， $R_3 = 4\Omega$ ， $R_4 = 8\Omega$ ， $U_{S1} = 8V$ ， $U_{S2} = 10V$ ， $U_{S3} = 12V$ ，试用回路电流法求解支路电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ 。

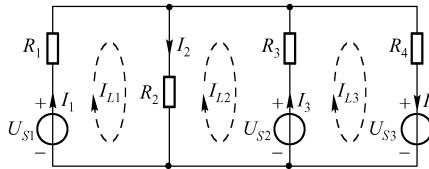


图 5-2-2 例 5-2-1 用图

解：标明独立回路电流及其参考方向，如图 5-2-2 所示。于是有

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I_{L1} - R_2 I_{L2} = U_{S1} \\ -R_2 I_{L1} + (R_2 + R_3)I_{L2} - R_3 I_{L3} = -U_{S2} \\ -R_3 I_{L2} + (R_3 + R_4)I_{L3} = U_{S2} - U_{S3} \end{cases}$$

代入已知参数的值，联立上述方程解得

$$I_{L1} = 1.0909 \text{ A}, \quad I_{L2} = -1.8182 \text{ A}, \quad I_{L3} = -0.7727 \text{ A}$$

于是，各支路电流为

$$I_1 = I_{L1} = 1.0909 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{L1} - I_{L2} = 2.9091 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{L3} - I_{L2} = 1.0455 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{L3} = -0.7727 \text{ A}$$

**例 5-2-2** 如图 5-2-3 所示电路，其中  $R_1 = 6\Omega$ ， $R_2 = 10\Omega$ ， $R_3 = 4\Omega$ ， $R_4 = 8\Omega$ ， $U_{S1} = 10V$ ， $U_{S2} = 20V$ ， $I_{S1} = 1A$ ，试用回路电流法求解电压  $U_1$ 。

解：假设理想电流两端电压为  $U_x$ ，标明独立回路电流，如图 5-2-3 所示。于是有

$$\begin{cases} R_1 I_{L1} - R_1 I_{L3} = U_{S1} - U_x \\ (R_3 + R_4)I_{L2} - R_3 I_{L3} = U_x \\ -R_1 I_{L1} - R_3 I_{L2} + (R_1 + R_2 + R_3)I_{L3} = -U_{S2} \end{cases}$$

$$\text{补充方程: } I_{S1} = I_{L2} - I_{L1}$$

代入已知参数的值，联立上述方程解得

$$I_{L1} = -0.7692 \text{ A}, \quad I_{L2} = 0.2308 \text{ A}, \quad I_{L3} = -1.1846 \text{ A},$$

$$U_x = 7.5077 \text{ V}$$

$$U_1 = R_1(I_{L1} - I_{L3}) = 2.4924 \text{ V}$$

另外，对于此例题，也可以按另一种方式处理，即重选独立回路电流，使理想电流源电流成为某一回路的回路电流，如图 5-2-4 所示。

于是有

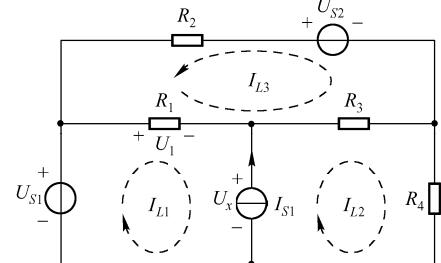


图 5-2-3 例 5-2-2 用图

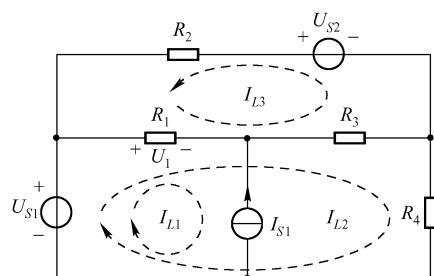


图 5-2-4 例 5-2-2 用图 (另解)

$$\begin{cases} I_{L1} = -I_{S1} \\ R_1 I_{L1} + (R_1 + R_3 + R_4) I_{L2} - (R_1 + R_3) I_{L3} = U_{S1} \\ -R_1 I_{L1} - (R_1 + R_3) I_{L2} + (R_1 + R_2 + R_3) I_{L3} = -U_{S2} \end{cases}$$

代入已知参数的值, 联立上述方程解得

$$I_{L1} = -1 \text{ A}, \quad I_{L2} = 0.2308 \text{ A}, \quad I_{L3} = -1.1846 \text{ A}$$

$$U_1 = R_1 (I_{L1} + I_{L2} - I_{L3}) = 2.4924 \text{ V}$$

## 5.3 节点电压法

### 5.3.1 节点电压的概念

电路中节点与参考零电位点之间的电压称为节点电压或节点电位, 且独立的节点电压数即为独立的节点数。用节点电压可以非常方便地表示支路电压, 即电路中某一支路的电压等于此支路两端所对应的节点电压之差, 从而也可以非常方便地表示支路电流。

譬如, 如图 5-3-1 所示电路, 选择  $N_4$  为参考零电位点, 则节点  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  的节点电压分别  $U_{N1} = U_{N1N4}$ 、 $U_{N2} = U_{N2N4}$ 、 $U_{N3} = U_{N3N4}$ , 它们是相互独立的。各支路电流用节点电压可分别表示为:  $I_1 = G_1 U_{N1}$ ,  $I_2 = G_2 (U_{N1} - U_{N2})$ ,  $I_3 = G_3 U_{N2}$ ,  $I_4 = G_4 (U_{N2} - U_{N3})$ ,  $I_5 = G_5 U_{N3}$ 。

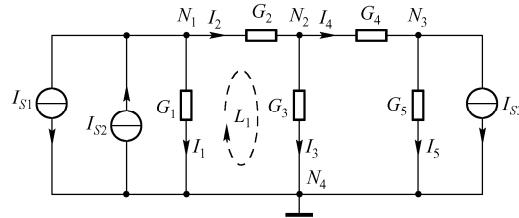


图 5-3-1 节点电压示意图

另外, 用节点电压表示的 KVL 方程自然满足。也就是说, 基于节点电压的 KVL 自然成立。譬如, 如图 5-3-1 所示电路中的回路  $L_1$ , 用支路电流表示的 KVL 方程为  $-\frac{I_1}{G_1} + \frac{I_2}{G_2} + \frac{I_3}{G_3} = 0$ , 若用节点电压表示, 则为:  $-U_{N1} + (U_{N1} - U_{N2}) + U_{N2} \equiv 0$ 。

### 5.3.2 节点电压法及其应用

#### 5.3.2.1 节点电压法的含义

节点电压法 (亦称为节点电位法或节点分析法) 是以独立的节点电压为未知变量, 根据基尔霍夫电流定律 (KCL) 建立方程组求解各节点电压以获取其他待求量的分析方法。

譬如, 如图 5-3-1 所示电路, 所标明的三个独立节点的 KCL 方程如下。

(1) 用支路电流表示的 KCL 方程

$$\text{节点 } N_1: \quad I_1 + I_2 + I_{S1} - I_{S2} = 0$$

$$\text{节点 } N_2: \quad -I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\text{节点 } N_3: \quad -I_4 + I_5 + I_{S3} = 0$$

(2) 用节点电压表示的 KCL 方程

将上述方程中的支路电流用节点电压表示, 整理后得

$$\begin{aligned}
 \text{节点 } N_1: \quad & (G_1 + G_2)U_{N1} - G_2U_{N2} = -I_{S1} + I_{S2} \\
 \text{节点 } N_2: \quad & -G_2U_{N1} + (G_2 + G_3 + G_4)U_{N2} - G_4U_{N3} = 0 \\
 \text{节点 } N_3: \quad & -G_4U_{N2} + (G_4 + G_5)U_{N3} = -I_{S3}
 \end{aligned}$$

不难发现, 用节点电压表示的 KCL 方程有一定的规律。譬如: 对于节点  $N_1$  的 KCL 方程而言,  $U_{N1}$  前面的系数是与节点  $N_1$  相连各支路上的电导之和;  $U_{N2}$  前面的系数是节点  $N_1$  和节点  $N_2$  之间支路上的电导, 取负值; 等式右侧为与节点  $N_1$  相连支路上的电流源电流的代数和, 且流入与节点  $N_1$  的取正值, 反之取负值。

### 5.3.2.2 节点电压方程的一般形式

根据上述规律, 可以由电路直接列写出用节点电压表示的 KCL 方程 (简称为节点电压方程或节点方程)。对于具有  $n$  个独立节点的电路而言, 其节点方程的一般形式如下:

$$\begin{cases} G_{11}U_{N1} + G_{12}U_{N2} + \cdots + G_{1n}U_{Nn} = I_{S11} \\ G_{21}U_{N1} + G_{22}U_{N2} + \cdots + G_{2n}U_{Nn} = I_{S22} \\ \vdots \\ G_{n1}U_{N1} + G_{n2}U_{N2} + \cdots + G_{nn}U_{Nn} = I_{Snn} \end{cases} \quad (5-3-1)$$

式中各参数的含义如下, 其中  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

$U_{Ni}$ : 节点  $N_i$  的节点电压;

$G_{ii}$ : 节点  $N_i$  的自电导, 其值为与节点  $N_i$  相连各支路上的电导之和;

$G_{ij}$  ( $i \neq j$ ): 节点  $N_i$  与节点  $N_j$  之间的互电导, 其值为节点  $N_i$  与节点  $N_j$  之间支路上的电导之和, 取负值。

$I_{Si}$ : 节点  $N_i$  的电流源电流, 其值为与节点  $N_i$  相连各支路上的电流源电流的代数和, 且对流入节点  $N_i$  的电流取正值, 反之取负值。

### 5.3.2.3 节点电压法的应用

节点电压法的一般步骤如下:

- (1) 标出节点及参考节点;
- (2) 列写一般形式 (如式 (5-3-1) 所示) 的节点电压方程;
- (3) 求解方程组得到各节点电压, 并由此求出其他待求量。

需要指出的是:

(1) 如果电路中含有实际电压源支路, 可将其等效为实际电流源;

(2) 如果电路中含有理想电压支路, 可假设流过上面的电流, 并视其为电流源电流。由于额外引入了变量, 因此需要补充方程。补充的方程即为用节点电压表示理想电压源电压的方程; 或者让理想电压源电压成为某一节点的节点电压, 于是此节点的电压已知, 而不再需要列写其 KCL 方程;

(3) 如果存在电导与理想电流源串联的支路, 则此电导不会纳入自电导和互电导中;

(4) 如果电路中含有受控源, 可将其按独立电源对待, 并补充用节点电压表示受控源中的控制量的方程。

**例 5-3-1** 如图 5-3-2 所示电路, 其中  $G_1 = 2S$ ,  $G_2 = 4S$ ,  $G_3 = G_4 = 6S$ ,  $I_{S1} = 1A$ ,  $I_{S2} = 2A$ ,  $I_{S3} = 4A$ ,  $I_{S4} = 8A$ , 试用节点电压法求解支路电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ 。

解: 标明节点及参考节点, 如图 5-3-2 所示。于是有

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)U_{N1} - G_3U_{N2} = I_{S1} - I_{S2} + I_{S3} \\ -G_3U_{N1} + (G_3 + G_4)U_{N2} = -I_{S3} - I_{S4} \end{cases}$$

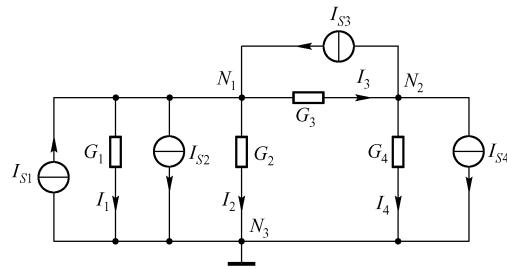


图 5-3-2 例 5-3-1 用图

代入已知参数的值, 联立上述方程解得

$$U_{N1} = -0.3333V, \quad U_{N2} = -1.1667V$$

于是, 各支路电流为

$$I_1 = G_1 U_{N1} = -0.6666A$$

$$I_2 = G_2 U_{N1} = -1.3332A$$

$$I_3 = G_3 (U_{N1} - U_{N2}) = 5.0004A$$

$$I_4 = G_4 U_{N2} = -7.0002A$$

例 5-3-2 如图 5-3-3 所示电路, 其中  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $R_4 = 8\Omega$ ,  $U_{S1} = 10V$ ,  $U_{S2} = 20V$ ,  $U_{S3} = 30V$ ,  $I_S = 10A$ , 试用节点电压法求解支路电流  $I_a$ 。

解: 将图 5-3-3 中的实际电压源支路等效为实际电流源, 并假设流过电压源  $U_{S3}$  的电流为  $I_x$ , 标明节点及参考节点, 如图 5-3-4 所示。

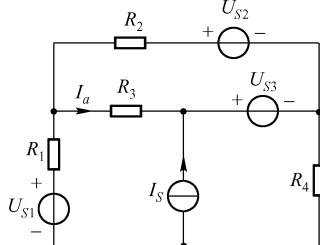


图 5-3-3 例 5-3-2 用图

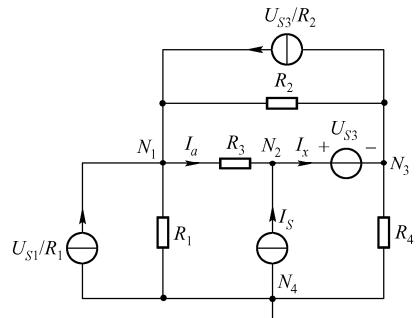


图 5-3-4 例 5-3-2 等效电路图

于是有

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_{N1} - \frac{1}{R_3} U_{N2} - \frac{1}{R_2} U_{N3} = \frac{U_{S1}}{R_1} + \frac{U_{S2}}{R_2} \\ -\frac{1}{R_3} U_{N1} + \frac{1}{R_3} U_{N2} = I_S - I_x \\ -\frac{1}{R_2} U_{N1} + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) U_{N3} = I_x - \frac{U_{S3}}{R_2} \end{cases}$$

$$\text{补充方程: } U_{S3} = U_{N2} - U_{N3}$$

代入已知参数的值, 联立上述方程解得

$$U_{N1} = 25.1111V, \quad U_{N2} = 49.5556V, \quad U_{N3} = 19.5556V, \quad I_x = 3.8889A$$

$$I_a = \frac{U_{N1} - U_{N2}}{R_3} = -6.1111A$$

另外,对于此例题,也可以按另一种方式处理,即重选参考节点,使理想电压源电压成为某一节点的节点电压,如图 5-3-5 所示。

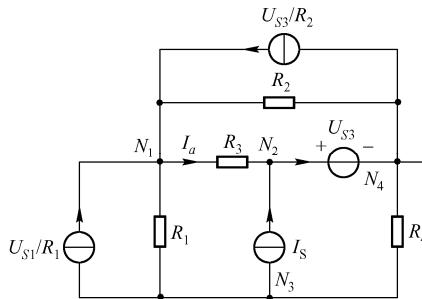


图 5-3-5 例 5-3-2 等效电路图 (另解)

于是有

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_{N1} - \frac{1}{R_3} U_{N2} - \frac{1}{R_1} U_{N3} = \frac{U_{S1}}{R_1} + \frac{U_{S2}}{R_2} \\ U_{N2} = U_{S3} \\ -\frac{1}{R_1} U_{N1} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) U_{N3} = -\frac{U_{S1}}{R_1} - I_s \end{cases}$$

代入已知参数的值, 联立上述方程解得

$$U_{N1} = 5.5556V, \quad U_{N2} = 30V, \quad U_{N3} = -19.5556V$$

$$I_a = \frac{U_{N1} - U_{N2}}{R_3} = -6.1111A$$

## 5.4 叠加定理

### 5.4.1 叠加定理的含义

**叠加定理:** 由线性电阻、线性受控源以及独立电源等线性元件组成的线性电路中, 每一支路上的电压或电流可以看做是每一个独立电源单独作用于电路时在该支路上所产生的电压或电流的代数和。

### 5.4.2 叠加定理的应用

应用叠加定理进行电路分析的步骤如下:

(1) 画出各独立源单独作用时的电路图, 此时其他独立源应为零值, 即置零。独立电压源为零值时用短路线代替, 独立电流源为零值时用开路代替。

(2) 求解各独立源单独作用时的待求量 (电压或电流);

(3) 将各独立源单独作用时的响应叠加即得最终的值。

需要指出的是, 在应用叠加定理时需要注意以下几点:

(1) 叠加定理只适用于线性电路;

(2) 电路中的受控源不能单独作用, 应始终保留在电路中;

(3) 叠加定理只适用于求解线性电路中的电流和电压, 不适用于功率, 这是因为功率与电压或电流之间不满足线性特性。

**例 5-4-1** 如图 5-4-1 (a) 所示电路, 其中  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 20\Omega$ ,  $U_s = 10\text{V}$ ,  $I_s = 5\text{A}$ , 试用叠加定理求解电流  $I$ 。

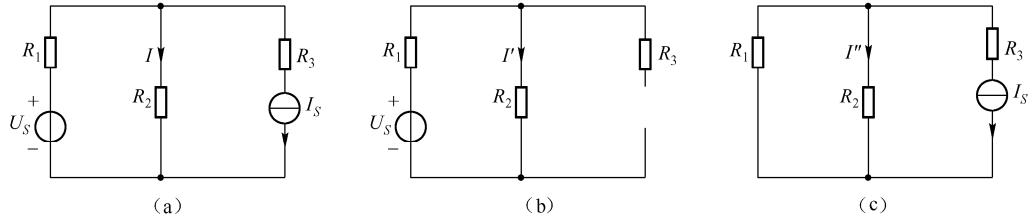


图 5-4-1 例 5-4-1 用图

解: (1) 画出独立电压源  $U_s$  和独立电流源  $I_s$  单独作用时的等效电路图, 分别如图 5-4-1 (b) 和 (c) 所示。

$$(2) U_s \text{ 单独作用时: } I' = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{10}{3 + 2} = 2\text{ A}$$

$$(3) I_s \text{ 单独作用时: } I'' = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s = -\frac{3}{3 + 2} \times 5 = -3\text{ A}$$

$$(4) \text{ 从而有: } I = I' + I'' = -1\text{ A}$$

**例 5-4-2** 如图 5-4-2 (a) 所示电路, 其中  $R_1 = 6\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $U_s = 10\text{V}$ ,  $I_s = 10\text{A}$ , 试用叠加定理求解电压  $U$ 。

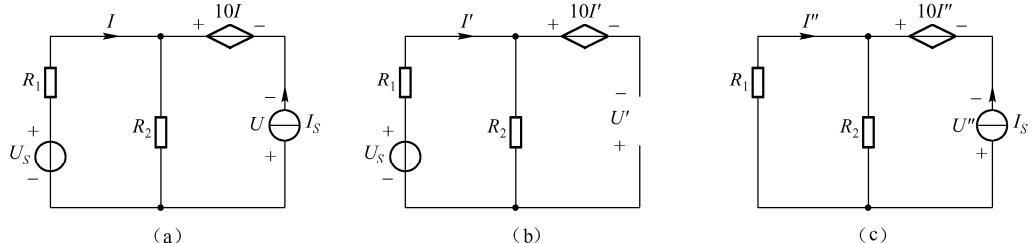


图 5-4-2 例 5-4-2 用图

解: (1) 画出独立电压源  $U_s$  和独立电流源  $I_s$  单独作用时的等效电路图, 分别如图 5-4-2 (b) 和 (c) 所示。

(2)  $U_s$  单独作用时

$$I' = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{10}{6 + 4} = 1\text{ A}$$

$$U' = -R_2 I' + 10I' = 6I' = 6\text{ V}$$

(3)  $I_s$  单独作用时

$$I'' = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_s = -\frac{4}{6 + 4} \times 10 = -4\text{ A}$$

$$U'' = R_1 I'' + 10I'' = 16I'' = -64\text{ V}$$

(4) 从而有

$$U = U' + U'' = -58 \text{ V}$$

## 5.5 戴维南定理与诺顿定理

### 5.5.1 戴维南定理

#### 5.5.1.1 戴维南定理的含义

**戴维南定理:** 通常, 对外部电路而言, 如图 5-5-1 (a) 所示的含源单口线性网络  $N$  可以用一个理想电压源  $u_{oc}$  和电阻  $R_0$  串联的实际电压源来等效 (称为戴维南等效电路), 如图 5-5-1 (b) 所示, 其中:

- (1)  $u_{oc}$  为单口网络  $N$  的端口开路电压, 如图 5-5-1 (c) 所示;
- (2)  $R_0$  为无源单口网络  $N_0$  ( $N$  中所有独立源置零后的网络) 的端口等效电阻 (称为戴维南等效电阻), 如图 5-5-1 (d) 所示。

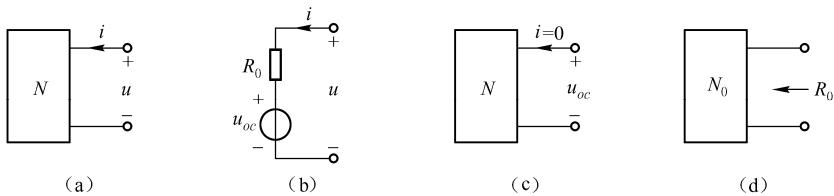


图 5-5-1 戴维南定理示意图

#### 5.5.1.2 戴维南定理的应用

应用戴维南定理进行电路分析的步骤如下:

- (1) 求开路电压  $u_{oc}$ 。从电路中分离待求量所在支路, 得到有源单口网络  $N$ , 求解其端口开路时的电压  $u_{oc}$ ;
- (2) 求等效电阻  $R_0$ 。将  $N$  中的独立源置零, 得到无源单口网络  $N_0$ , 求解其端口的等效电阻  $R_0$ ;
- (3) 求解待求量。将原电路中有源单口网络  $N$  用戴维南等效电路等效, 求解待求量。

**例 5-5-1** 如图 5-5-2(a) 所示电路, 其中  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 20\Omega$ ,  $U_S = 10\text{V}$ ,  $I_S = 5\text{A}$ , 试用戴维南定理求解电流  $I$ 。

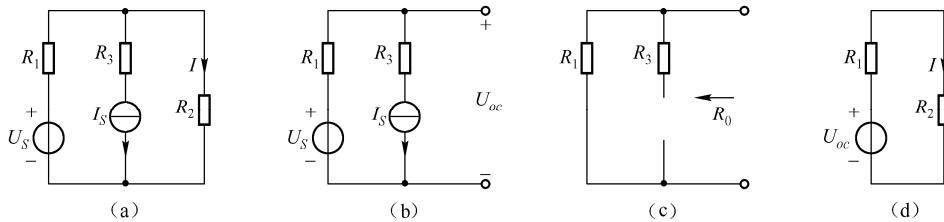


图 5-5-2 例 5-5-1 用图

**解:** (1) 求开路电压  $U_{oc}$ 。将待求电流  $I$  所在支路从电路中断开, 得到单口网络  $N$ , 如图 5-5-2 (b) 所示, 从而

$$U_{oc} = -R_1 I_S + U_S = -3 \times 5 + 10 = -5 \text{ V}$$

(2) 求戴维南等效电阻  $R_0$ 。将图 5-5-2 (b) 中独立电源置零得到无源单口网络  $N_0$ , 如图 5-5-2 (c)

所示, 于是

$$R_0 = R_1 = 3\Omega$$

(3) 求电流  $I$ 。将原电路中有源单口网络  $N$  用戴维南等效电路等效, 如图 5-5-2 (d) 所示, 可得

$$I = \frac{U_{oc}}{R_0 + R_2} = \frac{-5}{3 + 2} = -1 \text{ A}$$

**例 5-5-2** 如图 5-5-3 (a) 所示电路, 其中  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ,  $R_3 = R_4 = 4\Omega$ ,  $R_5 = 16\Omega$ ,  $U_{S1} = 36\text{V}$ ,  $U_{S2} = 34\text{V}$ , 试用戴维南定理求解电流  $I$ 。

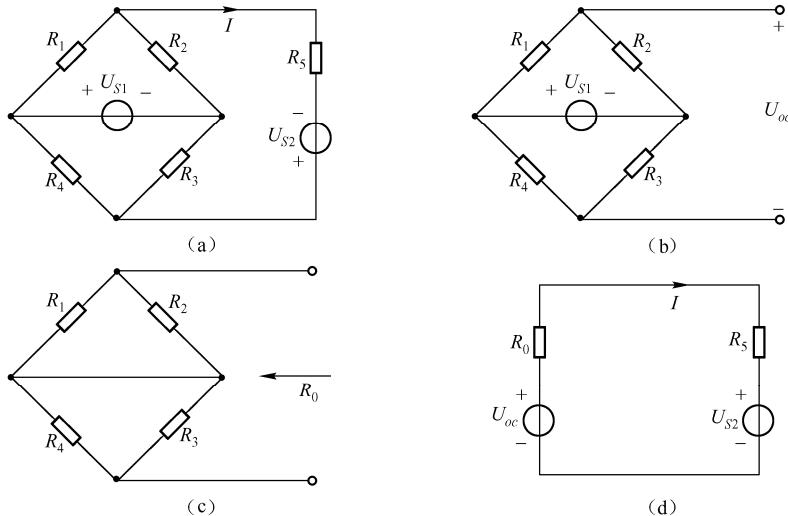


图 5-5-3 例 5-5-2 用图

解: (1) 求开路电压  $U_{oc}$ 。将待求电流  $I$  所在支路从电路中断开, 得到单口网络  $N$ , 如图 5-5-3 (b) 所示, 从而

$$U_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{S1} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{S2} = \frac{6}{3+6} \times 36 - \frac{4}{4+4} \times 36 = 6\text{V}$$

(2) 求戴维南等效电阻  $R_0$ 。将图 5-5-3 (b) 中独立电源置零得到无源单口网络  $N_0$ , 如图 5-5-3 (c) 所示, 于是

$$R_0 = (R_1 // R_2) + (R_3 // R_4) = \frac{3 \times 6}{3+6} + \frac{4 \times 4}{4+4} = 4\Omega$$

(3) 求电流  $I$ 。将原电路中有源单口网络  $N$  用戴维南等效电路等效, 如图 5-5-3 (d) 所示, 可得

$$I = \frac{U_{oc} + U_{S2}}{R_0 + R_5} = \frac{6 + 34}{4 + 16} = 2 \text{ A}$$

**例 5-5-3** 试用戴维南定理求解例 5-4-2 中的电压  $U$ 。

解: (1) 求开路电压  $U_{oc}$ 。将待求电压  $U$  所在支路从电路中断开, 得到单口网络  $N$ , 如图 5-5-4 (a) 所示, 从而

$$I_x = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{10}{6+4} = 1 \text{ A}$$

$$U_{oc} = -10I_x + R_2 I_x = -6I_x = -6 \times 1 = 6V$$

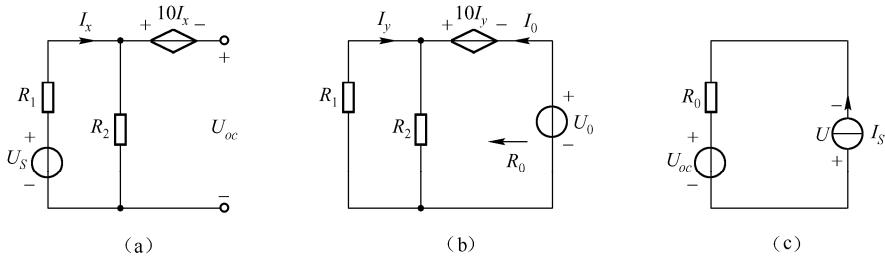


图 5-5-4 例 5-5-3 用图

(2) 求戴维南等效电阻  $R_0$ 。将图 5-5-4 (a) 中独立电源置零得到无源单口网络  $N_0$ ，由于  $N_0$  中含有受控源，故采用外加电源法予以求解，如图 5-5-4 (b) 所示。

$$U_0 = -10I_y - R_1 I_y$$

$$I_y = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0$$

于是

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = 6.4\Omega$$

(3) 求电压  $U$ 。将原电路中有源单口网络  $N$  用戴维南等效电路等效，如图 5-5-4 (c) 所示，可得

$$U = -U_{oc} - R_0 I_S = -(-6) - 6.4 \times 10 = -58V$$

## 5.5.2 诺顿定理

### 5.5.2.1 诺顿定理的含义

诺顿定理：通常，对外部电路而言，如图 5-5-5 (a) 所示的含源单口线性网络  $N$  可以用一个理想电流源  $i_{sc}$  和电阻  $R_0$  并联的实际电流源来等效（称为诺顿等效电路），如图 5-5-5 (b) 所示。

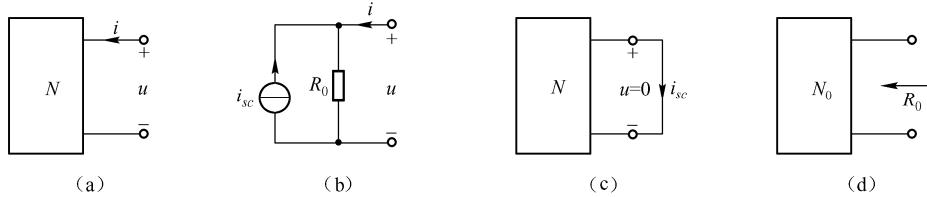


图 5-5-5 诺顿定理示意图

其中：

- (1)  $i_{sc}$  为单口网络  $N$  的端口短路电流，如图 5-5-5 (c) 所示；
- (2)  $R_0$  为无源单口网络  $N_0$  ( $N$  中所有独立源置零后的网络) 的端口等效电阻（称为诺顿等效电阻），如图 5-5-5 (d) 所示。

### 5.5.2.2 诺顿定理的应用

应用诺顿定理进行电路分析的步骤如下：

(1) 求短路电流  $i_{sc}$ 。从电路中分离待求量所在支路, 得到有源单口网络  $N$ , 求解其端口短路时的电流  $i_{sc}$ ;

(2) 求等效电阻  $R_0$ 。将  $N$  中的独立源置零, 得到无源单口网络  $N_0$ , 求解其端口的等效电阻  $R_0$ ;

(3) 求解待求量。将原电路中有源单口网络  $N$  用诺顿等效电路等效, 求解待求量。

例 5-5-4 如图 5-5-6 (a) 所示电路, 试用诺顿定理求解电流  $I$ 。

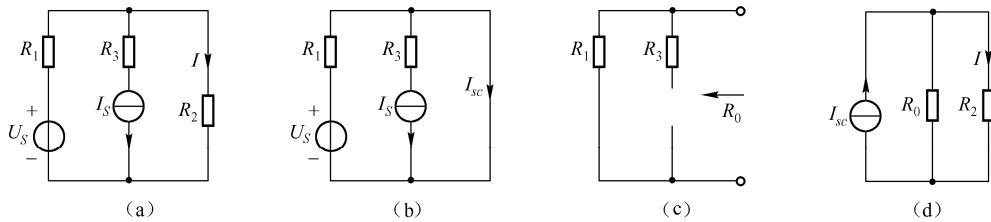


图 5-5-6 例 5-5-4 用图

解: (1) 求短路电流  $I_{sc}$ 。将所求电流  $I$  所在支路从电路中断开, 得到单口网络  $N$ , 并将其端口短路, 如图 5-5-6 (b) 所示, 从而

$$I_{sc} = \frac{U_s}{R_1} - I_s = \frac{10}{3} - 5 = -\frac{5}{3} \text{ A}$$

(2) 求诺顿等效电阻  $R_0$ 。将图 5-5-5 (b) 中独立电源置零得到无源单口网络  $N_0$ , 如图 5-5-6 (c) 所示, 于是

$$R_0 = R_1 = 3\Omega$$

(3) 求电流  $I$ 。将原电路中有源单口网络  $N$  用诺顿等效电路等效, 如图 5-5-6 (d) 所示。可得

$$I = \frac{R_0}{R_0 + R_2} I_{sc} = \frac{3}{3+2} \times \left( -\frac{5}{3} \right) = -1 \text{ A}$$

## 练习题

### A. 基本概念类

5-1 电路一般分析法的基本思想是什么? 涉及哪些具体的分析方法?

5-2 关于回路电流法:

- (1) 什么是回路电流?
- (2) 写出回路电流方程的标准形式, 并予以说明;
- (3) 什么是网络电流法?
- (4) 说明电路中含有理想电流源支路的处理方法;
- (5) 说明电路中含有受控电源的处理方法;
- (6) 给出回路电流法的基本步骤, 举例说明其应用;
- (7) 说明回路电流法和网孔电流法的适用范围。

5-3 关于节点电压法:

- (1) 什么是节点电压?
- (2) 写出节点电压方程的标准形式, 并予以说明;

- (3) 说明电路中含有理想电压源支路的处理方法;
- (4) 说明电路中含有受控电源的处理方法;
- (5) 给出节点电压法的基本步骤, 举例说明其应用;
- (6) 说明节点电压法的适用范围。

5-4 比较回路电流法和节点电压法。

5-5 关于叠加定理:

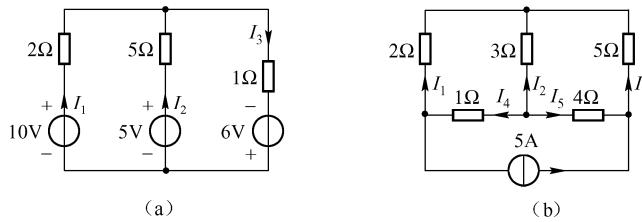
- (1) 说明叠加定理的含义;
- (2) 解释独立源置零的处理方式;
- (3) 说明叠加定理的适用条件和适用对象;
- (4) 给出采用叠加定理分析电路的基本步骤, 举例说明其应用。

5-6 关于戴维南定理与诺顿定理

- (1) 说明戴维南定理和诺顿定理的含义;
- (2) 给出采用戴维南定理分析电路的基本步骤, 举例说明其应用;
- (3) 给出采用诺顿定理分析电路的基本步骤, 举例说明其应用;
- (4) 举例说明“开短路法”求解戴维南等效电阻。

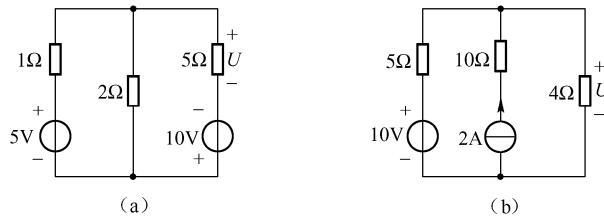
### B. 分析计算类

5-7 如题图 5-1 所示电路, 试用支路电流法求解各支路电流。



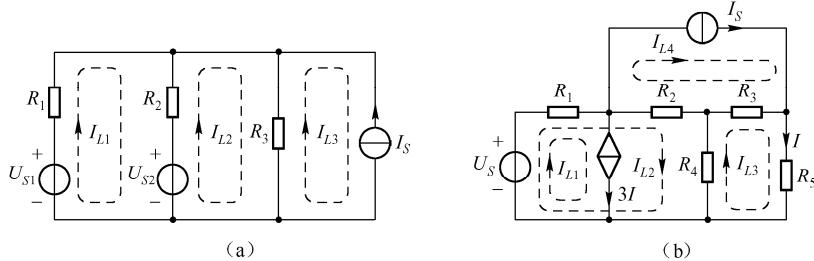
题图 5-1

5-8 如题图 5-2 所示电路, 试分别用支路电压法求解电压  $U$ 。



题图 5-2

5-9 如题图 5-3 所示电路, 试按给定的独立回路列写该电路的回路电流方程组。

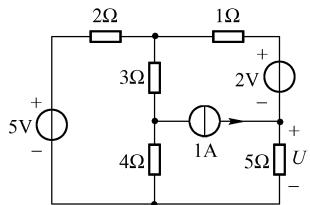


题图 5-3

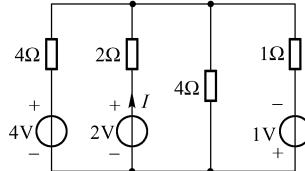
5-10 如题图 5-4 所示电路, 试用回路电流法分析电压  $U$ 。

5-11 如题图 5-5 所示电路, 试用回路电流法分析电流  $I$ 。

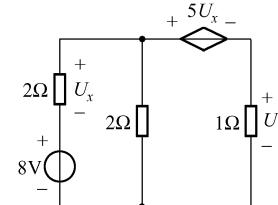
5-12 如题图 5-6 所示电路, 试用回路电流法分析电压  $U$ 。



题图 5-4

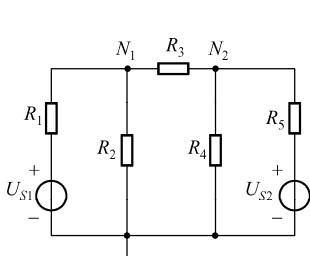


题图 5-5

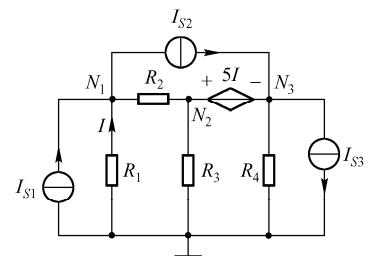


题图 5-6

5-13 如题图 5-7 所示电路, 试按给定的参考节点列写该电路的节点电压方程组。



(a)

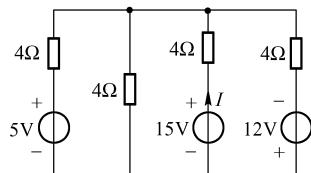


(b)

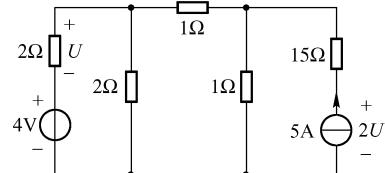
题图 5-7

5-14 如题图 5-8 所示电路, 试用节点电压法分析电流  $I$ 。

5-15 如题图 5-9 所示电路, 试用节点电压法分析电压  $U$ 。



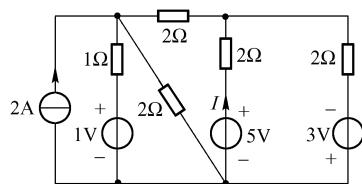
题图 5-8



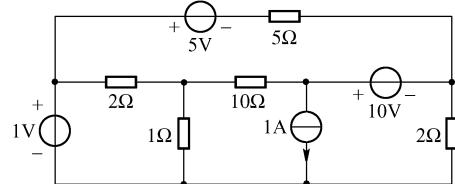
题图 5-9

5-16 如题图 5-10 所示电路, 试用节点电压法分析电流  $I$ 。

5-17 如题图 5-11 所示电路, 试用节点电压法分析 1A 电流源发出的功率。



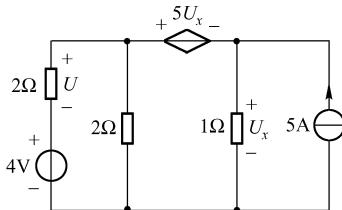
题图 5-10



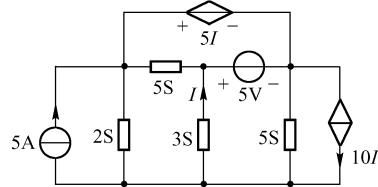
题图 5-11

5-18 如题图 5-12 所示电路, 试用节点电压法分析电压  $U$ 。

5-19 如题图 5-13 所示电路, 试用节点电压法分析电流  $I$ 。



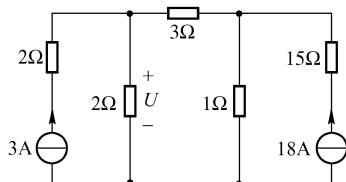
题图 5-12



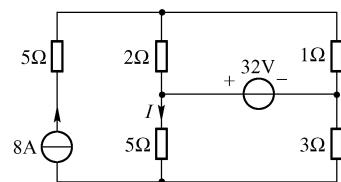
题图 5-13

5-20 如题图 5-14 所示电路, 试用叠加定理分析电压  $U$ 。

5-21 如题图 5-15 所示电路, 试用叠加定理分析电流  $I$ 。



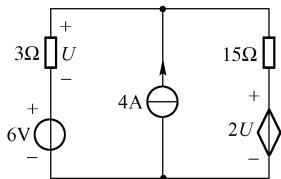
题图 5-14



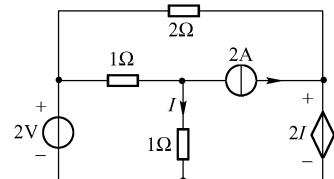
题图 5-15

5-22 如题图 5-16 所示电路, 试用叠加定理分析电压  $U$ 。

5-23 如题图 5-17 所示电路, 试用叠加定理分析电流  $I$ 。

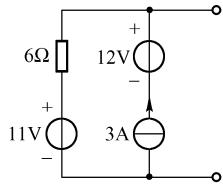


题图 5-16

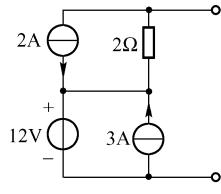


题图 5-17

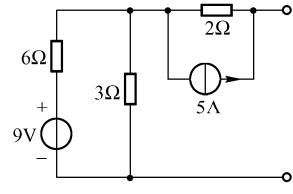
5-24 求如题图 5-18 所示含源单口网络的戴维南等效电路以及诺顿等效电路。



(a)



(b)



(c)

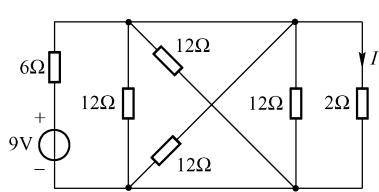
题图 5-18

5-25 如题图 5-19 所示电路, 试用戴维南定理分析电流  $I$ 。

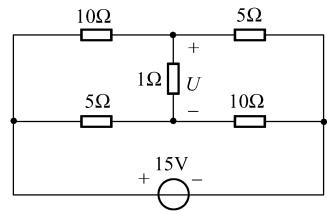
5-26 如题图 5-20 所示电路, 试用戴维南定理分析电压  $U$ 。

5-27 如题图 5-21 所示电路, 试用戴维南定理分析电流  $I$ 。

5-28 如题图 5-22 所示电路, 试用诺顿定理分析电流  $I$ 。

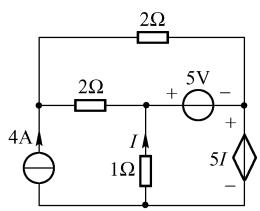


题图 5-19

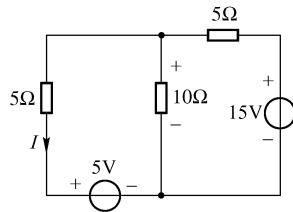


题图 5-20

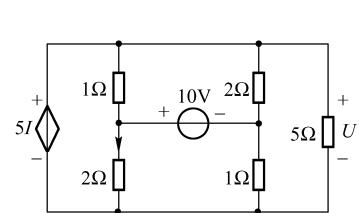
5-29 如题图 5-23 所示电路, 试用诺顿定理分析电压  $U$ 。



题图 5-21

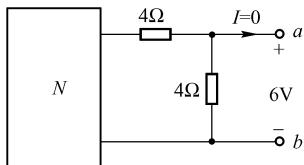


题图 5-22

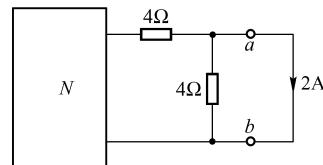


题图 5-23

5-30 如题图 5-24 所示电路, 试求单口网络  $N$  的戴维南等效电路和诺顿等效电路。



(a)



(b)

题图 5-24

## 第6章 直流一阶动态电路的时域分析

由于电感元件和电容元件为动态元件，因此通常把含有电感元件或电容元件的电路称为动态电路。动态电路中独立的动态元件个数即为电路的阶数（多个独立电感元件的电流之间线性无关，多个独立电容元件的电压之间线性无关）。对于  $n$  阶动态电路而言，描述其输入输出关系的数学模型一般为  $n$  阶微分方程。直流一阶动态电路的时域分析包括时域经典分析法和时域卷积分析法。时域经典分析法的基本思想是建立描述其输入输出关系的一阶微分方程，并对其进行直接求解；时域卷积分析法是基于卷积积分求取电路零状态响应的一种方法。

本章介绍直流一阶动态电路的时域分析，涉及换路与过渡过程、直流一阶电路时域经典分析与响应的分解、直流一阶电路响应的三要素法、阶跃响应与冲激响应、时域卷积法等。

### 6.1 换路与过渡过程

#### 6.1.1 电路的状态与过渡过程

电路的状态本质上是指电路的储能状态。储能为零的电路称为零状态电路；储能趋于稳态的电路称为稳态电路。电路从一种状态转移到另一种状态通常不能瞬间完成，而需要一定的时间。譬如，如图 6-1-1 (a) 所示电路， $t=0$  时，电容两端电压  $u_C(0)=0$ 。开关  $K$  在  $t=0$  时合上，电源给电容充电，电容两端电压逐渐增大，其变化曲线如图 6-1-1 (b) 所示。

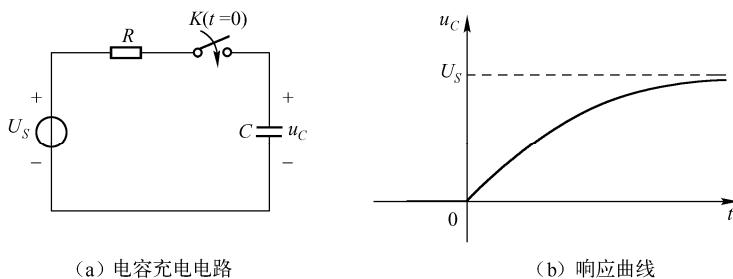


图 6-1-1 电容充电电路及其响应

电路的过渡过程（亦称瞬态过程）即是电路从一种状态过渡到另一种状态的过程。在此过程中，电路的储能从一种状态过渡到另一种状态。显然，对于不含动态元件的电路（譬如仅由电阻和电源构成的电路），由于电路中的元件不能储能，也就不会产生瞬态过程，其电压或电流的变化时间为零。为此，亦称这种没有瞬态过程的电路为即时电路或静态电路。

因此，含有动态元件是电路产生瞬态过程的先决条件，也称为内部条件。不过，要让电路产生瞬态过程，仅满足内部条件是不够的。譬如，如图 6-1-1 (a) 所示电路，若开关  $K$  不闭合，电源就不会给电容充电，电容电压也就会维持在  $0\text{ V}$ ，自然没有瞬态过程。

### 6.1.2 换路及换路定理

动态电路产生瞬态过程的外部条件是有激励的突然接入或改变、电路的接通或断开、电路参数的突变等，这些改变统称为换路。

为便于分析，通常将换路时刻作为计时的起点，即用  $t = 0$  表示换路瞬间， $t = 0_-$  为换路前一瞬间， $t = 0_+$  为换路后一瞬间； $t = 0_-$  时的电路状态称为原始状态或起始状态， $t = 0_+$  时的电路状态称为初始状态。

换路瞬间电路中储能不发生强迫跃变时，原始状态和初始状态的储能相同，即：

- (1) 电容元件支路的电流为有限值的条件下，换路瞬间电容元件的端电压保持不变；
- (2) 电感元件的端电压为有限值的条件下，换路瞬间电感元件支路的电流保持不变。

此即为换路定理的具体内容，用数学形式表示为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (6-1-1)$$

此式亦可由电容元件和电感元件的伏安关系导出。譬如，对于电容  $C$ ，若其端电压  $u_C(t)$  和电流  $i_C(t)$  取关联参考方向，据式 (1-3-18) 所示的伏安关系，有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau) d\tau \quad (6-1-2)$$

显然，若  $i_C(t)$  为有限值，则上式右端第二项为零，从而得  $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 。同理，对于电感  $L$ ，若其端电压  $u_L(t)$  和电流  $i_L(t)$  取关联参考方向，有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\tau) d\tau \quad (6-1-3)$$

从而在  $u_L(t)$  为有限值时得到  $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

需要指出，上述换路定理仅适用于电容元件的电压和电感元件的电流，不适用其他元件的电压或电流，譬如电阻元件的电压和电流、电感元件的电压、电容元件的电流等。

### 6.1.3 初始值的计算

电压或电流的初始值是指它们在换路后最初瞬间的值。譬如  $t = 0$  为换路瞬间时，电压或电流的初始值是它们在  $t = 0_+$  时刻的值，其中电容电压初始值  $u_C(0_+)$  和电感电流初始值  $i_L(0_+)$  亦称为初始状态。为此，初始状态为零时  $u_C(0_+) = 0V$ ， $i_L(0_+) = 0A$ 。

对于  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$  的求取，可先求  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ ，然后根据换路定理即可得到；对于其他元件的电压或电流的初始值，一般可按如下步骤求取。

(1) 画出  $t = 0_-$  时的等效电路，求取  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ 。

通常在换路前的最后瞬间，电路已处于稳态，因此对于直流激励的电路而言，此时电容用开路代替，电感用短路代替。

(2) 根据换路定理，求得  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$ 。

(3) 画出  $t = 0_+$  时的等效电路，求取其他元件电压或电流的初始值。

鉴于  $u_C(0_+)$  和  $i_L(0_+)$  已知，此时电容用  $u_C(0_+)$  大小的电压源替代，电感用  $i_L(0_+)$  大小的电流源替代。特别地，对于零状态电路，由于  $u_C(0_+) = 0V$  和  $i_L(0_+) = 0A$ ，故此时电容用短路替代，电容用开路替代。

**例 6-1-1** 如图 6-1-2 (a) 所示电路， $t = 0$  时开关  $K$  闭合，且开关  $K$  闭合前电路已处于稳态，

求初始值  $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$  和  $i(0_+)$ 。

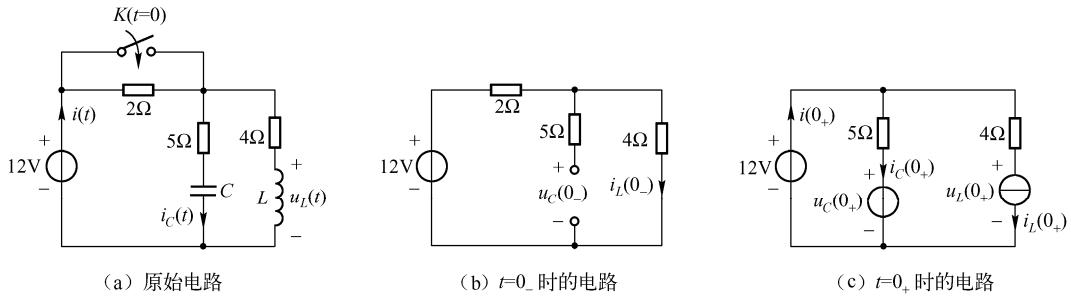


图 6-1-2 例 6-1-1 用图

解：(1) 画出  $t = 0_-$  时的等效电路，如图 6-1-2 (b) 所示，求取  $u_C(0_-)$  和  $i_L(0_-)$ 。

$$u_C(0_-) = \frac{4}{2+4} \times 12 = 8 \text{ V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{12}{2+4} = 2 \text{ A}$$

(2) 根据换路定理，得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8 \text{ V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

(3) 画出  $t = 0_+$  时的等效电路，如图 6-1-2 (c) 所示，求取  $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$  和  $i(0_+)$ 。

$$i_C(0_+) = \frac{12 - u_C(0_+)}{5} = 0.8 \text{ A}$$

$$u_L(0_+) = 12 - 4 \times i_L(0_+) = 4 \text{ V}$$

$$i(0_+) = i_C(0_+) + i_L(0_+) = 2.8 \text{ A}$$

例 6-1-2 如图 6-1-3 (a) 所示电路，换路前电路处于零状态， $t = 0$  时开关  $K$  闭合，求初始值  $u_C(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$  和  $i(0_+)$ 。

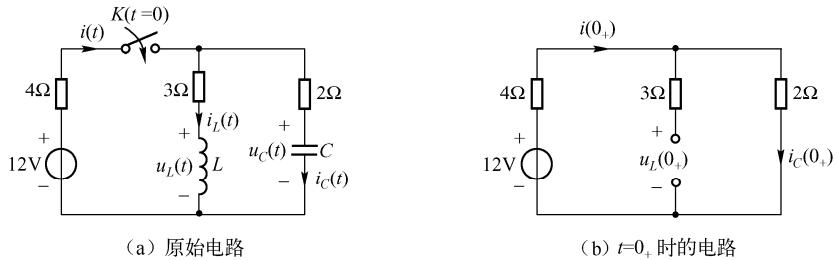


图 6-1-3 例 6-1-2 用图

解：(1) 据已知，换路前电路处于零状态，即  $u_C(0_-) = 0 \text{ V}$  和  $i_L(0_-) = 0 \text{ A}$ 。

(2) 根据换路定理，得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \text{ A}$$

(3) 画出  $t = 0_+$  时的等效电路, 如图 6-1-3 (b) 所示, 有

$$i_C(0_+) = i(0_+) = \frac{12}{2+4} = 2 \text{ A}$$

$$u_L(0_+) = 2 \times i_C(0_+) = 4 \text{ V}$$

## 6.2 直流一阶电路时域经典分析与响应的分解

### 6.2.1 直流一阶电路时域经典分析

#### 6.2.1.1 直流一阶电路

直流一阶电路是激励为直流的一阶动态电路, 其基本形式如图 6-2-1 (a) 所示, 是仅含一个独立动态元件的电路。其中,  $N_R$  是由电阻、受控源、独立源等构成的有源二端网络, 可以等效为实际电压源或实际电流源, 分别如图 6-2-1 (b) 和 (c) 所示。

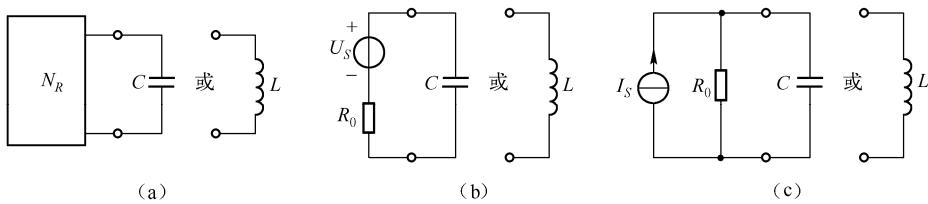


图 6-2-1 直流一阶电路基本形式

#### 6.2.1.2 响应求解

由于一阶电路只含一个独立的动态元件, 因此, 无论激励是电压源还是电流源, 亦或两者同时存在, 也不论响应是哪一条支路的电压或电流, 均可以用一阶微分方程描述其响应与激励之间的关系, 即

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = f(t) \quad (6-2-1)$$

式中,  $y(t)$  为响应,  $f(t)$  为激励及其导数的线性组合,  $\lambda$  为实常数 (与激励和响应无关), 具有频率的量纲, 称为电路的固有频率, 其倒数记为  $\tau = \frac{1}{\lambda}$ , 具有时间的量纲, 称为时间常数。如图 6-2-1 所示  $RC$  或  $RL$  电路,  $\tau = R_0 C$  或  $\tau = \frac{L}{R_0}$ 。

求解式 (6-2-1), 可得响应  $y(t)$ 。

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad t > 0 \quad (6-2-2)$$

式中,  $y_h(t) = Ae^{-\lambda t}$  ( $A$  为待定系数) 为方程的通解或齐次解,  $y_p(t)$  为方程的特解。

若已知  $y(t)$  的初始值  $y(0_+)$ , 将其代入式 (6-2-2) 可确定  $A = y(0_+) - y_p(0_+)$ , 从而得

$$y(t) = y_p(t) + [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\lambda t} \quad (6-2-3)$$

对于直流激励,  $f(t) = B$  ( $B$  为常数), 则  $y_p(t) = \frac{B}{\lambda}$ , 于是有

$$y(t) = \frac{B}{\lambda} + [y(0_+) - \frac{B}{\lambda}]e^{-\lambda t} = B\tau + [y(0_+) - B\tau]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-2-4)$$

$y(t)$  的变化曲线如图 6-2-2 所示。显然，时间常数  $\tau$  反映了瞬态过程的快慢。理论上，瞬态过程需要经历无穷长的时间。不过，工程上一般认为在经过  $3\tau \sim 5\tau$  后瞬态过程已结束，因为此时  $y(t)$  已非常接近稳态值。

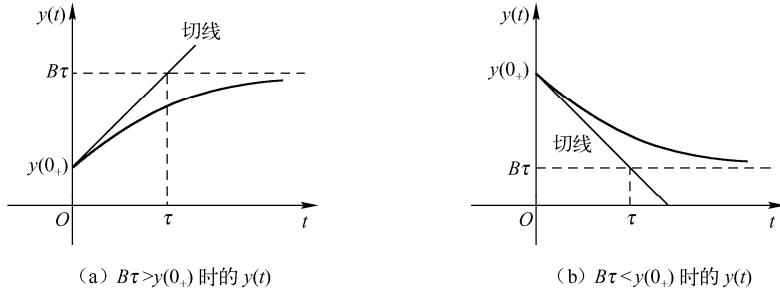


图 6-2-2  $y(t)$  的变化曲线

### 6.2.1.3 示例

#### (1) $RC$ 电路的响应

如图 6-2-3 (a) 所示的  $RC$  电路， $u_C(0_-) = U_0$ ，开关  $K$  在  $t=0$  时闭合，根据 KVL， $t > 0$  时  $u_R(t) + u_C(t) = U_S$ ，且  $u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt}$ ，于是

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{U_S}{RC} \quad (6-2-5)$$

由式 (6-2-4) 得

$$u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0 \quad (6-2-6)$$

$u_C(t)$  的变化曲线如图 6-2-3 (b) 或 (c) 所示。

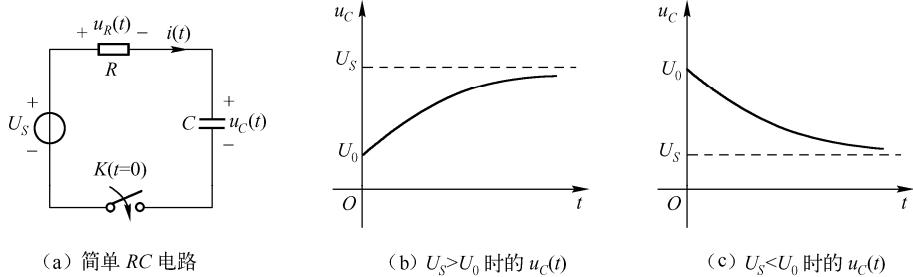


图 6-2-3 简单  $RC$  电路及其响应

#### (2) $RL$ 电路的响应

如图 6-2-4 (a) 所示的  $RL$  电路， $i_L(0_-) = I_0$ ，开关  $K$  在  $t=0$  时闭合，根据 KCL， $t > 0$  时  $i_R(t) + i_L(t) = I_S$ ，且  $i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt}$ ，于是

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{R}{L} I_S \quad (6-2-7)$$

由式 (6-2-4) 得

$$i_L(t) = I_S + (I_0 - I_S) e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t > 0 \quad (6-2-8)$$

$i_L(t)$  的变化曲线如图 6-2-4 (b) 或 (c) 所示。

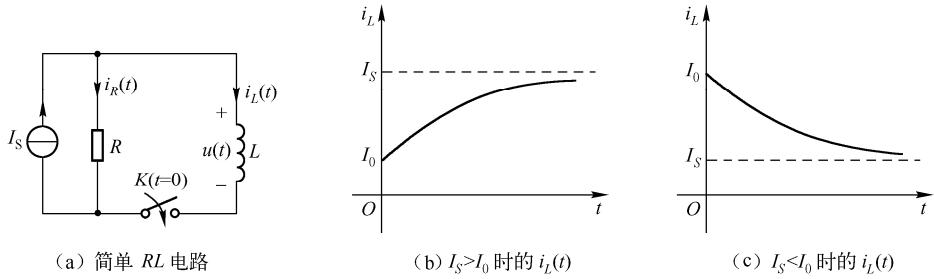


图 6-2-4 简单 RL 电路及其响应

## 6.2.2 响应分解

### 6.2.2.1 自由响应与强制响应

从数学求解方面来看, 电路的完全响应 (简称全响应) 可分解为自由响应和强制响应, 如式 (6-2-2) 所示。自由响应对应于微分方程的通解 (亦称齐次解), 即  $y_h(t)$ , 其响应模式与激励无关; 强制响应为微分方程的特解, 即  $y_p(t)$ , 其变化规律受激励的约束。

### 6.2.2.2 零状态响应与零输入响应

从产生响应的动因来看, 电路的全响应又分为零输入响应和零状态响应, 分别记为  $y_{zi}(t)$  和  $y_{zs}(t)$ , 对于线性电路, 有

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad t > 0 \quad (6-2-9)$$

零输入响应  $y_{zi}(t)$  是电路在激励为零时仅由初始储能产生的响应; 零状态响应  $y_{zs}(t)$  是电路在初始储能为零时仅由激励引起的响应。由式 (6-2-3) 知

$$\begin{cases} y_{zi}(t) = y_{zi}(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ y_{zs}(t) = y_p(t) + [y_{zs}(0_+) - y_p(0_+)] e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad t > 0 \quad (6-2-10)$$

式中,  $y_{zi}(0_+)$  和  $y_{zs}(0_+)$  分别为零输入时的初始值和零状态下的初始值。

这样, 式 (6-2-6) 可改写为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = u_{Czi}(t) + u_{Czs}(t) \quad t > 0 \quad (6-2-11)$$

式中,  $u_{Czi}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  是激励为零时仅由电容初始储能引起的响应,  $u_{Czs}(t) = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$  是电容初始储能为零时仅由激励产生的响应。

式 (6-2-8) 可改写为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} + I_S (1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) = i_{Lzi}(t) + i_{Lzs}(t) \quad t > 0 \quad (6-2-12)$$

式中,  $i_{Lzi}(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$  是激励为零时仅由电感初始储能引起的响应,  $i_{Lzs}(t) = I_S (1 - e^{-\frac{t}{L/R}})$  是电感初始储能为零时仅由激励产生的响应。

### 6.3 直流一阶电路响应的三要素法

如前所述，直流一阶电路中的任一响应均可用式 (6-2-4) 表示。不难得出，其中  $B\tau$  为  $t \rightarrow \infty$  时响应的稳态值（亦称终值），记为  $y(\infty)$ 。为此，式 (6-2-4) 可改写为

$$y(t) = y(\infty) + [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0 \quad (6-3-1)$$

此式表明，对于直流一阶电路，只要求得待求响应的初始值  $y(0_+)$ 、终值  $y(\infty)$ 、时间常数  $\tau$ ，即可按此式直接写出响应的表达式。为此，称  $y(0_+)$ 、 $y(\infty)$ 、 $\tau$  等为直流一阶电路响应的三要素，并把按此方法求取电路中任一响应的方法称为三要素法。显然，采用三要素法求取直流一阶电路响应，回避了建立微分方程、解方程、确定待定系数等繁琐的演算过程。

三要素法求解直流一阶电路响应可按如下步骤进行：

(1) 确定初始值  $y(0_+)$ 。按 6.1 节介绍的方法求解。

(2) 确定终值  $y(\infty)$ 。画出换路后  $t \rightarrow \infty$  时的等效电路，并予以求解。由于  $t \rightarrow \infty$  时电路已处于稳态，故此时将电容看成开路，电感当做短路。

(3) 确定时间常数  $\tau$ 。求取动态元件所接二端网络的戴维南等效电阻  $R_0$ ，对于  $RC$  电路， $\tau = R_0 C$ ；对于  $RL$  电路， $\tau = \frac{L}{R_0}$ 。

(4) 按式 (6-3-1) 写出响应。

特别指出：此方法既适用于求解全响应，也适用于求解零输入响应和零状态响应；响应既可以是电容电压或电感电流，也可以是电容电流或电感电压，还可以是电阻电压或电阻电流。

**例 6-3-1** 如图 6-3-1 (a) 所示电路， $U_s = 27 \text{ V}$ ， $R_1 = 3\Omega$ ， $R_2 = R_3 = 6\Omega$ ， $L = 0.5 \text{ H}$ ，开关  $K$  在  $t = 0$  时刻闭合，且闭合前电路已经处于稳态，求  $t > 0$  时的  $i(t)$ 。

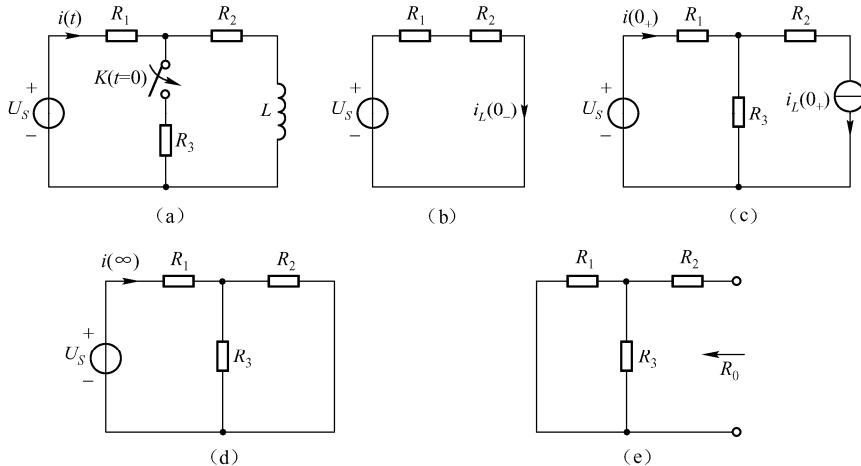


图 6-3-1 例 6-3-1 用图

解：(1) 确定  $i(0_+)$

① 画出  $t = 0_-$  时的等效电路，如图 6-3-1 (b) 所示。

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{27}{3+6} = 3 \text{ A}$$

② 据换路定理, 知  $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3 \text{ A}$ 。

③ 画出  $t = 0_+$  时的等效电路, 如图 6-3-1 (c) 所示。

$$i(0_+) = \frac{U_s}{R_1 + R_3} + \frac{R_3}{R_1 + R_3} i_L(0_+) = \frac{27}{3+6} + \frac{6}{3+6} \times 3 = 5 \text{ A}$$

(2) 确定  $i(\infty)$

画出  $t \rightarrow \infty$  时的等效电路, 如图 6-3-1 (d) 所示。

$$i(\infty) = \frac{U_s}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{27}{3+6//6} = 4.5 \text{ A}$$

(3) 确定  $\tau$

画出电感所接的无源二端网络, 如图 6-3-1 (e) 所示。

$$R_0 = R_1 // R_3 + R_2 = 3 // 6 + 6 = 8 \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{8} = \frac{1}{16} \text{ s}$$

(4) 求  $i(t)$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 4.5 + 0.5 e^{-16t} \text{ A} \quad t > 0$$

**例 6-3-2** 如图 6-3-2 所示电路,  $U_s = 8 \text{ V}$ ,  $I_s = 6 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 4 \Omega$ ,  $C = 0.5 \text{ F}$ , 开关  $K$  在  $t = 0$  时刻闭合, 且闭合前电路已经处于稳态, 求  $t > 0$  时的  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$  和  $i_C(t)$ 。

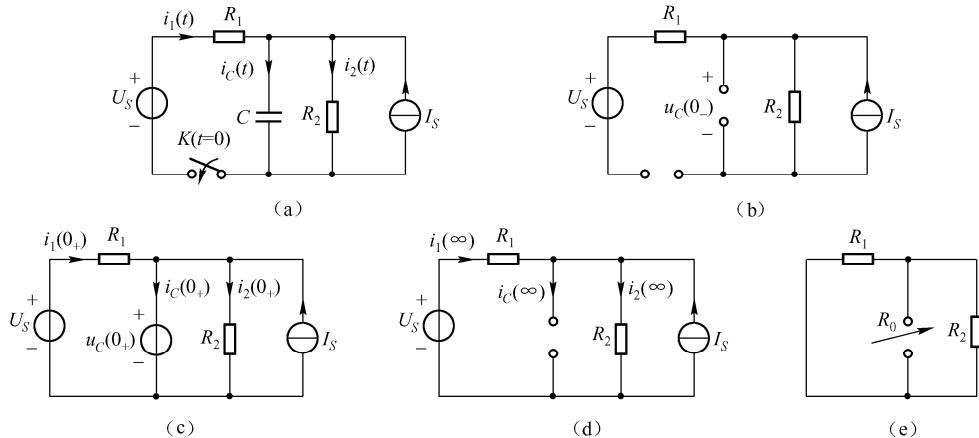


图 6-3-2 例 6-3-2 用图

解: (1) 确定  $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$  和  $i_C(0_+)$

① 画出  $t = 0_-$  时的等效电路, 如图 6-3-2 (b) 所示。

$$u_C(0_-) = R_2 I_s = 4 \times 6 = 24 \text{ V}$$

② 据换路定理, 知  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 24 \text{ V}$ 。

③ 画出  $t = 0_+$  时的等效电路, 如图 6-3-2 (c) 所示。

$$i_1(0_+) = \frac{U_S - u_C(0_+)}{R_1} = \frac{8 - 24}{4} = -4 \text{ A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ A}$$

$$i_C(0_+) = i_1(0_+) + I_S - i_2(0_+) = -4 + 6 - 6 = -4 \text{ A}$$

(2) 确定  $i_1(\infty)$ 、 $i_2(\infty)$  和  $i_C(\infty)$

画出  $t \rightarrow \infty$  时的等效电路, 如图 6-3-2 (d) 所示。

$$i_1(\infty) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_S = \frac{8}{4+4} - \frac{4}{4+4} \cdot 6 = -2 \text{ A}$$

$$i_2(\infty) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S = \frac{8}{4+4} + \frac{4}{4+4} \cdot 6 = 4 \text{ A}$$

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

(3) 确定  $\tau$

画出电容所接的无源二端网络, 如图 6-3-2 (e) 所示。

$$R_0 = R_1 // R_2 = 4 // 4 = 2 \Omega$$

$$\tau = R_0 C = 2 \times 0.5 = 1 \text{ s}$$

(4) 求  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$  和  $i_C(t)$

$$i_1(t) = i_1(\infty) + [i_1(0_+) - i_1(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = -2 - 2 e^{-t} \text{ A} \quad t > 0$$

$$i_2(t) = i_2(\infty) + [i_2(0_+) - i_2(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 4 + 2 e^{-t} \text{ A} \quad t > 0$$

$$i_C(t) = i_C(\infty) + [i_C(0_+) - i_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = -4 e^{-t} \text{ A} \quad t > 0$$

## 6.4 阶跃响应与冲激响应

### 6.4.1 阶跃响应

电路在零状态条件下, 由单位阶跃信号  $\varepsilon(t)$  激励而引起的响应称为单位阶跃响应, 简称阶跃响应, 用  $r_E(t)$  表示。譬如, 如图 6-4-1 所示电路,  $u_C(0_-) = 0 \text{ V}$ ,  $i_L(0_-) = 0 \text{ A}$ ,  $u_S(t) = \varepsilon(t) \text{ V}$ ,  $i_S(t) = \varepsilon(t) \text{ A}$ , 相当于  $t = 0$  时将直流电源接入电路, 则此时电路在  $t > 0$  时的响应 (如  $i(t)$ 、 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 、 $u(t)$  等) 为单位阶跃响应。

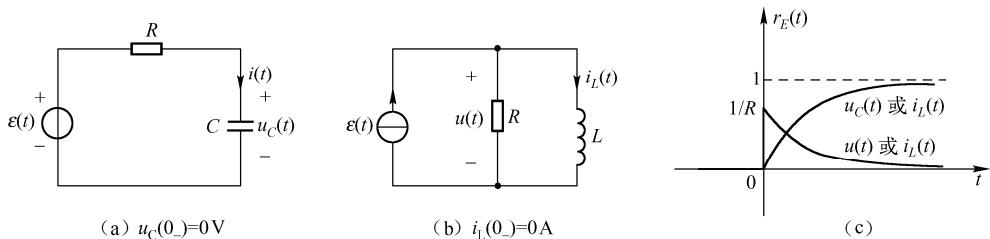


图 6-4-1 单位阶跃响应示意图

对于线性时不变电路而言, 根据线性性和时不变性, 可知  $A\varepsilon(t-t_0)$  激励下电路的零状态响应为  $Ar_E(t-t_0)$ , 即

$$A\varepsilon(t-t_0) \rightarrow Ar_E(t-t_0) \quad (6-4-1)$$

例 6-4-1 如图 6-4-2 (a) 所示电路,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 1\Omega$ ,  $C = 0.25\text{ F}$ ,  $u_C(0_-) = 1\text{ V}$ , 激励  $u_S(t)$  的波形如图 6-4-2 (b) 所示, 求  $i(t)$ 。

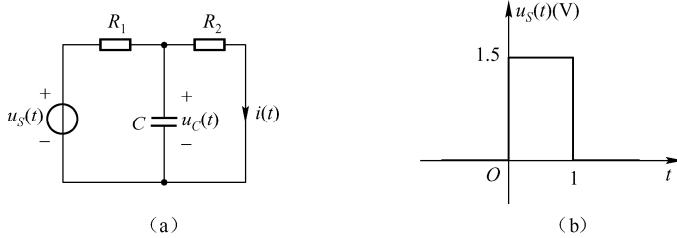


图 6-4-2 例 6-4-1 用图

解: (1) 求  $i(t)$  的零输入响应  $i_{zi}(t)$

如图 6-4-3 (a) 所示, 有  $i_{zi}(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2} = \frac{u_C(0_-)}{R_2} = 1\text{ A}$ 。

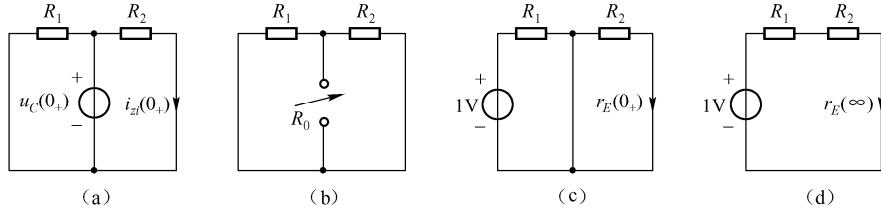


图 6-4-3 例 6-4-1 三要素求解用图

零输入时终值恒为 0, 即  $i_{zi}(\infty) = 0\text{ A}$ 。

如图 6-4-3 (b) 所示, 有  $R_0 = R_1 // R_2$ , 从而

$$\tau = R_0 C = (R_1 // R_2) C = \frac{2}{3} \text{ s}$$

$$i_{zi}(t) = i_{zi}(\infty) + [i_{zi}(0_+) - i_{zi}(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-1.5t} \text{ A}, \quad t > 0$$

(2) 求  $i(t)$  的零状态响应  $i_{zs}(t)$

① 先求  $i(t)$  的单位阶跃响应  $r_E(t)$ 。

如图 6-4-3 (c)、(d) 所示, 有  $r_E(0_+) = 0\text{ A}$ ;  $r_E(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}\text{ A}$

$$r_E(t) = r_E(\infty) + [r_E(0_+) - r_E(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{3}(1 - e^{-1.5t}) \text{ A}, \quad t > 0$$

鉴于  $t < 0$  时  $r_E(t) = 0$ , 故上式可改写为

$$r_E(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-1.5t}) \varepsilon(t) \text{ A}$$

② 求  $u_S(t)$  激励下的零状态响应  $i_{zs}(t)$ 。

因为  $u_S(t) = 1.5[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]\text{ V}$ , 据式 (6-4-1) 有

$$i_{zs}(t) = 1.5[r_E(t) - r_E(t-1)] = 0.5(1 - e^{-1.5t})\varepsilon(t) - 0.5[1 - e^{-1.5(t-1)}]\varepsilon(t-1) \text{ A}$$

(3) 求完全响应  $i(t)$ 。

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = e^{-1.5t} + 0.5(1 - e^{-1.5t})\varepsilon(t) - 0.5[1 - e^{-1.5(t-1)}]\varepsilon(t-1) \text{ A}, \quad t > 0 \\ &= 0.5(1 + e^{-1.5t}) - 0.5[1 - e^{-1.5(t-1)}]\varepsilon(t-1) \end{aligned}$$

## 6.4.2 冲激响应

电路在零状态条件下, 由单位冲激信号  $\delta(t)$  激励而引起的响应称为单位冲激响应, 简称冲激响应, 用  $h(t)$  表示。对于一阶动态电路, 其微分方程为

$$h'(t) + \lambda \cdot h(t) = b_1 \delta'(t) + b_0 \delta(t) \quad (6-4-2)$$

从而  $h(t)$  为如下形式:

$$h(t) = C \delta(t) + B e^{-\lambda t} \varepsilon(t) \quad (6-4-3)$$

式中,  $C$  和  $B$  为待定系数。将式 (6-4-3) 代入式 (6-4-2) 即可确定  $C$  和  $B$ , 即

$$\begin{cases} C = b_1 \\ B = b_0 - b_1 \lambda \end{cases} \quad (6-4-4)$$

于是得

$$h(t) = b_1 \delta(t) + (b_0 - b_1 \lambda) e^{-\lambda t} \varepsilon(t) \quad (6-4-5)$$

对于线性时不变电路或系统, 考虑到  $\varepsilon(t)$  与  $\delta(t)$  之间的关系, 据式 (2-6-2) 知, 单位阶跃响应的微分为单位冲激响应, 单位冲激响应的积分为单位阶跃响应, 即

$$\begin{cases} h(t) = \frac{dr_E(t)}{dt} \\ r_E(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \end{cases} \quad (6-4-6)$$

$h(t)$  的求解方法可分为两类: 直接法和间接法。直接法就是从定义出发直接进行求解的方法。譬如, 建立微分方程, 然后由微分方程直接求解。式 (6-4-5) 即为一阶动态电路的  $h(t)$ 。

间接法主要有两种: 一种是求解单位阶跃响应, 然后对其求导即得冲激响应; 另一种间接法是先求解  $h(t)$  的变换域解 (详见第 11 章), 譬如傅里叶变换  $H(\omega)$  (称为频域系统函数) 或拉普拉斯变换  $H(s)$  (称为复频域系统函数), 然后进行相应的反变换即可得  $h(t)$ 。间接法只适用于线性时不变电路或系统。

**例 6-4-2** 如图 6-4-4 (a) 所示电路,  $i_s(t)$  为激励,  $u(t)$  为响应, 求  $h(t)$ 。

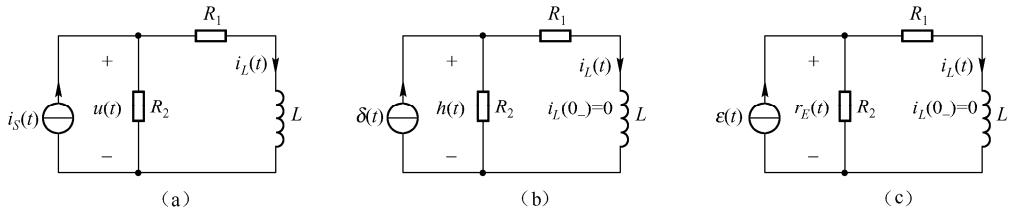


图 6-4-4 例 6-4-2 用图

解: 方法一: 直接求解  $h(t)$

$h(t)$  对应的电路图如图 6-4-4 (b) 所示, 据 KCL 和 KVL, 有

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{h(t)}{R_2} + i_L(t) \\ h(t) = R_1 i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

于是

$$h'(t) + \frac{R_1 + R_2}{L} h(t) = R_2 \delta'(t) + \frac{R_1 R_2}{L} \delta(t)$$

据式 (6-4-5) 得

$$h(t) = R_2 \delta(t) + \left( \frac{R_1 R_2}{L} - R_2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{L} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \varepsilon(t) = R_2 \delta(t) - \frac{R_2^2}{L} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \varepsilon(t)$$

方法二: 由  $r_E(t)$  求  $h(t)$

$r_E(t)$  对应的电路图如图 6-4-4 (c) 所示。采用三要素法求  $r_E(t)$ , 有

$$r_E(0_+) = R_2 \times 1, \quad r_E(\infty) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times 1, \quad \tau = \frac{L}{R_0} = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

$$r_E(t) = \{r_E(\infty) + [r_E(0_+) - r_E(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}\} \varepsilon(t) = \left[ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \left( R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \right] \varepsilon(t)$$

从而得

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{dr_E(t)}{dt} \\ &= \left[ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \left( R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \right] \varepsilon'(t) + \left[ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \left( R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \right]' \varepsilon(t) \\ &= \left[ \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \left( R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \right] \delta(t) - \frac{R_1 + R_2}{L} \left( R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \varepsilon(t) \\ &= R_2 \delta(t) - \frac{R_2^2}{L} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

## 6.5 动态电路的时域卷积分析

### 6.5.1 时域卷积分析法的含义

对于线性时不变零状态电路, 根据线性和时不变性有

$$\begin{aligned} \delta(t) &\rightarrow h(t) \\ f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &\rightarrow f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &\rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = f(t) * h(t) \end{aligned}$$

于是可利用时域卷积积分求解电路的零状态响应, 即

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \quad (6-5-1)$$

式中,  $y_{zs}(t)$  为电压或电流的零状态响应,  $f(t)$  为激励,  $h(t)$  为单位冲激响应。称此方法为时域卷积分析法, 它克服了时域经典法中求解特解的困难。

## 6.5.2 时域卷积分析法的应用

例 6-5-1 如图 6-5-1 (a) 所示电路,  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $C = 0.5\text{F}$ , 求如图 6-5-1 (b) 所示信号激励下的零状态响应  $i_{zs}(t)$ 。

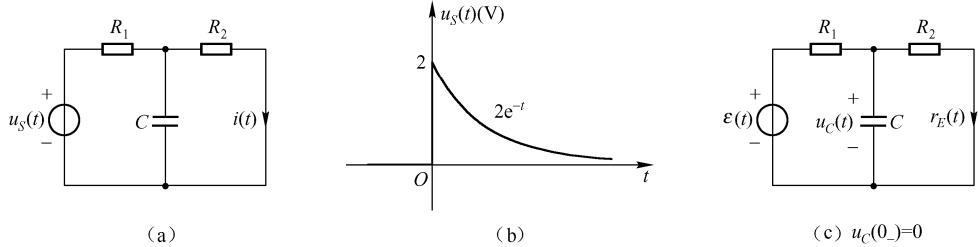


图 6-5-1 例 6-5-1 用图

解: (1) 求单位冲激响应  $h(t)$

由单位阶跃响应  $r_E(t)$  求单位冲激响应  $h(t)$ 。 $r_E(t)$  对应的电路图如图 6-5-1 (c) 所示。采用三要素法求  $r_E(t)$ , 有

$$r_E(0_+) = 0 \text{ A}, \quad r_E(\infty) = \frac{1}{R_1 + R_2} \times 1 = \frac{1}{8} \text{ A}, \quad \tau = R_0 C = (R_1 // R_2) C = 1 \text{ s}$$

$$r_E(t) = \{r_E(\infty) + [r_E(0_+) - r_E(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}\}\varepsilon(t) = \frac{1}{8}(1 - e^{-t})\varepsilon(t) \text{ A}$$

从而

$$h(t) = \frac{dr_E(t)}{dt} = \frac{1}{8}(1 - e^{-t})\delta(t) + \frac{1}{8}e^{-t}\varepsilon(t) = \frac{1}{8}e^{-t}\varepsilon(t) \text{ A}$$

(2) 求  $i_{zs}(t)$

由图 6-5-1 (b) 知,  $u_s(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t) \text{ V}$ , 于是

$$\begin{aligned} i_{zs}(t) &= u_s(t) * h(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t) * \frac{1}{8}e^{-t}\varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^t e^{-2\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau \right] \varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t) \text{ A} \end{aligned}$$

## 练习题

### A. 基本概念类

- 6-1 说明动态电路的特性, 如何确定动态电路的阶数?
- 6-2 什么是过渡过程? 说明产生过渡过程的条件。
- 6-3 解释换路定理的含义。
- 6-4 给出计算初始值的一般步骤, 举例说明初始值的计算。
- 6-5 解释动态电路时域经典分析法, 举例说明其应用。

6-6 解释零输入响应和零状态响应的含义。

6-7 说明动态电路响应的几种分解方式。

6-8 关于三要素法：

(1) 什么是三要素法？

(2) 解释其适用条件或范围；

(3) 给出三要素法的基本步骤，举例说明其应用。

6-9 关于单位阶跃响应和单位冲激响应：

(1) 解释单位阶跃响应和单位冲激响应的含义；

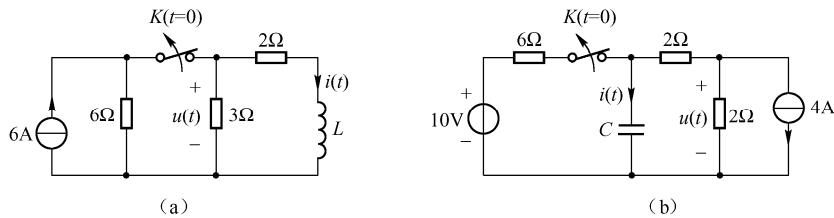
(2) 举例说明阶跃响应和冲激响应的求解；

(3) 对于线性时不变电路，阶跃响应和冲激响应有何关系？

6-10 解释动态电路的时域卷积分析法，举例说明其应用。

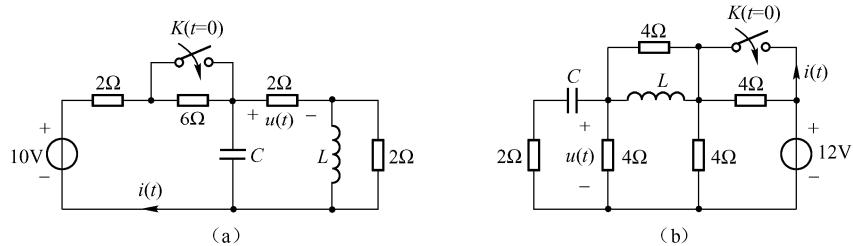
### B. 分析计算类

6-11 如题图 6-1 所示电路， $t = 0$  时开关  $K$  断开，且  $t < 0$  时电路已处于稳态，求初始值  $i(0_+)$  和  $u(0_+)$ 。



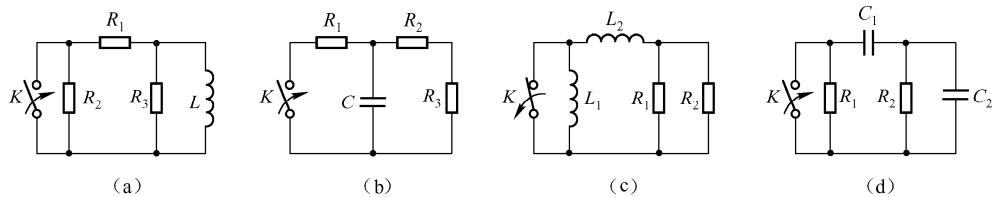
题图 6-1

6-12 如题图 6-2 所示电路， $t = 0$  时开关  $K$  闭合，且  $t < 0$  时电路已处于稳态，求初始值  $i(0_+)$  和  $u(0_+)$ 。



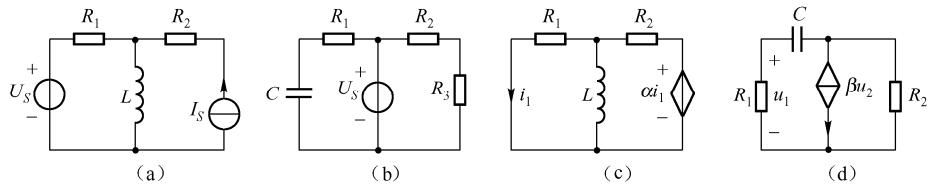
题图 6-2

6-13 求如题图 6-3 所示电路的时间常数。



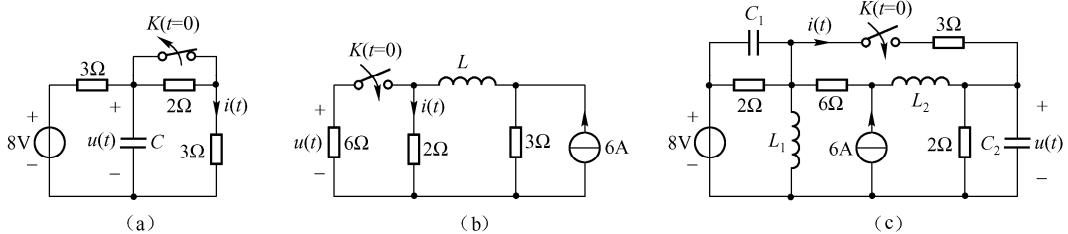
题图 6-3

6-14 求如题图 6-4 所示电路的时间常数。



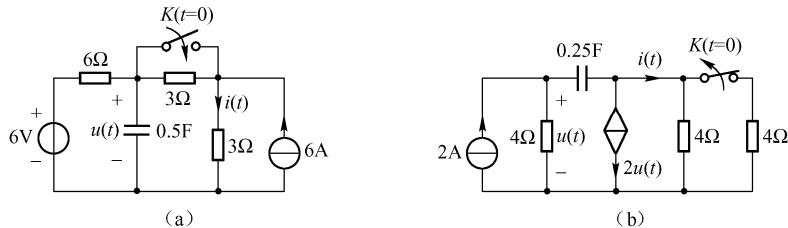
题图 6-4

6-15 如题图 6-5 所示电路，求终值  $i(\infty)$  和  $u(\infty)$ 。



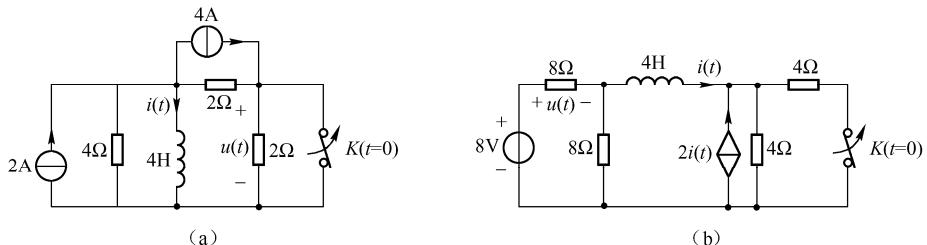
题图 6-5

6-16 如题图 6-6 所示电路， $t=0$  时换路，且换路前电路处于稳态，求  $t>0$  时的  $i(t)$  和  $u(t)$ 。



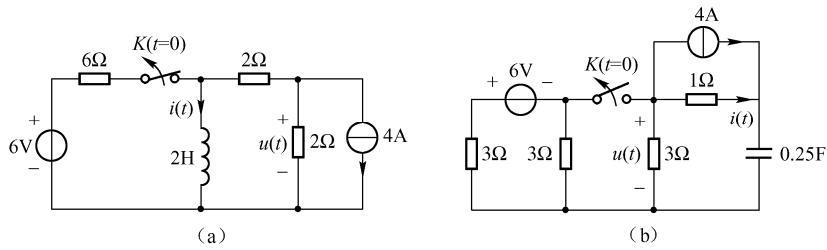
题图 6-6

6-17 如题图 6-7 所示电路， $t=0$  时换路，且换路前电路处于稳态，求  $t>0$  时的  $i(t)$  和  $u(t)$ 。



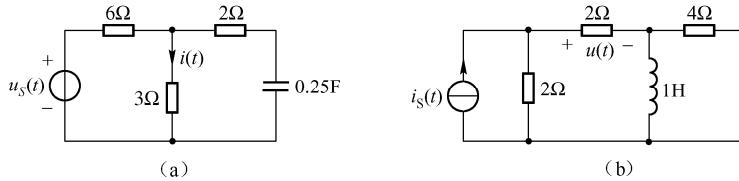
题图 6-7

6-18 如题图 6-8 所示电路， $t=0$  时发生换路，且换路前电路已处于稳态，求  $t>0$  时  $i(t)$  和  $u(t)$  的零输入响应、零状态响应和全响应。



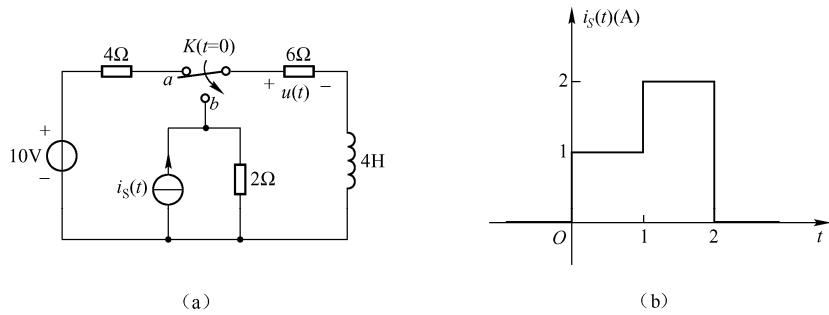
题图 6-8

6-19 如题图 6-9 所示电路,  $u_s(t)$  和  $i_s(t)$  为激励,  $u(t)$  和  $i(t)$  为响应, 求  $u(t)$  和  $i(t)$  的单位阶跃响应和单位冲激响应。



题图 6-9

6-20 如题图 6-10 (a) 所示电路, 激励  $i_s(t)$  如题图 6-10 (b) 所示, 试求电压  $u(t)$  的零输入响应  $u_{zi}(t)$ 、零状态响应  $u_{zs}(t)$  和全响应。



题图 6-10

6-21 已知一阶电路的微分方程如下, 其中  $u_s(t)$  和  $i_s(t)$  为激励,  $u(t)$  和  $i(t)$  为响应。求其单位阶跃响应和单位冲激响应。

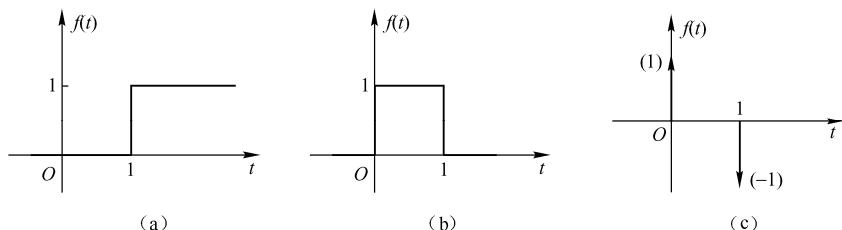
$$(1) \frac{di(t)}{dt} + 2i(t) = 2u_s(t)$$

$$(2) \frac{du(t)}{dt} + u(t) = \frac{1}{2}i_s(t)$$

$$(3) \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{di_s(t)}{dt} + 2i_s(t)$$

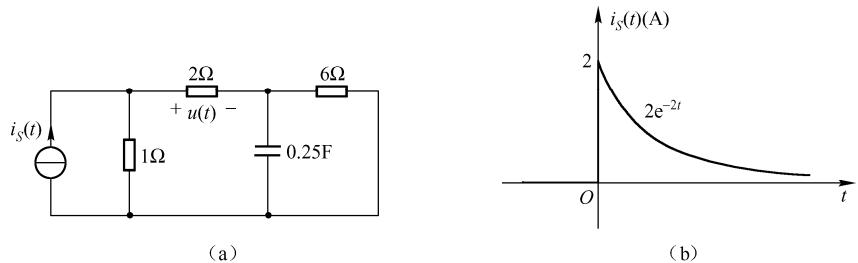
$$(4) \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) = 2\frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

6-22 已知某一阶电路的单位阶跃响应为  $r_E(t) = (2 - e^{-t})\varepsilon(t)$ , 激励  $f(t)$  如题图 6-11 所示, 求电路的零状态响应, 如  $y_{zs}(t)$ 。



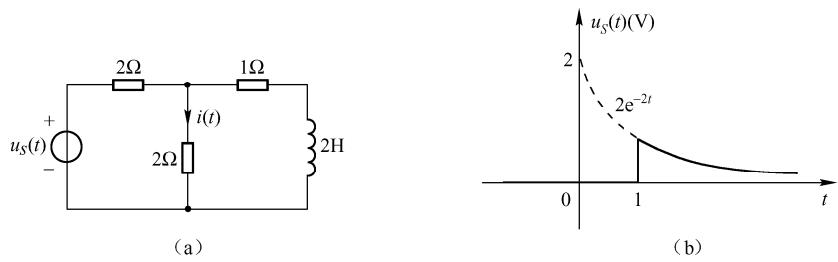
题图 6-11

6-23 如题图 6-12 (a) 所示电路, 求如题图 6-12 (b) 所示信号激励下  $u(t)$  的零状态响应。



题图 6-12

6-24 如题图 6-13 (a) 所示电路, 求如题图 6-13 (b) 所示信号激励下  $i(t)$  的零状态响应。



题图 6-13

## 第7章 正弦稳态电路分析

正弦稳态电路常称为交流电路，其激励为正弦信号。正弦稳态电路的分析是电路理论中的重要内容，这是因为：

(1) 正弦信号易于产生，应用广泛。目前，电力系统中发电机提供的 50 Hz 交流电和通信技术中所采用的“载波”信号都是正弦波。

(2) 在信号理论中，正弦信号是一种简单的、基本的信号。譬如，正弦信号进行加减、微分、积分等运算后仍为同频的正弦信号；应用傅里叶级数或傅里叶变换（参见第 8 章）可将非正弦信号分解为许多不同频率的正弦信号之和。这样，只要应用叠加定理便可把正弦稳态电路的分析推广应用于非正弦信号激励下的线性电路。

本章介绍正弦稳态电路的分析，涉及正弦信号及其相量表示、两类约束的相量形式、相量法及其应用、耦合电感、理想变压器等。

### 7.1 正弦信号及其相量表示

#### 7.1.1 正弦信号的时域表示

正弦信号是指随时间按正弦规律变化的周期信号，是最基本的周期信号之一，也是其他周期信号或非周期信号的基本元素。正弦信号既可以表示为余弦函数形式，也可以表示为正弦函数形式。本书采用余弦函数形式表示电路分析中的正弦信号，其波形如图 7-1-1 所示，称其为正弦波。

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \theta) \quad (7-1-1)$$

式中， $f(t)$  为正弦信号的瞬时值，表示任意时刻  $t$  正弦信号的函数值。瞬时值通常用小写字母表示。电路分析中的正弦信号一般为正弦电压或正弦电流，其瞬时值常用  $u(t)$  或  $i(t)$  来表示。

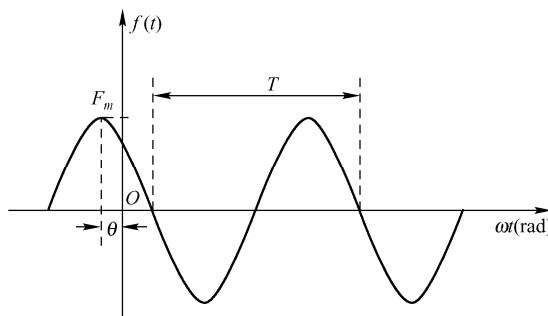


图 7-1-1 正弦信号波形

式 (7-1-1) 和如图 7-1-1 所示波形中的  $F_m$ 、 $\omega$  和  $\theta$  分别为正弦信号的振幅、角频率和初相，并统称为正弦信号的三要素，因为它们能唯一完全地确定一个正弦信号，而且通常约定：  
①  $F_m > 0$ ；②  $\omega > 0$ ；③  $|\theta| \leq \pi$ 。

譬如， $f(t) = -2\sqrt{2} \sin(-2t + \frac{\pi}{3})$  的三要素分别为  $F_m = 2\sqrt{2}$ 、 $\omega = 2$ 、 $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ ，因为

$$f(t) = 2\sqrt{2} \sin(2t - \frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{2} \cos(2t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{2} \cos(2t - \frac{5\pi}{6})。$$

### 7.1.1.1 振幅和有效值

正弦信号的振幅反映了正弦信号变化幅度的大小, 为瞬时值的最大值, 通常用加下标  $m$  的大写字母来表示, 如  $U_m$ 、 $I_m$  分别表示正弦电压  $u(t)$  的幅值、正弦电流  $i(t)$  的幅值。

在实际应用中常用有效值来表征正弦信号的大小。有效值通常用大写字母来表示, 如  $U$ 、 $I$  分别表示正弦电压  $u(t)$  的有效值、正弦电流  $i(t)$  的有效值。

周期信号的有效值是根据热效应来规定的。譬如, 对周期性交流电流  $i(t)$ , 其有效值定义为: 当周期性交流电流  $i(t)$  和直流电流  $I$  分别流过两个相等的电阻  $R$  时, 若在一个周期  $T$  内两电阻上消耗的电能相等, 则直流电流的电流值  $I$  即为周期性电流  $i(t)$  的有效值, 即

$$I^2 RT = \frac{1}{T} \int_T i^2(t) dt \quad (7-1-2)$$

于是, 正弦电流  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$  或正弦电压  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$  的有效值与其最大值之间具有如下关系:

$$\begin{cases} I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m \\ U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 U_m \end{cases} \quad (7-1-3)$$

### 7.1.1.2 角频率、周期与频率

正弦信号的角频率  $\omega$  是其在单位时间内变化的角度, 反映了正弦信号变化的快慢, 其国际单位为弧度每秒 (rad/s)。与此相关的参量有周期  $T$  及频率  $f$ , 其国际单位分别为秒 (s) 和赫兹 (Hz), 而且它们之间具有如下关系:

$$\begin{cases} f = \frac{1}{T} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \end{cases} \quad (7-1-4)$$

### 7.1.1.3 初相和相位差

式 (7-1-1) 中的  $(\omega t + \theta)$  描述了正弦信号变化的进程或状态, 称为正弦信号的相位。 $\theta$  为  $t = 0$  时刻所对应的相位, 称为初相位或初相角, 简称初相。

两个同频率正弦信号的相位之差称为相位角差或相位差, 用  $\varphi$  表示。譬如, 如图 7-1-2 所示同频率正弦电压  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$  和电流  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ , 其相位差为

$$\varphi = (\omega t + \theta_u) - (\omega t + \theta_i) = \theta_u - \theta_i \quad (7-1-5)$$

显然, 两个同频正弦信号的相位差等于它们的初相位之差, 与时间  $t$  无关。一般规定  $|\varphi| \leq \pi$ 。

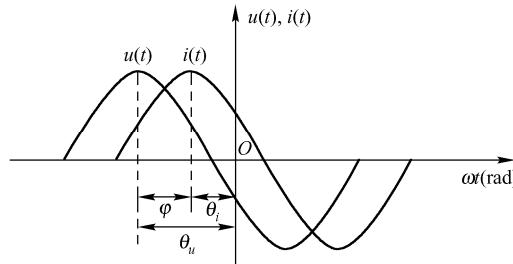


图 7-1-2 同频正弦信号  $u(t)$  和  $i(t)$

对于两个同频正弦信号  $f_1(t) = F_{1m} \cos(\omega t + \theta_1)$  和  $f_2(t) = F_{2m} \cos(\omega t + \theta_2)$ ，其相位差  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ ，称  $f_1(t)$  超前  $f_2(t)$ ，超前角度为  $\varphi$ ，或  $f_2(t)$  滞后  $f_1(t)$ ，滞后角度为  $\varphi$ 。特别地：

- (1)  $\varphi = 0$ ，称  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  同相，如图 7-1-3 (a) 所示；
- (2)  $\varphi = \pi$ ，称  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  反相，如图 7-1-3 (b) 所示；
- (3)  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ，称  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  正相，如图 7-1-3 (c) 所示。

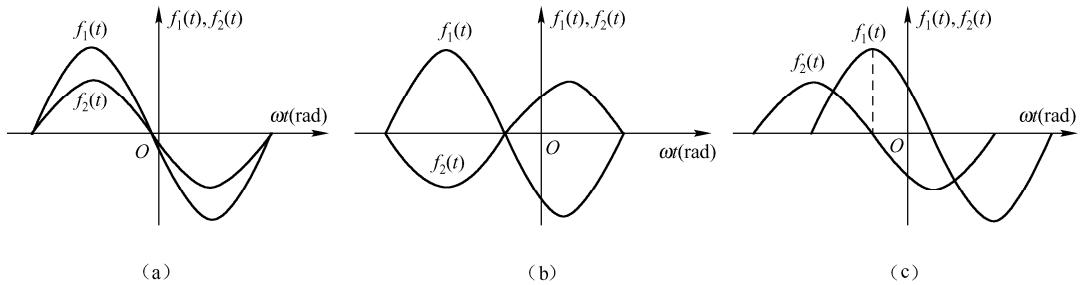


图 7-1-3 同频正弦信号  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  之间的相位关系

## 7.1.2 复数及其运算

### 7.1.2.1 复数的表示

复数  $A$  有以下几种表示方式。

- (1) 代数形式：  $A = a + jb$
- (2) 三角函数形式：  $A = r \cos \theta + jr \sin \theta$
- (3) 指数形式：  $A = r e^{j\theta}$
- (4) 极坐标形式：  $A = r \angle \theta$

其中， $a$  为实部， $b$  为虚部， $r$  为模， $\theta$  为辐角，它们之间具有如下关系：

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \end{cases} \quad (7-1-6)$$

需要注意的是：鉴于数学中的虚数单位符号  $i$  在电路分析中表示电流，为避免混淆，故在电路分析中通常用  $j = \sqrt{-1}$  来表示虚数单位。

另外，复数  $A$  也可以在复平面上用矢量表示，如图 7-1-4 所示中的有向线段。其中，有向线段的长度为复数  $A$  的模，有向线段与实轴正方向的夹角为复数  $A$  的辐角  $\theta$ 。而且，在复平面上平移矢量不会改变复数的值。也就是说，复平面上任意两个矢量，只要它们的长度和方向相同，则它们表示的是同一复数。譬如，如图 7-1-4 所示的矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ ，有  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

### 7.1.2.2 复数的运算

#### (1) 复数的加减运算

设  $A_1 = a_1 + jb_1$ ， $A_2 = a_2 + jb_2$ ，则

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (7-1-7)$$

在复平面上，复数的相加运算符合平行四边形法则或首尾相接法则，而复数的相减运算可转换为相加运算，如图 7-1-5 所示。

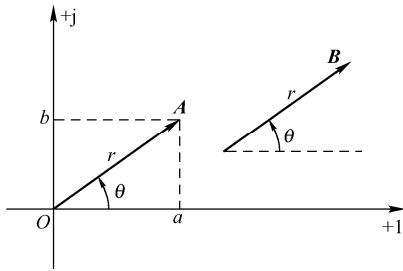


图 7-1-4 复数的复平面矢量表示

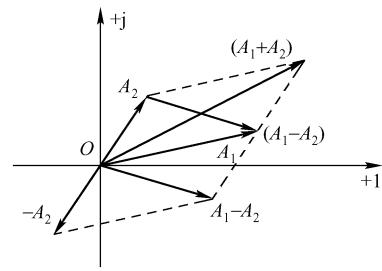


图 7-1-5 复数的加减

### (2) 复数的乘除运算

设  $A_1 = a_1 + jb_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ ,  $A_2 = a_2 + jb_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ , 则

$$\begin{cases} A_1 \cdot A_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases} \quad (7-1-8)$$

### 7.1.3 正弦信号的相量表示

用一个复数来表达一个正弦信号的方式称为正弦信号的相量表示, 其中复数的辐角为正弦信号的初相, 复数的模为正弦信号的振幅或有效值, 相应地称其为振幅相量或有效值相量。本书后续内容在不做特别说明时, 均是指有效值相量。

相量通常用一个大写字母上加一小圆点来表示。譬如, 正弦电压  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$  和电流  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$  的振幅相量和有效值相量分别为

$$\begin{cases} \dot{U}_m = U_m \angle \theta_u \\ \dot{I}_m = I_m \angle \theta_i \end{cases} \quad (7-1-9)$$

$$\begin{cases} \dot{U} = U \angle \theta_u \\ \dot{I} = I \angle \theta_i \end{cases} \quad (7-1-10)$$

显然, 在角频率(或周期、频率)给定的条件下, 相量能够唯一地确定正弦信号。鉴于此, 可以用一双向箭头来表达正弦信号时域表示和相量表示之间的对应关系, 如式(7-1-11)所示。不过需要注意的是: 正弦信号的时域表示与相量表示之间仅仅是一种对应关系, 两者不能画等号。

$$\begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u) \leftrightarrow \dot{U}_m = U_m \angle \theta_u \quad \text{或} \quad \dot{U} = U \angle \theta_u \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \leftrightarrow \dot{I}_m = I_m \angle \theta_i \quad \text{或} \quad \dot{I} = I \angle \theta_i \end{cases} \quad (7-1-11)$$

将相量在复平面上用矢量表示的图称为相量图。为简化起见, 相量图通常省去虚轴, 有时甚至也可省去实轴。如图 7-1-6(a) 所示为正弦电压  $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u)$  的有效值相量  $\dot{U} = U \angle \theta_u$ 。其中, 有效值相量矢量的长度为正弦电压的有效值, 有效值相量矢量与实轴的夹角为正弦电压的初相。

相量图还可用于正弦信号之间的比较。譬如, 如图 7-1-6(b) 所示相量图中, 电压有效值相量  $\dot{U}$  与电流有效值  $\dot{I}$  之间的夹角为  $\frac{\pi}{6}$ , 表示正弦电压超前正弦电流  $\frac{\pi}{6}$ 。

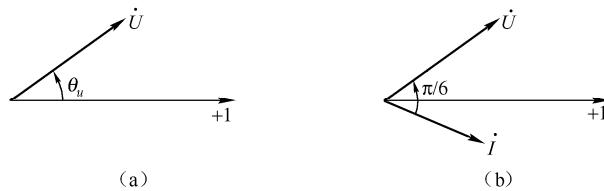


图 7-1-6 相量图表示

例 7-1-1 已知  $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cos(314t + 60^\circ) \text{ V}$ ,  $u_2(t) = 5\sqrt{2} \cos(314t - 60^\circ) \text{ V}$ 。

- (1) 试分别写出  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  所对应的振幅相量和有效值相量;
- (2) 求电压  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ 。

解: (1)  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  所对应的振幅相量和有效值相量如下。

$$u_1(t) \leftrightarrow \dot{U}_{1m} = 10\sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$u_1(t) \leftrightarrow \dot{U}_1 = 10 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$u_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_{2m} = 5\sqrt{2} \angle -60^\circ \text{ V}$$

$$u_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_2 = 5 \angle -60^\circ \text{ V}$$

(2) 运用三角函数方法求解电压  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  较为烦琐。由于同频正弦信号之和仍为同频的正弦信号, 因此可以采用相量法简化运算。

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \leftrightarrow \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

代入  $\dot{U}_1$  和  $\dot{U}_2$ , 得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 10 \angle 60^\circ + 5 \angle -60^\circ = 8.66 \angle 30^\circ \text{ V}$$

于是

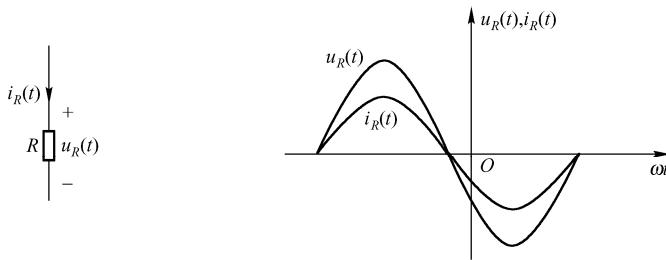
$$u(t) = 8.66\sqrt{2} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$$

## 7.2 两类约束的相量形式

### 7.2.1 基本元件的正弦稳态特性及其相量模型

#### 7.2.1.1 电阻元件的正弦稳态特性及其相量模型

某线性时不变电阻元件  $R$  接在正弦稳态电路中, 其时域模型如图 7-2-1 (a) 所示。



(a) 时域模型

(b) 电压、电流波形

图 7-2-1 电阻元件时域模型与电压、电流波形

设  $i_R(t) = \sqrt{2}I_R \cos(\omega t + \theta_i) \Leftrightarrow \dot{I}_R = I_R \angle \theta_i$ , 则有

$$\begin{aligned} u_R(t) &= RI_R(t) = \sqrt{2}RI_R \cos(\omega t + \theta_i) \Leftrightarrow \dot{U}_R = RI_R \angle \theta_i = R\dot{I}_R \\ &= \sqrt{2}U_R \cos(\omega t + \theta_u) \end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases} U_R = RI_R \\ \theta_u = \theta_i \end{cases} \quad (7-2-1)$$

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \quad (7-2-2)$$

式 (7-2-1) 表明电阻元件在电压和电流取关联参考方向下同相。电压  $u_R(t)$  和电流  $i_R(t)$  的波形如图 7-2-1 (b) 所示；式 (7-2-2) 即为电阻元件相量形式的伏安关系，描述此种关系的电路模型称为电阻元件的相量模型，如图 7-2-2 (a) 所示，相应的相量图如图 7-2-2 (b) 所示。

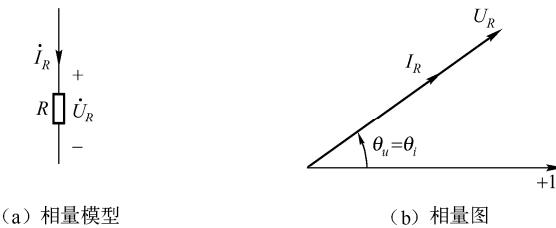


图 7-2-2 电阻元件相量模型及相量图

### 7.2.1.2 电感元件的正弦稳态特性及其相量模型

某线性时不变电感元件  $L$  接在正弦稳态电路中，其时域模型如图 7-2-3 (a) 所示。

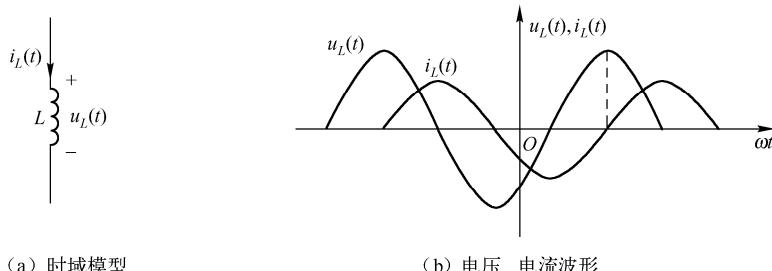


图 7-2-3 电感元件时域模型及电压、电流波形

设  $i_L(t) = \sqrt{2}I_L \cos(\omega t + \theta_i) \Leftrightarrow \dot{I}_L = I_L \angle \theta_i$ , 则有

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} = -\sqrt{2}\omega L I_L \sin(\omega t + \theta_i) \quad \dot{U}_L = \omega L I_L \angle (\theta_i + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sqrt{2}\omega L I_L \cos(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \cdot I_L \angle \theta_i = j\omega L \dot{I}_L \\ &= \sqrt{2}U_L \cos(\omega t + \theta_u) \quad \quad \quad = U_L \angle \theta_u \end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases} U_L = \omega L I_L \\ \theta_u = \theta_i + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (7-2-3)$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L \quad (7-2-4)$$

式(7-2-3)表明电感元件在电压、电流取关联参考方向下正交,且电压超前电流 $\frac{\pi}{2}$ 。电压 $u_L(t)$ 和电流 $i_L(t)$ 的波形如图7-2-3(b)所示;式(7-2-4)即为电感元件相量形式的伏安关系,其中 $X_L = \omega L = 2\pi fL$ 称为感抗,与频率 $f$ 成正比,表征了电感元件 $L$ 在正弦交流电路中对电流的阻碍能力,单位与电阻的单位相同。 $L$ 一定时,频率越高,感抗的阻碍作用越强。在直流电路中( $f=0$ ), $X_L=0$ ,此时电感元件 $L$ 可视为短路。因此可以看出电感元件具有“通直阻交”、“通低频阻高频”的特性。

电感元件的相量模型如图7-2-4(a)所示,相应的相量图如图7-2-4(b)所示。

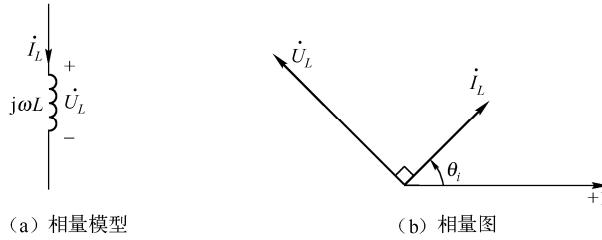


图7-2-4 电感元件相量模型及相量图

### 7.2.1.3 电容元件的正弦稳态特性及其相量模型

某线性时不变电容元件 $C$ 接在正弦稳态电路中,其时域模型如图7-2-5(a)所示。

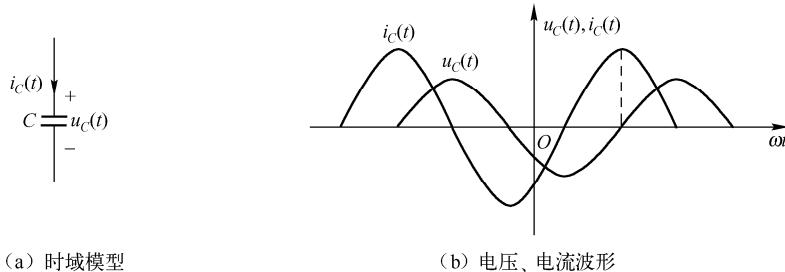


图7-2-5 电容元件时域模型及电压、电流波形

设 $u_C(t) = \sqrt{2}U_C \cos(\omega t + \theta_u) \leftrightarrow \dot{U}_C = U_C \angle \theta_u$ ,则有

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = -\sqrt{2}\omega C U_C \sin(\omega t + \theta_u) \quad \dot{I}_C = \omega C U_C \angle (\theta_u + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sqrt{2}\omega C U_C \cos(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}) \quad \leftrightarrow \quad = \omega C \angle \frac{\pi}{2} \cdot U_C \angle \theta_u = j\omega C \dot{U}_C \\ &= \sqrt{2}I_C \cos(\omega t + \theta_i) \quad \quad \quad = I_C \angle \theta_i \end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases} U_C = \frac{1}{\omega C} I_C \\ \theta_u = \theta_i - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (7-2-5)$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = -jX_C \dot{I}_C \quad (7-2-6)$$

式(7-2-5)表明电容元件在电压、电流取关联参考方向下正交,且电压滞后电流 $\frac{\pi}{2}$ 。电压 $u_c(t)$ 和电流 $i_c(t)$ 的波形如图7-2-5(b)所示;式(7-2-6)即为电容元件相量形式的伏安关系,其中, $X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$ 称为容抗,与频率 $f$ 成反比,表征了电容元件 $C$ 在正弦交流电路中对电流的阻碍能力,单位与电阻的单位相同。 $C$ 一定时,频率越低,容抗的阻碍作用越强。在直流电路中( $f=0$ ), $X_c \rightarrow \infty$ ,此时电容元件 $C$ 可视为开路。因此可以看出电容元件具有“通交阻直”、“通高频阻低频”的特性。

电容元件的相量模型如图7-2-6(a)所示,相应的相量图如图7-2-6(b)所示。

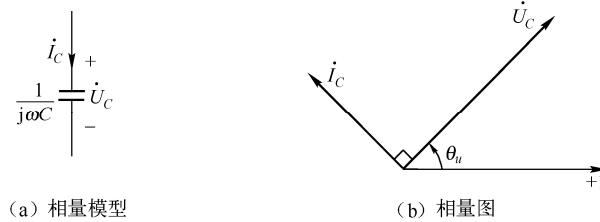


图7-2-6 电容元件相量模型及相量图

将时域电路模型中的电压、电流用相量表示,电阻、电感、电容等元件用相应的相量模型替换后得到的电路图称为电路的相量模型。

## 7.2.2 相量形式的基尔霍夫定律

若线性时不变电路的激励均为同频正弦信号,则进入稳态后各支路电压、电流都是与激励同频的正弦信号,它们之间的差别仅在于幅度和相位。

### 7.2.2.1 KCL的相量形式

相量形式的KCL为:线性时不变正弦稳态电路中,对任一节点,与此节点相连的各支路电流相量的代数和为零,即

$$\sum \dot{I}_k = 0 \quad (7-2-7)$$

### 7.2.2.2 KVL的相量形式

相量形式的KVL为:线性时不变正弦稳态电路中,对任一回路,构成此回路的各支路电压相量的代数和为零,即

$$\sum \dot{U}_k = 0 \quad (7-2-8)$$

需要指出:

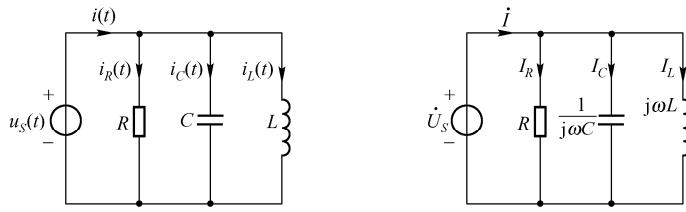
(1)式(7-2-7)和式(7-2-8)针对的是相量,而有效值之间一般没有此种关系;

(2)与时域形式的KCL和KVL类似,式(7-2-7)和式(7-2-8)也有其他等效表达,譬如 $\sum \dot{I}_\lambda = \sum \dot{I}_{\text{出}}$ 或 $\sum \dot{U}_{\text{降}} = \sum \dot{U}_{\text{升}}$ 。

**例7-2-1** 如图7-2-7(a)所示电路,  $u_s(t) = 100\sqrt{2} \cos(1000t + 30^\circ)$  V,  $R = 1000\Omega$ ,  $L = 1H$ ,  $C = 1\mu F$ ,试分析各支路电流 $i_R(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 及 $i(t)$ 。

解: (1)画出如图7-2-7(a)所示时域电路模型的相量模型,如图7-2-7(b)所示,其中

$$\dot{U}_s = 100\angle 30^\circ \text{ V}, \quad \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1000 \times 10^{-6}} = -j1000\Omega, \quad j\omega L = j1000 \times 1 = j1000\Omega$$



(a) 时域模型

(b) 相量模型

图 7-2-7 例 7-2-1 用图

(2) 由图 7-2-7 (b) 所示电路的相量模型, 易知

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_s}{R} = \frac{100\angle 30^\circ}{1000} = 0.1\angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_s}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{100\angle 30^\circ}{-j1000} = 0.1\angle 120^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_s}{j\omega L} = \frac{100\angle 30^\circ}{j1000} = 0.1\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L = 0.1\angle 30^\circ + 0.1\angle 120^\circ + 0.1\angle -60^\circ = 0.1\angle 30^\circ \text{ A}$$

(3) 于是可得

$$i_R(t) = 0.1\sqrt{2} \cos(1000t + 30^\circ) \text{ A}$$

$$i_C(t) = 0.1\sqrt{2} \cos(1000t + 120^\circ) \text{ A}$$

$$i_L(t) = 0.1\sqrt{2} \cos(1000t - 60^\circ) \text{ A}$$

$$i(t) = 0.1\sqrt{2} \cos(1000t + 30^\circ) \text{ A}$$

例 7-2-2 如图 7-2-8 所示电路, 元件 1 和元件 2 可以为电阻、电感或电容, 试说明以下各式成立的条件。

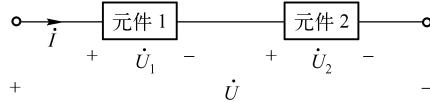


图 7-2-8 例 7-2-2 用图

$$(1) \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$(2) U = U_1 + U_2$$

$$(3) U = U_1 - U_2$$

$$(4) U = -U_1 + U_2$$

$$(5) U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$$

解: (1) 根据 KVL 的相量形式,  $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$  恒成立。

(2)  $U = U_1 + U_2$  成立的条件是元件 1 和元件 2 为同类型的元件, 即均为电阻, 或均为电感, 或均为电容, 如图 7-2-9 所示为相应的相量图。

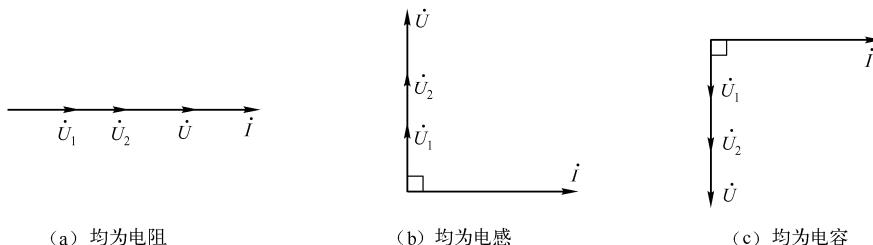


图 7-2-9 相量图 (1)

(3)  $U = U_1 - U_2$  成立的条件是元件 1 为电感, 元件 2 为电容; 或者元件 1 为电容, 元件 2 为电感, 且  $U_1 > U_2$ , 如图 7-2-10 所示为相应的相量图。

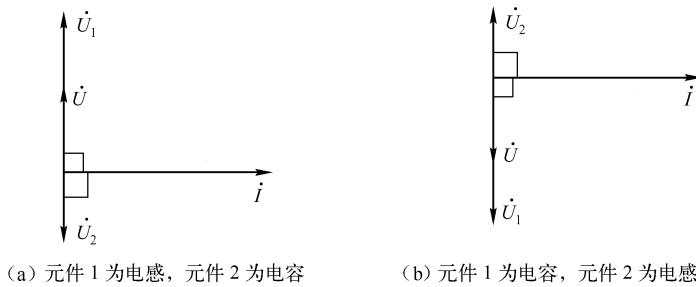


图 7-2-10 相量图 (2)

(4)  $U = -U_1 + U_2$  成立的条件是元件 1 为电感, 元件 2 为电容; 或者元件 1 为电容, 元件 2 为电感, 且  $U_1 < U_2$ 。

(5)  $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$  成立的条件是元件 1 为电阻, 元件 2 为电感或电容, 如图 7-2-11 所示为相应的相量图; 或者元件 1 为电感或电容, 元件 2 为电阻。

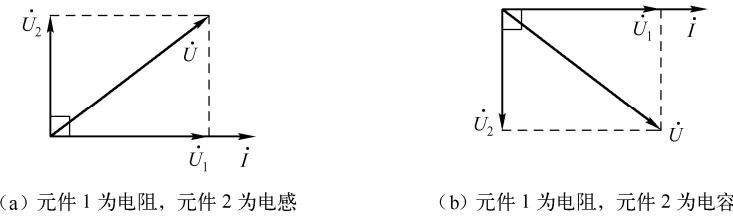


图 7-2-11 相量图 (3)

### 7.3 相量法及其应用

#### 7.3.1 阻抗与导纳

##### 7.3.1.1 阻抗与导纳的定义

如图 7-3-1 (a) 所示的无源单口网络  $N_0$ , 定义电压相量与电流相量的比值为  $N_0$  的阻抗, 用  $Z$  表示, 国际单位为欧姆 ( $\Omega$ ); 定义电流相量与电压相量的比值为  $N_0$  的导纳, 用  $Y$  表示, 国际单位为西门子 ( $S$ )。阻抗与导纳的电路模型如图 7-3-1 (b) 所示。

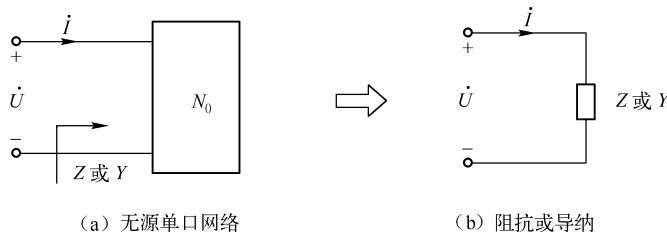


图 7-3-1 无源单口网络的阻抗或导纳

$$\begin{cases} Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \\ Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \end{cases} \quad (7-3-1)$$

此式亦称为相量形式的欧姆定律。显然，阻抗和导纳是复数，而且

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (7-3-2)$$

$$\begin{cases} Z = |Z| \angle \varphi_Z = R + jX \\ Y = |Y| \angle \varphi_Y = G + jB \end{cases} \quad (7-3-3)$$

式中， $|Z| = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}$ ，阻抗角  $\varphi_Z = \theta_u - \theta_i$ ； $|Y| = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B^2}$ ，导纳角  $\varphi_Y = \theta_i - \theta_u$ ； $X$  称为电抗， $B$  称为电纳。据此，阻抗  $Z$  和导纳  $Y$  可用如图 7-3-2 所示的电路来表示。

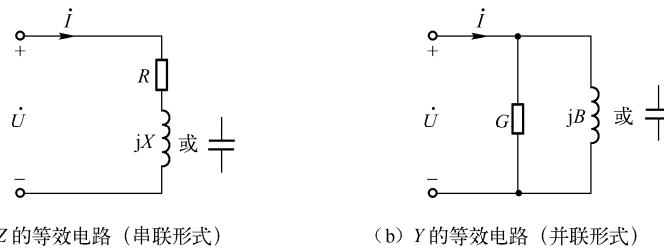


图 7-3-2  $Z$  和  $Y$  的等效电路

基于上述定义，单个电阻元件  $R$  的阻抗为  $R$ ，导纳为  $G$ ；单个电感元件  $L$  的阻抗为  $j\omega L$ ，导纳为  $\frac{1}{j\omega L}$ ；单个电容元件  $C$  的阻抗为  $\frac{1}{j\omega C}$ ，导纳为  $j\omega C$ 。

### 7.3.1.2 电路性质

此处“电路性质”是针对无源单口网络  $N_0$  而言的，主要指：电感性、电容性、纯阻性等，可由阻抗  $Z$  或导纳  $Y$  来判别。

#### (1) 电感性电路

$N_0$  为电感性电路时， $X > 0$  或  $B < 0$ ，即  $N_0$  可等效为电阻与电感的串联，或者电阻与电感的并联；阻抗角  $\varphi_Z > 0$  或导纳角  $\varphi_Y < 0$ ，即端口电压与电流取关联参考方向时端口电压超前电流。

#### (2) 电容性电路

$N_0$  为电容性电路时， $X < 0$  或  $B > 0$ ，即  $N_0$  可等效为电阻与电容的串联，或者电阻与电容的并联；阻抗角  $\varphi_Z < 0$  或导纳角  $\varphi_Y > 0$ ，即端口电压与电流取关联参考方向时端口电压滞后电流。

#### (3) 纯阻性电路

$N_0$  为纯阻性电路时， $X = 0$  或  $B = 0$ ，即  $N_0$  可等效为纯电阻；阻抗角  $\varphi_Z = 0$  或导纳角  $\varphi_Y = 0$ ，即端口电压与电流取关联参考方向时端口电压与电流同相。

### 7.3.1.3 阻抗与导纳的串/并联

#### (1) 阻抗的串联

如图 7-3-3 (a) 所示为由  $n$  个阻抗串联的单口网络，其等效电路如图 7-3-3 (b) 所示。

根据相量形式的 KVL，如图 7-3-3 (a) 和 (b) 所示电路的端口伏安关系为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \cdots + Z_n \dot{I} \quad (7-3-4)$$

$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad (7-3-5)$$

为使图 7-3-3 (a) 和 (b) 等效, 则有

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (7-3-6)$$

此式表明, 多个阻抗串联, 可以用一个阻抗来等效, 其值为串联的多个阻抗之和。

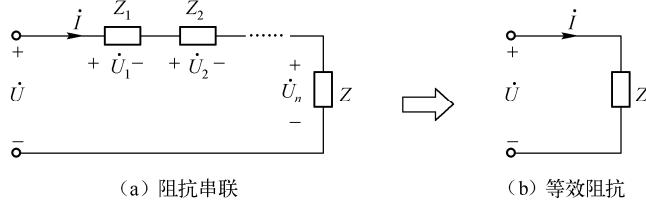


图 7-3-3 阻抗串联及其等效

相应地, 相量形式的分压公式为

$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z} \dot{U}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7-3-7)$$

## (2) 导纳的并联

如图 7-3-4 (a) 所示由  $n$  个导纳并联的单口网络, 其等效电路如图 7-3-4 (b) 所示。

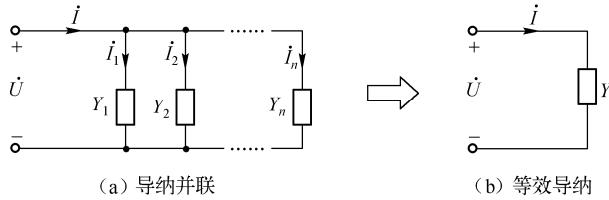


图 7-3-4 导纳并联及其等效

根据相量形式的 KCL, 如图 7-3-4 (a) 和 (b) 所示电路的端口伏安关系为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} + \dots + Y_n \dot{U} \quad (7-3-8)$$

$$\dot{I} = Y \dot{U} \quad (7-3-9)$$

为使图 7-3-3 (a) 和 (b) 等效, 则有

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (7-3-10)$$

此式表明, 多个导纳并联可以用一个导纳来等效, 其值为并联的多个导纳之和。

相应地, 相量形式的分流公式为

$$\dot{I}_k = \frac{Y_k}{Y} \dot{I}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7-3-11)$$

等效阻抗  $Z = \frac{1}{Y}$ 。特别地, 当  $n = 2$  时 (如图 7-3-5 所示), 有

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (7-3-12)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \\ \dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \end{cases} \quad (7-3-13)$$

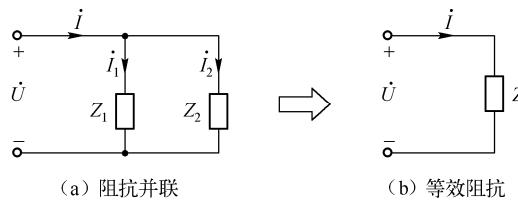


图 7-3-5 两阻抗并联及其等效阻抗

上述结果表明, 阻抗和导纳的串/并联与电阻和电导的串/并联的分析类似, 而且对混联电路而言也是一样的。这是因为时域形式的两类约束与相量形式的两类约束在形式上是统一的。

例 7-3-1 如图 7-3-6 所示单口网络的相量模型, 试求此单口网络的等效阻抗  $Z$ 。

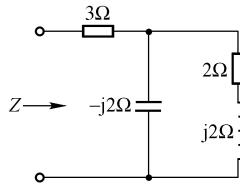


图 7-3-6 例 7-3-1 用图

解: 单口网络的等效阻抗  $Z$  为

$$\begin{aligned} Z &= 3 + (2 + j2) // (-j2) = 3 + \frac{(2 + j2)(-j2)}{2 + j2 - j2} \quad \text{或} \quad 3 + \frac{1}{\frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{-j2}} \\ &= 5 - j2 \Omega \end{aligned}$$

### 7.3.2 正弦稳态电路的分析

正稳态电路的分析多采用相量法或相量图解法 (关于相量图解法读者可参阅其他相关书籍)。相量法的一般步骤如下:

(1) 由时域电路模型画出相应的相量模型。

(2) 基于电路的相量模型, 求解电压相量或电流相量。其中, 求解电压相量或电流相量的方法可以为直流稳态电路分析中所介绍的所有方法 (譬如等效变换分析法、回路电流法、节点电压法、戴维南定理或诺顿定理、叠加定理等), 只不过为相量形式。

(3) 由电压或电流的相量解得相应的时域解。

下面通过举例来说明相量法的具体应用。

例 7-3-2 如图 7-3-7 (a) 所示的正弦稳态电路,  $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 0.01\mu\text{F}$ ,  $L = 0.01\text{H}$ ,  $u_{s1}(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t) \text{ V}$ ,  $u_{s2}(t) = 20\sqrt{2} \cos(100t) \text{ V}$ , 试求支路电流  $i(t)$ 。

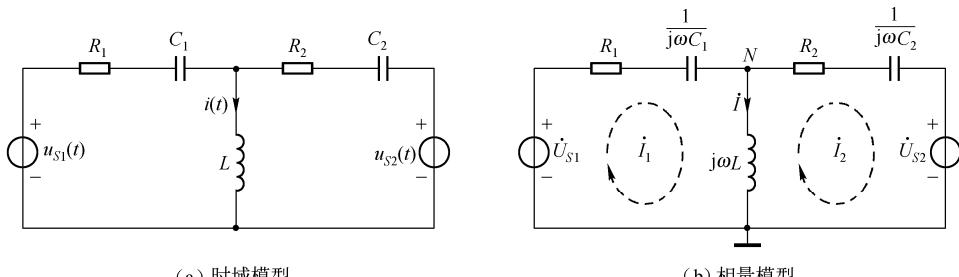


图 7-3-7 例 7-3-2 用图

解: (1) 由如图 7-3-7 (a) 所示电路的时域模型得到相应的相量模型, 如图 7-3-7 (b) 所示, 其中,  $\dot{U}_{s1} = 10 \text{ V}$ ,  $\dot{U}_{s2} = 20 \text{ V}$ ,  $\frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega C_2} = -j1 \Omega$ ,  $j\omega L = j1 \Omega$ 。

(2) 采用回路电流法, 如图 7-3-7 (b) 所示, 回路电路方程为

$$\begin{cases} (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L)\dot{I}_1 - j\omega L\dot{I}_2 = \dot{U}_{s1} \\ -j\omega L\dot{I}_1 + (R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L)\dot{I}_2 = -\dot{U}_{s2} \end{cases}$$

代入已知数值并求解得

$$\begin{cases} (1 - j + j)\dot{I}_1 - j\dot{I}_2 = 10 \\ -j\dot{I}_1 + (1 - j + j)\dot{I}_2 = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = 5 - j10 \text{ A} \\ \dot{I}_2 = -10 + j5 \text{ A} \end{cases}$$

从而有

$$\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 5 - j10 - (-10 + j5) = 15 - j15 = 15\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos(100t - 45^\circ) = 30 \cos(100t - 45^\circ) \text{ A}$$

另解: 采用节点电压法。根据图 7-3-7 (b), 节点电压方程为

$$(\frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}})\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_{s1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{\dot{U}_{s2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

代入已知数值并求解得

$$(\frac{1}{1-j} + \frac{1}{j} + \frac{1}{1-j})\dot{U}_N = \frac{10}{1-j} + \frac{20}{1-j} \Rightarrow \dot{U}_N = 15 + j15 \text{ V}$$

从而有

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_N}{j\omega L} = \frac{15 + j15}{j} = 15 - j15 = 15\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos(100t - 45^\circ) = 30 \cos(100t - 45^\circ) \text{ A}$$

例 7-3-3 如图 7-3-8 (a) 所示电路,  $R = 1\Omega$ ,  $C = 0.01\mu\text{F}$ ,  $L = 0.01\text{H}$ ,  $u_s(t) = \sqrt{2} \cos(100t) \text{ V}$ ,  $i_s(t) = \sqrt{2} \cos(100t) \text{ A}$ , 试分析电压  $u(t)$ 。

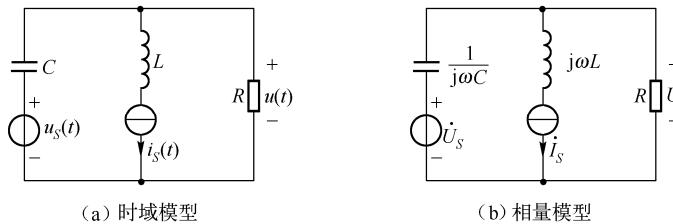
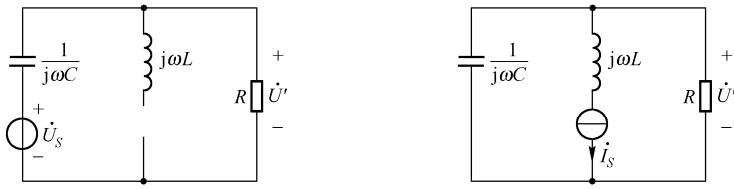


图 7-3-8 例 7-3-3 用图

解: (1) 由如图 7-3-8 (a) 所示电路的时域模型得到相应的相量模型, 如图 7-3-8 (b) 所示, 其中  $\dot{U}_s = 1 \text{ V}$ ,  $\dot{i}_s = 1 \text{ A}$ ,  $\frac{1}{j\omega C} = -j1 \Omega$ ,  $j\omega L = j1 \Omega$ 。

(2) 采用叠加定理, 由如图 7-3-8 (b) 所示的相量模型, 可画出两电源单独作用时的电路模型, 如图 7-3-9 所示。



(a) 电压源单独作用

(b) 电流源单独作用

图 7-3-9 例 7-3-3 叠加定理分析用图

① 电压源单独作用。如图 7-3-9 (a) 所示电路, 有

$$\dot{U}' = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \dot{U}_s = \frac{1}{1 - j} \cdot 1 = 0.5 + j0.5 \text{ V}$$

② 电流源单独作用。如图 7-3-9 (b) 所示电路, 有

$$\dot{U}'' = -[R // (\frac{1}{j\omega C})] \dot{I}_s = -[1 // (-j1)] \cdot 1 = -0.5 + j0.5 \text{ V}$$

③ 根据叠加定理得

$$\dot{U} = \dot{U}' + \dot{U}'' = 0.5 + j0.5 + (-0.5 + j0.5) = j1 = 1\angle 90^\circ \text{ V}$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cos(100t + 90^\circ) \text{ V}$$

另解: 采用戴维南定理。据图 7-3-8 (b) 所示电路, 可画出基于戴维南定理的电路模型, 如图 7-3-10 所示。

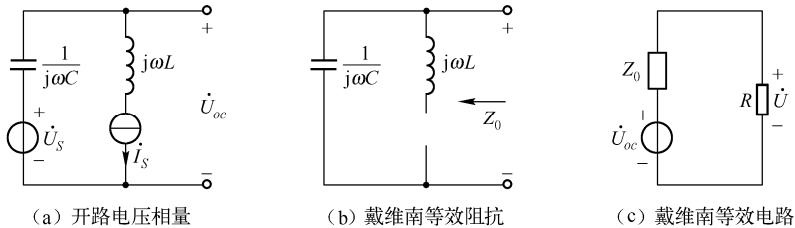


图 7-3-10 例 7-3-3 戴维南定理分析用图

(1) 求开路电压相量  $\dot{U}_{oc}$ 。如图 7-3-10 (a) 所示电路, 有

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_s - \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_s = 1 - (-j1) \times 1 = 1 + j1 \text{ V}$$

(2) 求戴维南等效阻抗  $Z_0$ 。如图 7-3-10 (b) 所示电路, 有

$$Z_0 = \frac{1}{j\omega C} = -j1 \Omega$$

(3) 求电压有效值相量  $\dot{U}$ 。如图 7-3-10 (c) 所示电路, 有

$$\dot{U} = \frac{R}{Z_0 + R} \dot{U}_{oc} = \frac{1}{-j1 + 1} (1 + j) = 1\angle 90^\circ \text{ V}$$

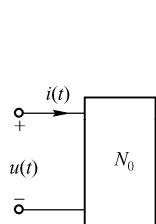
$$u(t) = \sqrt{2} \cos(100t + 90^\circ) \text{ V}$$

### 7.3.3 正弦稳态电路中的功率

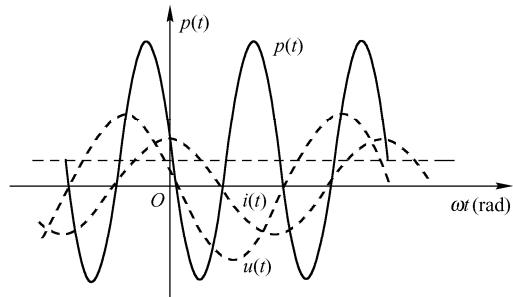
#### 7.3.3.1 瞬时功率

如图 7-3-11 (a) 所示无源单口网络  $N_0$ ， $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_z)$  V， $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t)$  A，其中  $\varphi_z = \theta_u - \theta_i$ ，即电压超前于电流的相位，则  $N_0$  吸收的瞬时功率  $p(t)$  为

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_z) \sqrt{2}I \cos(\omega t) \\ &= UI \cos(2\omega t + \varphi_z) + UI \cos \varphi_z \text{ W} \end{aligned} \quad (7-3-14)$$



(a) 无源单口网络



(b) 电压、电流与瞬时功率波形

图 7-3-11 无源单口网络及其瞬时功率波形

式 (7-3-14) 表明，瞬时功率由恒定分量  $UI \cos \varphi_z$  和正弦分量  $UI \cos(2\omega t + \varphi_z)$  两部分组成。恒定分量  $UI \cos \varphi_z$  是瞬时功率中所消耗的部分，正弦分量  $UI \cos(2\omega t + \varphi_z)$  是单口网络与外电路之间的能量交换部分，其频率是电压（或电流）频率的两倍。瞬时功率的波形如图 7-3-11 (b) 所示。从波形图可以看出，瞬时功率有时为正，有时为负，表明该网络有时从外部吸收能量，有时向外部发出能量，这种与外界的能量交换现象是由网络内的储能元件引起的。

#### 7.3.3.2 平均功率（有功功率）与功率因数

网络的平均功率是瞬时功率在一个周期内的平均值，用大写字母  $P$  表示，国际单位为瓦特 (W)。平均功率又称为有功功率。由式 (7-3-14) 可知：

$$P = UI \cos \varphi_z \quad (7-3-15)$$

可见，有功功率  $P$  不仅与电压有效值和电流有效值的乘积  $UI$  有关，而且与  $\cos \varphi_z$  成正比。令  $\lambda = \cos \varphi_z$ ，称其为网络的功率因数。这样，阻抗角  $\varphi_z$  又称为功率因数角。由于无法通过功率因数来判断阻抗角的正负，因此，通常当端口电流超前电压时，在功率因数后注明“超前”；当端口电流滞后电压时，在功率因数后注明“滞后”。比如  $\lambda = \cos \varphi_z = 0.5$ （滞后），表明电流滞后电压，则  $\varphi_z = 60^\circ$ 。

##### (1) 电阻元件 $R$ 的有功功率 $P_R$ 和功率因数 $\lambda_R$

设  $R$  两端电压的有效值为  $U_R$ ，电流的有效值为  $I_R$ 。电阻元件  $R$  在电压和电流取关联参数方向时同相，其功率因数  $\lambda_R = \cos \varphi_R = \cos 0^\circ = 1$ ，从而

$$P_R = U_R I_R \cos \varphi_R = U_R I_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R} \quad (7-3-16)$$

##### (2) 电感元件 $L$ 与电容元件 $C$ 的有功功率和功率因数

对于电压元件  $L$  或电容元件  $C$  而言，由于其电压与电流相位相差  $90^\circ$ ，因此其功率因数为 0，相应的有功功率亦为 0，即  $\lambda_L = \lambda_C = 0$ ， $P_L = P_C = 0$ 。这一结果表明，电感元件和电容元件是不

耗能的。

### 7.3.3.3 无功功率

无功功率表示网络中储能元件与外电路交换能量的最大速率，用  $Q$  表示，定义为

$$Q = UI \sin \varphi_Z \quad (7-3-17)$$

无功功率也具有功率的量纲，为了有所区别，无功功率单位取为乏 (var)。

#### (1) 电阻元件 $R$ 的无功功率 $Q_R$

电阻元件  $R$  在电压和电流取关联参数方向时同相，从而  $\sin \varphi_R = 0$ ，于是  $Q_R = 0$ 。这一结果表明，电阻元件是耗能元件，与外电路之间无能量交换。

#### (2) 电感元件 $L$ 的无功功率 $Q_L$

设  $L$  两端电压的有效值为  $U_L$ ，电流的有效值为  $I_L$ 。电感元件  $L$  在电压和电流取关联参数方向时，电压超前电流  $90^\circ$ ，即  $\sin \varphi_L = \sin 90^\circ = 1$ ，从而

$$Q_L = U_L I_L \sin \varphi_L = U_L I_L = I_L^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L} \quad (7-3-18)$$

#### (3) 电容元件 $C$ 的无功功率 $Q_C$

设  $C$  两端电压的有效值为  $U_C$ ，电流的有效值为  $I_C$ 。电容元件  $C$  在电压和电流取关联参数方向时，电压滞后电流  $90^\circ$ ，即  $\sin \varphi_C = \sin(-90^\circ) = -1$ ，从而

$$Q_C = U_C I_C \sin \varphi_C = -U_C I_C = -I_C^2 X_C = -\frac{U_C^2}{X_C} \quad (7-3-19)$$

### 7.3.3.4 视在功率

通常电气设备的容量是由它们的额定电压和额定电流决定的。因此，定义单口网络的端电压有效值  $U$  与端电流有效值  $I$  的乘积为视在功率，用大写字母  $S$  来表示，即

$$S = UI \quad (7-3-20)$$

视在功率具有功率的量纲，为了区别于有功功率，其单位取为伏安 (VA)。

视在功率  $S$ 、有功功率  $P$  和无功功率  $Q$  之间的关系如下：

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (7-3-21)$$

可见，视在功率  $S$ 、有功功率  $P$  和无功功率  $Q$  构成一个直角三角形，如图 7-3-12 所示，称其为功率三角形。

**例 7-3-4** 如图 7-3-13 所示电路， $\dot{U} = 200 \text{ V}$ ，试分析虚线框标示的单口网络的有功功率  $P$ 、无功功率  $Q$ 、视在功率  $S$  以及功率因数  $\lambda$ 。

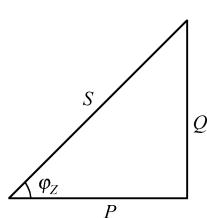


图 7-3-12 功率三角形

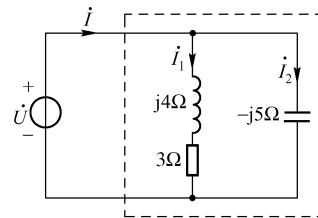


图 7-3-13 例 7-3-4 用图

解：虚线框标示的单口网络的等效阻抗  $Z$  为

$$Z = (3 + j4) // (-j5) = 7.91 \angle -18.44^\circ \Omega$$

则虚线框标示的单口网络的端电流有效值相量  $\dot{I}$  为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{200}{7.91 \angle -18.44^\circ} = 25.28 \angle 18.44^\circ \text{ A}$$

于是得

$$P = UI \cos \varphi_Z = 200 \times 25.28 \cos(18.44^\circ) = 4797.25 \text{ W}$$

$$Q = UI \sin \varphi_Z = 200 \times 25.28 \sin(-18.44^\circ) = -1599.55 \text{ var}$$

$$S = UI = 200 \times 25.28 = 5056.89 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos \varphi_Z = \cos(-18.44^\circ) = 0.95 \text{ (超前)}$$

### 7.3.3.5 最大功率传输

最大功率传输问题：如图 7-3-14 (a) 所示电路，什么条件下负载阻抗  $Z_L$  获得最大功率？

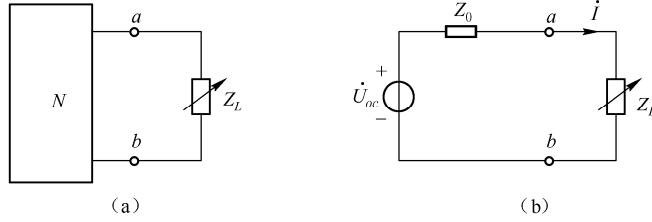


图 7-3-14 最大功率传输问题

由戴维南定理，可得如图 7-3-14 (b) 所示等效电路。令  $Z_0 = R_0 + jX_0$ ， $Z_L = R_L + jX_L$ ，于是，

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_0 + Z_L} = \frac{\dot{U}_{oc}}{(R_0 + R_L) + j(X_0 + X_L)} \quad (7-3-22)$$

$$I = \frac{U_{oc}}{\sqrt{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2}} \quad (7-3-23)$$

负载阻抗  $Z_L$  吸收的平均功率为

$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_{oc}^2 R_L}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2} \quad (7-3-24)$$

在什么条件下此功率达到最大呢？这与负载的可调性有关，下面介绍两种“匹配条件”。

#### 7.3.3.5.1 共轭匹配

共轭匹配针对  $Z_L$  中  $R_L$  和  $X_L$  均可调的情形。由于  $X_L$  只出现在式 (7-3-24) 的分母中，于是当  $X_0 + X_L = 0$ ，即  $X_L = -X_0$  时，对任意的  $R_L$ ，分母均最小。此时，

$$P_L = \frac{U_{oc}^2 R_L}{(R_0 + R_L)^2} \quad (7-3-25)$$

调节  $R_L$  可使  $P_L$  达到最大值，即

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{d}{dR_L} \left[ \frac{U_{oc}^2 R_L}{(R_0 + R_L)^2} \right] = \frac{(R_0 + R_L)^2 - 2(R_0 + R_L)R_L}{(R_0 + R_L)^4} U_{oc}^2 = 0 \quad (7-3-26)$$

得  $R_0 = R_L$ 。

综上，负载获取最大功率的条件为

$$Z_L = Z_0^* = R_0 - jX_0 \quad (7-3-27)$$

此时, 负载获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} \quad (7-3-28)$$

例 7-3-5 如图 7-3-15 所示电路,  $\dot{U}_s = 10\sqrt{2}\angle 60^\circ \text{ V}$ ,  $R = 2 \Omega$ ,  $j\omega L = j2 \Omega$ 。

(1) 负载  $Z_L$  为何值可获得最大功率?

(2) 求最大功率。

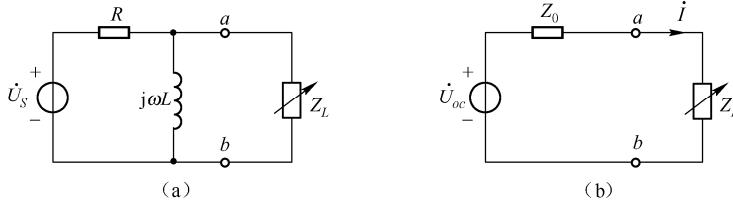


图 7-3-15 例 7-3-5 用图

解: 求  $a$ 、 $b$  两端左侧单口网络的戴维南等效电路。

$$\dot{U}_{oc} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \dot{U}_s = \frac{j2}{2 + j2} \cdot 10\sqrt{2}\angle 60^\circ = 10\angle 105^\circ \text{ V}$$

$$Z_0 = R // (j\omega L) = \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} = 1 + j1 \Omega$$

(1) 获得最大功率的条件

$$Z_L = Z_0^* = 1 - j1 \Omega$$

(2) 最大功率

$$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_0} = \frac{10^2}{4 \cdot 1} = 25 \text{ W}$$

### 7.3.3.5.2 模匹配

令  $Z_0 = |Z_0| \angle \varphi_{Z_0}$ ,  $Z_L = |Z_L| \angle \varphi_{Z_L}$ 。模匹配针对  $Z_L$  中模  $|Z_L|$  可调, 而阻抗角  $\varphi_{Z_L}$  不可调的情形。可以证明 (详细推导读者可参阅相关文献), 此种情形下负载获得最大功率的条件为

$$|Z_L| = |Z_0| \quad (7-3-29)$$

获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2 \cos \varphi_{Z_L}}{2 |Z_0| [1 + \cos(\varphi_{Z_0} - \varphi_{Z_L})]} \quad (7-3-30)$$

例 7-3-6 如图 7-3-16 所示电路,  $\dot{U}_s = 10\sqrt{2}\angle 30^\circ \text{ V}$ ,  $R = 4 \Omega$ ,  $\frac{1}{j\omega C} = -j4 \Omega$ 。

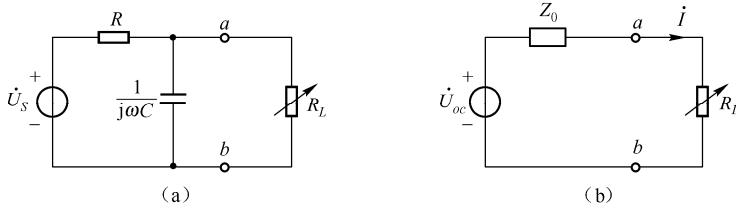


图 7-3-16 例 7-3-6 用图

(1) 负载  $R_L$  为何值可获得最大功率?

(2) 求最大功率。

解: 求  $a$ 、 $b$  两端左侧单口网络的戴维南等效电路。

$$\dot{U}_{oc} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \dot{U}_s = \frac{-j4}{4 - j4} \cdot 10\sqrt{2} \angle 30^\circ = 10 \angle -15^\circ \text{ V}$$

$$Z_0 = R // \left( \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{4 \cdot (-j4)}{4 - j4} = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

(1) 获得最大功率的条件

$$R_L = |Z_0| = 2\sqrt{2} \Omega$$

(2) 最大功率

$\varphi_{Z_0} = -45^\circ$ ,  $\varphi_{R_L} = 0^\circ$ , 于是

$$P_{L\max} = \frac{U_{oc}^2 \cos \varphi_{R_L}}{2|Z_0|[1 + \cos(\varphi_{Z_0} - \varphi_{R_L})]} = \frac{10^2 \cos 0^\circ}{2 \cdot 2\sqrt{2}[1 + \cos(-45^\circ)]} \approx 10 \text{ W}$$

## 7.4 耦合电感与理想变压器

### 7.4.1 耦合电感

#### 7.4.1.1 自感和互感

具有磁耦合的两个或两个以上线圈称为耦合线圈。当一个线圈中流过电流时,会在该线圈中产生磁通(磁通方向由右手螺旋法则确定)。此磁通与该线圈相交链形成自感磁链,同时部分甚至全部地与其他线圈相交链形成互感磁链。自感磁链和互感磁链与电流的比值分别称为自感和互感。自感和互感是表征耦合电感的参数。

如图 7-4-1 所示两个耦合线圈,其匝数分别为  $N_1$ 、 $N_2$ ,流过它们的电流分别为  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 。 $\psi_{ii}(t)$  ( $i=1,2$ ) 表示线圈  $i$  的自感磁链;  $\psi_{ij}(t)$  ( $i,j=1,2$ ) 表示线圈  $j$  上流过电流在线圈  $i$  上形成的互感磁链。

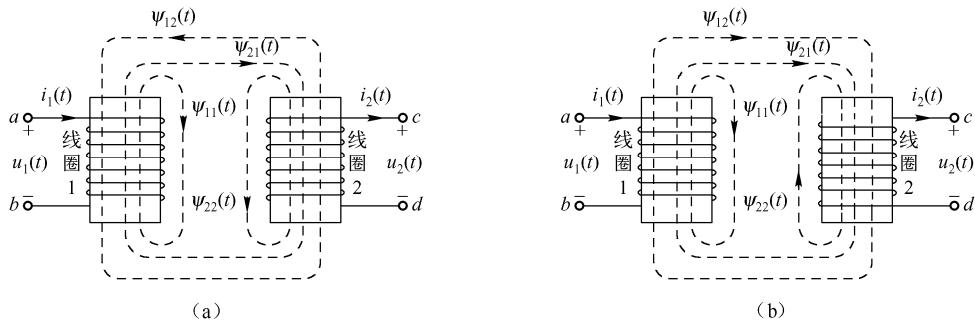


图 7-4-1 耦合线圈

若用  $\phi_{ii}(t)$  ( $i=1,2$ ) 表示绕圈  $i$  的自感磁通,  $\phi_{ij}(t)$  ( $i,j=1,2$ ) 表示线圈  $j$  对绕圈  $i$  的互感

磁通,  $L_i$  表示线圈  $i$  的自感;  $M_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 表示线圈  $j$  对绕圈  $i$  的互感, 则有

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\psi_{11}(t)}{i_1(t)} = \frac{N_1 \phi_{11}(t)}{i_1(t)} \\ L_2 = \frac{\psi_{22}(t)}{i_2(t)} = \frac{N_2 \phi_{22}(t)}{i_2(t)} \\ M_{21} = \frac{\psi_{21}(t)}{i_1(t)} = \frac{N_2 \phi_{21}(t)}{i_1(t)} \\ M_{12} = \frac{\psi_{12}(t)}{i_2(t)} = \frac{N_1 \phi_{12}(t)}{i_2(t)} \end{cases} \quad (7-4-1)$$

可以证明  $M_{21} = M_{12}$ 。因此统一用  $M$  表示互感, 即  $M_{21} = M_{12} = M$ 。

两个线圈的耦合程度可以用耦合系数来表征, 通常用  $k$  来表示, 定义为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (7-4-2)$$

耦合系数  $k$  与线圈的结构、两个线圈的相互位置以及周围磁介质的性质有关, 其值介于 0 和 1 之间。当  $k = 1$  时称为全耦合, 此时线圈的自感磁通完全与另一个线圈相交链; 当  $k \approx 1$  时称为紧耦合; 当  $k \approx 0$  时称为松耦合; 当  $k = 0$  时称为无耦合, 两个线圈不存在耦合关系, 两线圈的磁通不交链, 互感为零。

#### 7.4.1.2 伏安关系

如图 7-4-1 (a) 所示的耦合线圈, 线圈 1 的总磁链  $\psi_1(t)$  和线圈 2 的总磁链  $\psi_2(t)$  可表示为

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \psi_{11}(t) - \psi_{12}(t) \\ \psi_2(t) = -\psi_{21}(t) + \psi_{22}(t) \end{cases} \quad (7-4-3)$$

根据电磁感应定律, 可得

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt} = \frac{d(\psi_{11}(t) - \psi_{12}(t))}{dt} = u_{L_1} - u_{M1} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = -\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{d(-\psi_{21}(t) + \psi_{22}(t))}{dt} = u_{M2} - u_{L_2} = M \frac{di_1(t)}{dt} - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (7-4-4)$$

式 (7-4-4) 即为如图 7-4-1 (a) 所示耦合线圈的伏安关系。其中  $u_{L_1} = \frac{d\psi_{11}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$ 、 $u_{L_2} = \frac{d\psi_{22}(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$  分别为线圈 1 和线圈 2 的自感电压;  $u_{M1} = \frac{d\psi_{12}(t)}{dt} = M \frac{di_2(t)}{dt}$ 、 $u_{M2} = \frac{d\psi_{21}(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt}$  分别为耦合电感的互感电压。

类似地, 可得如图 7-4-1 (b) 所示耦合线圈的伏安关系为

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt} = \frac{d(\psi_{11}(t) + \psi_{12}(t))}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = -\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{d(\psi_{21}(t) + \psi_{22}(t))}{dt} = -M \frac{di_1(t)}{dt} - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (7-4-5)$$

关于耦合线圈的伏安关系, 需要指出:

- (1) 自感电压项前面的符号可正可负。当端口电压和电流对线圈而言取关联参考方向时, 取正, 如式 (7-4-4) 中的  $L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$  项; 反之为负, 如式 (7-4-4) 中的  $L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$  项。
- (2) 互感电压项前面的符号可正可负。正负号取决于线圈间的绕向关系以及电压和电流参考

方向。若互感磁链方向与自感磁链方向一致，则互感电压项前面的符号与自感电压项前面的符号一致；反之相反。譬如，如图 7-4-1 (a) 所示  $\psi_{12}(t)$  与  $\psi_{11}(t)$  方向相反，则式 (7-4-4) 中  $M \frac{di_2(t)}{dt}$  与  $L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$  项前面的符号相反；如图 7-4-1(b) 所示  $\psi_{21}(t)$  与  $\psi_{22}(t)$  方向相同，则式 (7-4-5) 中  $M \frac{di_1(t)}{dt}$  项与  $L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$  项前面的符号相同，均为负。

#### 7.4.1.3 同名端

由于实际线圈产品是密封的，难以看到具体情况，因此无法根据楞次定理来确定互感电压项前面的符号。为了表示由于线圈的绕向不同而出现的不同情况，通常在耦合电感中引入同名端的概念。若两个耦合线圈的两个端钮为同名端，则电流同时流入或同时流出此两个端钮时在线圈中产生的磁通相互加强。若两个耦合线圈的两个端钮不是同名端，则称其为异名端。同名端通常用“•”、“\*”、“Δ”等符号来标注。根据同名端的定义，可判断出图 7-4-1 (a) 中的  $a$  端与  $c$  端为同名端，图 7-4-1 (b) 中的  $a$  端与  $d$  端为同名端。

#### 7.4.1.4 耦合电感的电路模型

耦合电感是耦合线圈的理想化电路模型。譬如，如图 7-4-1 (a) 所示的耦合线圈可以用如图 7-4-2 (a) 所示耦合电感的时域模型来表示，其相量模型如图 7-4-2 (b) 所示，相量形式的伏安关系为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 - j\omega M \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega M \cdot \dot{I}_1 - j\omega L_2 \cdot \dot{I}_2 \end{cases} \quad (7-4-6)$$

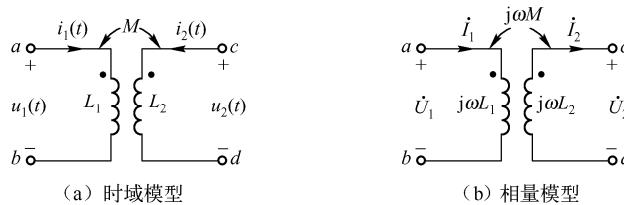


图 7-4-2 图 7-4-1 所示耦合线圈的理想化模型

例 7-4-1 如图 7-4-3 所示的耦合电感，试列出其伏安关系。

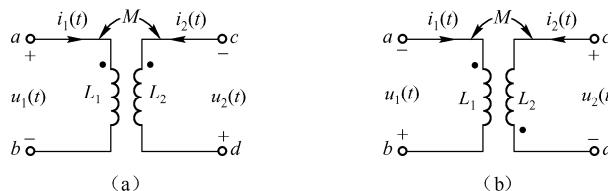


图 7-4-3 例 7-4-1 用图

解：(1) 如图 7-4-3 (a) 所示耦合电感的伏安关系为

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

(2) 如图 7-4-3 (b) 所示耦合电感的伏安关系为

$$\begin{cases} u_1(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

## 7.4.2 理想变压器

理想变压器是一种耦合器件，是从实际变压器中抽象出来的理想化模型，其电路模型符号与耦合电感类似，如图 7-4-4 所示。

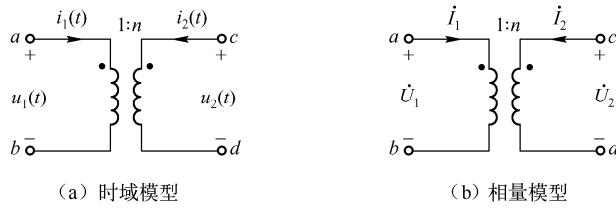


图 7-4-4 理想变压器

通常称  $a$ 、 $b$  端对应线圈为理想变压器的初级线圈， $c$ 、 $d$  端对应线圈为理想变压器的次级线圈。次级线圈匝数  $N_2$  与初级线圈匝数  $N_1$  之比  $n = N_2 / N_1$  称为变比，是表征理想变压器的唯一参数。

### 7.4.2.1 理想变压器的伏安关系

如图 7-4-4 所示理想变压器的伏安关系为

$$\begin{cases} u_2(t) = nu_1(t) \\ i_2(t) = -\frac{1}{n}i_1(t) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{U}_2 = n\dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\dot{I}_1 \end{cases} \quad (7-4-7)$$

此式表明，理想变压器为静态元件，无记忆功能；电压与匝数成正比，电流与匝数成反比。另外，伏安关系等式右边项前面的正负号可通过以下方式来确定：

- (1) 两电压参考方向下的正极性在同名端，则电压项取正；反之取负。
- (2) 两电流参考方向下流入同名端，则电流项取负；反之取正。

例 7-4-2 如图 7-4-5 所示的理想变压器，试列出其伏安关系。

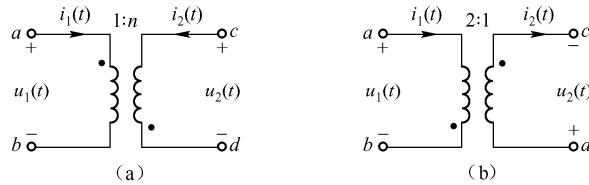


图 7-4-5 例 7-4-2 用图

解：(1) 如图 7-4-5 (a) 所示理想变压器的伏安关系为

$$\begin{cases} u_2(t) = -nu_1(t) \\ i_2(t) = \frac{1}{n}i_1(t) \end{cases}$$

(2) 如图 7-4-5 (b) 所示理想变压器的伏安关系为

$$\begin{cases} u_2(t) = \frac{1}{2} u_1(t) \\ i_2(t) = -2i_1(t) \end{cases}$$

例 7-4-3 如图 7-4-6 所示电路, 变比  $n = 5$ ,  $\dot{U}_1 = 20 \text{ V}$ ,  $Z_C = -j5\Omega$ ,  $Z_L = 10\Omega$ , 试求电流  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 。

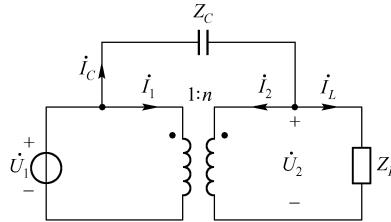


图 7-4-6 例 7-4-3 用图

解: 由题意得

$$\dot{U}_2 = n\dot{U}_1 = 5 \times 20 = 100 \text{ V}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_2}{Z_L} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{Z_C} = \frac{20 - 100}{-j5} = -j16 \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_C - \dot{I}_L = -10 - j16 \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = -n\dot{I}_2 = -5 \times (-10 - j16) = 50 + j80 \text{ A}$$

#### 7.4.2.2 理想变压器的功率

如图 7-4-4 所示为理想变压器, 结合式 (7-4-7) 可得其瞬时功率  $p$  为

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 \equiv 0 \quad (7-4-8)$$

此式表明, 理想变压器既不储能, 也不耗能。

#### 7.4.2.3 理想变压器的阻抗变换

理想变压器除了具有改变电压和电流的特性外, 还具有改变阻抗大小的特性, 称为阻抗变换特性。譬如, 如图 7-4-7 (a) 所示电路, 初级线圈两端的输入阻抗  $Z_{\text{in}}$  为

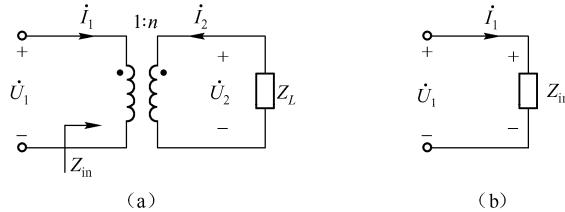


图 7-4-7 阻抗变换示例

$$Z_{\text{in}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_1}{-\frac{n}{n} \dot{I}_2} = \frac{1}{n^2} \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{1}{n^2} Z_L \quad (7-4-9)$$

等效电路如图 7-4-7 (b) 所示。此结果表明, 次级线圈所接负载阻抗  $Z_L$  变换到初级后等效为

$\frac{1}{n^2}Z_L$ 。因此, 理想变压器具有阻抗变换的功能。

根据等效的定义, 可以证明, 理想变压器的阻抗等效变换有如图 7-4-8 所示两种情形。需要指出, 阻抗等效变换不受同名端变化的影响, 因为同名端的变化可看做是变比  $n$  正负号的改变, 而阻抗变换与  $n^2$  有关。

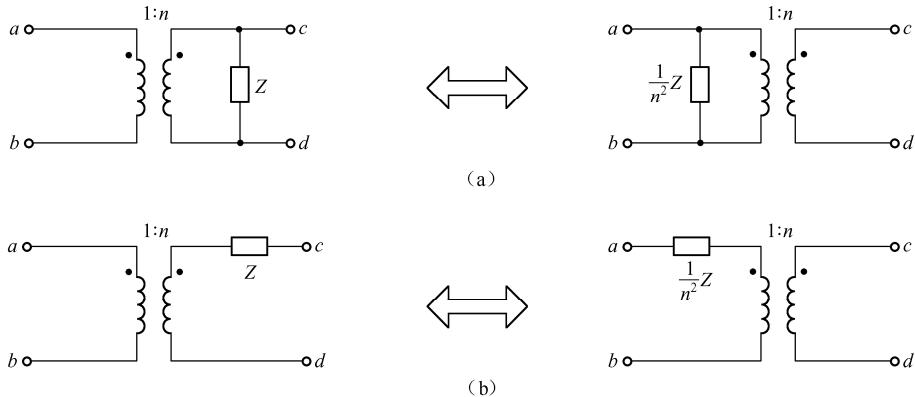


图 7-4-8 理想变压器的阻抗变换

例 7-4-4 如图 7-4-9 (a) 所示电路,  $R_s = 4\Omega$ ,  $R_L = 400\Omega$ , 为使  $R_L$  获得最大功率, 试求变压器的变比  $n$ 。

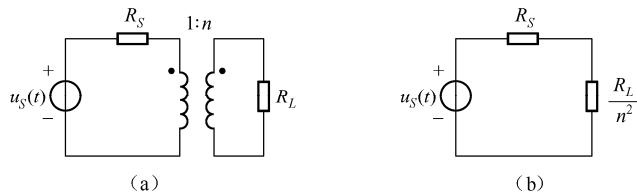


图 7-4-9 例 7-4-4 用图

解: 由理想变压器的阻抗变换性质知, 图 7-4-9 (a) 的初级回路等效电路如图 7-4-9 (b) 所示。根据最大功率传输条件, 要使  $R_L$  获得最大功率, 有

$$\frac{R_L}{n^2} = R_s$$

从而

$$n = \sqrt{\frac{R_L}{R_s}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10$$

## 练习题

### A. 基本概念类

7-1 关于正弦信号:

(1) 三要素指的是哪三个参量?

- (2) 给出振幅与有效值的关系。
- (3) 给出周期、角频率、频率三者之间的关系。

7-2 关于相量:

- (1) 如何用相量表示正弦信号?
- (2) 由电压或电流的相量如何得到其时域表达式?

7-3 给出 KCL 和 KVL 的相量形式, 举例说明。

7-4 关于电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$  等元件:

- (1) 给出伏安关系的相量形式;
- (2) 画出其相量模型;
- (3) 说明其电压相量与电流相量之间的相位关系。

7-5 说明阻抗和导纳的定义, 两者之间的关系如何?

7-6 如何由阻抗或导纳判断电路的性质?

7-7 给出相量形式的欧姆定律。

7-8 说明阻抗的串联等效, 给出相量形式的分压公式。

7-9 说明导纳的并联等效, 给出相量形式的分流公式。

7-10 关于相量法:

- (1) 说明相量法的基本思想, 与时域分析法相比, 其优越性如何?
- (2) 给出相量法的基本步骤, 举例说明其应用。

7-11 关于功率与功率因数:

- (1) 给出有功功率、无功功率、视在功率、功率因数等的含义, 举例说明如何计算。
- (2) 说明电阻、电感、电容等的有功功率、无功功率、功率因数。
- (3) 电路中的功率守恒适用于哪几种功率?
- (4) 最大功率传输的条件是什么?

7-12 关于耦合电感的同名端:

- (1) 解释同名端的含义;
- (2) 为什么要引入同名端?
- (3) 如何确定同名端?

7-13 给出耦合电感的伏安关系。

7-14 关于理想变压器:

- (1) 给出理想变压器的伏安关系;
- (2) 为什么理想变压器是静态元件, 不耗能也不储能?
- (2) 说明理想变压器的阻抗变换。

B. 分析计算类

7-15 已知正弦电压  $u(t) = -40\sqrt{2} \sin(100t + 20^\circ)$  V。

- (1) 试求  $u(t)$  的幅值、有效值、频率、周期、角频率及初相位;
- (2) 试画出  $u(t)$  的波形。

7-16 已知  $u_1(t) = 2 \cos(10t + 50^\circ)$  V,  $u_2(t) = -3 \cos(10t + 30^\circ)$  V, 试计算它们的相位差并在相位上指出它们的超前或滞后关系。

7-17 已知两复数  $A_1 = 6\angle 60^\circ$ ,  $A_2 = 10\angle -30^\circ$ , 试求  $A_1 + A_2$ ,  $A_1 - A_2$ ,  $A_1 \cdot A_2$ ,  $\frac{A_1}{A_2}$ 。

7-18 计算下列各式。

- (1)  $10\angle 30^\circ - \sqrt{2}\angle(-45^\circ) - 3\angle 60^\circ$
- (2)  $(3+10\angle 30^\circ)(3\angle 60^\circ + 3\angle 30^\circ)$
- (3)  $(4+j3)(3-j4)/(6+j8)$

7-19 已知正弦信号的频率  $f = 50 \text{ Hz}$ , 试列写下列各相量所对应正弦信号的时域表达式。

- (1)  $\dot{U}_{1m} = 10\sqrt{2}\angle 60^\circ \text{ V}$
- (2)  $\dot{U}_2 = 10\sqrt{2}\angle 30^\circ \text{ V}$
- (3)  $\dot{I}_{1m} = 3 + j4 \text{ A}$
- (4)  $\dot{I}_2 = 8 + j6 \text{ A}$

7-20 已知  $u_1(t) = 8\sqrt{2} \cos(10t + 30^\circ) \text{ V}$ ,  $u_2(t) = 6\sqrt{2} \cos(10t - 60^\circ) \text{ V}$ , 试求  $u_1(t) + u_2(t)$  和  $u_1(t) - u_2(t)$ 。

7-21 如题图 7-1 所示电路,  $i_1(t) = 3\sqrt{2} \cos(10t + 90^\circ) \text{ A}$ ,  $i_2(t) = 4\sqrt{2} \cos(10t) \text{ A}$ 。

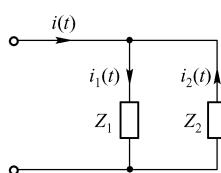
- (1) 试求  $i(t)$ ;
- (2) 试画出  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  和  $\dot{I}$  的相量图。

7-22 如题图 7-2 所示电路中,  $i(t) = 10\sqrt{2} \cos(10t + 60^\circ) \text{ A}$ ,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 15 \text{ mH}$ ,  $C = 330\mu\text{F}$ 。

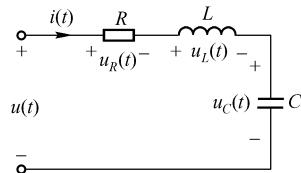
- (1) 试求电路的阻抗  $Z$ , 并判断电路的性质;
- (2) 试求  $u_R(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $u_C(t)$  和  $u(t)$  的瞬时值以及有效值相量;
- (3) 试画出电路的相量图。

7-23 如题图 7-3 所示电路,  $u(t) = 5\sqrt{2} \cos(10t) \text{ V}$ ,  $R = 5\Omega$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$ 。

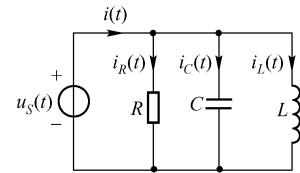
- (1) 试求电路的导纳  $Y$ , 并判断电路的性质;
- (2) 试求电流  $i_R(t)$ 、 $i_L(t)$ 、 $i_C(t)$  和  $i(t)$  的瞬时值以及有效值相量;
- (3) 试画出电路的相量图。



题图 7-1



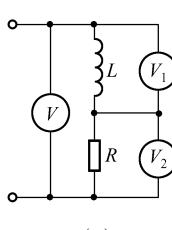
题图 7-2



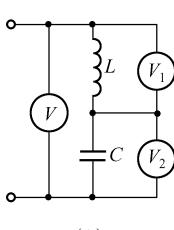
题图 7-3

7-24 如题图 7-4 所示电路, 电压表内阻为无穷大, 若电压表读数  $V = 10 \text{ V}$ ,  $V_1 = 6 \text{ V}$ , 试求电压表  $V_2$  的读数并绘制相量图。

7-25 如题图 7-5 所示电路, 电流表内阻为零, 若电流表读数  $A_1 = 3 \text{ A}$ ,  $A_2 = 4 \text{ A}$ , 试求电流表  $A$  的读数并绘制相量图。

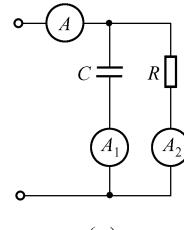


(a)

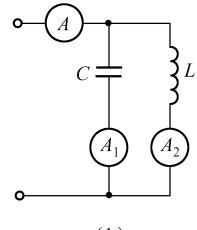


(b)

题图 7-4



(a)

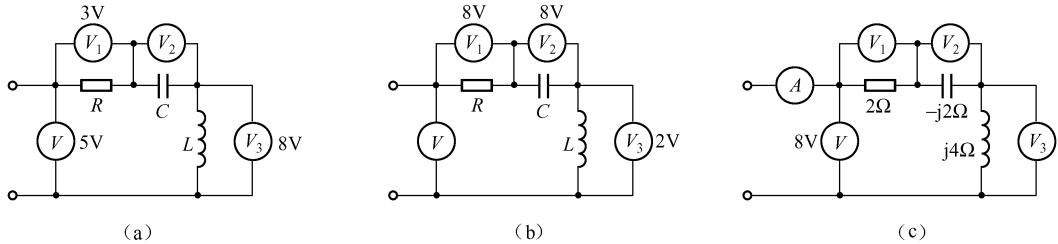


(b)

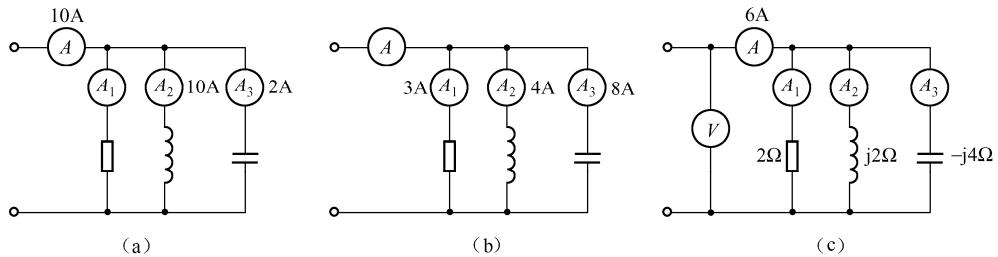
题图 7-5

7-26 如题图 7-6 所示电路, 电压表内阻为无穷大, 电流表内阻为零, 求未知的电表读数。

7-27 如题图 7-7 所示电路, 电流表内阻为零, 电压表内阻为无穷大, 求未知的电表读数。



题图 7-6



题图 7-7

7-28 如题图 7-8 所示电路, 元件 1 和元件 2 可以为电阻、电感或电容, 试结合相量图说明以下各式成立的条件。

$$(1) \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$(2) I = I_1 + I_2$$

$$(3) I = I_1 - I_2$$

$$(4) I = I_2 - I_1$$

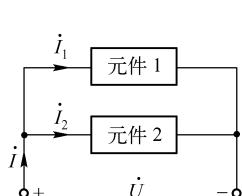
$$(5) I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$$

7-29 如题图 7-9 所示单口网络。

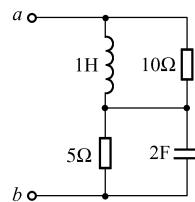
(1) 试求当  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  时单口网络的等效阻抗  $Z_{ab}$  和等效导纳  $Y_{ab}$ , 并判断电路的性质;

(2) 试求当  $\omega = 0$  时单口网络的等效阻抗  $Z_{ab}$  和等效导纳  $Y_{ab}$ ;

(3) 试求当  $\omega \rightarrow \infty$  时单口网络的等效阻抗  $Z_{ab}$  和等效导纳  $Y_{ab}$ 。

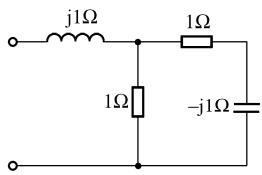


题图 7-8

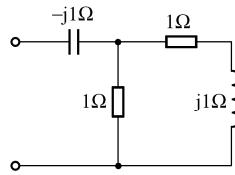


题图 7-9

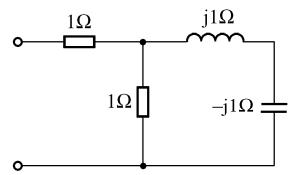
7-30 试求如题图 7-10 所示单口网络的等效阻抗和导纳。



(a)



(b)

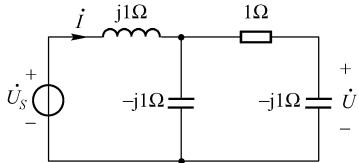


(c)

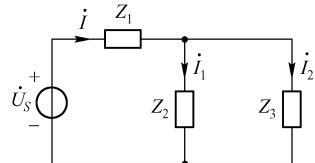
题图 7-10

7-31 如题图 7-11 所示电路,  $\dot{U}_s = 10 \text{ V}$ , 求  $\dot{U}$  和  $\dot{I}$ 。

7-32 如题图 7-12 所示电路,  $\dot{U}_s = 10 \text{ V}$ ,  $Z_1 = 6 + j4 \Omega$ ,  $Z_2 = 3 - j4 \Omega$ ,  $Z_3 = 3 + j4 \Omega$ , 求  $\dot{I}$ 、 $\dot{I}_1$  和  $\dot{I}_2$ 。



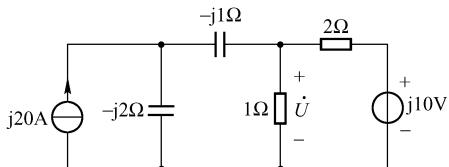
题图 7-11



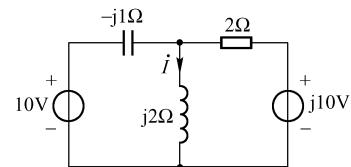
题图 7-12

7-33 如题图 7-13 所示电路, 试分别采用节点电压法以及叠加定理求解  $\dot{U}$ 。

7-34 如题图 7-14 所示电路, 试分别采用回路电流法以及叠加定理求解  $\dot{I}$ 。



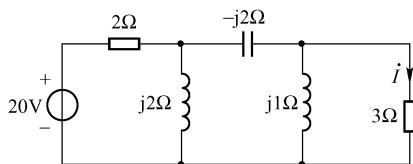
题图 7-13



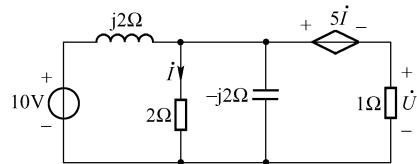
题图 7-14

7-35 如题图 7-15 所示电路, 试分别采用戴维南定理以及诺顿定理求解  $\dot{I}$ 。

7-36 如题图 7-16 所示电路, 试分别采用戴维南定理以及诺顿定理求解  $\dot{U}$ 。



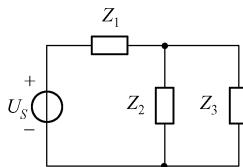
题图 7-15



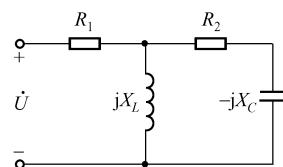
题图 7-16

7-37 如题图 7-17 所示电路,  $\dot{U}_s = 10 \text{ V}$ ,  $Z_1 = 3 + j4 \Omega$ ,  $Z_2 = 6 - j8 \Omega$ ,  $Z_3 = 6 + j8 \Omega$ , 试求该单口网络的有功功率  $P$ 、无功功率  $Q$ 、视在功率  $S$  和功率因数  $\lambda$ 。

7-38 如题图 7-18 所示电路,  $\dot{U} = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 5\Omega$ ,  $X_L = 3\Omega$ ,  $X_C = 4\Omega$ , 试求该单口网络的有功功率  $P$ 、无功功率  $Q$ 、视在功率  $S$  和功率因数  $\lambda$ 。



题图 7-17

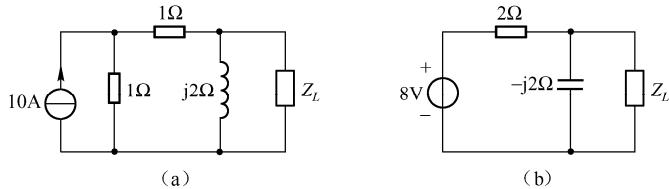


题图 7-18

7-39 如题图 7-19 所示电路:

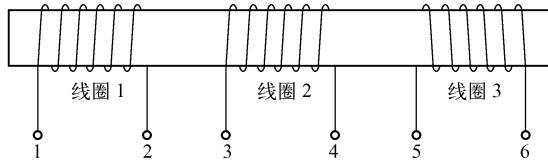
(1) 负载阻抗  $Z_L$  为何值时可获最大功率, 并计算其最大功率;

(2) 若负载为电阻  $R_L$ ，则  $R_L$  为何值时可获最大功率？



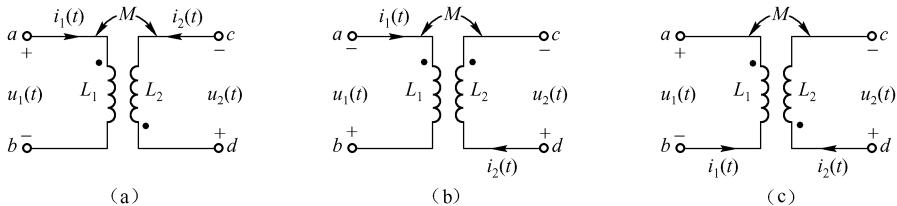
题图 7-19

7-40 如题图 7-20 所示耦合线圈，试确定并标注其同名端。



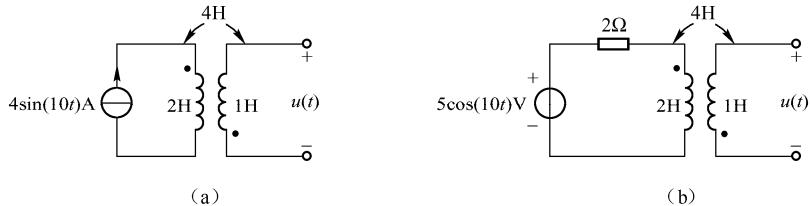
题图 7-20

7-41 试列写如题图 7-21 所示各耦合电感的伏安特性。



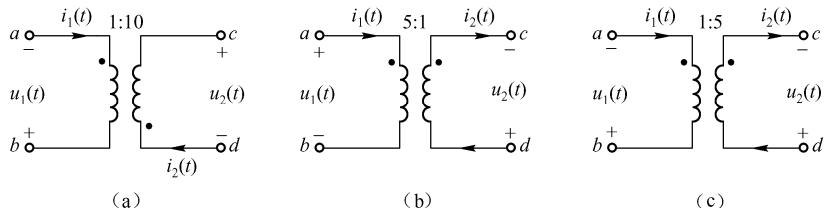
题图 7-21

7-42 试求如题图 7-22 所示电路中的电压  $u(t)$ 。



题图 7-22

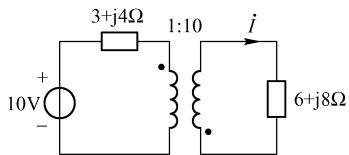
7-43 试列写如题图 7-23 所示各理想变压器的伏安特性。



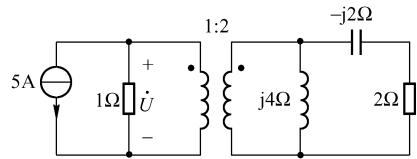
题图 7-23

7-44 如题图 7-24 所示电路, 试求解  $\dot{I}$ 。

7-45 如题图 7-25 所示电路, 试求解  $\dot{U}$ 。



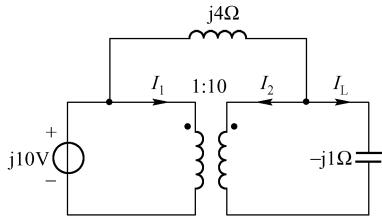
题图 7-24



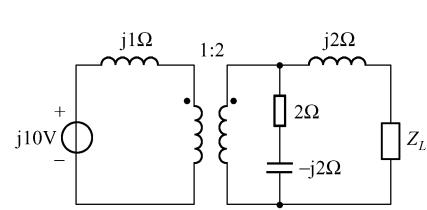
题图 7-25

7-46 如题图 7-26 所示电路, 试求解  $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$  和  $\dot{I}_L$ 。

7-47 如题图 7-27 所示电路,  $Z_L$  为何值时能获得最大功率? 并求其最大功率。



题图 7-26



题图 7-27

# 第8章 连续时间信号的频谱分析

如第2章所述，信号既具有时域特性，也具有频域特性。连续时间信号的频谱分析即是将时间变量变换为频率变量的分析方法，其理论工具为傅里叶级数和傅里叶变换。此方法揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与频率特性之间的密切关系。

本章介绍连续时间信号的频谱分析，涉及周期信号的频谱分析、非周期信号的傅里叶变换、傅里叶变换的性质等。

## 8.1 周期信号的频谱分析

### 8.1.1 周期信号的傅里叶级数

满足狄里赫利条件的周期信号  $f(t)$ ，可以用三角函数集或复指数函数集的线性组合来表示，这种线性组合称为傅里叶级数。狄里赫利条件如下：

- ① 连续或一个周期内只有有限个第一类间断点；
- ② 仅有有限个极值点；

③ 在一个周期内绝对可积，即  $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$ 。

#### 8.1.1.1 三角形式的傅里叶级数

周期为信号  $f(t)$  三角形式的傅里叶级数展开式如下：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_l t + b_n \sin n\omega_l t), \quad n \text{ 为正整数} \quad (8-1-1)$$

其中， $\omega_l = \frac{2\pi}{T}$  为基波角频率， $T$  为周期， $a_0$  为直流分量， $a_n$  和  $b_n$  分别为余弦谐波分量的振幅和正弦谐波分量的振幅。 $a_0$ 、 $a_n$  和  $b_n$  亦称为傅里叶系数，可按以下方式确定。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (8-1-2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_l t dt \quad (8-1-3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_l t dt \quad (8-1-4)$$

若将式 (8-1-1) 中的同频率项加以合并，则式 (8-1-1) 可改写为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_l t + \theta_n) \quad (8-1-5)$$

式中， $A_0$  为直流分量， $A_n$  和  $\theta_n$  分别为  $n$  次谐波分量的振幅和初相，而且

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_n = A_n \cos \theta_n \\ b_n = -A_n \sin \theta_n \end{cases} \quad (8-1-6)$$

上述三角形式的傅里叶级数展开式表明：满足狄里赫利条件的周期信号可以分解为一个直流分量与无穷多个谐波分量之和。

### 8.1.1.2 指数形式的傅里叶级数

周期信号  $f(t)$  指数形式的傅里叶级数展开式如下：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad n \text{ 为正整数} \quad (8-1-7)$$

其中， $F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$  为傅里叶级数的复系数，可按下式确定：

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jn\omega_1 t} dt \quad (8-1-8)$$

$$F_{-n} = F_n^* \quad (8-1-9)$$

式 (8-1-7) 表明：满足狄里赫利条件的周期信号可以分解成无穷多项不同频率的复指数函数的线性组合。显然，指数形式的傅里叶级数比三角形式的傅里叶级数更加紧凑。

事实上，式 (8-1-1) 或式 (8-1-5) 和式 (8-1-7) 可结合如下欧拉公式相互导出：

$$e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j \sin n\omega_1 t \quad (8-1-10)$$

$$\begin{cases} \cos n\omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{-jn\omega_1 t} + e^{jn\omega_1 t}) \\ \sin n\omega_1 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) \end{cases} \quad (8-1-11)$$

为此，可得两种形式的傅里叶级数展开式中的系数有如下关系：

$$F_0 = A_0 = a_0 \quad (8-1-12)$$

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = \frac{1}{2} A_n e^{j\theta_n}, \quad n \neq 0 \quad (8-1-13)$$

$$\text{即: } |F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n, \quad \varphi_n = \theta_n.$$

### 8.1.1.3 信号波形的对称性与傅里叶系数的关系

当实信号  $f(t)$  的波形具有某种对称性时，其相应的傅里叶级数的系数会呈现一定的特征。譬如，某些傅里叶级数的系数为零，从而可简化计算。

#### (1) 纵轴对称

若  $f(t)$  的波形以纵轴为对称轴，则称为纵轴对称信号，即满足  $f(t) = f(-t)$ ， $f(t)$  为偶函数。譬如，如图 8-1-1 所示信号。

此时， $b_n = 0$ ， $A_n = a_n$ ， $F_n = \frac{1}{2} a_n$  为实数。

#### (2) 原点对称

若  $f(t)$  的波形以原点对称，则称为原点对称信号，即满足  $f(t) = -f(-t)$ ， $f(t)$  为奇函数。譬

如, 如图 8-1-2 所示信号。

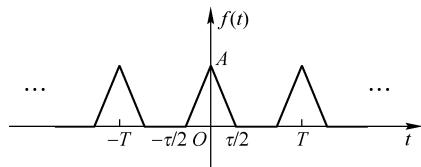


图 8-1-1 偶函数示例

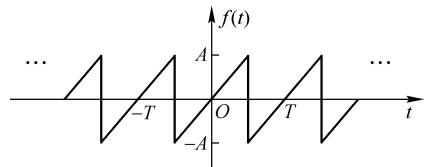


图 8-1-2 奇函数示例

此时,  $F_0 = A_0 = a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$ ,  $A_n = b_n$ ,  $F_n = -j\frac{1}{2}b_n$  为纯虚数。

### (3) 半周横轴对称

若  $f(t)$  沿时间轴平移半个周期后的波形与原信号的波形以横轴对称, 则称为半周横轴对称信号, 即满足  $f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$ ,  $f(t)$  为奇谐函数。譬如, 如图 8-1-3 所示信号。

此时,  $a_0 = A_0 = F_0 = 0$ ,  $F_{2k} = A_{2k} = a_{2k} = b_{2k} = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , 即  $f(t)$  仅含有奇次谐波, 而没有偶次谐波。

**例 8-1-1** 如图 8-1-4 所示信号, 试根据信号波形对称性说明其傅里叶系数的特点。

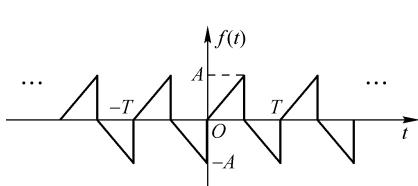


图 8-1-3 奇谐函数示例

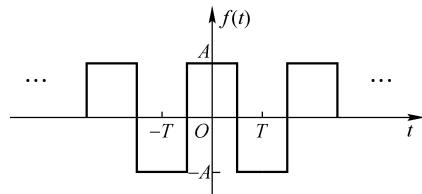


图 8-1-4 例 8-1-1 用图

解: (1) 因  $f(t)$  为偶函数, 从而  $b_n = 0$ ,  $A_n = a_n$ ,  $F_n = \frac{1}{2}a_n$  为实数。

(2) 又因  $f(t)$  为奇谐函数, 于是  $a_0 = A_0 = F_0 = 0$ ,  $F_{2k} = A_{2k} = a_{2k} = b_{2k} = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  综上得

$$a_0 = A_0 = F_0 = 0, \quad b_n = 0, \quad F_{2k} = A_{2k} = a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{2k-1} = a_{2k-1}, \quad F_{2k-1} = \frac{1}{2}a_{2k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## 8.1.2 周期信号的频谱

周期信号的傅里叶级数表明周期信号可表示为直流分量和不同频率正弦分量的线性组合, 正弦分量的形式为  $A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n)$  或  $F_n e^{jn\omega_1 t}$ 。不同周期信号的区别在于分量的数目、角频率  $n\omega_1$ 、幅度  $A_n$  或  $|F_n|$ 、相位  $\theta_n$  或  $\varphi_n$  等方面的差异。

为了便于直观地表征周期信号的频域特性, 通常把幅度和相位随角频率的分布用图形来表达。相应的图形分别称为周期信号的幅度频谱图和相位频谱图(简称为幅度谱和相位谱), 两者合称为周期信号的频谱图(简称频谱)。

### 8.1.2.1 单边频谱

单边频谱是指周期信号  $f(t)$  三角形式的傅里叶级数中  $A_n$  随  $n\omega_1$  变化的幅度频谱和  $\theta_n$  随  $n\omega_1$

变化的相位频谱, 如图 8-1-5 所示。之所以称其为单边频谱, 是因为  $n\omega_1 \geq 0$ , 即频谱图只在频率  $n\omega_1$  轴的零频率和正频率一边。

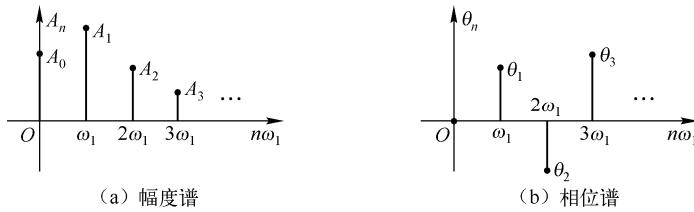


图 8-1-5 单边频谱示意图

需要指出: 在画单边频谱时, 务必将  $f(t)$  表示为式 (8-1-5) 所示的形式。

### 8.1.2.2 双边频谱

双边频谱是指周期信号  $f(t)$  指数形式的傅里叶级数中  $|F_n|$  随  $n\omega_1$  变化的幅度谱和  $\varphi_n$  随  $n\omega_1$  变化的相位谱, 如图 8-1-6 所示。此时,  $n\omega_1$  可正可负。

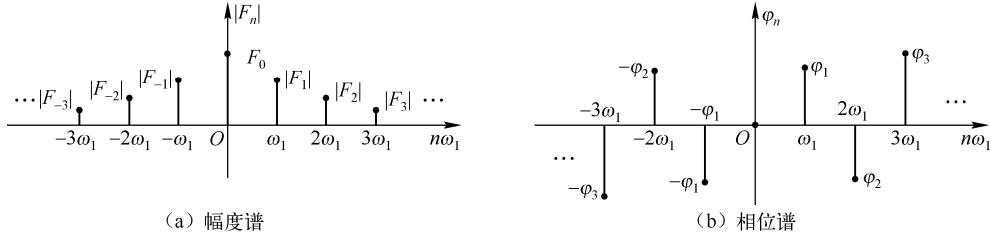


图 8-1-6 双边频谱示意图

由于  $F_n = F_{-n}^*$ , 故双边幅度谱为偶函数, 双边相位谱为奇函数。

### 8.1.2.3 单边频谱与双边频谱的对应关系

对某一信号周期而言, 已知其单边频谱, 按如下方式易得其双边频谱。

(1) 双边幅度谱: 在  $n\omega_1 = 0$  时,  $F_0 = A_0$ ; 在  $n\omega_1 > 0$  时,  $|F_n| = \frac{1}{2}A_n$ ,  $|F_{-n}| = |F_n|$ 。

(2) 双边相位谱: 在  $n\omega_1 > 0$  时,  $\varphi_n = \theta_n$ ,  $\varphi_{-n} = -\theta_n$ 。

同样, 已知周期信号的双边频谱, 按如下方式可得其单边频谱。

(1) 单边幅度谱: 在  $n\omega_1 = 0$  时,  $A_0 = F_0$ ; 在  $n\omega_1 > 0$  时,  $A_n = 2|F_n|$ 。

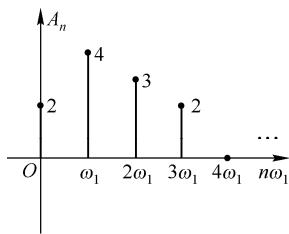
(2) 单边相位谱: 在  $n\omega_1 > 0$  时,  $\theta_n = \varphi_n$ 。

**例 8-1-2** 画出周期信号  $f(t) = 2 + 2\sqrt{2} \cos t + 2\sqrt{2} \sin t - 3 \cos(2t - \frac{\pi}{6}) + 2 \sin(3t + \frac{\pi}{6})$  的单边频谱和双边频谱。

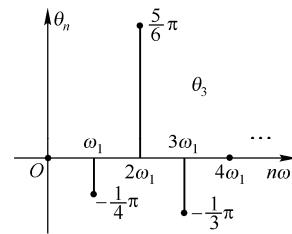
解: 将  $f(t)$  改写成如式 (8-1-5) 所示的余弦函数表示形式。

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 + 4 \cos(t - \frac{\pi}{4}) + 3 \cos(2t - \frac{\pi}{6} + \pi) + 2 \cos(3t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) \\ &= 2 + 4 \cos(t - \frac{\pi}{4}) + 3 \cos(2t + \frac{5}{6}\pi) + 2 \cos(3t - \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

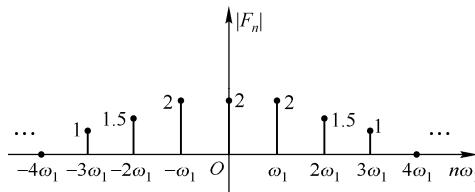
于是可画出  $f(t)$  的单边频谱和双边频谱, 分别如图 8-1-7 和图 8-1-8 所示, 其中  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ 。



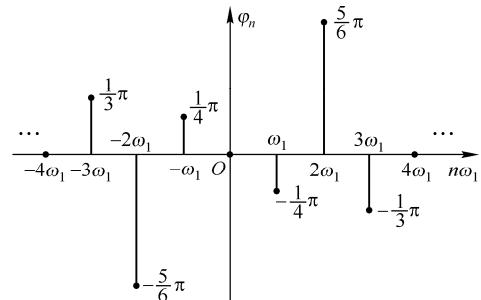
(a) 幅度谱



(b) 相位谱

图 8-1-7  $f(t)$  单边频谱

(a) 幅度谱



(b) 相位谱

图 8-1-8  $f(t)$  双边频谱

#### 8.1.2.4 周期信号频谱的特点

由上述分析可见, 周期信号频谱具有如下特点:

- (1) 离散性。谱线沿频率呈离散分布, 这种频谱称为离散频谱;
- (2) 谐波性。各谱线间呈等距分布, 相邻谱线之间的间隔等于基波角频率;
- (3) 收敛性。总的趋势是各谐波幅度谱线的高度随着角频率的增大而减小, 且在  $n\omega_1 \rightarrow \infty$  时, 谱线高度衰减到零。

#### 8.1.2.5 典型周期矩形脉冲信号的频谱

周期矩形脉冲信号是一个十分重要的典型信号, 得到了广泛的应用。为此, 下面将详细分析它的频谱, 并揭示信号的脉宽与频宽(时域与频域)之间的关系。

如图 8-1-9 所示为周期矩形脉冲信号  $f(t)$ , 其周期为  $T$ , 脉冲宽度(简称脉宽)为  $\tau$ 。

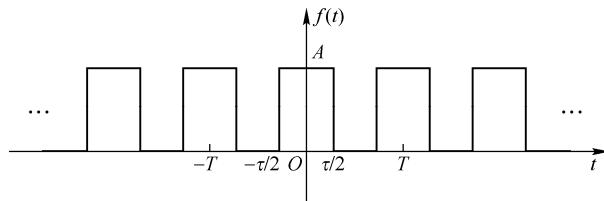


图 8-1-9 周期矩形脉冲信号

则其指数形式傅里叶级数的系数为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin n\omega_1 \frac{\tau}{2}}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T} \text{Sa}(n\omega_1 \frac{\tau}{2})$$

式中,  $Sa(n\omega_1 \frac{\tau}{2}) = \frac{\sin n\omega_1 \frac{\tau}{2}}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}}$ , 称  $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$  为抽样函数, 其波形如图 8-1-10 所示。

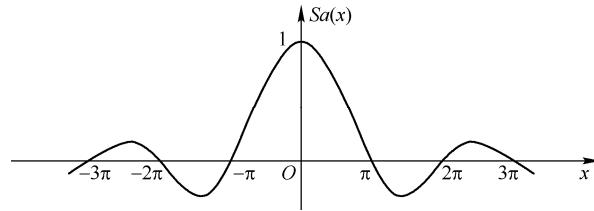


图 8-1-10 抽样信号

于是, 可画出周期矩形脉冲信号的双边频谱, 如图 8-1-11 所示。此频谱图表明:

- (1)  $\frac{2\pi}{\tau}$  为幅度谱的第一个零点, 且谐波分量主要集中在  $0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$  范围内, 故称  $B_o = \frac{2\pi}{\tau}$  为其有效频带宽度 (简称带宽);
- (2) 周期  $T$  的大小不影响有效频带宽度, 但影响谱线的疏密和高低。即  $T$  增大,  $\omega_1$  减小, 谱线变密, 高度降低。反之,  $T$  减小,  $\omega_1$  增大, 谱线变疏, 高度增大;
- (3) 脉宽  $\tau$  的大小不影响谱线的疏密, 但影响谱线的高低和有效频带的宽度。即  $\tau$  增大, 谱线高度增加, 有效频带减小。反之,  $\tau$  减小, 谱线高度降低, 有效频带增大。

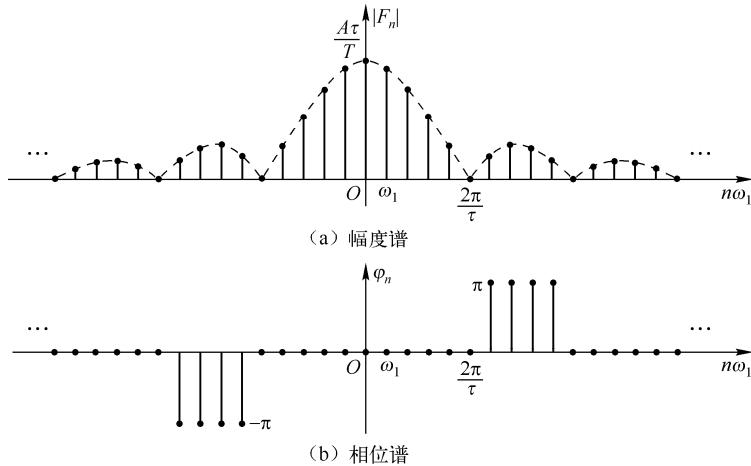


图 8-1-11 周期矩形脉冲信号的频谱

信号的有效带宽  $B_o$  与信号时域持续时间  $\tau$  成反比在通信中是一对矛盾。也就是说, 为提高通信链路的传输速率, 即要求信号持续时间变短, 则需要增大链路带宽; 反之, 减小链路带宽, 致使信号时域持续时间变长, 从而传输速率下降。

## 8.2 非周期信号的傅里叶变换

当周期信号的周期无限增大后, 周期信号转化为非周期信号, 信号的频谱相应地由离散频谱变为连续频谱, 幅度谱的谱线高度也趋于零。此时, 无法用谱线幅度来分析其频域特性。不过, 尽管

谱线幅度趋于零，但不同频率处的谱线幅度仍然具有相对大小的特性。为此，引入傅里叶变换。

### 8.2.1 傅里叶正变换与反变换

#### 8.2.1.1 定义

非周期信号  $f(t)$  的傅里叶变换记为  $F(\omega)$ 。通常称  $f(t)$  为  $F(\omega)$  的原函数， $F(\omega)$  为  $f(t)$  的像函数。 $F(\omega)$  和  $f(t)$  之间的关系由如下两个公式描述。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (8-2-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (8-2-2)$$

式(8-2-1)为傅里叶正变换(简称傅里叶变换或傅氏变换)，可简写为  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ；式(8-2-2)为傅里叶反变换或傅里叶逆变换(简称傅氏反变换或逆变换)，可简写为  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ 。也可用双向箭头表示两者之间的对应关系，即  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 。

另外，式(8-2-2)表明，非周期信号可以分解为无限多个频率为  $\omega$ 、振幅为  $\frac{F(\omega)}{2\pi} d\omega$  的指数分量  $e^{j\omega t}$  的连续和(积分)。

#### 8.2.1.2 傅里叶变换存在的条件

若  $f(t)$  在无限区间内满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (8-2-3)$$

则其傅里叶变换存在，且可由式(8-1-1)确定。需要指出，此条件仅为傅里叶变换存在的充分条件，而不是必要条件。也就是说，对某些信号而言，其傅里叶变换存在，但它们并不满足无限区间内绝对可积的条件。此时，其傅里叶变换不能直接由定义式求取，而需要借助奇异函数或傅里叶变换的性质等方法确定。

### 8.2.2 从傅里叶级数到傅里叶变换

如图 8-2-1 (a) 所示的非周期信号  $f(t)$  可以看成是如图 8-2-1 (b) 所示的周期信号  $f_T(t)$  在周期  $T$  趋于无穷大时的情形，即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t) \quad (8-2-4)$$

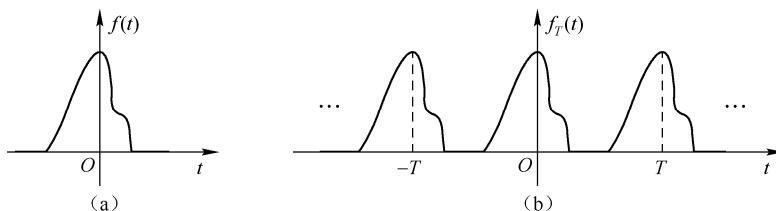


图 8-2-1 周期信号与非周期信号

将  $f_T(t)$  展开成指数形式的傅里叶级数，有

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j n \omega_0 t} \quad (8-2-5)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_l t} dt \quad (8-2-6)$$

随着  $T$  的增大,  $\omega_l = \frac{2\pi}{T}$  变小, 离散谱线变密, 各频率分量的幅度减小, 但幅度频谱包络的形状不变。当  $T \rightarrow \infty$  时, 各谱线幅度趋于无穷小。此时, 讨论其傅里叶级数问题已经没有实际意义, 但考察频谱幅度的包络是有意义的。为此, 可将式 (8-2-6) 改写为

$$TF_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_l t} dt \quad (8-2-7)$$

在  $T$  变得很大时,  $\omega_l$  变得非常小, 可以用  $\Delta\omega$  来表示。显然  $TF_n$  是  $jn\Delta\omega$  的函数, 令其为  $F(n\Delta\omega)$ , 即

$$F(n\Delta\omega) = TF_n \quad (8-2-8)$$

于是式 (8-2-5) 和式 (8-2-6) 改写为

$$F(n\Delta\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \quad (8-2-9)$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\Delta\omega)}{T} e^{jn\Delta\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\Delta\omega)}{2\pi} \Delta\omega e^{jn\Delta\omega t} \quad (8-2-10)$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , 可用微变量  $d\omega$  表示, 离散变量  $n\Delta\omega$  变为连续变量  $\omega$ , 求和变为积分。从而式 (8-2-9) 和式 (8-2-10) 分别变为式 (8-2-1) 和式 (8-2-2)。

另外, 由式 (8-2-8) 还可以得

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} TF_n = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\Delta\omega} F_n = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{F_n}{\Delta f} \quad (8-2-11)$$

$$F_n = \frac{F(\omega)}{T} |_{\omega=n\omega_l} \quad (8-2-12)$$

式 (8-2-11) 表明,  $F(\omega)$  是单位频带的复振幅, 称为非周期信号  $f(t)$  的频谱密度函数, 简称频谱函数或频谱密度, 习惯上也称频谱。

另外, 应用式 (8-2-11) 和式 (8-2-12), 可以比较方便地由周期信号的  $F_n$  求得相应非周期信号的  $F(\omega)$ , 反之亦然。 $F(\omega)$  也是相应  $F_n$  的包络。

### 8.2.3 非周期信号的频谱

$F(\omega)$  通常是  $\omega$  的复函数, 可以写做

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (8-2-11)$$

$|F(\omega)| \sim \omega$  和  $\theta(\omega) \sim \omega$  的曲线分别称为幅度频谱和相位频谱。当  $F(\omega)$  是实数时, 也可以把二者画在同一幅图上。对于实信号  $f(t)$ ,  $F(\omega)$  和  $F(-\omega)$  是一对共轭复数。此时, 幅度谱为偶函数, 相位谱为奇函数。

### 8.2.4 常见信号的傅里叶变换

由傅里叶变换的定义, 或者借助奇异函数或傅里叶变换的性质等方法, 可得如下常见信号的傅里叶变换, 相应的时域波形和频谱分别如图 8-2-2~图 8-2-9 所示。

(1) 单位冲激信号

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

(2) 直流信号

$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$

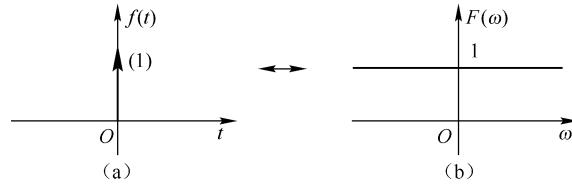


图 8-2-2 单位冲激信号及其频谱

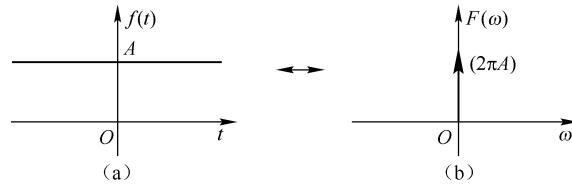


图 8-2-3 直流信号及其频谱

(3) 矩形脉冲信号 (门函数)  $A \cdot G_\tau(t) = A[\varepsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t - \frac{\tau}{2})] \leftrightarrow A\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$

(4) 抽样信号  $A\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi A \cdot g_\tau(\omega) = 2\pi A[\varepsilon(\omega + \frac{\tau}{2}) - \varepsilon(\omega - \frac{\tau}{2})]$

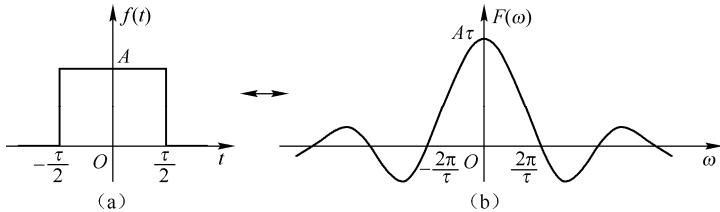


图 8-2-4 矩形脉冲信号及其频谱

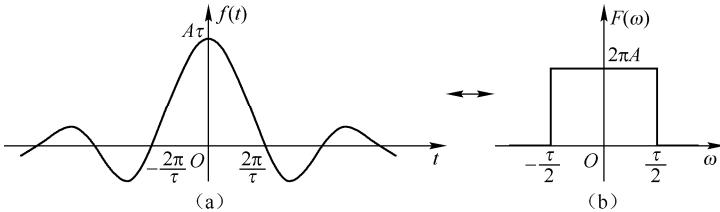


图 8-2-5 抽样信号及其频谱

(5) 单位阶跃信号

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

(6) 单边指数衰减信号

$$A e^{-at} \varepsilon(t) \ (a > 0) \leftrightarrow \frac{A}{j\omega + a}$$

(7) 余弦信号

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

(8) 符号函数

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

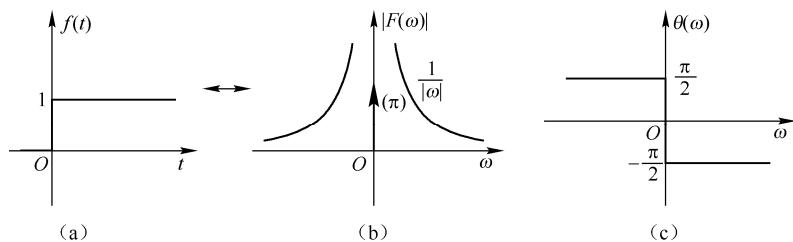


图 8-2-6 单位阶跃信号及其频谱

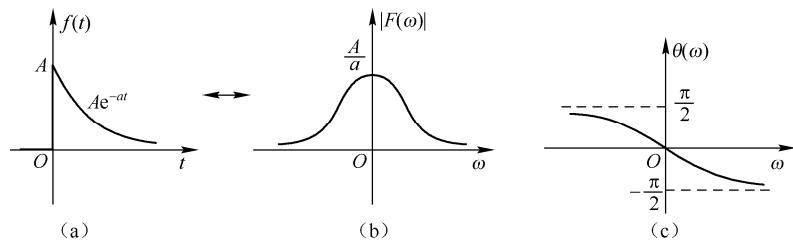


图 8-2-7 单边指数衰减信号及其频谱

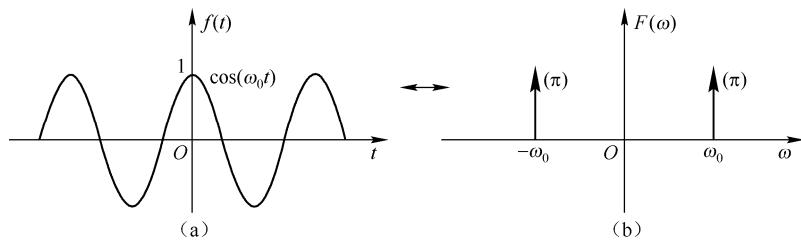


图 8-2-8 余弦信号及其频谱

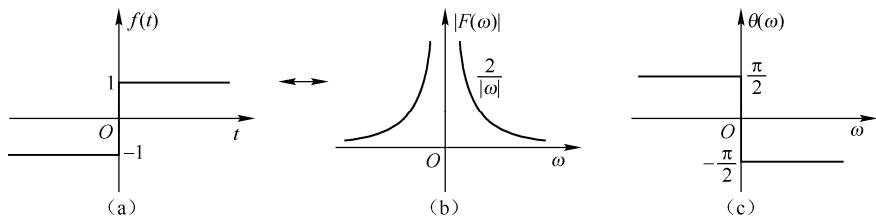


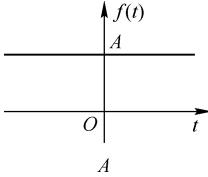
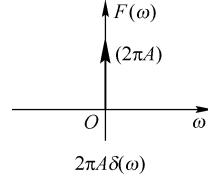
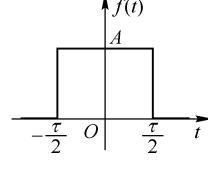
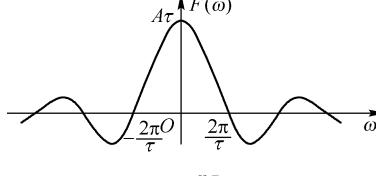
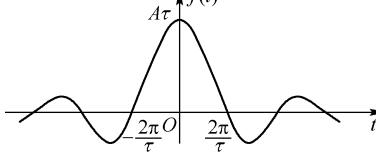
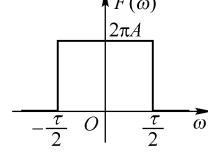
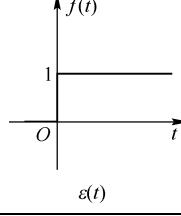
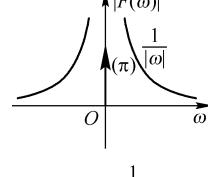
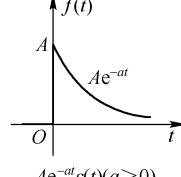
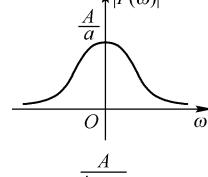
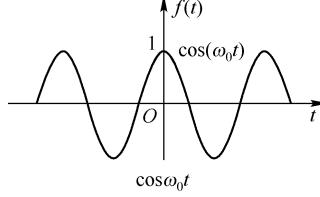
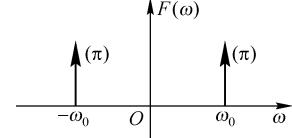
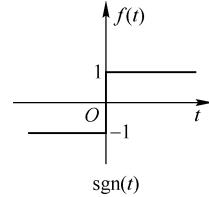
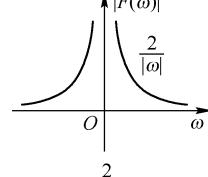
图 8-2-9 符号函数及其频谱

为便于查阅, 将上述常见信号的傅里叶变换予以汇总, 如表 8-2-1 所示。

表 8-2-1 常见信号的傅里叶变换

序号	信号时域 名称	时域	频域
1	单位冲激 信号		

续表

序号	信号时域 名称	时域	频域
2	直流信号		
3	矩形脉冲信号 (门函数)	 $AG_r(t) = A[\epsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \epsilon(t - \frac{\tau}{2})]$	
4	抽样信号	 $A\tau \text{Sa}(\frac{\tau}{2})$	 $2\pi A G_r(\omega) = 2\pi A [\epsilon(\omega + \frac{\tau}{2}) - \epsilon(\omega - \frac{\tau}{2})]$
5	单位阶跃 信号	 $\epsilon(t)$	 $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
6	单边指数衰减 信号	 $A e^{-\alpha t} \epsilon(t) (\alpha > 0)$	 $\frac{A}{j\omega + \alpha}$
7	余弦信号	 $\cos\omega_0 t$	 $\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
8	符号函数	 $\text{sgn}(t)$	 $\frac{2}{j\omega}$

## 8.3 傅里叶变换的性质

傅里叶变换建立了信号时域特性和频域特性之间的对应关系。当信号在一个域中发生变化时，必然在另一个域中产生相应的变化。傅里叶变换的性质描述了这种相应变化的规律。另外，利用傅里叶变换的性质亦有助于求取一些非典型信号的傅里叶变换。

### 8.3.1 线性性

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ , 则

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \quad (8-3-1)$$

此性质易由傅里叶变换的定义得到，它反映了傅里叶变换是一种线性运算。

例 8-3-1 求  $f(t) = \varepsilon(-t)$  的傅里叶变换  $F(\omega)$ 。

解：因为  $f(t) = \varepsilon(-t) = 1 - \varepsilon(t)$ , 从而,

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) - [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

例 8-3-2 求如图 8-3-1 (a) 所示信号  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(\omega)$ 。

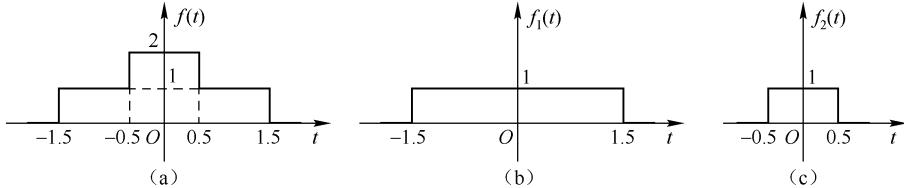


图 8-3-1 例 8-3-2 用图

解：如图 8-3-1 所示信号，有  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , 则

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) = 3Sa(1.5\omega) + Sa(0.5\omega)$$

### 8.3.2 比例性（尺度变换）

若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (8-3-2)$$

证明：(1) 若  $a > 0$ , 则  $f(at)$  的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a} x} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(2) 若  $a < 0$ , 类似有

$$\mathcal{F}[f(at)] = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

综合(1)和(2), 性质得证。

比例性表明，在时域中扩展一个信号的持续时间，对应于在频域中压缩了它的频率范围；反之，在时域中压缩一个信号的持续时间，则对应于在频域中扩展了它的频率范围。也就是说，若要压缩信号的持续时间，则不得不以展宽频带宽度为代价。所以，在通信技术中，通信速度和所

需频带宽度是一对矛盾。

特别地, 当  $a = -1$  时, 式 (8-3-2) 变为

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega) \quad (8-3-3)$$

例 8-3-3 (1)  $\delta(2t) \leftrightarrow ?$  (2)  $\varepsilon(-\frac{1}{2}t) \leftrightarrow ?$

解: 根据傅里叶变换的比例性, 有

(1)  $\delta(t) \leftrightarrow 1$

$$\delta(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}$$

(2)  $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$$\varepsilon(-\frac{1}{2}t) \leftrightarrow \frac{1}{|-\frac{1}{2}|} [\pi\delta(\frac{\omega}{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{j\omega/(-\frac{1}{2})}] = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$$

### 8.3.3 对称性

若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (8-3-4)$$

证明: 因为  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ , 故

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将上式中  $\omega$  与  $t$  对调, 有

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

即  $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ 。

对称性表明, 时域信号与频域信号之间波形的一种对称性, 即若 A 类波形时域信号的傅里叶变换为 B 类波形, 则 B 类波形时域信号的傅里叶变换为 A 类波形。譬如, 矩形脉冲信号的傅里叶变换为抽样信号, 抽样信号的傅里叶变换为矩形脉冲。

例 8-3-4 利用傅里叶变换的对称性求如下信号的傅里叶变换。

(1)  $A \leftrightarrow ?$  (2)  $\frac{1}{t} \leftrightarrow ?$  (3)  $Sa(t) \leftrightarrow ?$

解: 根据傅里叶变换的对称性及线性性, 有

(1)  $\delta(t) \leftrightarrow 1$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$

(2)  $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \text{sgn}(-\omega) = -2\pi \text{sgn}(\omega)$$

$$\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \text{sgn}(\omega)$$

$$(3) A \cdot g_\tau(t) \leftrightarrow A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$A\tau Sa\left(\frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi A \cdot g_\tau(-\omega) = 2\pi A \cdot g_\tau(\omega)$$

$$Sa(t) \leftrightarrow \pi g_2(\omega) = \pi[\varepsilon(\omega+1) - \varepsilon(\omega-1)]$$

例 8-3-5 利用傅里叶变换的对称性求如下信号的傅里叶反变换。

$$(1) ? \leftrightarrow \varepsilon(\omega) \quad (2) ? \leftrightarrow e^{-\omega} \varepsilon(\omega) \quad (3) ? \leftrightarrow \cos(2\omega)$$

解：根据傅里叶变换的对称性、线性性及比例性，有

$$(1) \varepsilon(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\pi \delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi \varepsilon(-\omega)$$

$$\pi \delta(-t) + \frac{1}{j(-t)} \leftrightarrow 2\pi \varepsilon(\omega)$$

$$\frac{1}{2} \delta(t) + j \frac{1}{2\pi t} \leftrightarrow \varepsilon(\omega)$$

$$(2) e^{-t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$\frac{1}{jt + 1} \leftrightarrow 2\pi e^{(-\omega)} \varepsilon(-\omega)$$

$$\frac{1}{j(-t) + 1} \leftrightarrow 2\pi e^{-\omega} \varepsilon(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi(1-jt)} \leftrightarrow e^{-\omega} \varepsilon(\omega)$$

$$(3) \cos(2t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$$

$$\pi[\delta(t+2) + \delta(t-2)] \leftrightarrow 2\pi \cos(-2\omega)$$

$$\pi[\delta(-t+2) + \delta(-t-2)] \leftrightarrow 2\pi \cos(2\omega)$$

$$\frac{1}{2}[\delta(t-2) + \delta(t+2)] \leftrightarrow \cos(2\omega)$$

### 8.3.4 时移性

若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (8-3-5)$$

证明：根据傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \cdot e^{-j\omega t_0} \\ &= F(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

时移性表明，信号在时域的右移，在频域对应于相位的滞后。

例 8-3-6 利用傅里叶变换的时移性求如下信号的傅里叶变换。

$$(1) \delta(t - t_0) \leftrightarrow ? \quad (2) \varepsilon(t + t_0) \leftrightarrow ?$$

解：根据傅里叶变换的时移性，有

$$(1) \delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$(2) \quad \varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\varepsilon(t+t_0) \leftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]e^{j\omega t_0} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t_0}$$

例 8-3-7 若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则  $f(at-t_0) \leftrightarrow ?$

解: 根据傅里叶变换的比例性和时移性, 有

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$$

### 8.3.5 频移性

若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (8-3-6)$$

证明: 根据傅里叶变换的定义, 有

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = F(\omega - \omega_0)$$

此性质表明, 时域信号与  $e^{j\omega_0 t}$  相乘, 在频域对应于其频谱的搬移。

例 8-3-8 若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则  $f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow ?$

解: 根据傅里叶变换的频移性和线性性, 有

$$f(t)\cos\omega_0 t = f(t)\frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2} = \frac{1}{2}[f(t)e^{-j\omega_0 t} + f(t)e^{j\omega_0 t}]$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

此例表明,  $f(t)$  通过乘以余弦信号实现了频谱搬移, 工程上称为幅度调制。故傅里叶变换的频移性亦称为调制定理。如图 8-3-2 所示为幅度调制及相应的频谱示意图。

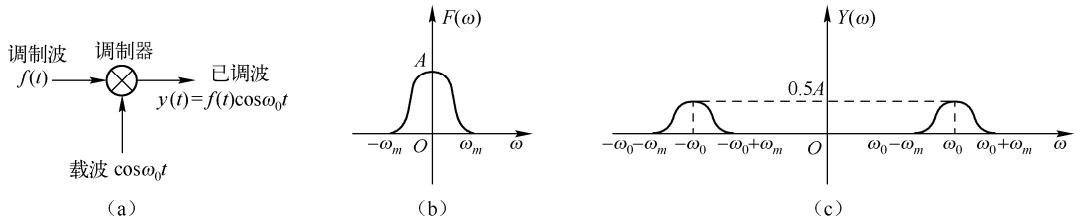


图 8-3-2 信号幅度调制及其频谱示意图

例 8-3-9 若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则  $f(-2t+4)e^{-j3t} \leftrightarrow ?$

解: 根据傅里叶变换的时称性、比例性及频移性, 有

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(-2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(-2t+4) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)e^{-j2\omega}$$

$$f(-2t+4)e^{-j3t} \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega+3}{2}\right)e^{-j2(\omega+3)}$$

根据周期信号指数形式的傅里叶级数，结合傅里叶变换的频移性，易得周期信号的傅里叶变换如下：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (8-3-7)$$

上式表明：周期信号的频谱密度由（无穷或多个）冲激组成，这些冲激位于谐频  $n\omega_1$  处，每一冲激的强度为  $2\pi F_n$ 。

### 8.3.6 卷积定理

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ , 则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (8-3-8)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \quad (8-3-9)$$

证明：(1) 时域卷积定理

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

由时移性知  $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-j\omega\tau}$ , 从而有

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot F_2(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

(2) 频域卷积定理

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega-\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \end{aligned}$$

式 (8-3-8) 和式 (8-3-9) 分别为时域卷积定理和频域卷积定理。

例 8-3-10 求  $e^{-t} \varepsilon(t) * e^{-2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow ?$

解：根据时域卷积定理，有

$$e^{-t} \varepsilon(t) * e^{-2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega+1} \cdot \frac{1}{j\omega+2} = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

例 8-3-11 利用频域卷积定理求  $f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow ?$

解：根据频域卷积定理，有

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \{F(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]\} = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

### 8.3.7 时域微积分性

若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega) \quad (8-3-10)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad (8-3-11)$$

证明：(1) 时域微分性

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式两端对  $t$  求导，有

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

即  $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

(2) 时域积分性

因为  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varepsilon(t-\tau) d\tau = f(t) * \varepsilon(t)$ ，故

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(\omega) [\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] = \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

式 (8-3-10) 和式 (8-3-11) 分别为时域微分性和时域积分性。而且，式 (8-3-10) 还可进一步推广如下：

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad (8-3-12)$$

例 8-3-13 利用傅里叶变换的时域微分性求  $\sin \omega_0 t \leftrightarrow ?$

解：根据傅里叶变换的时域微分性，有

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\sin \omega_0 t = -\frac{1}{j\omega_0} [\cos \omega_0 t]' \leftrightarrow -\frac{1}{\omega_0} j\omega \pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

例 8-3-13 采用傅里叶变换的时域积分性求如图 8-3-3 (a) 所示  $f(t)$  的傅里叶变换。

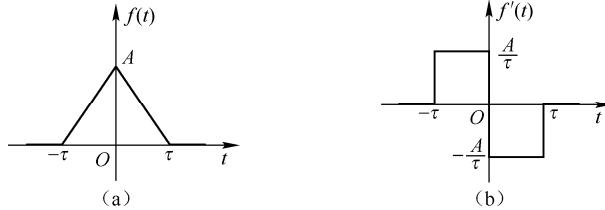


图 8-3-3 例 8-3-13 用图

解：令  $g(t) = f'(t)$ ，如图 8-3-3 (b) 所示。由傅里叶变换的时移性得

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) = ASa \frac{\omega\tau}{2} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}) = j2ASa \frac{\omega\tau}{2} \cdot \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi G(0) \delta(\omega) + \frac{G(\omega)}{j\omega} = A\tau Sa^2 \frac{\omega\tau}{2}$$

例 8-3-14 利用傅里叶变换的时域积分性求如图 8-3-4 (a) 所示  $f(t)$  的傅里叶变换。

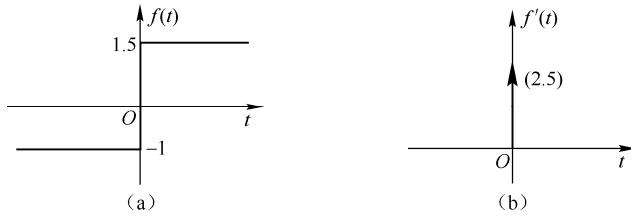


图 8-3-4 例 8-3-14 用图

解: 令  $g(t) = f'(t)$ , 如图 8-3-4 (b) 所示。

$$g(t) = 2.5\delta(t) \leftrightarrow G(\omega) = 2.5$$

$$f(t) = -1 + \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \leftrightarrow -2\pi\delta(\omega) + \pi G(0)\delta(\omega) + \frac{G(\omega)}{j\omega} = 0.5\pi\delta(\omega) + \frac{2.5}{j\omega}$$

### 8.3.8 频域微积分性

若  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 则

$$tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega} \quad (8-3-13)$$

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) d\Omega \quad (8-3-14)$$

证明: (1) 频域微分性

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

将上式两端对  $\omega$  求导, 有

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{即 } -jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}, \text{ 从而 } tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$(2) \text{ 因为 } \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \varepsilon(\omega - \Omega) d\Omega = F(\omega) * \varepsilon(\omega), \text{ 又 } \varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \text{ 根据对称性, 有}$$

$$\pi\delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi\varepsilon(-\omega)$$

$$\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi(-t)} \leftrightarrow \varepsilon(\omega)$$

再利用频域卷积定理, 得

$$2\pi\{f(t)[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi(-t)}]\} \leftrightarrow F(\omega) * \varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) d\Omega$$

$$\text{即 } \pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) d\Omega$$

式 (8-3-13) 和式 (8-3-14) 分别为频域微分性和频域积分性, 而且式 (8-3-13) 还可进一步推广如下:

$$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \quad (8-3-15)$$

例 8-3-15 利用傅里叶变换的频域微分性求以下信号的傅里叶变换。

$$(1) t \leftrightarrow ? \quad (2) Ate^{-at} \varepsilon(t) \leftrightarrow ? \quad (a > 0)$$

解：根据傅里叶变换的频域微分性，有

$$(1) 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$t \leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$$

$$(2) Ae^{-at} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{A}{j\omega + a}$$

$$Ate^{-at} \varepsilon(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \left( \frac{A}{j\omega + a} \right) = \frac{A}{(j\omega + a)^2}$$

为便于查阅，将上述傅里叶变换的性质予以汇总，如表 8-3-1 所示。

表 8-3-1 傅里叶变换的性质

性质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$
线性性	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
比例性	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(\frac{\omega}{a})$
对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时移性	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
频移性	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
	$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
频域卷积	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$
时域微分性	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
时域积分性	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$
频域微分性	$tf(t)$	$j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$
	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
频域积分性	$\pi f(0) + \frac{f(t)}{-jt}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega$

## 练习题

### A. 基本概念类

8-1 关于周期信号的傅里叶级数：

- (1) 写出三种形式的傅里叶级数；
- (2) 说明不同形式傅里叶级数系数之间的关系；
- (3) 说明周期信号波形对称性对其傅里叶级数中系数的影响。

8-2 关于周期信号的频谱：

- (1) 给出周期信号频谱的含义；

(2) 说明单、双边频谱之间的关系;

(3) 周期信号频谱有何特点?

8-3 关于傅里叶变换:

(1) 给出傅里叶正、反变换的定义;

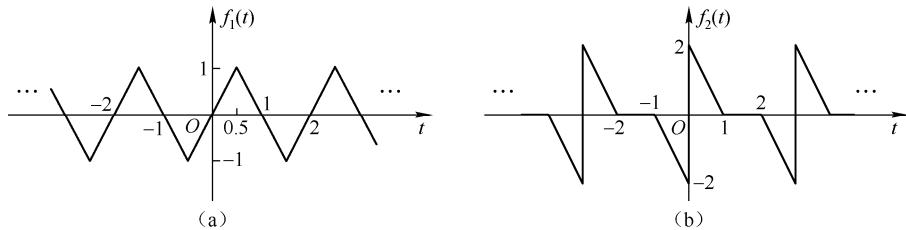
(2) 写出常见信号的傅里叶变换;

(3) 写出周期信号的傅里叶变换。

8-4 傅里叶变换有哪些性质? 举例说明其应用。

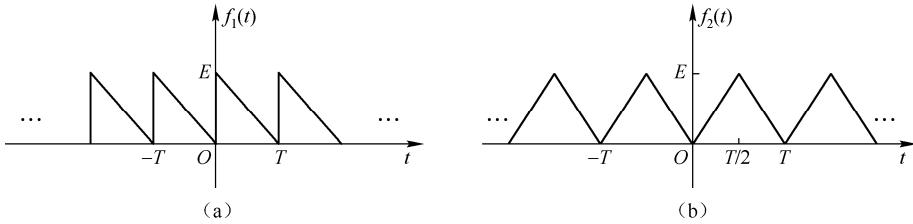
B. 分析计算类

8-5 把如题图 8-1 所示的周期信号展开成三角形式的傅里叶级数。



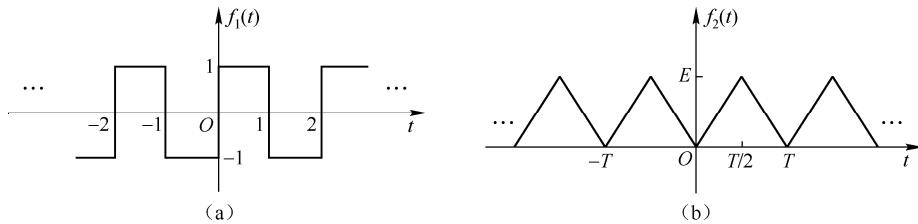
题图 8-1

8-6 把如题图 8-2 所示的周期信号展开成指数形式的傅里叶级数。



题图 8-2

8-7 利用信号  $f(t)$  的对称性, 定性判断如题图 8-3 所示各周期信号的傅里叶级数中所含有的频率分量。



题图 8-3

8-8 试分别画出下列周期信号的单边频谱和双边频谱。

$$(1) f(t) = 2 + 6 \cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{6}) + 4 \sin(2\omega_1 t + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(3\omega_1 t + \frac{\pi}{6})$$

$$(2) f(t) = 3 \cos t + 3 \sin t + \sin(3t - \frac{\pi}{6}) - 2 \cos(5t - \frac{\pi}{3})$$

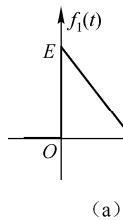
8-9 利用傅里叶变换的定义求题图 8-4 所示信号的傅里叶变换。

8-10 如题图 8-5 所示信号  $f(t)$ ，在不计算  $F(\omega)$  的情况下，计算下列各式的值。

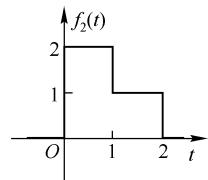
$$(1) F(0) = ?$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = ?$$

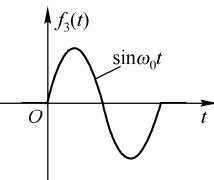
$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) S a 2\omega \cdot e^{j\omega} d\omega = ?$$



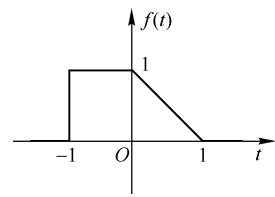
(a)



(b)



(c)



题图 8-5

题图 8-4

8-11 已知如题图 8-6 (a) 所示信号  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(\omega)$ 。试分别求出题图 8-6 (b)、(c)、(d) 所示信号的傅里叶变换。

8-12 已知  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，利用傅里叶变换的性质求下列信号的傅里叶变换。

$$(1) f_1(t) = f(1-2t)$$

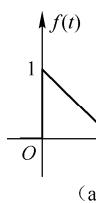
$$(2) f_2(t) = (t-1)f(t)$$

$$(3) f_3(t) = t \frac{d}{dt} f(t)$$

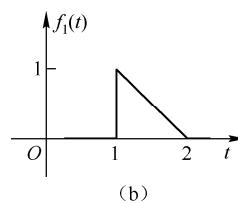
$$(4) f_4(t) = tf(2t)$$

$$(5) f_5(t) = f(-\frac{1}{2}t + 1)e^{-jt}$$

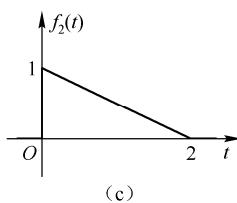
$$(6) f_6(t) = f'(2t + 2) \cos \omega_0 t$$



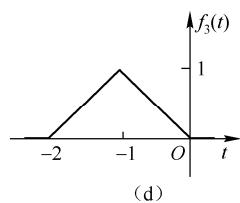
(a)



(b)



(c)



(d)

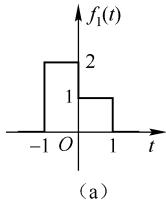
题图 8-6

8-13 利用傅里叶变换的对称性，求下列信号的像函数或原函数。

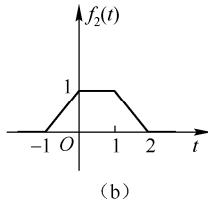
$$(1) f(t) = \frac{2}{jt+2}$$

$$(2) F(\omega) = \text{sgn}(\omega)$$

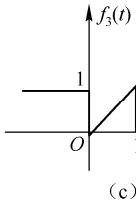
8-14 利用傅里叶变换的性质，求如题图 8-7 所示信号的傅里叶变换。



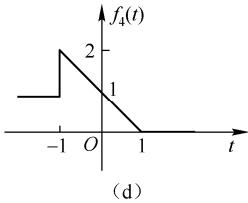
(a)



(b)



(c)



(d)

题图 8-7

8-15 若  $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$ ，试画出  $f(t) \cos 10t$  及  $f(t) \cos^2 10t$  的频谱。

# 第9章 连续时间信号的复频域分析

傅里叶变换揭示了信号时域特性与频域特性之间的关系，在信号分析与处理中具有十分重要的地位。不过，傅里叶变换分析法存在一定的局限性，譬如，有些信号的傅里叶变换计算比较繁琐，甚至根本不存在。另外，傅里叶变换也不适用于求取具有初始状态的系统的全响应。为此，人们引入了拉普拉斯变换（简称拉氏变换）分析法，亦称复频域分析法。

本章介绍连续时间信号的复频域分析，涉及连续时间信号的拉普拉斯变换、拉普拉斯变换的性质、拉普拉斯反变换等。

## 9.1 连续时间信号的拉普拉斯变换

### 9.1.1 拉普拉斯正变换与反变换

#### 9.1.1.1 定义

连续时间信号  $f(t)$  的拉普拉斯变换记为  $F(s)$ 。通常称  $f(t)$  为  $F(s)$  的原函数， $F(s)$  为  $f(t)$  的像函数。 $F(s)$  和  $f(t)$  之间的关系由如下两个公式描述。

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (9-1-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (9-1-2)$$

其中， $s = \sigma + j\omega$  为复频率。式 (9-1-1) 为拉普拉斯正变换（简称拉普拉斯变换或拉氏变换），可简写为  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ；式 (9-1-2) 为拉普拉斯反变换或拉普拉斯逆变换（简称拉氏反变换或逆变换），可简写为  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。也可用双向箭头表示两者之间的对应关系，即  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ 。

另外，式 (9-1-2) 表明，连续信号可以分解为无限多个复频率为  $s$ 、振幅为  $\frac{F(s)}{2\pi j} ds$  的指数分量  $e^{st}$  的连续和（积分）。

如果只考察  $t \rightarrow 0$  后的情形，则有

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (9-1-3)$$

称上式为单边拉普拉斯变换，相应地，称式 (9-1-1) 为双边拉普拉斯变换。

如果  $f(t)$  为因果信号，则其单双边拉普拉斯变换相同。对于多个非因果信号，若它们在  $t \rightarrow 0$  后的定义一样，则它们的单边拉普拉斯变换亦一样，即  $f(t)$  与  $f(t)\varepsilon(t)$  的单边拉普拉斯变换相同，从而  $F(s)$  与非因果信号  $f(t)$  不再是一一对应的关系。鉴于此，对于单边拉普拉斯变换，若  $f(t)$  为非因果信号，则只能用单向箭头来表示  $f(t)$  与其拉普拉斯变换  $F(s)$  之间的对应关系，即  $f(t) \rightarrow F(s)$ 。

本书后续内容主要讨论单边拉普拉斯变换，简称为拉普拉斯变换或拉氏变换。

### 9.1.1.2 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

由前述介绍知, 信号  $f(t)$  满足无限区间绝对可积时, 其频谱  $F(\omega)$  可以直接由傅里叶变换的定义求取。否则,  $F(\omega)$  只能借助其他方法确定, 甚至不存在。此时, 可以将其乘以收敛因子  $e^{-\sigma t}$  得  $f(t)e^{-\sigma t}$ 。一般情况下, 只要选择适当的  $\sigma$ , 就能保证在  $f(t)e^{-\sigma t}$  满足绝对可积条件。从而可以对  $f(t)e^{-\sigma t}$  进行傅里叶变换。由傅里叶变换的定义, 得

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \stackrel{s=\sigma+j\omega}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

显然, 上式积分结果是  $s = \sigma + j\omega$  的函数, 记为  $F(s)$ , 即

$$F(s) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

上式即为  $f(t)$  的拉普拉斯变换。相应地, 将  $F(s)$  进行傅里叶反变换, 有

$$f(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega$$

上式两端同时乘以  $e^{\sigma t}$ , 即得拉普拉斯反变换。

### 9.1.1.3 拉普拉斯变换的收敛域

拉普拉斯变换的收敛域是指为使  $f(t)e^{-\sigma t}$  满足无限区间绝对可积条件的  $\sigma$  的取值范围。譬如, 对于  $f(t) = e^{at}\varepsilon(t)$  ( $a > 0$ ), 为使  $f(t)e^{-\sigma t} = e^{-(\sigma-a)t}\varepsilon(t)$  满足绝对可积条件, 则  $\sigma > a$ , 如图 9-1-1 所示的阴影部分, 即以  $\sigma = a$  为轴的右边区域。

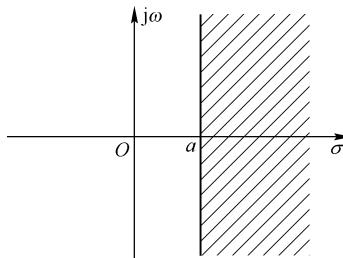


图 9-1-1 拉普拉斯变换收敛域示意图

一般而言, 对于单边拉普拉斯变换, 其收敛域总是  $s$  平面上以  $\sigma = \sigma_0$  为轴的右边区域, 称  $\sigma = \sigma_0$  为收敛横坐标, 其取值与时域信号有关; 对于双边拉普拉斯变换, 其收敛域有以下几种情形:  $s$  平面上某一收敛轴的右边区域、左边区域、两个收敛轴之间的区域, 亦可以是整个  $s$  平面。

由于  $f(t)e^{-\sigma t}$  不满足绝对可积条件的拉普拉斯变换是不存在的, 加之对于双边拉普拉斯变换而言, 同一  $F(s)$  对于不同的收敛域, 相应的  $f(t)$  亦有可能不同。因此, 通常要求在给出  $F(s)$  时注明其收敛域。不过, 对于单边拉普拉斯变换而言, 由于其收敛域比较单一, 即使不注明收敛域也不会有歧义, 为此可以不注明其收敛域。

## 9.1.2 常见信号的拉普拉斯变换

由单边拉普拉斯变换的定义, 易得如下常见信号的拉氏变换。

(1) 单位冲激信号  $\delta(t) \leftrightarrow 1$

- |            |  |
|------------|--|
| (2) 单位阶跃信号 | $\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$   |
| (3) 单边指数信号 | $Ae^{-at}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{A}{s+a}$                                 |
| (4) 单边斜坡信号 | $t\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$  |
| (5) 单边正弦信号 | $\sin \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega_0^2}$ |
| (6) 单边余弦信号 | $\cos \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$      |

## 9.2 拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换建立了信号时域特性和复频域特性之间的对应关系。与傅里叶变换的性质类似，拉普拉斯变换的性质亦描述了这种对应关系的规律，而且，利用拉普拉斯变换的性质同样有助于求取一些非典型信号的拉氏变换。

拉普拉斯变换的某些性质与傅里叶变换的相应性质类似，只是把其中的  $j\omega$  用  $s$  替代即可。不过，考虑到傅里叶变换是双边的，而此处讨论的拉普拉斯变换是单边的，因此某些性质又有差别。本节对于与傅里叶变换相类似的性质不再予以证明。

### 9.2.1 线性性

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$ , 则

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s) \quad (9-2-1)$$

此性质反映了拉普拉斯变换是一种线性运算。

例 9-2-1 (1)  $2e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-3t}\varepsilon(t) \leftrightarrow ?$  (2)  $5 - e^{-3(t+1)}\varepsilon(t+1) \rightarrow ?$

解：根据拉氏变换的线性性质，有

$$(1) 2e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-3t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$$

$$(2) 5 - e^{-3(t+1)}\varepsilon(t+1) \rightarrow \frac{5}{s} - \frac{e^{-3}}{s+3} = \frac{(5-e^{-3})s+15}{s(s+3)}$$

### 9.2.2 比例性（尺度变换）

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0) \quad (9-2-2)$$

注意应用此性质时要求  $a > 0$ , 这是因为采用单边拉氏变换的缘故。

例 9-2-2  $e^{-t}\varepsilon(2t) \leftrightarrow ?$

解：根据拉氏变换的比例性，有

$$\begin{aligned} e^{-0.5t}\varepsilon(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s+0.5} \\ e^{-t}\varepsilon(2t) &\leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s/2+0.5} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

事实上, 因  $\varepsilon(2t) = \varepsilon(t)$ , 故  $e^{-t}\varepsilon(2t) = e^{-t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}$ 。

### 9.2.3 时移性

若  $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$ , 则

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \quad (t_0 > 0) \quad (9-2-3)$$

注意, 应用此性质时要求  $t_0 > 0$ , 且针对的是  $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$ , 而不是  $f(t-t_0)$ 。与比例性中要求  $a > 0$  类似, 这也是因为采用单边拉氏变换的缘故。

- 例 9-2-3 (1)  $e^{-2t}\varepsilon(t-1) \leftrightarrow ?$  (2)  $t-1 \rightarrow ?$   
 (3)  $(t+1)\varepsilon(t+1) \rightarrow ?$  (4)  $(t-1)\varepsilon(t-1) \leftrightarrow ?$

解: (1)  $e^{-2t}\varepsilon(t-1) = e^{-2}e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1) \leftrightarrow e^{-2} \frac{1}{s+2}e^{-s} = \frac{e^{-(s+2)}}{s+2}$

(2) 不能利用时移性,  $(t-1)$  与  $(t-1)\varepsilon(t)$  的单边拉氏变换相同, 从而有:  $t-1 \rightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$

(3) 不能利用时移性,  $(t+1)\varepsilon(t+1)$  与  $(t+1)\varepsilon(t+1)\varepsilon(t) = (t+1)\varepsilon(t)$  的单边拉氏变换相同, 于是有:  $(t+1)\varepsilon(t+1) \rightarrow \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$

(4) 可直接利用时移性, 得:  $(t-1)\varepsilon(t-1) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}e^{-s}$

例 9-2-4 求周期为  $T$  的周期信号  $f(t)$  的单边拉普拉斯变换。

解: 令  $f_1(t)$  为  $f(t)$  在  $0 < t < T$  的波形,  $F_1(s)$  为其像函数, 则

$$f(t)\varepsilon(t) = f_1(t) + f_1(t-T)\varepsilon(t-T) + f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T) + \dots$$

$$F(s) = F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + \dots = \frac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}$$

例 9-2-5  $f(t) = ? \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-2s}}$

解: 令  $F_1(s) = 1$ , 其原函数  $f_1(t) = \delta(t)$ , 则有

$$f(t) = \delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t-4) + \dots$$

例 9-2-6 已知  $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$ , 则  $f(at-t_0)\varepsilon(at-t_0) \leftrightarrow ?$  ( $a > 0, t_0 > 0$ )

解:  $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)$

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

$$f(at-t_0)\varepsilon(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{s}{a}t_0}$$

### 9.2.4 频移性

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 则

$$f(t)e^{s_0t} \leftrightarrow F(s-s_0) \quad (9-2-4)$$

- 例 9-2-7 (1)  $e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow ?$  (2)  $e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow ?$

解: (1)  $\sin \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

$$e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$(2) \cos \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

### 9.2.5 时域微分性

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \quad (9-2-5)$$

证明: 因  $\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$ , 应用分部积分法, 有

$$\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = [e^{-st} f(t)]_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} (-s) e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0_-)$$

式 (9-2-5) 进一步推广如下:

$$\begin{cases} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f'(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-) \end{cases} \quad (9-2-6)$$

例 9-2-8 如图 9-2-1 所示信号  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 求  $F_1(s)$  和  $F_2(s)$ 。

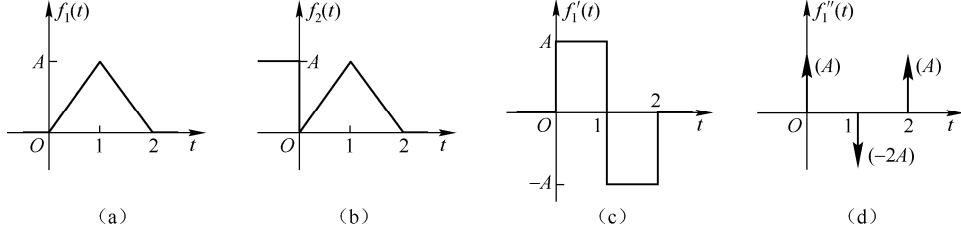


图 9-2-1 例 9-2-8 用图

解: (1) 如图 9-2-1 (d) 所示,  $f_1''(t) = A\delta(t) - 2A\delta(t-1) + A\delta(t-2)$

$$f_1''(t) \leftrightarrow A - 2Ae^{-s} + Ae^{-2s} = s^2 F_1(s) - sf_1(0_-) - f_1'(0_-) = s^2 F_1(s)$$

$$F_1(s) = \frac{A}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

(2) 依题意知,  $f_2''(t) = f_1''(t) - A'\delta(t)$ , 从而有

$$f_2''(t) \leftrightarrow (A - 2Ae^{-s} + Ae^{-2s}) - As = s^2 F_2(s) - sf_2(0_-) - f_2'(0_-) = s^2 F_2(s) - sA$$

$$F_2(s) = \frac{A}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

### 9.2.6 时域积分性

若  $f(t) \rightarrow F(s)$ , 则

$$\begin{cases} \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \\ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} \end{cases} \quad (9-2-7)$$

证明: (1) 因  $\mathcal{L}[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau] = \int_{0_-}^{\infty} [\int_{0_-}^{\infty} f(\tau) d\tau] e^{-st} dt$ , 应用分部积分法, 有

$$\mathcal{L}[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau] = \left[ \frac{-e^{-st}}{s} \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \right]_{0_-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s}$$

(2) 因  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau + \int_{0_-}^{\infty} f(\tau) d\tau = f^{(-1)}(0_-) + \int_{0_-}^{\infty} f(\tau) d\tau$ , 故

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

例 9-2-9  $f(t) = (t+1)\varepsilon(t+1)$ , 求  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow ?$

解:  $f(t) = (t+1)\varepsilon(t+1)$  与  $f(t)\varepsilon(t) = (t+1)\varepsilon(t+1)\varepsilon(t+1) = (t+1)\varepsilon(t)$  的单边拉普拉斯变换相同, 故有

$$f(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$\text{又 } f^{(-1)}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} f(t) dt = \int_{-\infty}^{0_-} (t+1)\varepsilon(t+1) dt = \int_{-1}^{0_-} (t+1) dt = \frac{1}{2}$$

从而得

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s}$$

### 9.2.7 初值定理

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 且  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  存在, 则

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (9-2-8)$$

证明: 利用时域微分性, 有

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0_-) &= \mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

上式两端令  $s \rightarrow \infty$ , 且  $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0$ , 从而  $f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 。

说明: 若  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  不存在, 表明  $F(s)$  含有常数项或  $s$  的正次幂, 即  $f(t)$  在  $t=0$  处包含冲激及其导数, 此时可将  $F(s)$  分解为  $F(s) = F_a(s) + A + Bs + Cs^2 + \dots$ , 其中  $F_a(s)$  为  $s$  的真分式, 于是有

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_a(s) \quad (9-2-9)$$

此性质表明, 只要知道像函数  $F(s)$ , 就可以直接求得初始值  $f(0_+)$ , 而不必求  $f(t)$ 。需要强

调的是,  $F(s)$  为假分式时需要将其分解为真分式与多项式之和, 然后由真分式求  $f(0_+)$ 。

例 9-2-10 求如下像函数对应原函数的初始值。

$$(1) \quad F(s) = \frac{s e^{-s} + 2s^2 + 9}{s(s^2 + 9)}$$

$$(2) \quad F(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 6s}{s^2 + 6s + 8}$$

解: (1)  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s e^{-s} + 2s^2 + 9}{s(s^2 + 9)} = 2$ , 即  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  存在, 故  $f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = 2$

(2)  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  不存在,  $F(s) = \frac{-2s}{s^2 + 6s + 8} + s = F_a(s) + s$ , 其中  $F_a(s) = \frac{-2s}{s^2 + 6s + 8}$ 。于是

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_a(s) = -2$$

### 9.2.8 终值定理

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (9-2-10)$$

证明: 利用时域微分性, 有

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0_-) &= \mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

上式两端令  $s \rightarrow 0$ , 且  $\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(\infty) - f(0_+)$ , 从而  $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ 。

说明:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在意味着  $f(t)$  为衰减信号或阶跃信号, 相当于  $F(s)$  的所有极点 ( $F(s)$  分母为 0 时的  $s$  值) 均位于  $s$  左半平面, 即极点实部小于零, 或仅含  $s = 0$  的单极点。

例 9-2-11 求如下像函数对应的原函数的终值。

$$(1) \quad F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+9)}$$

$$(2) \quad F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$$

$$(3) \quad F(s) = \frac{s-2}{s(s^2+3s+6)}$$

解: (1)  $F(s)$  有极点位于虚轴上, 故  $f(\infty)$  不存在。

(2)  $F(s)$  有极点位于  $s$  右半平面, 故  $f(\infty)$  不存在。

(3)  $F(s)$  的极点位于  $s$  左半平面, 且仅含  $s = 0$  的单极点,  $f(\infty)$  存在。于是  $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s-2}{s(s^2+3s+6)} = -\frac{1}{3}$

### 9.2.9 时域卷积定理

若  $f_1(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F_1(s)$ ,  $f_2(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F_2(s)$ , 则

$$f_1(t)\varepsilon(t) * f_2(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \quad (9-2-11)$$

此性质针对的是两因果信号的卷积积分。如果卷积中涉及非因果信号, 则没有此性质。

例 9-2-12  $y(t) = e^{-(t-1)}\varepsilon(t) * e^{-2t}\varepsilon(t-2)$ , 求  $Y(s)$ 。

$$\text{解: } e^{-(t-1)}\varepsilon(t) = e \cdot e^{-t}\varepsilon(t) \leftrightarrow e \frac{1}{s+1}$$

$$e^{-2t}\varepsilon(t-2) = e^{-4} e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2) \leftrightarrow e^{-4} \frac{1}{s+2} e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} e^{-4} \frac{e^{-2s}}{s+2} = \frac{e^{-3-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

### 9.2.10 复频域微分性

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 则

$$tf(t) \leftrightarrow -F'(s) \quad (9-2-12)$$

上式进一步推广如下:

$$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s) \quad (9-2-13)$$

例 9-2-13  $f(t) = 2te^{-2t} \varepsilon(2t-1) \leftrightarrow ?$

$$\begin{aligned} \text{解: } e^{-t} \varepsilon(t-1) &= e^{-1} e^{-(t-1)} \varepsilon(t-1) \leftrightarrow e^{-1} \frac{1}{s+1} e^{-s} \\ 2e^{-2t} \varepsilon(2t-1) &= 2e^{-1} e^{-(2t-1)} \varepsilon(2t-1) \leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} e^{-1} \frac{1}{s/2+1} e^{-s/2} = \frac{2e^{-1}}{s+2} e^{-\frac{s}{2}} \\ 2te^{-2t} \varepsilon(2t-1) &\leftrightarrow -\left(\frac{2e^{-1}}{s+2} e^{-\frac{s}{2}}\right)' = \frac{s+4}{(s+2)^2} e^{-\frac{s}{2}-1} \end{aligned}$$

### 9.2.11 复频域积分性

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 且  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ , 则

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(\xi) d\xi \quad (9-2-14)$$

例 9-2-14  $f(t) = \frac{1}{t} (e^{-t} - e^{-2t}) \varepsilon(t) \leftrightarrow ?$

$$\text{解: } g(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) \varepsilon(t) \leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$f(t) = \frac{g(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty G(\xi) d\xi = \int_s^\infty \frac{1}{(\xi+1)(\xi+2)} d\xi = \ln \frac{s+2}{s+1}$$

为便于查阅, 将上述拉普拉斯变换的性质予以汇总, 如表 9-2-1 所示。

表 9-2-1 傅里叶变换的性质

性质	时域 $f(t)$	复频域 $F(s)$
线性性	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$
比例性	$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
时移性	$f(t-t_0) \varepsilon(t-t_0) \quad (t_0 > 0)$	$F(s) e^{-st_0}$
频移性	$f(t) e^{st}$	$F(s-s_0)$
时域微分性	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0_-)$
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - \dots - s f^{(n-2)}(0_-) - f^{(n-1)}(0_-)$
时域积分性	$\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$
初始定理	若 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在, 则 $f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	

续表

性质	时域 $f(t)$	复频域 $F(s)$
终值定理	若 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在, 则 $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	
时域卷积定理	$f_1(t)\varepsilon(t) * f_2(t)\varepsilon(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
复频域微分性	$t^f(t)$	$-F'(s)$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
复频域积分性	$\frac{f(t)}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$	$\int_s^\infty F(\xi) d\xi$

### 9.3 拉普拉斯反变换

拉普拉斯反变换即是根据  $F(z)$  确定  $f(t)$ , 可表示为  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。对于单边拉普拉斯变换, 由于  $t < 0$  时定义不同而  $t \geq 0$  时定义相同的信号具有相同的拉普拉斯变换, 从而给定  $F(s)$ , 相应的  $f(t)$  并不唯一。为此, 对于单边拉普拉斯变换, 通常约定其反变换为因果信号。

拉普拉斯反变换的常用方法有基于拉氏变换性质的方法、部分分式展开法和留数法。本节主要介绍基于拉氏变换性质的方法和部分分式展开法。

#### 9.3.1 基于拉氏变换性质的方法

此方法的基本思想是首先将像函数改写为类似于常见信号的像函数的形式, 然后结合拉氏变换的性质予以求解。

例 9-3-1 求下列像函数的原函数。

$$(1) F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} \quad (2) F(s) = \frac{2s+30}{s^2+10s+50} \quad (3) F(s) = \frac{1}{1+e^{-2s}}$$

解: (1)  $F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}$ , 根据时移性和阶跃信号的拉氏变换得

$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$$

(2) 对  $F(s)$  的分母多项式进行配方, 有

$$F(s) = \frac{2s+30}{s^2+10s+50} = \frac{2s+30}{(s+5)^2+5^2} = 2 \cdot \frac{s+5}{(s+5)^2+5^2} + 4 \cdot \frac{5}{(s+5)^2+5^2}$$

根据频移性及正余弦信号的拉氏变换得

$$f(t) = (2e^{-5t} \cos 5t + 4e^{-5t} \sin 5t)\varepsilon(t)$$

$$(3) F(s) = \frac{1}{1+e^{-2s}} = \frac{1-e^{-2s}}{(1-e^{-2s})(1+e^{-2s})} = \frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-4s}}$$

其中,  $F_1(s) = 1-e^{-2s}$ ,  $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = \delta(t) - \delta(t-2)$ 。上式即为周期信号的拉普拉斯变换的形式, 而且周期为 4。于是得

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-4n)\varepsilon(t-4n) = \delta(t) - \delta(t-2) + \delta(t-4) - \delta(t-6) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t-2k)$$

#### 9.3.2 部分分式展开法

部分分式展开法即是对如式(9-3-1)所示  $s$  的有理真分式展开成分式  $\frac{A}{s-a}$ , 从而得到  $Ae^{at}\varepsilon(t)$

形式的时域信号。若  $F(s)$  为  $s$  的有理假分式，则可将其化为“多项式+真分式”的形式。多项式的拉普拉斯反变换对应于冲激信号及其各阶导数，即  $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$ 。

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad m < n \quad (9-3-1)$$

### 9.3.2.1 $F(s)$ 的极点均为单极点

设  $F(s)$  的单极点分别为  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ，则  $F(s)$  可展开为

$$F(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - s_n} \quad (9-3-2)$$

其中， $A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) F(s)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，从而有

$$f(t) = A_1 e^{s_1 t} \varepsilon(t) + A_2 e^{s_2 t} \varepsilon(t) + \cdots + A_n e^{s_n t} \varepsilon(t) \quad (9-3-3)$$

例 9-3-2  $f(t) = ? \leftrightarrow F(s) = \frac{2s^3 + 9s^2 + 10s + 8}{2s^2 + 5s + 3}$

解： $F(s) = \frac{2s^3 + 9s^2 + 10s + 8}{2s^2 + 5s + 3} = s + 2 + F_a(s)$ ，其中  $F_a(s) = \frac{-3s + 2}{2s^2 + 5s + 3}$ 。

对  $F_a(s)$  进行部分分式展开，得

$$F_a(s) = \frac{-3s + 2}{2(s+1)(s+1.5)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+1.5}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) F_a(s) = 5$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -1.5} (s+1.5) F_a(s) = -6.5$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{5}{s+1} + \frac{-6.5}{s+1.5}$$

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 5e^{-t} \varepsilon(t) - 6.5e^{-1.5t} \varepsilon(t)$$

例 9-3-3  $f(t) = ? \leftrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$

解： $F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s}{(s+1)^2 + 4} = \frac{A_1}{s+1-j2} + \frac{A_2}{s+1+j2}$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1+j2} (s+1-j2) F(s) = \frac{1}{4}(2+j)$$

$$A_2 = A_1^*$$

$$f(t) = A_1 e^{-(1-j2)t} \varepsilon(t) + A_2 e^{-(1+j2)t} \varepsilon(t) = e^{-t} (\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t) \varepsilon(t)$$

注：对于共轭复根的情形，可以采用前述基于拉氏变换性质的方法。譬如，对于此例而言，可对分母多项式进行配方，有

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s}{(s+1)^2 + 4} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

根据频移性及正余弦信号的拉氏变换得

$$f(t) = e^{-t} (\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t) \varepsilon(t)$$

### 9.3.2.2 $F(s)$ 含重极点

设  $s_0$  为  $F(s)$  的  $m$  重极点, 则  $F(s)$  可展开为

$$F(s) = F_a(s) + \frac{A_{0m}}{(s-s_0)^m} + \frac{A_{0(m-1)}}{(s-s_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{01}}{s-s_0} \quad (9-3-4)$$

其中,  $A_{0j} = \frac{1}{(m-j)!} \cdot \frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}} [F(s)(s-s_0)^m]_{s=s_0}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , 而且有

$$\frac{A_{0j}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{s_0 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{A_{0j}}{(s-s_0)^j} \quad (9-3-5)$$

特别地,  $t e^{s_0 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s-s_0)^2}$

例 9-3-4  $f(t) = ? \leftrightarrow F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+3)^3(s+1)}$

解:  $F(s) = \frac{A_{03}}{(s+3)^3} + \frac{A_{02}}{(s+3)^2} + \frac{A_{01}}{(s+3)} + \frac{A_1}{s+1}$

$$A_{03} = F(s)(s+3)^3|_{s=-3} = -6$$

$$A_{02} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [F(s)(s+3)^3]|_{s=-3} = \frac{3}{2}$$

$$A_{01} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s+3)^3]|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$A_1 = F(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$F(s) = \frac{-6}{(s+3)^3} + \frac{3/2}{(s+3)^2} + \frac{-1/4}{(s+3)} + \frac{1/4}{s+1}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2!} (-6) t^2 e^{-3t} \varepsilon(t) + \frac{1}{1!} \frac{3}{2} t e^{-3t} \varepsilon(t) - \frac{1}{4} e^{-3t} \varepsilon(t) + \frac{1}{4} e^{-t} \varepsilon(t) \\ &= \left( -3t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} \right) e^{-3t} \varepsilon(t) + \frac{1}{4} e^{-t} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

## 练习题

### A. 基本概念类

9-1 关于拉普拉斯变换:

- (1) 给出拉普拉斯正反变换的定义;
- (2) 写出常见信号的拉普拉斯变换;
- (3) 写出周期信号的拉普拉斯变换;
- (4) 说明拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系。

9-2 拉普拉斯变换有哪些性质? 举例说明其应用。

9-3 拉普拉斯反变换有哪些方法? 举例说明其应用。

### B. 分析计算类

9-4 利用拉普拉斯变换的定义, 求下列信号的拉普拉斯变换。

- (1)  $f(t) = (1 - e^{-2t})\varepsilon(t)$  (2)  $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$  (3)  $f(t) = t e^{-t}\varepsilon(t)$   
 (4)  $f(t) = (\sin t - \cos 2t)\varepsilon(t)$  (5)  $f(t) = (1+2t)\varepsilon(t)$  (6)  $f(t) = e^{-t} \sin t \varepsilon(t)$

9-5 利用拉普拉斯变换的性质, 求下列信号的拉普拉斯变换。

- (1)  $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t-1)$  (2)  $f(t) = e^{-(t-1)}\varepsilon(t)$  (3)  $f(t) = t e^{-2t}\varepsilon(t-1)$   
 (4)  $f(t) = \varepsilon(2t-2)$  (5)  $f(t) = \delta(2t-1)$  (6)  $f(t) = t^2 e^{-2t}\varepsilon(t)$

9-6 已知  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 利用拉氏变换的性质求下列信号的拉普拉斯变换, 其中  $a > 0$ 。

- (1)  $e^{-\frac{t}{a}}f(\frac{t}{a})$  (2)  $e^{-at}f(\frac{t}{a})$  (3)  $e^{-\frac{t}{a}}f(at)$  (4)  $e^{-at}f(at)$

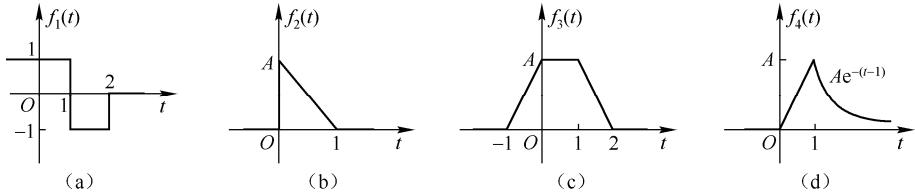
9-7 求如题图 9-1 所示信号的拉普拉斯变换。

9-8 已知因果信号  $f(t)$  的拉普拉斯变换  $F(s) = \frac{1}{s^2 - s + 1}$ , 求下列信号的拉普拉斯变换。

- (1)  $e^{-t}f(\frac{t}{2})$  (2)  $e^{-3t}f(2t-1)$  (3)  $t e^{-2t}f(3t)$  (4)  $t f(2t-1)$

9-9 利用卷积定理确定下列信号的卷积积分。

- (1)  $\varepsilon(t) * t\varepsilon(t)$  (2)  $e^{-at}\varepsilon(t) * e^{-at}\varepsilon(t)$  (3)  $a e^{-at}\varepsilon(t) * \varepsilon(t)$  (4)  $t\varepsilon(t) * e^{-2t}\varepsilon(t)$



题图 9-1

9-10 试求下列像函数  $F(s)$  的原函数的初始值  $f(0_+)$ 。

- (1)  $F(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)}$  (2)  $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$  (3)  $F(s) = \frac{s^2+2}{s(s+1)}$

9-11 试求下列像函数  $F(s)$  的原函数的终值  $f(\infty)$ 。

- (1)  $F(s) = \frac{3s}{(s+1)(s-2)}$  (2)  $F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2}$  (3)  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$   
 (4)  $F(s) = 4$  (5)  $F(s) = \frac{s}{s^2+5}$  (6)  $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$

9-12 利用部分分式展开法, 求下列像函数  $F(s)$  的原函数  $f(t)$ 。

- (1)  $F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$  (2)  $F(s) = \frac{s^2+6s+2}{s^2+5s+4}$  (3)  $F(s) = \frac{2s+1}{s(s^2-3s-4)}$   
 (4)  $F(s) = \frac{s-2}{s^2(s+1)}$  (5)  $F(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+10}$  (6)  $F(s) = \frac{2s+4}{s(s^2+4)}$

9-13 试求下列像函数  $F(s)$  的原函数  $f(t)$ 。

- (1)  $F(s) = \frac{(2s+5)e^{-2s}}{s^2+5s+6}$  (2)  $F(s) = \frac{s e^{-3s}+2}{s^2+2s+2}$  (3)  $F(s) = \frac{e^{-(s-1)}+3}{s^2-2s+5}$   
 (4)  $F(s) = \frac{e^{-s}+e^{-2s}+1}{s^2+3s+2}$  (5)  $F(s) = \frac{s}{1-e^{-s}}$  (6)  $F(s) = \frac{2}{1+e^{-2s}}$

# 第 10 章 离散时间信号的 Z 变换

与连续时间信号的分析类似，离散时间信号的分析同样涉及时域分析和变换域分析，其中离散时间信号的变换域分析以 z 变换为数学工具。

本章介绍离散时间信号的 z 变换，涉及 z 变换的定义、z 变换性质、z 反变换等。

## 10.1 z 变换

### 10.1.1 z 变换的定义

离散时间信号（序列） $f(k)$  的 z 变换  $F(z)$  定义为

$$\begin{aligned} F(z) &= \cdots + f(-2)z^2 + f(-1)z^1 + f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} \end{aligned} \quad (10-1-1)$$

其中， $F(z)$  称为  $f(k)$  的像函数， $f(k)$  为  $F(z)$  的原函数。上式可简写为  $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ ，也可用双向箭头表示两者之间的对应关系，即  $f(k) \leftrightarrow F(z)$ 。

如果只考察  $f(k)$  在  $k \geq 0$  后的情形，则有

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (10-1-2)$$

称上式为单边 z 变换，相应地称式 (10-1-1) 为双边 z 变换。

与拉普拉斯变换类似，如果  $f(k)$  为因果信号，则其单/双边 z 变换相同。对于多个非因果信号，若它们在  $k \geq 0$  后的定义一样，则它们的单边 z 变换亦一样，即  $f(k)$  与  $f(k)\varepsilon(k)$  的单边 z 变换相同，从而  $F(z)$  与非因果信号  $f(k)$  不再是一一对应的关系。鉴于此，对于单边 z 变换，若  $f(k)$  为非因果信号，则只能用单向箭头来表示  $f(k)$  与其 z 变换  $F(z)$  之间的对应关系，即  $f(k) \rightarrow F(z)$ 。

本书后续内容主要讨论单边 z 变换，简称为 z 变换。

例 10-1-1 求  $f(k) = \{1, 2, 1, 2, 3\}$  的 z 变换。

解： $F(z) = f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

### 10.1.2 z 变换的收敛域

z 变换的收敛域是指为使 z 变换所对应幂级数收敛的 z 的取值范围，此时可把幂级数表示为闭合式。譬如，对于  $F(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots + a^kz^{-k} + \cdots$ ，为使其收敛，则  $|az^{-1}| < 1$ ，即  $|z| > |a|$ ，如图 10-1-1 所示的阴影部分，即以  $|a|$  为半径的圆外区域，称  $|a|$  为收敛半径，此时  $F(z)$  的闭合式表示为  $F(z) = \frac{z}{z-a}$ 。

一般而言，对于单边 z 变换，其收敛域总是 z 平面上以原点为圆心的圆外区域，圆的半径称为收敛半径，其取值与时域信号有关；对于双边 z 变换，其收敛域有以下几种情形：z 平面上以原点为圆心的圆内区域、圆外区域、两个圆之间（即环）的区域，亦可以是整个 z 平面。

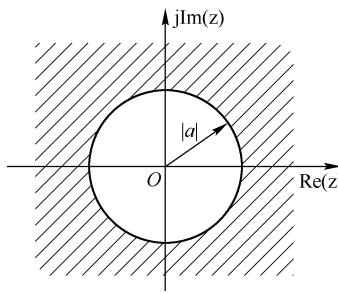


图 10-1-1  $z$  变换收敛域示意图

由于幂级数不收敛的  $z$  变换是没有意义的, 加之对于双边  $z$  变换而言, 同一  $F(z)$  对于不同的收敛域, 相应的  $f(k)$  亦有可能不同。因此, 通常要求在给出闭合式形式的  $F(z)$  时注明其收敛域。不过, 对于单边  $z$  变换而言, 由于其收敛域比较单一, 即使不注明收敛域也不会有歧义, 为此可以不注明其收敛域。

### 10.1.3 常见离散时间信号的 $z$ 变换

由  $z$  变换的定义易得如下常见信号的  $z$  变换。

- |            |   |
|------------|---|
| (1) 单位函数   | $\delta(k) \leftrightarrow 1$                       |
| (2) 单位阶跃序列 | $\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$      |
| (3) 单边指数序列 | $a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$  |
| (4) 单边斜坡序列 | $k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$ |

## 10.2 $z$ 变换的性质

$z$  变换建立了离散时间信号时域特性和  $z$  域特性之间的对应关系,  $z$  变换性质描述了这种对应关系的规律。而且, 利用  $z$  变换的性质有助于求取一些非典型信号的  $z$  变换。

### 10.2.1 线性性

若  $f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$ ,  $f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$ , 则

$$af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z) \quad (10-2-1)$$

从  $z$  变换的定义易于得出此性质, 它反映了  $z$  变换是一种线性运算。

例 10-2-1  $2^k \varepsilon(k) - 3^k \varepsilon(k) \leftrightarrow ?$

解: 根据  $z$  变换的线性性质, 有

$$2^k \varepsilon(k) - 3^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3} = \frac{-z}{(z-2)(z-3)}$$

例 10-2-2  $5\varepsilon(k+2) - 2^{k+1} \varepsilon(k+1) \rightarrow ?$

解: 根据  $z$  变换的线性性质, 有

$$5\varepsilon(k+2) - 2^{k+1} \varepsilon(k+1) \rightarrow \frac{5z}{z-1} - \frac{2z}{z-2} = \frac{3z^2 - 8z}{(z-1)(z-2)}$$

## 10.2.2 移位(移序)性

若  $f(k) \rightarrow F(z)$ , 则

$$f(k+1) \rightarrow zF(z) - zf(0) \quad (10-2-2a)$$

$$f(k-1) \rightarrow z^{-1}F(z) + f(-1) \quad (10-2-2b)$$

证明: 由 z 变换的定义, 有

(1) 左移性

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-(k+1)} \stackrel{\text{令 } n=k+1}{=} z \sum_{k=1}^{\infty} f(n)z^{-n} \\ &= z \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(n)z^{-n} - f(0) \right] = zF(z) - zf(0) \end{aligned}$$

(2) 右移性

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-(k-1)} \stackrel{\text{令 } n=k-1}{=} z^{-1} \sum_{k=-1}^{\infty} f(n)z^{-n} \\ &= z^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(n)z^{-n} + zf(-1) \right] = z^{-1}F(z) + f(-1) \end{aligned}$$

此性质可以做如下推广:

$$f(k+m) \rightarrow z^m [F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k}] \quad (10-2-3a)$$

$$f(k-m) \rightarrow z^{-m} [F(z) + \sum_{k=1}^m f(-k)z^k] \quad (10-2-3b)$$

$$f(k-m)\varepsilon(k-m) \leftrightarrow z^{-m}F(z) \quad (10-2-3c)$$

对于因果序列  $f(k)$  而言, 由于  $f(k-m)\varepsilon(k-m) = f(k-m)$ , 因此  $f(k-m) \leftrightarrow z^{-m}F(z)$ 。

例 10-2-3 计算下列各式。

$$(1) \delta(k+1) \rightarrow ? \quad (2) \delta(k-1) \leftrightarrow ? \quad (3) \varepsilon(k+1) \rightarrow ?$$

$$(4) \varepsilon(k-1) \leftrightarrow ? \quad (5) \gamma^{k+1} \rightarrow ? \quad (6) \gamma^{k-1} \rightarrow ?$$

$$(7) \gamma^{k-1}\varepsilon(k-1) \leftrightarrow ?$$

解: 根据 z 变换的移位性, 有

$$(1) \delta(k+1) \rightarrow z \cdot 1 - z\delta(0) = 0$$

$$(2) \delta(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot 1 = z^{-1}$$

$$(3) \varepsilon(k+1) \rightarrow z \cdot \frac{z}{z-1} - z\varepsilon(0) = \frac{z}{z-1}$$

$$(4) \varepsilon(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$(5) \gamma^{k+1} \rightarrow z \cdot \frac{z}{z-\gamma} - z\gamma^0 = \frac{\gamma z}{z-\gamma}$$

$$(6) \gamma^{k-1} \rightarrow z^{-1} \cdot \frac{z}{z-\gamma} + \gamma^{-1} = \frac{z}{\gamma(z-\gamma)}$$

$$(7) \gamma^{k-1}\varepsilon(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \frac{z}{z-\gamma} = \frac{1}{z-\gamma}$$

另外, 对于(1)、(3)、(5)、(6), 亦可以不采用此移位性质求解。譬如,  $\delta(k+1)$  在  $k \geq 0$  时均为 0, 其单边  $z$  变换自然为 0;  $\varepsilon(k+1)$  在  $k \geq 0$  时的定义与  $\varepsilon(k)$  相同, 故其单边  $z$  变换与  $\varepsilon(k)$  的  $z$  变换相同;  $\gamma^{k+1}$  和  $\gamma^{k-1}$  可分别改写为  $\gamma \cdot \gamma^k$  与  $\gamma^{-1} \cdot \gamma^k$ , 然后利用线性性容易求解它们各自的  $z$  变换。

### 10.2.3 比例性

若  $f(k) \leftrightarrow F(z)$ , 则

$$a^k f(k) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (10-2-4)$$

证明: 由  $z$  变换的定义, 有

$$\mathcal{Z}[a^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

例 10-2-4  $f(k) = ka^k \rightarrow F(z) = ?$

解: 根据  $z$  变换的比例性, 有

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \frac{z}{(z-1)^2} \\ ka^k &\rightarrow \frac{z/a}{(z/a-1)^2} = \frac{az}{(z-a)^2} \end{aligned}$$

### 10.2.4 $z$ 域微分性

若  $f(k) \leftrightarrow F(z)$ , 则

$$kf(k) \leftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz} \quad (10-2-5)$$

证明: 由  $z$  变换定义, 有

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

将上式两端对  $z$  求导, 得

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-k) f(k) z^{-k-1} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} kf(k) z^{-k}$$

即  $kf(k) \leftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz}$

例 10-2-5 (1)  $k^2 \varepsilon(k) \leftrightarrow ?$  (2)  $k\gamma^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow ?$

解: 根据  $z$  变换的  $z$  域微分性, 有

$$(1) k^2 \varepsilon(k) \leftrightarrow -z \left[ \frac{z}{(z-1)^2} \right]' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$(2) k\gamma^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow -z \left[ \frac{z}{\gamma(z-\gamma)} \right]' = \frac{z}{(z-\gamma)^2}$$

### 10.2.5 时域卷积定理

若  $f_1(k) \varepsilon(k) \leftrightarrow F_1(z)$ ,  $f_2(k) \varepsilon(k) \leftrightarrow F_2(z)$ , 则

$$f_1(k)\varepsilon(k)*f_2(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z) \quad (10-2-6)$$

证明：由 z 变换定义，有

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f_1(k)\varepsilon(k)*f_2(k)\varepsilon(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)\varepsilon(n)f_2(k-n)\varepsilon(k-n) \right] z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^k f_1(n)f_2(k-n) \right] \varepsilon(k-n)z^{-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)z^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} f_2(k-n)z^{-(k-n)} \\ &\stackrel{\text{令 } m=k-n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(m)z^{-m} \\ &= F_1(z)F_2(z) \end{aligned}$$

此性质针对的是两因果序列的卷积和。如果卷积和中涉及非因果序列，则没有此性质。

例 10-2-6  $f(k) = a^k \varepsilon(k)*b^k \varepsilon(k-1) \leftrightarrow ?$

解：根据时域卷积定理，有

$$f(k) = a^k \varepsilon(k)*b^k \varepsilon(k-1) \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{b}{z-b} = \frac{bz}{z^2 - (a+b)z + ab}$$

## 10.2.6 序列求和

若  $f(k) \leftrightarrow F(z)$ ，则

$$g(k) = \sum_{n=0}^k f(n) \leftrightarrow G(z) = \frac{z}{z-1} F(z) \quad (10-2-7)$$

事实上， $g(k) = \sum_{n=0}^k f(n) = f(k)\varepsilon(k)*\varepsilon(k)$ ，利用 z 变换的时域卷积定理，易得此性质。

例 10-2-7 (1)  $g_1(k) = \sum_{n=0}^k a^n \leftrightarrow ?$  (2)  $g_2(k) = \sum_{n=0}^k n \leftrightarrow ?$

解：根据序列和的 z 变换性质，有

$$(1) \quad g_1(k) = \sum_{n=0}^k a^n \leftrightarrow G_1(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}$$

$$(2) \quad g_2(k) = \sum_{n=0}^k n \leftrightarrow G_2(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

## 10.2.7 初值定理

若  $f(k) \leftrightarrow F(z)$ ，则

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (10-2-8)$$

证明：由 z 变换定义，有

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(k)z^{-k} + \cdots$$

当  $z \rightarrow \infty$  时，得  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ 。

此性质表明了  $f(k)$  在原点处的值与  $F(z)$  在无限远处的值之间的映射关系。此外，由此亦可

以从  $F(z)$  求得  $f(k)$  在  $k=m$  时的值, 即

$$f(m) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^m [F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k}] \quad (10-2-9)$$

此式右边项实际上就是  $f(k+m)$  的  $z$  变换, 其初始值即为  $f(m)$ 。

例 10-2-8 已知  $F(z) = \frac{2z^2 + 3z + 12}{(z-1)^4}$ , 求  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ 。

解: 根据  $z$  变换的初值定理, 有

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \\ f(1) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z[F(z) - f(0)] = 0 \\ f(2) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}] = 2 \end{aligned}$$

### 10.2.8 终值定理

若  $f(k) \leftrightarrow F(z)$ , 且  $f(\infty)$  存在, 则

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (10-2-10)$$

证明: 由  $z$  变换的定义及移序性, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k+1) - f(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [f(k+1) - f(k)]z^{-k} \\ &= zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0) \end{aligned}$$

令式中的  $z \rightarrow 1$ , 有

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} [f(k+1) - f(k)]z^{-k} = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)F(z) - zf(0)]$$

得

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

此性质表明了  $f(k)$  在  $k \rightarrow \infty$  时的值与  $(z-1)F(z)$  在  $z=1$  处的值之间的映射关系。此处要强调的是, 在使用此定理时, 应先确认  $f(\infty)$  是否存在。如果  $f(\infty)$  不存在, 则此定理失效。

$f(\infty)$  存在与否, 可以通过  $F(z)$  的极点分布来予以判别, 即: 如果  $F(z)$  的极点在  $z$  平面的单位圆内或者在  $z=1$  处为单极点, 则  $f(\infty)$  存在。换句话说, 如果  $F(z)$  有极点在  $z$  平面的单位圆外或者在单位圆上 ( $z=1$  的单极点除外), 则  $f(\infty)$  不存在。

例 10-2-9 求以下  $F(z)$  所对应  $f(k)$  的终值  $f(\infty)$ 。

$$(1) \quad F(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-0.5)} \quad (2) \quad F(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z+0.5)}$$

$$(3) \quad F(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z^2+z+0.5)}$$

解: 根据  $z$  变换的终值定理, 有

(1)  $F(z)$  的极点  $z_1 = -2$  在单位圆外, 故  $f(\infty)$  不存在。

(2)  $F(z)$  的极点  $z_1 = -1$  在单位圆上, 故  $f(\infty)$  不存在。

(3)  $F(z)$  的极点  $z_1 = 1$  在单位圆上且为单极点, 其他极点在单位圆内, 故  $f(\infty)$  存在, 从而有

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = 1.2$$

为便于查阅, 将上述  $z$  变换的性质予以汇总, 如表 10-2-1 所示。

表 10-2-1  $z$  变换的性质

性 质	时域 $f(k)$	$z$ 域 $F(z)$
线 性 性	$af_1(k) + bf_2(k)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
移 位 性	$f(k+1)$	$zF(z) - zf(0)$
	$f(k-1)$	$z^{-1}F(z) + f(-1)$
	$f(k+m)$	$z^m[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k}]$
	$f(k-m)$	$z^{-m}[F(z) + \sum_{k=1}^m f(-k)z^k]$
	$f(k-m)\varepsilon(k-m)$	$z^{-m}F(z)$
比 例 性	$a^k f(k)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$z$ 域微分性	$kf(k)$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$
时域卷积定理	$f_1(k)\varepsilon(k) * f_2(k)\varepsilon(k)$	$F_1(z)F_2(z)$
序 列 求 和	$g(k) = \sum_{n=0}^k f(n)$	$G(z) = \frac{z}{z-1}F(z)$
初 值 定 理	$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	
	$f(m) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^m [F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k}]$	
终 值 定 理	若 $f(\infty)$ 存在, 则 $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$	

## 10.3 $z$ 反 变 换

$z$  反变换即是根据  $F(z)$  确定  $f(k)$ , 可表示为  $f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$ 。对于单边  $z$  变换, 由于  $k < 0$  时定义不同而  $k \geq 0$  时定义相同的序列具有相同的  $z$  变换, 从而给定  $F(z)$ , 相应的  $f(k)$  并不唯一。为此, 对于单边  $z$  变换, 通常约定其反变换为因果序列。

$z$  反变换的常用方法有幂级数展开法、部分分式展开法和留数法。本节主要介绍幂级数展开法和部分分式展开法。

### 10.3.1 幂级数展开法

根据  $z$  变换的定义,  $F(z)$  是  $z^{-1}$  的幂级数。因此, 可以在收敛域内将  $F(z)$  展开成幂级数, 幂级数的系数就是序列的值, 即

$$F(z) = f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(k)z^{-k} + \cdots$$

$F(z)$  一般为变量  $z$  的有理分式, 展开为幂级数时, 可以用代数中的长除法, 即将分子和分母多项式按  $z$  的降幂排列, 然后用分子多项式除以分母多项式, 所得的商式即为  $z^{-1}$  的幂级数。

例 10-3-1 已知  $F(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$ , 求  $f(k)$ 。

解: 根据长除法, 有

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 2+0.5z^{-1}+1.25z^{-2}+\cdots \\
 \hline
 z^2-0.5z-0.5 \\
 \sqrt{2z^2-0.5z} \\
 \hline
 2z^2-z-1 \\
 \hline
 0.5z+1 \\
 \hline
 0.5z-0.25-0.25z^{-1} \\
 \hline
 1.25+0.25z^{-1} \\
 \vdots
 \end{array}
 \end{array}$$

即

$$F(z) = 2 + 0.5z^{-1} + 1.25z^{-2} + \cdots$$

从而

$$f(k) = \{2, 0.5, 1.25, \dots\} = [1 + (-0.5)^k] \varepsilon(k)$$

如果只需要求解序列  $f(k)$  在 0 到  $k = m$  时的值, 在  $m$  比较小的时候, 长除法是非常方便的; 而在  $m$  比较大时, 长除法却非常繁琐。另外, 要从  $f(k)$  有限项的值找出其变化规律, 从而得出其闭合表达式有时也是非常困难的。

### 10.3.2 部分分式展开法

$F(z)$  一般为  $z$  的有理分式, 如式 (10-3-1) 所示, 因此其反变换的部分分式展开法与前述拉普拉斯反变换的部分分式展开法是非常类似的。不过, 由于  $z$  变换最基本的形式是 1 和  $\frac{z}{z-a}$ , 因此, 通常不是直接展开  $F(z)$ , 而是展开  $\frac{F(z)}{z}$ , 然后, 每个分式再乘以  $z$ 。

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (10-3-1)$$

#### 10.3.2.1 $F(z)/z$ 的极点均为单极点

设  $F(z)$  的单极点分别为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 则  $\frac{F(z)}{z}$  可展开为

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z - \gamma_1} + \frac{A_2}{z - \gamma_2} + \cdots + \frac{A_n}{z - \gamma_n} \quad (10-3-2)$$

其中,  $A_0 = F(z)|_{z=0}$ ,  $A_i = \lim_{z \rightarrow \gamma_i} (z - \gamma_i) \frac{F(z)}{z}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 从而有

$$F(z) = A_0 + \frac{A_1 z}{z - \gamma_1} + \frac{A_2 z}{z - \gamma_2} + \cdots + \frac{A_n z}{z - \gamma_n} \quad (10-3-3)$$

$$f(k) = A_0 \delta(k) + A_1 \gamma_1^k \varepsilon(k) + A_2 \gamma_2^k \varepsilon(k) + \cdots + A_n \gamma_n^k \varepsilon(k) \quad (10-3-4)$$

例 10-3-2 已知  $F(z) = \frac{2z^2 - 1.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$ , 求  $f(k)$ 。

解: 将  $\frac{F(z)}{z}$  进行部分分式展开, 有

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2z - 1.5}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{1}{z - 0.5} + \frac{1}{z - 1}$$

从而

$$F(z) = \frac{z}{z - 0.5} + \frac{z}{z - 1}$$

于是得

$$f(k) = 0.5^k \varepsilon(k) + \varepsilon(k) = (1 + 0.5^k) \varepsilon(k)$$

说明: 若  $F(z)$  为真分式, 也可对其直接进行部分分式展开, 即

$$F(z) = \frac{A_1}{z - \gamma_1} + \frac{A_2}{z - \gamma_2} + \cdots + \frac{A_n}{z - \gamma_n} \quad (10-3-5)$$

从而

$$f(k) = A_1 \gamma_1^{k-1} \varepsilon(k-1) + A_2 \gamma_2^{k-1} \varepsilon(k-1) + \cdots + A_n \gamma_n^{k-1} \varepsilon(k-1) \quad (10-3-6)$$

例 10-3-3 对例 10-3-2, 重求  $f(k)$ 。

$$\text{解: } F(z) = \frac{2z^2 - 1.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = 2 + \frac{1.5z - 1}{z^2 - 1.5z + 0.5} = 2 + \frac{0.5}{z - 0.5} + \frac{1}{z - 1}, \text{ 从而得}$$

$$\begin{aligned} f(k) &= 2\delta(k) + 0.5 \cdot 0.5^{k-1} \varepsilon(k-1) + \varepsilon(k-1) \\ &= 2\delta(k) + (1 + 0.5^k) \varepsilon(k-1) \end{aligned}$$

### 10.3.2.2 $F(z)/z$ 含重极点

设  $\gamma_0$  为  $F(z)$  的  $m$  重极点, 则  $\frac{F(z)}{z}$  可展开为

$$\frac{F(z)}{z} = F_a(z) + \frac{A_{0m}}{(z - \gamma_0)^m} + \frac{A_{0(m-1)}}{(z - \gamma_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{01}}{z - \gamma_0} \quad (10-3-7)$$

其中,  $A_{0j} = \frac{1}{(m-j)!} \cdot \frac{d^{m-j}}{dz^{m-j}} \left[ \frac{F(z)}{z} (z - \gamma_0)^m \right]_{z=\gamma_0}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , 而且有

$$\frac{A_{0j}}{(j-1)!} k(k-1)(k-2) \cdots (k-j+2) \gamma_0^{k-j+1} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{A_{0j} z}{(z - \gamma_0)^j} \quad (10-3-8)$$

特别地,  $k \gamma_0^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z - \gamma_0)^2}$ 。

例 10-3-4 已知  $F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2(z-3)}$ , 求  $f(k)$ 。

$$\text{解: } \frac{F(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-3}$$

从而

$$F(z) = \frac{-z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-3}$$

于是得

$$\begin{aligned} f(k) &= -k \varepsilon(k) + \varepsilon(k) + 3^k \varepsilon(k) \\ &= (3^k - k - 1) \varepsilon(k) \end{aligned}$$

## 练习题

### A. 基本概念类

10-1 关于  $z$  变换:

- (1) 给出  $z$  变换的定义;
- (2) 写出常见信号的  $z$  变换。

10-2  $z$  变换有哪些性质? 举例说明其应用。

10-3  $z$  反变换有哪些方法？举例说明其应用。

### B. 分析计算类

10-4 求下列序列的  $z$  变换。

- |                                |   |                               |
|--------------------------------|---|-------------------------------|
| (1) $\delta(k-1)$              | (2) $\varepsilon(k-1)$                  | (3) $3^k \varepsilon(k)$      |
| (4) $(-0.25)^k \varepsilon(k)$ | (5) $\varepsilon(-k)$                   | (6) $0.5^k \varepsilon(-k-1)$ |
| (7) $0.5^{-k} \varepsilon(k)$  | (8) $[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-8)]$ |                               |

10-5 求下列序列的  $z$  变换。

- |  |   |
|--|---|
| (1) $f(k) = \delta(k) - \frac{1}{8} \delta(k-3)$ | (2) $f(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$    |
| (3) $f(k) = (2^{-k} + 3^k) \varepsilon(k)$       | (4) $f(k) = (-0.5)^k \varepsilon(k)$              |
| (5) $f(k) = a^k \varepsilon(k+3)$                | (6) $f(k) = k[\varepsilon(k) - \varepsilon(k-2)]$ |

10-6 利用  $z$  变换的移序性质求下列序列的  $z$  变换。

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| (1) $f(k) = 0.5^{k-1} \varepsilon(k)$ | (2) $f(k) = 0.5^{k-1} \varepsilon(k-1)$                |
| (3) $f(k) = 0.5^k \varepsilon(k-1)$   | (4) $f(k) = 0.5^k [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-2)]$ |

10-7 利用尺度变换性质求下列序列的  $z$  变换。

- |                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $f(k) = k a^{k-2} \varepsilon(k)$ | (2) $f(k) = (-1)^k k \varepsilon(k)$ |
|---------------------------------------|--------------------------------------|

10-8 已知  $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$ ，试用  $z$  变换的卷积定理求如下情形的  $f(k)$ 。

- |  |  |
|--|--|
| (1) $f_1(k) = a^k \varepsilon(k)$ , $f_2(k) = \delta(k-1)$                       |  |
| (2) $f_1(k) = 2^k \varepsilon(k)$ , $f_2(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$ |  |
| (3) $f_1(k) = 0.5^k \varepsilon(k)$ , $f_2(k) = k \varepsilon(k)$                |  |

10-9 利用  $z$  域微分性质求下列序列的  $z$  变换。

- |                                     |                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $f(k) = (k-1) \varepsilon(k-1)$ | (2) $f(k) = k(k-1) \varepsilon(k-1)$ |
|-------------------------------------|--------------------------------------|

10-10 因果序列的  $z$  变换如下，试求  $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(2)$ 。

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| (1) $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ | (2) $F(z) = \frac{z^2+z+1}{(z-1)(z+0.5)}$     |
| (3) $F(z) = \frac{z^2-z}{(z-1)^3}$  | (4) $F(z) = \frac{z^3+z^2-z+1}{z^3+z^2+0.5z}$ |

10-11 因果序列的  $z$  变换如下，试判断其终值  $f(\infty)$  是否存在；如果存在，则予以求解。

- |  |   |
|--|---|
| (1) $F(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$  | (2) $F(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+0.5)}$   |
| (3) $F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-0.25)}$ | (4) $F(z) = \frac{z-2}{(z-1)^2(z-0.5)}$ |

10-12 求下列序列的  $z$  变换。

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| (1) $f(k) = \sum_{n=0}^k (-1)^n$ | (2) $f(k) = (k-1) \sum_{n=0}^k a^{n-1}$ |
|----------------------------------|---|

10-13 求下列  $F(z)$  的单边  $z$  反变换。

- |  |  |
|--|--|
| (1) $F(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-0.25)}$ | (2) $F(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2}$          |
| (3) $F(z) = \frac{2z+1}{z(z^2-5z+6)}$  | (4) $F(z) = \frac{2z-1}{(z-1)^2(z^2-z-2)}$ |

# 第 11 章 连续时间系统的分析

连续时间系统的分析以连续时间信号的分析为基础, 分析方法有时域分析法和变换域分析法。时域分析法有经典分析法和卷积积分法, 变换域分析法主要有傅里叶变换分析法和拉普拉斯变换分析法。

本章介绍连续时间系统的分析, 涉及时域经典分析法、卷积积分法、傅里叶变换分析法、无失真传输系统、信号的时域抽样与抽样定理、拉普拉斯变换分析法、复频域系统函数零极点对系统特性的影响、连续时间系统的稳定性等。

## 11.1 时域经典分析法

连续时间系统的时域经典分析即是建立描述系统输入-输出关系的微分方程, 然后对其直接求解。第 6 章所述一阶动态电路的时域经典分析是本节所述方法在系统的阶数为 1 时的特例。

对于线性时不变连续时间系统, 其输入-输出方程为式 (2-6-5), 现重写如下:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (11-1-1)$$

于是

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \quad t > 0 \quad (11-1-2)$$

式中,  $y_h(t)$  为通解 (亦称为齐次解),  $y_p(t)$  为特解。

### 11.1.1 齐次解与特解

#### 11.1.1.1 齐次解

齐次解即如下齐次微分方程的解。

$$a_n y_h^{(n)}(t) + a_{n-1} y_h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_h'(t) + a_0 y_h(t) = 0 \quad (11-1-3)$$

此微分方程的特征方程为

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (11-1-4)$$

若此特征方程的根 (称为特征根) 均为单根, 设为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则

$$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t}, \quad t > 0 \quad (11-1-5)$$

若特征根中存在  $p$  重根, 设其为  $\lambda_0$ , 则与  $\lambda_0$  相对应的有  $p$  项, 即

$$y_h(t) = (A_{01} + A_{02} t + \cdots + A_{0p} t^{p-1}) e^{\lambda_0 t} + \sum_{i=1}^{n-p} A_i e^{\lambda_i t} \quad (11-1-6)$$

式 (11-1-5) 或式 (11-1-6) 中的待定系数由给定的初始条件 ( $y(0_+), y'(0_+), \dots, y^{(n-1)}(0_+)$ ) 确定。鉴于齐次解对应于系统没有外施激励时齐次方程的解, 故称它为自由响应, 其中的特征根称为系统的固有频率。

### 11.1.1.2 特解

特解  $y_p(t)$  的形式与输入信号  $f(t)$  的变化形式有关, 如表 11-1-1 所示为几种典型输入信号  $f(t)$  对应的特解形式。

表 11-1-1 典型输入信号所对应的特解形式

输入信号 $f(t)$	特解形式
$B$ (常数)	$P$
$t^m$	$P_0 + P_1 t + \dots + P_m t^m$
$e^{\lambda t}$	$P e^{\lambda t}$ ( $\lambda$ 不是特征根)
	$P_0 e^{\lambda t} + P_1 t e^{\lambda t}$ ( $\lambda$ 是特征根, 且为单根)
	$P_0 e^{\lambda t} + P_1 t e^{\lambda t} + \dots + P_r t^r e^{\lambda t}$ ( $\lambda$ 是特征根, 且为 $r$ 重根)
$\cos \omega t$ 或 $\sin \omega t$	$P_1 \cos \omega t + P_2 \sin \omega t$

根据给定的输入信号假定特解, 将其代入微分方程即可确定其中的系数。由此可见, 特解与激励密切相关, 因此称其为强制响应。

**例 11-1-1** 已知描述某连续时间系统输入-输出关系的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ , 且  $y(0_+) = 1$ ,  $y'(0_+) = -1$ ,  $f(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$ , 求  $y(t)$ 。

解: (1) 求齐次解

据题意知系统的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

得特征根  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , 于是,

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}, \quad t > 0$$

(2) 求特解

因  $f(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$ , 故可假设特解为  $y_p(t) = P e^{-3t}$ ,  $t > 0$ , 将其代入微分方程有

$$9P e^{-3t} - 9P e^{-3t} + 2P e^{-3t} = e^{-3t}, \quad t > 0$$

得  $P = 0.5$ , 即

$$y_p(t) = \frac{1}{2} e^{-3t}, \quad t > 0$$

(3) 求  $y(t)$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 0.5 e^{-3t}, \quad t > 0$$

由初始条件  $y(0_+) = 1$ ,  $y'(0_+) = -1$ , 有

$$A_1 + A_2 + 0.5 = 1$$

$$-A_1 - 2A_2 - 1.5 = -1$$

联立上述方程解得  $A_1 = 1.5$ ,  $A_2 = -1$ , 于是,

$$y(t) = 1.5 e^{-t} - e^{-2t} + 0.5 e^{-3t}, \quad t > 0$$

### 11.1.2 零输入响应与零状态响应

如第 2 章所述, 对于线性时不变系统, 全响应可分解为零输入响应和零状态响应, 即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t), \quad t > 0 \quad (11-1-7)$$

式中,  $y_{zi}(t)$ 、 $y_{zs}(t)$  分别为系统的零输入响应和零状态响应。

### 11.1.2.1 零输入响应

零输入响应  $y_{zi}(t)$  为系统在输入为零时仅由初始状态引起的响应, 即

$$a_n y_{zi}^{(n)}(t) + a_{n-1} y_{zi}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_{zi}'(t) + a_0 y_{zi}(t) = 0 \quad (11-1-8)$$

$y_{zi}(t)$  为此齐次微分方程的齐次解, 其中的待定系数由零输入响应的初始条件 ( $y_{zi}(0_+)$ ,  $y_{zi}'(0_+)$ , ...,  $y_{zi}^{(n-1)}(0_+)$ ) 确定。

### 11.1.2.2 零状态响应

零状态响应  $y_{zs}(t)$  为系统在初始状态为零时仅由输入引起的响应, 即

$$\begin{aligned} & a_n y_{zs}^{(n)}(t) + a_{n-1} y_{zs}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_{zs}'(t) + a_0 y_{zs}(t) \\ &= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (11-1-9)$$

$$y_{zs}(t) = y_{zs_h}(t) + y_{zs_p}(t), \quad t > 0 \quad (11-1-10)$$

式中,  $y_{zs_h}(t)$ 、 $y_{zs_p}(t)$  分别为式 (11-1-9) 的通解和特解,  $y_{zs}(t)$  中的待定系数由零状态响应的初始条件 ( $y_{zs}(0_+)$ ,  $y_{zs}'(0_+)$ , ...,  $y_{zs}^{(n-1)}(0_+)$ ) 确定。

## 11.2 卷积积分分析法

### 11.2.1 卷积积分分析法的含义

连续时间系统的卷积积分分析法即是前述第 6 章介绍的动态电路的时域卷积法, 即

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) \quad (11-2-1)$$

其中,  $f(t)$  和  $y_{zs}(t)$  分别为系统的激励和零状态响应,  $h(t)$  为系统的单位冲激响应。为此, 系统可用  $h(t)$  来表示, 如图 11-2-1 所示。

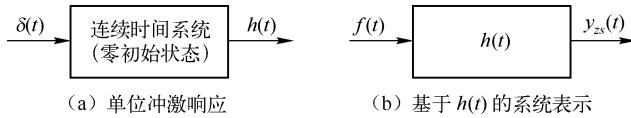


图 11-2-1 单位冲激响应以及系统表示

### 11.2.2 单位冲激响应

第 6 章介绍了一阶动态电路的单位冲激响应及其时域求解, 此处介绍更一般的情形。根据单位冲激响应的定义, 对于  $n$  阶线性时不变系统, 有

$$\begin{aligned} & a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 h'(t) + a_0 h(t) \\ &= b_m \delta^{(m)}(t) + b_{m-1} \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \delta'(t) + b_0 \delta(t) \end{aligned} \quad (11-2-2)$$

$$h(0_-) = h'(0_-) = \cdots = h^{(n-1)}(0_-) = 0 \quad (11-2-3)$$

引入  $h_0(t)$ , 而且

$$a_n h_0^{(n)}(t) + a_{n-1} h_0^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 h_0'(t) + a_0 h_0(t) = \delta(t) \quad (11-2-4)$$

$$h_0(0_-) = h_0'(0_-) = \cdots = h_0^{(n-1)}(0_-) = 0 \quad (11-2-5)$$

将式 (11-2-4) 两端在区间  $[0_-, 0_+]$  内积分, 有

$$\int_{0_-}^{0_+} a_n h_0^{(n)}(t) dt + \int_{0_-}^{0_+} a_{n-1} h_0^{(n-1)}(t) dt + \cdots + \int_{0_-}^{0_+} a_1 h_0'(t) dt + \int_{0_-}^{0_+} a_0 h_0(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt \quad (11-2-6)$$

由于式 (11-2-4) 右端只含有  $\delta(t)$ , 故  $h_0(t)$ ,  $h_0'(t)$ ,  $\cdots$ ,  $h_0^{(n-2)}(t)$  中均不可能包含  $\delta(t)$  或其各阶导数, 从而

$$\int_{0_-}^{0_+} a_{n-1} h_0^{(n-1)}(t) dt = \cdots = \int_{0_-}^{0_+} a_1 h_0'(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} a_0 h_0(t) dt = 0 \quad (11-2-7)$$

$$\int_{0_-}^{0_+} a_n h_0^{(n)}(t) dt = 1 \quad (11-2-8)$$

结合式 (11-2-5) 得

$$\begin{cases} h_0(0_+) = h_0'(0_+) = \cdots = h_0^{(n-2)}(0_+) = 0 \\ h_0^{(n-1)}(0_+) = \frac{1}{a_n} \end{cases} \quad (11-2-9)$$

当  $t \rightarrow 0_+$  时,  $h_0(t)$  即为式 (11-2-4) 的齐次解, 其中的待定系数由式 (11-2-9) 确定。

根据线性时不变系统的线性性和时不变性, 最终可得

$$h(t) = b_m h_0^{(m)}(t) + b_{m-1} h_0^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 h_0'(t) + b_0 h_0(t) \quad (11-2-10)$$

**例 11-2-1** 如图 11-2-2 所示系统, 已知  $f(t) = \delta(t-2)$ ,  $h_1(t) = \varepsilon(t)$ ,  $h_2(t) = \delta(t-1)$ , 求系统的冲激响应  $h(t)$  以及  $f(t)$  激励下的零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

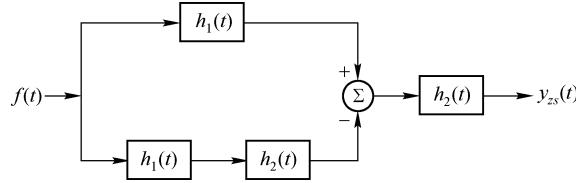


图 11-2-2 例 11-2-1 用图

解: 令  $f(t) = \delta(t)$ , 从而得

$$\begin{aligned} h(t) &= [\delta(t) * h_1(t) - \delta(t) * h_1(t) * h_2(t)] * h_2(t) \\ &= [\delta(t) * \varepsilon(t) - \delta(t) * \varepsilon(t) * \delta(t-1)] * \delta(t-1) \\ &= [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * \delta(t-1) \\ &= \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2) \end{aligned}$$

于是

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = \delta(t-2) * [\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)] = \varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

**例 11-2-2** 求系统  $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 2f'(t) - f(t)$  的单位冲激响应  $h(t)$ 。

解: (1) 求  $h_0(t)$

据题意引入  $h_0(t)$ , 而且

$$h_0''(t) + 5h_0'(t) + 4h_0(t) = \delta(t)$$

$$h_0(0_-) = h_0'(0_-) = 0$$

特征方程为  $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ , 于是特征根  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -4$ , 从而

$$h_0(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}, \quad t \rightarrow 0_+$$

据式 (11-2-9) 知, 初始条件为  $h_0(0_+) = 0$ ,  $h'_0(0_+) = 1$ , 即

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$-A_1 - 4A_2 = 1$$

联立上述方程解得  $A_1 = \frac{1}{3}$ ,  $A_2 = -\frac{1}{3}$ , 从而

$$h_0(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}, \quad t \geq 0_+$$

考虑到  $t < 0$  时,  $h_0(t) = 0$ , 故  $h_0(t)$  可改写为

$$h_0(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

(2) 求  $h(t)$

据式 (11-2-10) 得

$$h(t) = 2h'_0(t) - h_0(t) = (-e^{-t} + 3e^{-4t})\varepsilon(t)$$

### 11.3 傅里叶变换分析法

#### 11.3.1 傅里叶变换分析法的含义

傅里叶变换分析法是利用傅里叶变换求取线性时不变连续时间系统零状态响应的一种方法, 亦称为频域分析法。

根据卷积积分分析法,  $f(t)$  激励下系统的零状态响应为  $y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$ , 由傅里叶变换的卷积定理得

$$Y_{zs}(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (11-3-1)$$

式中,  $F(\omega)$ 、 $H(\omega)$  和  $Y_{zs}(\omega)$  分别为  $f(t)$ 、 $h(t)$  和  $y_{zs}(t)$  的傅里叶变换, 其中  $H(\omega)$  称为频域系统函数。由此, 可知傅里叶变换分析法一般可分为以下几个步骤:

- (1) 求取激励  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(\omega)$ ;
- (2) 确定频域系统函数  $H(\omega)$ ;
- (3) 求取零状态响应的傅里叶变换  $Y_{zs}(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ ;
- (4) 将响应  $Y_{zs}(\omega)$  进行傅里叶反变换即得  $y_{zs}(t)$ 。

例 11-3-1 已知某系统的频域系统函数  $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ , 激励  $f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$ , 求系统的零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

$$\text{解: } f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t) \Leftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$Y_{zs}(\omega) = F(\omega)H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \cdot \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$$

从而得

$$y_{zs}(t) = e^{-t}\varepsilon(t) - e^{-2t}\varepsilon(t)$$

#### 11.3.2 频域系统函数

由式 (11-3-1) 得

$$H(\omega) = \frac{Y_{zs}(\omega)}{F(\omega)} \quad (11-3-2)$$

此式表明, 频域系统函数  $H(\omega)$  定义为系统在零状态条件下的响应与激励的频谱之比, 表征了系统的频率特性。由此, 零状态连续时间系统也可用  $H(\omega)$  表示, 如图 11-3-1 所示。

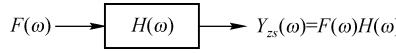


图 11-3-1 基于  $H(\omega)$  的系统表示

频域系统函数  $H(\omega)$  一般是  $\omega$  的复函数, 可以写做

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (11-3-3)$$

其中, 模  $|H(\omega)|$  和辐角  $\theta(\omega)$  均是  $\omega$  的函数。 $|H(\omega)|$  随  $\omega$  变化的特性称为系统的幅频特性,  $\theta(\omega)$  随  $\omega$  变化的特性称为系统的相频特性。幅频特性和相频特性总称为系统的频率特性。

由于  $h(t)$  总是实函数, 根据傅里叶变换的定义易得

$$\begin{cases} |H(\omega)| = |H(-\omega)| \\ \theta(\omega) = -\theta(-\omega) \end{cases} \quad (11-3-4)$$

可见, 系统函数的幅频特性是  $\omega$  的偶函数, 而相频特性是  $\omega$  的奇函数。

对于电路系统, 响应和激励为电压或电流, 根据它们的不同关系,  $H(\omega)$  有 6 种不同的含义。如图 11-3-2 (a) 所示为响应和激励在同一端口的情形, 相应的  $H(\omega)$  见式 (11-3-5) 和式 (11-3-6); 如图 11-3-2 (b) 所示为响应和激励在不同端口的情形, 相应的  $H(\omega)$  见式 (11-3-7) ~ 式 (11-3-10)。

$$H_1(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} \quad (\text{阻抗}) \quad (11-3-5)$$

$$H_2(\omega) = \frac{I(\omega)}{U(\omega)} \quad (\text{导纳}) \quad (11-3-6)$$

$$H_3(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} \quad (\text{转移电压比}) \quad (11-3-7)$$

$$H_4(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{I_1(\omega)} \quad (\text{转移电流比}) \quad (11-3-8)$$

$$H_5(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{I_1(\omega)} \quad (\text{转移阻抗}) \quad (11-3-9)$$

$$H_6(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{U_1(\omega)} \quad (\text{转移导纳}) \quad (11-3-10)$$

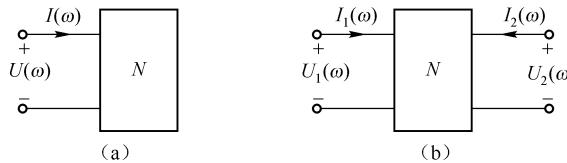


图 11-3-2 不同端口系统函数的含义

例 11-3-2 如图 11-3-3 所示的系统,  $f(t) = Sa(2t) \cos(10t)$ , 试画出图中 A 处和 B 处信号的频谱, 并求  $y(t)$ 。

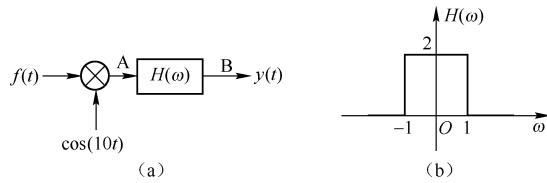


图 11-3-3 例 11-3-2 用图

解: 令  $f_0(t) = Sa(2t)$ , A 处的信号为  $f_A(t)$ , 则有

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \frac{\pi}{2} [\varepsilon(\omega+2) - \varepsilon(\omega-2)] \\ F(\omega) &= \frac{1}{2} [F_0(\omega+10) + F_0(\omega-10)] \\ F_A(\omega) &= \frac{1}{2} [F(\omega+10) + F(\omega-10)] \\ Y(\omega) &= F_A(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

各频谱如图 11-3-4 所示, 从而得

$$y(t) = \frac{1}{2} Sa(t)$$

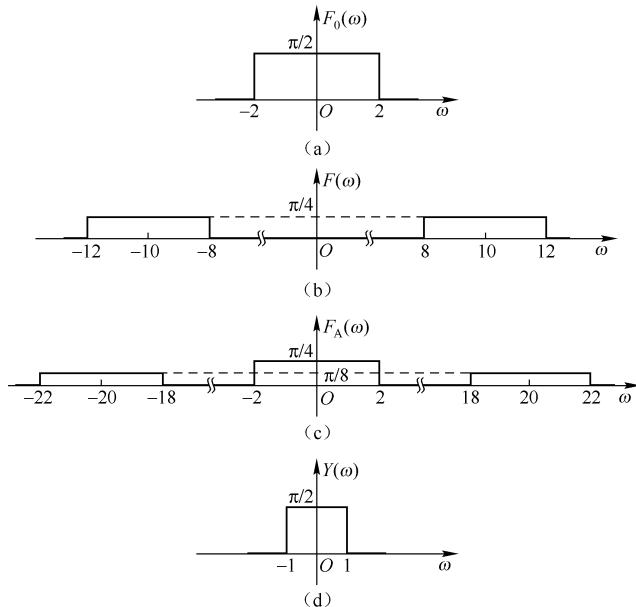


图 11-3-4 例 11-3-2 中各信号频谱

### 11.3.2.1 $H(\omega)$ 与 $h(t)$

单位冲激响应  $h(t)$  与系统函数  $H(\omega)$  为傅里叶变换对, 两者分别从时域和频域反映了系统的固有特性。

例 11-3-3 (1) 已知  $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ , 求  $H(\omega)$ ; (2) 已知  $H(\omega) = \frac{2e^{-j\omega}}{j\omega + 2}$ , 求  $h(t)$ 。

解: (1)  $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$

(2)  $H(\omega) = \frac{2e^{-j\omega}}{j\omega + 2} \leftrightarrow h(t) = 2e^{-2(t-1)} \varepsilon(t-1)$

### 11.3.2.2 $H(\omega)$ 与微分方程

线性时不变连续时间系统可用常系数线性微分方程来描述, 即

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)} + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (11-3-11)$$

对上式两端进行傅里叶变换得

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (11-3-12)$$

$H(\omega)$  是两个  $j\omega$  的多项式之比, 其中分母与分子多项式的系数分别对应于微分方程两边相应的系数。反之, 由式 (11-3-12) 所示  $H(\omega)$  易得描述此系统[如式 (11-3-11) 所示]的微分方程。

**例 11-3-4** 求系统  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$  的单位冲激响应  $h(t)$ 。

$$\text{解: } H(\omega) = \frac{2(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} = \frac{2(j\omega) + 1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{-1}{j\omega + 1} + \frac{3}{j\omega + 2}$$

于是得

$$h(t) = -e^{-t} \varepsilon(t) + 3e^{-2t} \varepsilon(t)$$

**例 11-3-5** 求描述系统  $h(t) = 3e^{-2} \varepsilon(t) - 2e^{-3t} \varepsilon(t)$  的微分方程。

$$\text{解: } h(t) = 3e^{-2} \varepsilon(t) - 2e^{-3t} \varepsilon(t) \Leftrightarrow H(\omega) = \frac{3}{j\omega + 2} - \frac{2}{j\omega + 3} = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6}$$

于是得

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f'(t) + 5f(t)$$

### 11.3.2.3 $H(\omega)$ 与电路

由零状态的频域电路模型可以确定频域系统函数  $H(\omega)$ 。

**例 11-3-6** 求如图 11-3-5 (a) 所示电路的系统函数  $H(\omega)$ , 其中  $u_1(t)$  为激励,  $u_2(t)$  为响应。

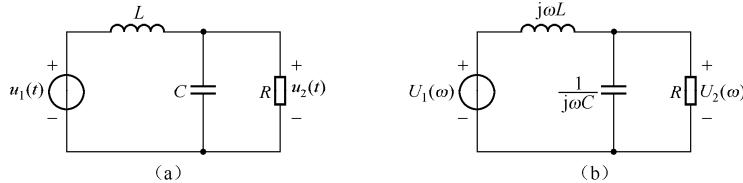


图 11-3-5 例 11-3-6 用图

**解:** 画出频域电路模型, 如图 11-3-5 (b) 所示, 可得

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{\left(\frac{1}{j\omega C} // R\right)}{j\omega L + \left(\frac{1}{j\omega C} // R\right)} \\ &= \frac{1}{(j\omega)^2 LC + j\omega \frac{L}{R} + 1} \end{aligned}$$

## 11.4 无失真传输系统

### 11.4.1 无失真传输系统的含义

如果一个系统是无失真传输系统, 则其输出信号  $y(t)$  与输入信号  $f(t)$  相比, 只有幅度大小和出现时间先后的不同, 波形上没有变化, 即

$$y(t) = Kf(t - t_0) \quad (11-4-1)$$

式中,  $K$  为增益系数,  $t_0$  为延迟时间。如图 11-4-1 (a) 所示为无失真传输系统示意图, 图 11-4-1 (b) 为波形图。

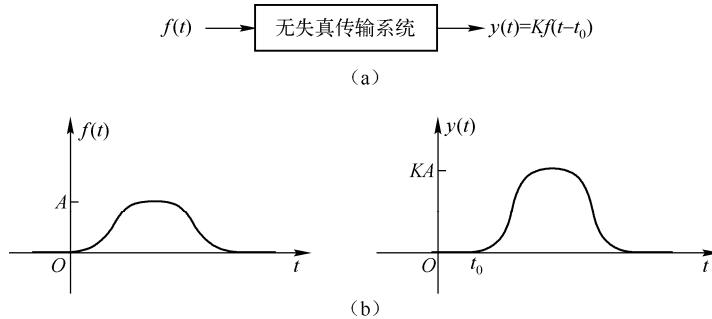


图 11-4-1 无失真传输系统示意及波形图

## 11.4.2 无失真传输系统的特性

### 11.4.2.1 时域特性

根据式 (11-4-1), 易得无失真传输系统的单位冲激响应  $h(t)$  为

$$h(t) = K\delta(t - t_0) \quad (11-4-2)$$

此式表明, 无失真传输系统的单位冲激响应是冲激强度为  $K$  的冲激函数, 且延迟了时间  $t_0$ 。无失真传输系统的时域特性如图 11-4-2 所示。

### 11.4.2.2 频域特性

由式 (11-4-2) 可知, 无失真传输系统的频域系统函数  $H(\omega)$  为

$$H(\omega) = K e^{-j\omega t_0} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (11-4-3)$$

由此, 系统函数的幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} |H(\omega)| = K \\ \theta(\omega) = -\omega t_0 \end{cases} \quad (11-4-4)$$

幅频特性和相频特性波形如图 11-4-3 所示, 即幅频特性与角频率无关, 相频特性与角频率成正比。

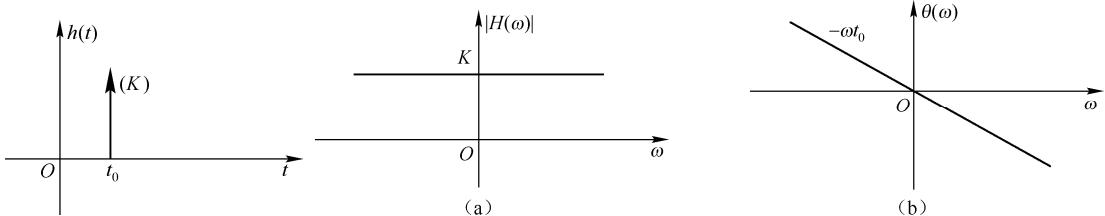


图 11-4-2 无失真传输系统  
的时域特性

图 11-4-3 无失真传输系统的频率特性

幅频特性表明, 无失真传输系统对所有频率的信号均具有相同的放大增益, 即系统具有无限宽的频带, 实际上这是做不到的。也就是说, 实际系统均不可能是无失真传输系统。不过, 考虑

到实际输入信号的频率成分通常是有有限的，因此，在输入信号有限的频率范围内，若系统的频率特性满足式 (11-4-3)，则系统能够对此输入信号实现无失真传输。譬如，具有如图 11-4-4 所示频率特性的系统，能够对频率范围为  $(0, \omega_m)$  的输入信号实现无失真传输。

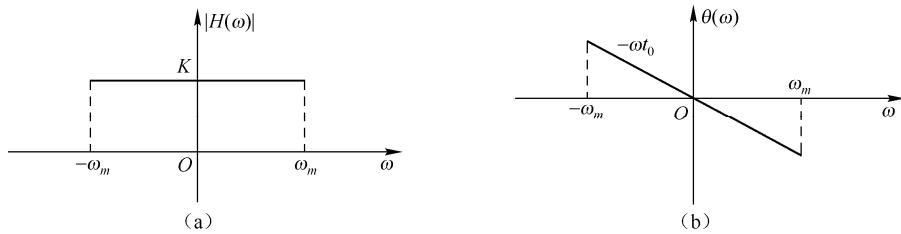


图 11-4-4 实际无失真传输系统的频率特性示例

### 11.4.3 理想滤波器

理想滤波器是给定频率范围下的无失真传输系统。根据频率范围的不同，可定义理想低通滤波器、理想高通滤波器、理想带通滤波器、理想带阻滤波器等，其频率特性如图 11-4-5 所示。譬如，理想带通滤波器，能够对频率范围为  $(\omega_{c1}, \omega_{c2})$  的输入信号实现无失真传输，对此频率范围之外的信号实现完全抑制；理想带阻滤波器，能够对频率范围为  $(0, \omega_{c1})$  和  $(\omega_{c2}, \infty)$  的输入信号实现无失真传输，对  $(\omega_{c1}, \omega_{c2})$  频率范围内的信号实现完全抑制。

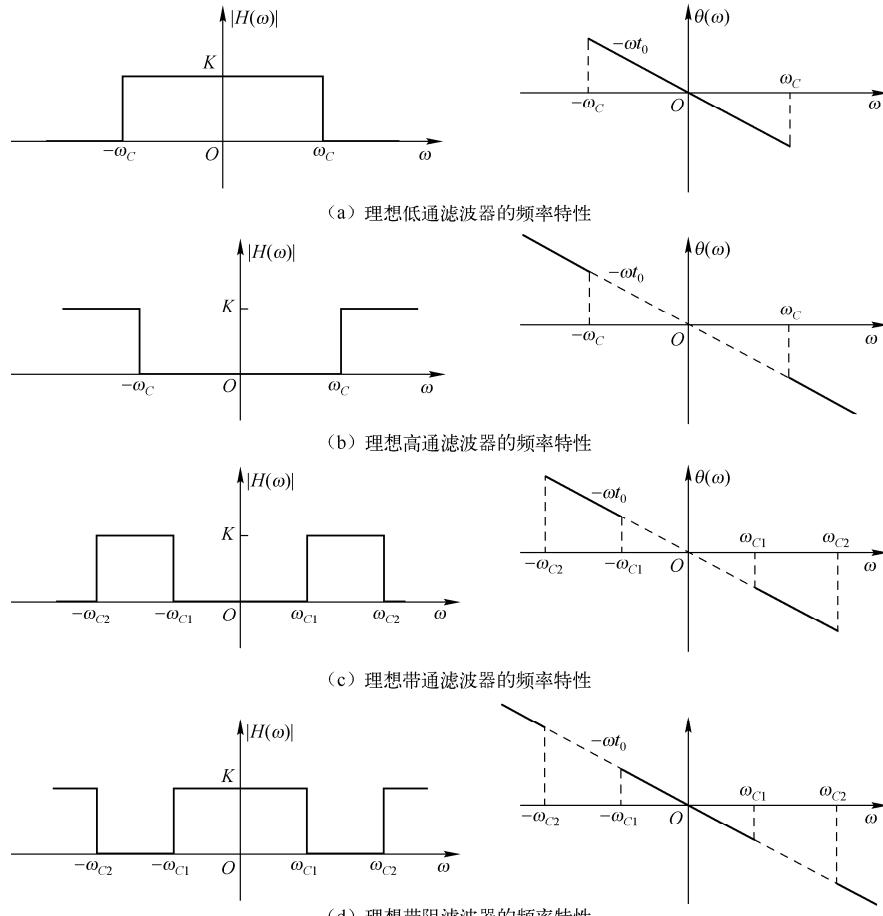


图 11-4-5 理想滤波器频率特性

## 11.5 信号的时域抽样与时域抽样定理

### 11.5.1 信号的时域抽样

如第2章所述, 时域抽样(亦称采样或取样)是模拟信号转换为数字信号的重要环节, 其作用是将模拟信号的时间取值进行离散化。

#### 11.5.1.1 自然抽样

如图11-5-1所示为自然抽样示意图, 其中 $f(t)$ 为连续时间信号, 开关 $K$ 周期性地接1端和2端, 抽样周期为 $T_s$ ,  $\tau$ 是开关在1端处的接通时间, 输出信号 $f_s(t)$ 即为抽样后的信号, 称为抽样信号。

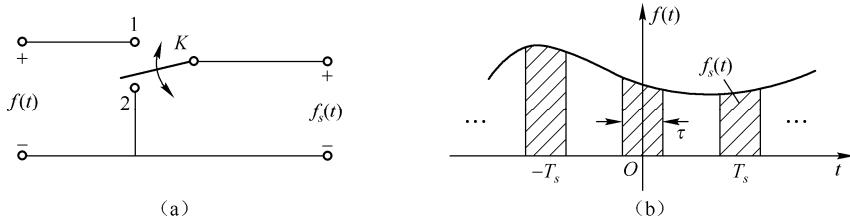


图11-5-1 信号自然抽样示意图

不难看出,  $f_s(t)$ 可看做是 $f(t)$ 与抽样脉冲序列 $s(t)$ 进行相乘运算, 如图11-5-2所示, 其中抽样脉冲序列是幅度为1、宽度为 $\tau$ 的矩形脉冲, 相应的数学表达式为

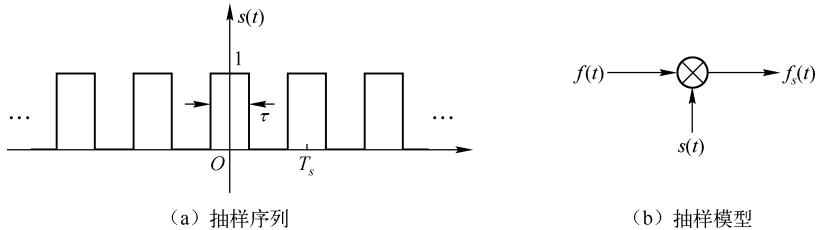


图11-5-2 自然抽样序列与抽样模型

$$f_s(t) = f(t)s(t) \quad (11-5-1)$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ,  $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$ ,  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ , 且根据周期信号的傅里叶变换有

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta(\omega - n\omega_s) \quad (11-5-2)$$

其中,  $S_n$ 为抽样序列 $s(t)$ 傅里叶级数的复系数。从而有

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot F(\omega - n\omega_s) \quad (11-5-3)$$

对于如图11-5-2所示的抽样脉冲序列,  $S_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa} \frac{n\omega_s \tau}{2}$ , 于是

$$F_s(\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa} \frac{n\omega_s \tau}{2} \cdot F(\omega - n\omega_s) \quad (11-5-4)$$

此式表明,  $F_s(\omega)$  由  $F(\omega)$  以  $\omega_s$  为重复周期、幅度按  $\frac{\tau}{T_s} Sa \frac{n\omega_s \tau}{2}$  的规律变化的波形所构成。

如图 11-5-3 所示为自然抽样下  $f(t)$  和  $f_s(t)$  的频谱示意图, 其中  $F(\omega)$  的最高截止角频率为  $\omega_m$ , 即  $|\omega| > \omega_m$  时  $F(\omega) = 0$ , 且  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_m$ 。

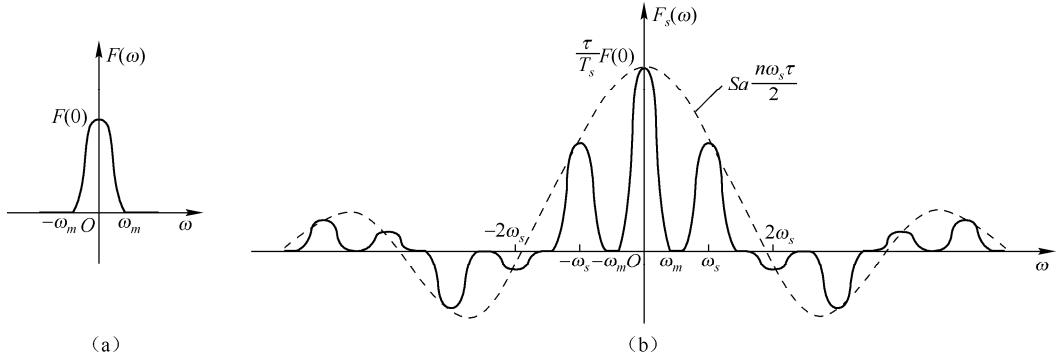


图 11-5-3 自然抽样下  $F(\omega)$  与  $F_s(\omega)$  示意图

### 11.5.1.2 理想抽样

如果抽样序列  $s(t)$  为周期的单位冲激序列, 即  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ , 则称此时的抽样为理想抽

样。由于  $S_n = \frac{1}{T_s}$ , 于是理想抽样下抽样信号  $f_s(t)$  的频谱为

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (11-5-5)$$

此式表明,  $F_s(\omega)$  由  $F(\omega)$  以  $\omega_s$  为重复周期, 幅度不变 (即  $\frac{1}{T_s}$ ) 的波形所构成。如图 11-5-4 所示为理想抽样下  $f(t)$  和  $f_s(t)$  的频谱示意图。

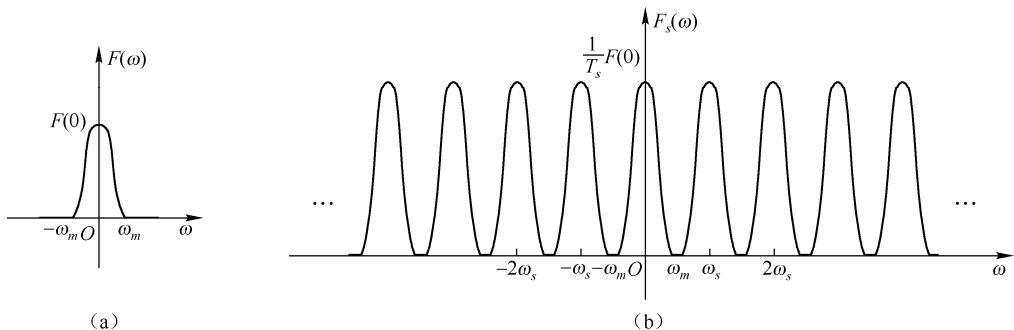


图 11-5-4 理想抽样下  $F(\omega)$  与  $F_s(\omega)$  示意图

### 11.5.2 时域抽样定理

由图 11-5-3 和图 11-5-4 可以看出,  $F_s(\omega)$  最中间那一部分保留了原输入信号的频谱, 只是幅度分别为原来的  $\frac{\tau}{T_s}$  和  $\frac{1}{T_s}$ , 即  $f_s(t)$  包含了  $f(t)$  的所有信息。于是可以让  $F_s(\omega)$  通过低通滤波器而

获得  $F(\omega)$ ，实现原始信号  $f(t)$  的恢复。

不过，当  $F(\omega)$  的最高截止角频率  $\omega_m \rightarrow \infty$  或  $\omega_s < 2\omega_m$  时， $F_s(\omega)$  中会出现混叠。譬如，如图 11-5-5 所示理想抽样下  $\omega_s < 2\omega_m$  时的  $F_s(\omega)$ ，此时是难以从  $F_s(\omega)$  中恢复  $f(t)$  的。

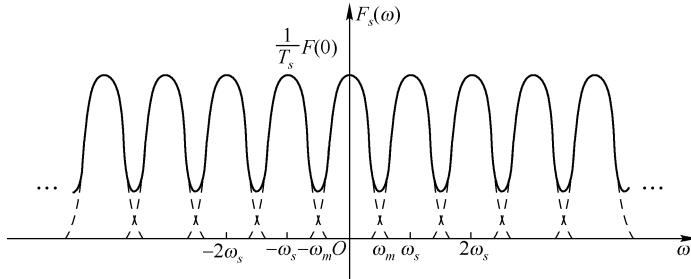


图 11-5-5 理想抽样下  $\omega_s < 2\omega_m$  时  $F_s(\omega)$  示意图

因此，要能从  $f_s(t)$  中恢复  $f(t)$ ，应满足以下两个条件：

(1)  $f(t)$  为频带有限信号，即其最高截止角频率  $\omega_m$  为有限值。

(2) 抽样的频率  $f_s$  不能过低，必须满足  $f_s \geq 2f_m$  或  $\omega_s \geq 2\omega_m$ ，或者说抽样间隔不能太长，必须满足  $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 。通常把最低抽样频率  $f_s = 2f_m$  称为奈奎斯特抽样频率，把最大允许的抽样间隔

$T_s = \frac{1}{2f_m}$  称为奈奎斯特抽样间隔。

上述讨论总结为**时域抽样定理**：若抽样频率大于或等于奈奎斯特抽样频率，则一个有限带宽的信号经过等间隔抽样后，由抽样信号可以完全恢复原信号。

抽样定理在实际应用中得到了广泛的应用。譬如，通信中的时分复用就是以此定理为基础的。

## 11.6 拉普拉斯变换分析法

拉普拉斯变换分析法是利用拉普拉斯变换求解系统响应的一种方法，也称为复频域分析法或  $s$  域分析法。此方法既可以求解系统的零状态响应，也可以求解系统的零输入响应。

### 11.6.1 微分方程的复频域求解

重写描述线性时不变连续时间系统的常系数线性微分方程如下：

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 f'(t) + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (11-6-1)$$

对上式两端进行拉普拉斯变换，并假定  $f(t)$  为因果信号，即  $t < 0$  时  $f(t) = 0$ 。利用时域微分性质，有

$$a_i y^{(i)}(t) \rightarrow a_i [s^i Y(s) - s^{i-1} y(0_-) - s^{i-2} y'(0_-) - \cdots - s y^{(i-2)}(0_-) - y^{(i-1)}(0_-)], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (11-6-2)$$

$$b_j f^{(j)}(t) \leftrightarrow b_j s^j F(s), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (11-6-3)$$

设  $A_k(s) = a_n s^{n-1-k} + a_{n-1} s^{n-1-(k-1)} + \cdots + a_{k+2} s + a_{k+1}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ，从而有

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} F(s) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} A_i(s) y^{(i)}(0_-)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \\ = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) \quad (11-6-4)$$

对  $Y(s)$  进行拉普拉斯反变换, 即得全响应的时域表达式。上式表明系统响应由两部分叠加而成: 一部分是仅由激励产生的零状态响应  $Y_{zs}(s)$ ; 另一部分是仅由系统初始状态产生的零输入响应  $Y_{zi}(s)$ 。

$$Y_{zs}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} F(s) = H(s)F(s) \quad (11-6-5)$$

其中,  $H(s)$  称为复频域系统函数。

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (11-6-6)$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} A_i(s) y^{(i)}(0_-)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (11-6-7)$$

**例 11-6-1** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t) + 8f(t)$ ,  $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ ,  $y(0_-) = 3$ ,  $y'(0_-) = 2$ , 求  $y_{zs}(t)$ 、 $y_{zi}(t)$  及  $y(t)$ 。

解: 对微分方程两边取拉普拉斯变换, 可得

$$[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] + 5[sY(s) - y(0_-)] + 6Y(s) = 2sF(s) + 8F(s) \\ Y(s) = \frac{2s+8}{s^2 + 5s + 6} F(s) + \frac{(s+5)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2 + 5s + 6}$$

于是有

$$Y_{zs}(s) = \frac{2s+8}{(s^2 + 5s + 6)} F(s) = \frac{2s+8}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)} = \frac{3}{s+1} + \frac{-4}{s+2} + \frac{1}{s+3} \\ Y_{zi}(s) = \frac{(s+5)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2 + 5s + 6} = \frac{3s+17}{(s+2)(s+3)} = \frac{11}{s+2} + \frac{-8}{s+3}$$

从而得

$$y_{zs}(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t) - 4e^{-2t}\varepsilon(t) + e^{-3t}\varepsilon(t) \\ y_{zi}(t) = 11e^{-2t} - 8e^{-3t}, \quad t > 0 \text{ 或 } t \rightarrow 0_+ \\ y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = 3e^{-t} + 7e^{-2t} - 7e^{-3t}, \quad t > 0 \text{ 或 } t \rightarrow 0_+$$

$y(t)$  也可以直接由  $Y(s)$  进行拉普拉斯反变换得到。注意,  $t > 0$  与  $\varepsilon(t)$  的区别。对零状态响应  $y_{zs}(t)$ , 可以注明  $t > 0$  或乘以  $\varepsilon(t)$ ; 但对零输入响应  $y_{zi}(t)$ , 仅可以注明  $t > 0$ , 不能乘以  $\varepsilon(t)$ , 因为  $t < 0$  时,  $y_{zi}(t)$  不一定为 0。与此类似, 全响应也仅可以注明  $t > 0$ , 不能乘以  $\varepsilon(t)$ 。

## 11.6.2 电路的复频域分析

电路的复频域分析是基于拉普拉斯变换的一种分析方法, 其基本分析思路与相量法类似, 通常有如下三个步骤:

- (1) 把时域电路模型改画为复频域电路模型;
- (2) 对复频域电路模型进行分析得到电压或电流的复频域解;
- (3) 对电压或电流的复频域解进行拉普拉斯反变换得到其时域解。

### 11.6.2.1 电阻元件

如图 11-6-1 (a) 所示电阻元件的时域模型, 其时域电压电流关系为  $u_R(t) = R i_R(t)$ , 对其两端进行拉普拉斯变换得

$$U_R(s) = R \cdot I_R(s) \quad (11-6-8)$$

由此可画出其复频域模型, 如图 11-6-1 (b) 所示。



图 11-6-1 电阻元件的模型

### 11.6.2.2 电感元件

如图 11-6-2 (a) 所示为电感元件的时域模型, 其时域电压电流关系为  $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ , 对其两端进行拉普拉斯变换得

$$U_L(s) = s L I_L(s) - L i_L(0_-) \quad (11-6-9)$$

由此可画出其复频域模型, 如图 11-6-2 (b)、(c) 所示。

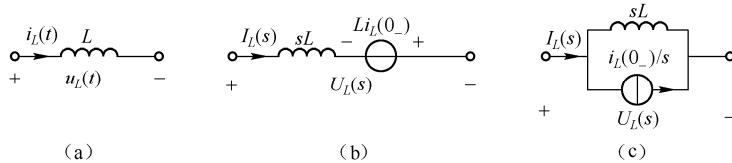


图 11-6-2 电感元件的模型

### 11.6.2.3 电容元件

如图 11-6-3 (a) 所示为电容元件的时域模型, 其时域电压电流关系为  $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ , 对其两端进行拉普拉斯变换得

$$I_C(s) = s C U_C(s) - C u_C(0_-) \quad (11-6-10)$$

由此可画出其复频域模型, 如图 11-6-3 (b)、(c) 所示。

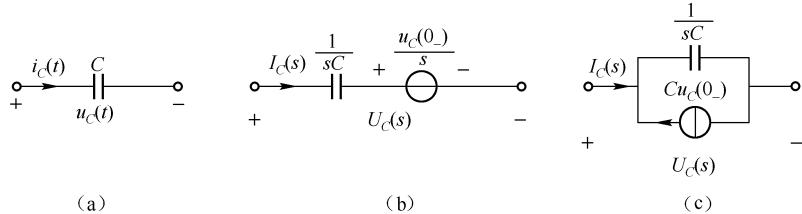


图 11-6-3 电容元件的模型

**例 11-6-2** 如图 11-6-4 (a) 所示电路,  $u_S(t) = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = 4$ ,  $R_2 = 2$ ,  $L = 1$ ,  $C = 0.5 \text{ F}$ ,  $i_L(0_-) = 2 \text{ A}$ ,  $u_C(0_-) = 2 \text{ V}$ , 求  $t > 0$  时的  $i_L(t)$  和  $u_C(t)$ 。

解：(1) 画出电路的复频域模型，如图 11-6-4 (b) 所示。

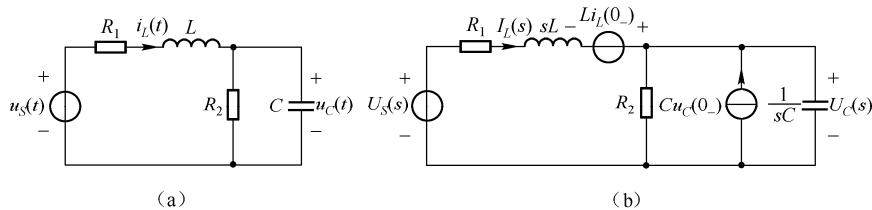


图 11-6-4 例 11-6-2 用图

(2) 求复频域解。

$$U_C(s) = \frac{\frac{U_s(s) + L_i(0_-)}{R_1 + sL} + C u_c(0_-)}{\frac{1}{R_1 + sL} + \frac{1}{R_2} + sC} = \frac{2s^2 + 12s + 12}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+2} + \frac{-2}{s+3}$$

$$I_L(s) = \left( \frac{1}{R_2} + sC \right) U_C(s) - C u_c(0_-) = \frac{2s^2 + 6s + 6}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

(3) 求时域解。

$$u_C(t) = 2 + 2e^{-2t} - 2e^{-3t} \text{ V}, \quad t > 0$$

$$i_L(t) = 1 - e^{-2t} + 2e^{-3t} \text{ A}, \quad t > 0$$

### 11.6.3 复频域系统函数

根据卷积积分分析法， $f(t)$  激励下系统的零状态响应为  $y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$ ，由拉普拉斯变换的卷积定理得

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s) \quad (11-6-11)$$

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} \quad (11-6-12)$$

此式表明，复频域系统函数  $H(s)$  定义为系统在零状态条件下的响应与激励的拉普拉斯变换之比，所表征的系统频率特性为  $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ 。由此，零状态连续时间系统也可用  $H(s)$  来表示，如图 11-6-5 所示。

由前述分析知：

- (1) 单位冲激响应  $h(t)$  与复频域系统函数  $H(s)$  为拉普拉斯变换对；
- (2) 线性时不变连续时间系统的  $H(s)$  可由微分方程直接求取，如式 (11-6-6) 所示。同样，微分方程也可由  $H(s)$  直接列写；
- (3) 由零状态的复频域电路模型可以确定系统函数  $H(s)$ 。

例 11-6-3 如图 11-6-6 所示的零状态系统，已知  $f_1(t) = e^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)$ ， $H_1(s) = e^{-s}$ ， $y(t) = 2e^{-(t-1)}\varepsilon(t-1) - e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$ ，试求  $f(t)$ 、 $H_2(s)$  以及整个系统的  $H(s)$ 。



图 11-6-5 基于  $H(\omega)$  的系统表示

图 11-6-6 例 11-6-3 用图

解: (1) 由  $F_1(s) = F(s)H_1(s)$  知

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{H_1(s)} = \frac{e^{-s}}{s+1} / e^{-s} = \frac{1}{s+1}$$

从而得

$$f(t) = e^{-t} \varepsilon(t)$$

$$(2) H_2(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{e^{-s} \left( \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right)}{\frac{e^{-s}}{s+1}} = \frac{s+3}{s+2}$$

$$(3) H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = H_1(s)H_2(s) = \frac{s+3}{s+2} e^{-s}$$

例 11-6-4 (1) 已知  $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ , 求  $H(s)$ ; (2) 已知  $H(s) = \frac{2e^{-s}}{s+2}$ , 求  $h(t)$ 。

解: (1)  $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t) \Leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+2}$

(2)  $H(s) = \frac{2e^{-s}}{s+2} \Leftrightarrow h(t) = 2e^{-2(t-1)} \varepsilon(t-1)$

例 11-6-5 求系统  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$  的单位冲激响应  $h(t)$ 。

解:  $H(s) = \frac{2s+1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$

于是

$$h(t) = -e^{-t} \varepsilon(t) + 3e^{-2t} \varepsilon(t)$$

例 11-6-6 求描述系统  $h(t) = 3e^{-2} \varepsilon(t) - 2e^{-3t} \varepsilon(t)$  的微分方程。

解:  $h(t) = 3e^{-2} \varepsilon(t) - 2e^{-3t} \varepsilon(t) \Leftrightarrow H(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} = \frac{s+5}{s^2 + 5s + 6}$

于是

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f'(t) + 5f(t)$$

例 11-6-7 求如图 11-6-7 (a) 所示电路的复频域系统函数  $H(s)$ , 其中  $u_1(t)$  为激励,  $u_2(t)$  为响应。

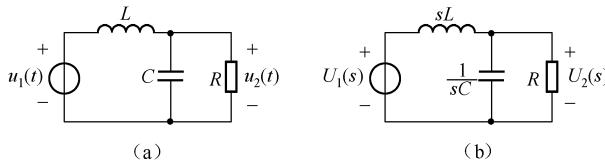


图 11-6-7 例 11-6-7 用图

解: 画出复频域电路模型, 如图 11-6-7 (b) 所示, 可得

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\left(\frac{1}{sC} // R\right)}{sL + \left(\frac{1}{sC} // R\right)} = \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

## 11.7 复频域系统函数零、极点对系统特性的影响

### 11.7.1 零点与极点

实际系统的复频域系统函数  $H(s)$  通常可表示为  $s$  的有理分式, 即

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (11-7-1)$$

式中,  $N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0$ ,  $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ 。 $N(s) = 0$  的根称为  $H(s)$  的零点;  $D(s) = 0$  的根称为  $H(s)$  的极点 (亦称为固有频率)。从而可把  $H(s)$  改写如下:

$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad (11-7-2)$$

式中,  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 为  $H(s)$  的零点;  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $H(s)$  的极点;  $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$  为标量系数。

若有  $k_z$  重零点  $z_0$  和  $k_p$  重极点  $p_0$ , 则式 (11-7-2) 的分子和分母中分别存在  $(s - z_0)^{k_z}$  项和  $(s - p_0)^{k_p}$  项。鉴于  $N(s)$  和  $D(s)$  均为  $s$  的有理多项式, 从而零点和极点要么为实数, 要么为成对共轭复数。

将  $H(s)$  的零点和极点在  $s$  平面表示出来的图形称为零、极点图, 其中零点用 “○” 表示, 极点用 “×” 表示。若为  $r$  重零点或极点, 则在其旁边注以 “( $r$ )”。

譬如,  $H(s) = \frac{2s^2(s+3)(s-2)}{(s+1)(s+2-j)(s+2+j)(s-3)}$  的零、极点图如图 11-7-1 所示。

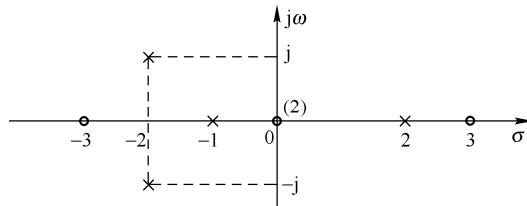


图 11-7-1 零、极点图示例

研究系统函数零、极点的意义在于:

- (1) 由极点分布可以知道系统冲激响应具有的模式, 从而可了解系统的稳定性;
- (2) 由零、极点分布可以获得系统的频率响应特性。

### 11.7.2 冲激响应模式

鉴于系统函数  $H(s)$  与冲激响应  $h(t)$  是拉氏变换对, 从而可由  $H(s)$  的极点分布确定  $h(t)$  的模式; 在零、极点不存在相消时 (若存在零、极点相消, 会使消去极点所对应的响应模式不存在), 零点仅影响响应的幅度和相位, 而对  $h(t)$  的模式没有影响, 示意图如图 11-7-2 所示。

- (1)  $H(s)$  有极点位于  $s$  平面的原点,  $H(s)$  包含  $\frac{A}{s}$ , 则  $h(t)$  中含有  $A\varepsilon(t)$ , 冲激响应的模式为阶跃函数;
- (2)  $H(s)$  有极点位于  $s$  平面的正实轴,  $H(s)$  包含  $\frac{A}{s-\lambda}$  ( $\lambda > 0$ ), 则  $h(t)$  中含有  $Ae^{\lambda t}\varepsilon(t)$ , 冲激响应的模式为指数增长函数;  $H(s)$  有极点位于  $s$  平面的负实轴,  $H(s)$  包含  $\frac{A}{s+\lambda}$  ( $\lambda > 0$ ), 则  $h(t)$  中含有  $Ae^{-\lambda t}\varepsilon(t)$ , 冲激响应的模式为指数衰减函数;

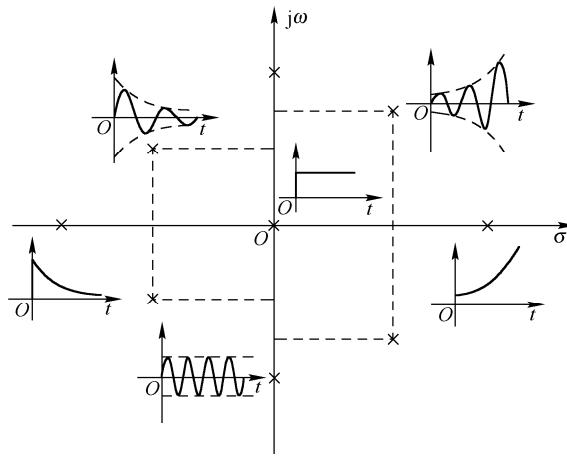


图 11-7-2  $H(\omega)$  极点分布及  $h(t)$  变化模式

(3)  $H(s)$  有极点位于  $s$  平面的虚轴,  $H(s)$  包含  $\frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$ , 则  $h(t)$  中含有  $A \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$ , 冲激响应的模式为等幅振荡的正弦函数;

(4)  $H(s)$  有极点位于  $s$  平面的右半平面,  $H(s)$  包含  $\frac{A\omega_0}{(s - \lambda)^2 + \omega_0^2}$ ,  $\lambda > 0$ , 则  $h(t)$  中含有  $A e^{\lambda t} \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$ , 冲激响应的模式为幅度增长的振荡函数;  $H(s)$  有极点位于  $s$  平面的左半平面,  $H(s)$  包含  $\frac{A\omega_0}{(s + \lambda)^2 + \omega_0^2}$ ,  $\lambda > 0$ , 则  $h(t)$  中含有  $A e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$ , 冲激响应的模式为幅度衰减的振荡函数。

若  $H(s)$  具有  $r$  重极点, 则冲激响应的模式中含有  $t^{r-1}$  因子。譬如,  $H(s) = \frac{1}{s^2}$ ,  $h(t) = t \varepsilon(t)$ ;

$$H(s) = \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}, \quad h(t) = t(\sin \omega_0 t) \varepsilon(t).$$

### 11.7.3 频率响应特性

已知系统函数  $H(s)$  的零、极点分布可以借助几何作图的方法确定其频率响应特性 (简称频率特性)。若  $H(s)$  的极点全部位于  $s$  平面的左半平面, 则有

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (11-7-3)$$

结合式 (11-7-2) 有

$$H(\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{k=1}^n (j\omega - p_k)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m N_i}{\prod_{k=1}^n M_k} \quad (11-7-4)$$

式中,  $N_i = (j\omega - z_i) = N_i e^{j\varphi_i}$  为由零点  $z_i$  引向虚轴上某点  $j\omega$  的一个矢量, 称为零点矢量;  $M_k = (j\omega - p_k) = M_k e^{j\psi_k}$  为由极点  $p_k$  引向虚轴上某点  $j\omega$  的一个矢量, 称为极点矢量, 从而有

$$|H(\omega)| = H_0 \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m N_i}{\prod_{k=1}^n M_k} \quad (11-7-5)$$

$$\theta(\omega) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m - \psi_1 - \psi_2 - \cdots - \psi_n = \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{k=1}^n \psi_k \quad (11-7-6)$$

当  $\omega$  自原点沿虚轴运动并趋于无穷大时, 各零点矢量和极点矢量的模和辐角都随之改变, 于是可得出幅频特性和相频特性曲线。下面举例说明。

**例 11-7-1** 如图 11-7-3 所示电路, 其中  $U_1(s)$  为激励,  $U_2(s)$  为响应, 试分析其频率响应特性。

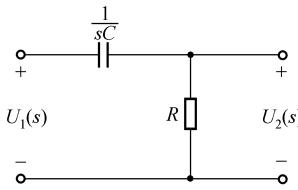


图 11-7-3 例 11-7-1 用图

解: 依题意有

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

于是可画出零点矢量和极点矢量, 如图 11-7-4 (a) 所示, 从而

$$H(\omega) = \frac{N}{M} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{N}{M}$$

$$\theta(\omega) = \varphi - \psi$$

幅频特性曲线和相频特性曲线分别如图 11-7-4 (b) 和 (c) 所示。

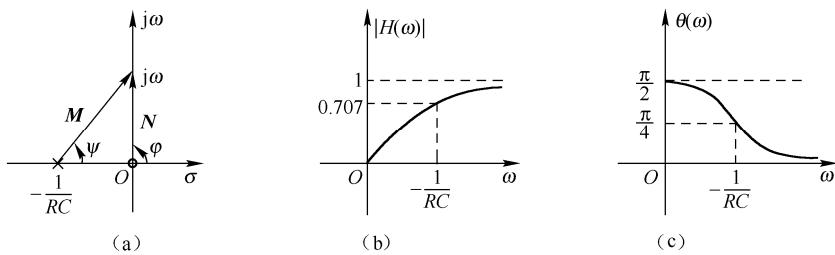


图 11-7-4 例 11-7-1 零、极点矢量及频率特性曲线

**例 11-7-2** 如图 11-7-5 (a) 所示为系统的零、极点分布图, 其中  $p_1 = -\sigma_0 + j\omega_0 = p_2^*$ , 且  $\sigma_0 \ll \omega_0$ , 试画出其频率特性曲线。

解：由题意有

$$H(\omega) = H_0 \frac{j\omega}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{N}{M_1 M_2} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = H_0 \frac{N}{M_1 M_2}$$

$$\theta(\omega) = \varphi - \psi_1 - \psi_2$$

幅频特性曲线和相频特性曲线分别如图 11-7-5 (b) 和 (c) 所示，其中幅频特性在  $\omega \approx \omega_0$  时出现峰值  $\frac{H_0}{2\sigma_0}$ ，相频特性在  $\omega \approx \omega_0$  时与横轴相交，即  $\theta(\omega_0) \approx 0$ ，这是因为此例中  $\sigma_0 \ll \omega_0$ ，故  $\omega = \omega_0$  时， $M_1 = \sigma_0 \angle 0^\circ$ ， $M_2 \approx 2N$ 。

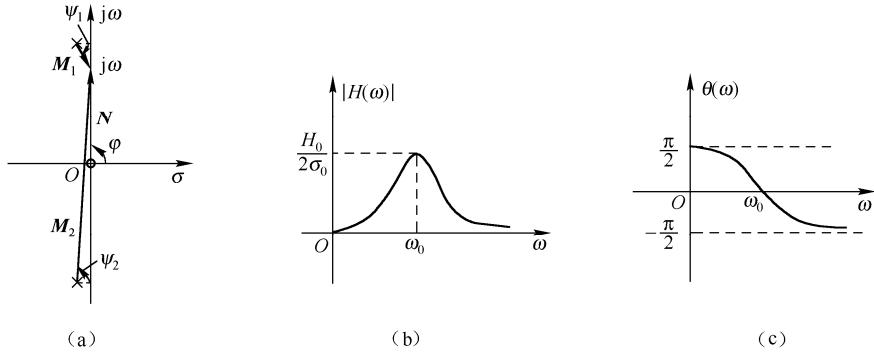


图 11-7-5 例 11-7-2 用图

一般可以认为，若系统有一对非常靠近虚轴的共轭极点  $p_{1,2} = -\sigma_0 \pm j\omega_0$ ，则在  $\omega = \omega_0$  附近处，幅频特性出现峰值，相频特性迅速下降；若系统有一对非常靠近虚轴的共轭零点  $z_{1,2} = -\sigma_0 \pm j\omega_0$ ，则在  $\omega = \omega_0$  附近处，幅频特性出现谷值，相频特性迅速上升。

## 11.8 连续时间系统的稳定性

### 11.8.1 稳定系统的含义

对于任意有界的激励均产生有界的零状态响应的系统称为稳定系统，反之为不稳定系统。稳定性是系统的固有特性，与激励无关。

设线性时不变连续时间系统的输入信号  $f(t)$  有界，即  $|f(t)|_b$ ， $M_f$ ， $M_f$  为有界正值，从而有

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (11-8-1)$$

$$|y_{zs}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |f(t-\tau)| d\tau \leq M_f \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (11-8-2)$$

欲使  $y_{zs}(t)$  有界，即  $|y_{zs}(t)| < \infty$ ，则由式 (11-8-2) 知，必有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (11-8-3)$$

对于因果系统的冲激响应, 当  $t < 0$  时,  $h(t) = 0$ , 式 (11-5-3) 可写为

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (11-8-4)$$

上式即为线性时不变因果系统稳定的充分必要条件。

### 11.8.2 系统稳定性

线性时不变因果连续系统的  $H(s)$  可假设如下:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n \quad (11-8-5)$$

由拉普拉斯反变换知,  $H(s)$  的极点均位于  $s$  平面的左半平面时,  $h(t)$  是随时间衰减的。因此, 依据式 (11-8-4), 线性时不变因果连续系统稳定的充分必要条件是  $H(s)$  的极点均位于  $s$  平面的左半平面, 或者说系统的特征方程  $D(s) = 0$  的根都具有负的实部。

可应用劳斯-霍尔维兹准则来判别系统的稳定性, 而不需要求解特征方程的根。特别地, 对于一阶或二阶系统, 即  $n = 1$  或  $n = 2$  的情形, 系统稳定的条件是  $D(s)$  中  $s$  的各幂次系数均为正。

**例 11-8-1** 试判别如下系统的稳定性。

$$(1) \quad H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

$$(2) \quad H(s) = \frac{s-2}{s(s+2)}$$

$$(3) \quad H(s) = \frac{2s+1}{2s^2+3s+5}$$

$$(4) \quad H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s-6}$$

解: (1) 不稳定, 因为极点  $s_2 = 2$  位于  $s$  平面的右半平面;

(2) 不稳定, 因为极点  $s_1 = 0$  位于  $s$  平面的虚轴上;

(3) 稳定, 因为此二阶系统特征方程  $2s^2 + 3s + 5 = 0$  中  $s$  的各幂次系数均为正;

(4) 不稳定, 因为此二阶系统特征方程  $s^2 + 4s - 6 = 0$  中  $s$  的各幂次系数有正有负。

**例 11-8-2** 如图 11-8-1 所示系统, 求为使系统稳定的实数  $K$  的取值范围。

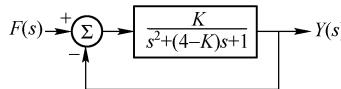


图 11-8-1 例 11-8-2 用图

解: 由图 11-8-1 可知

$$[F(s) - Y(s)] \cdot \frac{K}{s^2 + (4-K)s + 1} = Y(s)$$

从而

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{s^2 + (4-K)s + K + 1}$$

此为二阶系统, 为使其稳定, 必须有

$$4 - K > 0$$

$$K + 1 > 0$$

从而得

$$-1 < K < 4$$

## 练习题

### A. 基本概念类

11-1 关于时域经典分析法:

- (1) 解释时域经典分析法的含义, 举例说明其应用;
- (2) 解释自由响应和强制响应;
- (3) 解释零输入响应和零状态响应。

11-2 解释卷积积分分析法的含义, 举例说明其应用。

11-3 解释傅里叶变换分析法的含义, 举例说明其应用。

11-4 举例说明  $H(\omega)$  与  $h(t)$  之间的关系。

11-5 关于无失真传输系统:

- (1) 说明无失真传输系统的定义;
- (2) 给出无失真传输系统的时域特性;
- (3) 给出无失真传输系统的频域特性;
- (4) 有哪几种理想滤波器? 各有什么特点?

11-6 关于时域抽样定理:

- (1) 解释时域抽样定理;
- (2) 什么是奈奎斯特抽样频率和奈奎斯特抽样间隔?
- (3) 时域抽样定理有何实际意义?

11-7 关于拉普拉斯变换分析法:

- (1) 解释微分方程的复频域求解, 举例说明其应用;
- (2) 如何由微分方程确定系统函数  $H(s)$ ?
- (3) 如何由  $h(t)$  确定微分方程?
- (4) 给出电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$  等元件的复频域伏安关系和复频域模型;
- (5) 举例说明电路的复频域分析。

11-8 关于系统函数的零、极点分布:

- (1) 解释复频域系统函数的零点和极点;
- (2) 什么是系统函数的零、极点图? 举例说明;
- (3) 说明系统函数的零、极点分布对系统冲激响应模式有何影响;
- (4) 如何由系统函数的零、极点确定系统的频率特性? 举例说明。

11-9 关于连续时间的系统稳定性:

- (1) 系统稳定的条件是什么?
- (2) 由  $H(s)$  如何判别系统的稳定性? 举例说明其应用。

### B. 分析计算类

11-10 采用时域经典法求如下系统的响应。

- (1)  $y'(t) + 2y(t) = f(t), \quad y(0_+) = 1, \quad f(t) = \varepsilon(t)$
- (2)  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t) + f(t), \quad y(0_+) = -1, \quad y'(0_+) = 1, \quad f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$
- (3)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) - f(t), \quad y(0_+) = 1, \quad y'(0_+) = 0, \quad f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$

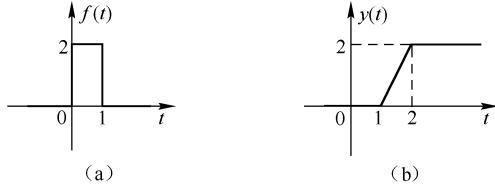
11-11 求如下系统的单位冲激响应。

- (1)  $y'(t) + y(t) = f(t)$
- (2)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f(t)$
- (3)  $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 3f'(t) - 2f(t)$

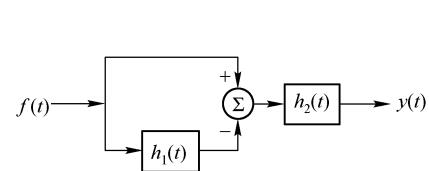
11-12 某系统的激励为  $f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$ ，冲激响应为  $h(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2)$ ，试求其零状态响应。

11-13 某系统的激励  $f(t)$  和零状态响应  $y(t)$  的波形如题图 11-1 所示，试求其冲激响应。

11-14 如题图 11-2 所示系统， $h_1(t) = \delta(t-1)$ ， $h_2(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$ ，求系统的  $h(t)$ 。



题图 11-1

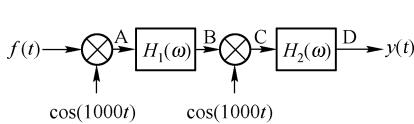


题图 11-2

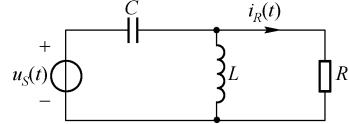
11-15 某系统的频域系统  $H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1}$ ，激励  $f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$ ，求系统的零状态响应。

11-16 如题图 11-3 所示系统，激励  $f(t) = 2Sa(2t)$ ， $H_1(\omega) = 2[\varepsilon(\omega+1000) - \varepsilon(\omega-1000)]$ ， $H_2(\omega) = 2[\varepsilon(\omega+1) - \varepsilon(\omega-1)]$ ，画出系统中 A、B、C、D 各处信号的频谱，并求  $y(t)$ 。

11-17 如题图 11-4 所示电路，求频域系统函数  $H(\omega)$ （ $u_s(t)$  为激励， $i_R(t)$  为响应）。



题图 11-3



题图 11-4

11-18 求如下系统的复频域系统函数  $H(s)$  和冲激响应  $h(t)$ 。

- (1)  $y'(t) + 3y(t) = 2f(t)$
- (2)  $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2f'(t) - 4f(t)$

11-19 求描述系统  $h(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t) + e^{-3t}\varepsilon(t)$  的微分方程。

11-20 用拉普拉斯变换分析法求解下列微分方程。

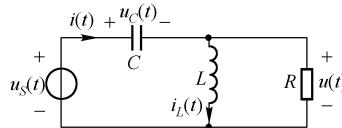
- (1)  $y'(t) + 4y(t) = 2\varepsilon(t)$ ， $y(0_-) = 1$
- (2)  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2\delta(t)$ ， $y(0_-) = 2$ ， $y'(0_-) = -1$

(3)  $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t)$ ， $y(0_-) = 0$ ， $y'(0_-) = 2$

11-21 用拉普拉斯变换分析法求解如下系统的  $y_{zs}(t)$ 、 $y_{zi}(t)$  和  $y(t)$ 。

- (1)  $y'(t) + 2y(t) = 3f(t)$ ， $y(0_-) = 2$ ， $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$
- (2)  $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$ ， $y(0_-) = -2$ ， $y'(0_-) = 1$ ， $f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$
- (3)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) - 3f(t)$ ， $y(0_-) = 1$ ， $y'(0_-) = 2$ ， $f(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$

11-22 如题图 11-5 所示电路，已知  $u_s(t) = \varepsilon(t)$ ， $u_C(0_-) = 1V$ ， $i_L(0_-) = 2A$ ， $C = \frac{1}{6}F$ ， $L = 3H$ ， $R = 2\Omega$ ，试用复频域分析法求解  $i(t)$  和  $u(t)$ 。



题图 11-5

11-23 试求如下信号的奈奎斯特抽样频率。

$$(1) \text{Sa}(100\pi t)$$

$$(2) \text{Sa}^2(50\pi t) + \text{Sa}(100\pi t)$$

$$(3) \text{Sa}^2(100\pi t)$$

$$(4) \text{Sa}^2(60\pi t) + \text{Sa}(100\pi t)$$

11-24 已知  $f(t)$  的最高截止角频率为  $\omega_m$ ，试求  $f(2t)$  和  $f(\frac{1}{2}t)$  的奈奎斯特抽样频率及奈奎斯特抽样间隔。

11-25 画出如下系统的零、极点图。

$$(1) H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s-1)(s^2 + 2s + 4)}$$

$$(2) H(s) = \frac{(s-1)^2(s+4s+6)}{(s+1)^2(s^2 + 5s + 6)}$$

$$(3) y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$$

$$(4) 2y''(t) + 4y'(t) + 4 = f'(t) + f(t)$$

11-26 试粗略画出如下系统的频率特性曲线。

$$(1) H(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$(2) H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$(3) H(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$(4) H(s) = \frac{s-1}{4s^2 + s + 16}$$

11-27 试判断如下系统的稳定性。

$$(1) H(s) = \frac{s}{s^2 + 2}$$

$$(2) H(s) = 2$$

$$(3) H(s) = \frac{2s-1}{(s+1)(s^2 + 4s + 2)}$$

$$(4) H(s) = \frac{3s+2}{s^2 - 2s + 6}$$

11-28 求为使如下系统稳定的实数  $K$  的取值范围。

$$(1) y'(t) + (1-K)y(t) = 2f(t)$$

$$(2) y''(t) - (K-2)y(t) + Ky(t) = f'(t) + 2f(t)$$

## 第12章 离散时间系统的分析

离散时间系统的分析以离散时间信号的分析为基础, 分析方法有时域分析法和变换域分析法。时域分析法有经典分析法和卷积和分析法, 变换域分析法即  $z$  变换分析法。

本章介绍离散时间系统的分析, 涉及时域经典分析法、时域卷积和分析法、 $z$  变换分析法、系统函数零极点对系统特性的影响、离散时间系统的稳定性等。

### 12.1 时域经典分析法

与连续时间系统的时域经典法类似, 离散时间系统的时域经典分析即是建立描述系统输入-输出关系的差分方程, 然后对其直接求解, 且求解方法亦与微分方程的求解相似。

对于线性时不变离散时间系统, 其输入-输出方程如式 (2-6-6) 所示, 现重写如下:

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) \\ = b_m f(k+m) + b_{m-1} f(k+m-1) + \cdots + b_1 f(k+1) + b_0 f(k) \end{aligned} \quad (12-1-1)$$

于是

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k), \quad k \dots 0 \quad (12-1-2)$$

式中,  $y_h(k)$  为通解 (亦称为齐次解或自由响应),  $y_p(k)$  为特解 (亦称为强制响应)。

#### 12.1.1 齐次解与特解

##### 12.1.1.1 齐次解

齐次解即如下齐次差分方程的解。

$$a_n y_h(k+n) + a_{n-1} y_h(k+n-1) + \cdots + a_1 y_h(k+1) + a_0 y_h(k) = 0 \quad (12-1-3)$$

此差分方程的特征方程为

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \cdots + a_1 \gamma + a_0 = 0 \quad (12-1-4)$$

若此特征方程的根 (称为特征根或固有频率) 均为单根, 设为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 则

$$y_h(k) = A_1 \gamma_1^k + A_2 \gamma_2^k + \cdots + A_n \gamma_n^k, \quad k \dots 0 \quad (12-1-5)$$

若特征根中存在  $p$  重根, 设其为  $\gamma_0$ , 则与  $\gamma_0$  相对应的有  $p$  项, 即

$$y_h(k) = (A_{01} + A_{02} k + \cdots + A_{0p} k^{p-1}) \gamma_0^k + \sum_{i=1}^{n-p} A_i \gamma_i^k \quad (12-1-6)$$

式 (12-1-5) 或式 (12-1-6) 中的待定系数由初始条件  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  等确定。

##### 12.1.1.2 特解

特解  $y_p(k)$  的形式与输入信号  $f(k)$  的变化形式有关, 如表 12-1-1 所示为几种典型输入信号  $f(k)$  所对应的特解形式。

表 12-1-1 典型输入信号所对应的特解形式

输入信号 $f(k)$	特解形式
$B$ (常数)	$P$
$k^n$	$P_0 + P_1 k + \dots + P_n k^n$
$\gamma^k$	$P \gamma^k$ ( $\gamma$ 不是特征根) $P_0 \gamma^k + P_1 k \gamma^k + \dots + P_m k^m \gamma^k$ ( $\gamma$ 是特征根, 且为单根) $P_0 \gamma^k + P_1 k \gamma^k + \dots + P_m k^m \gamma^k$ ( $\gamma$ 是特征根, 且为 $m$ 重根)
$\cos \omega k$ 或 $\sin \omega k$	$P_1 \cos \omega k + P_2 \sin \omega k$

根据给定的输入信号假定特解, 将其代入差分方程即可确定其中的系数。

**例 12-1-1** 已知描述某离散时间系统输入-输出关系的差分方程为  $y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = f(k)$ , 且  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 2$ ,  $f(k) = (-1)^k \varepsilon(k)$ , 求  $y(k)$ 。

解: (1) 求齐次解

据题意知系统的特征方程为

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0$$

得特征根  $\gamma_1 = -2$ ,  $\gamma_2 = -3$ , 于是

$$y_h(k) = A_1(-2)^k + A_2(-3)^k, \quad k \geq 0$$

(2) 求特解

因  $f(k) = (-1)^k \varepsilon(k)$ , 故可假设特解为  $y_p(k) = P(-1)^k$ ,  $k \geq 0$ , 将其代入差分方程有

$$P(-1)^{k+2} + 5P(-1)^{k+1} + 6P(-1)^k = (-1)^k, \quad k \geq 0$$

得  $P = 0.5$ , 即

$$y_p(k) = 0.5(-1)^k, \quad k \geq 0$$

(3) 求  $y(k)$

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = A_1(-2)^k + A_2(-3)^k + 0.5(-1)^k, \quad k \geq 0$$

由初始条件  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 2$ , 有

$$A_1 + A_2 + 0.5 = 1$$

$$-2A_1 - 3A_2 - 0.5 = 2$$

联立上述方程解得  $A_1 = 4$ ,  $A_2 = -3.5$ , 于是

$$y(k) = 0.5(-1)^k + 4(-2)^k - 3.5(-3)^k, \quad k \geq 0$$

## 12.1.2 零输入响应与零状态响应

对于线性时不变系统, 全响应可分解为零输入响应和零状态响应, 即

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k), \quad k \geq 0 \quad (12-1-7)$$

式中,  $y_{zi}(k)$ 、 $y_{zs}(k)$  分别为系统的零输入响应和零状态响应。

### 12.1.2.1 零输入响应

零输入响应  $y_{zi}(k)$  为系统在输入为零时仅由初始状态引起的响应, 即

$$a_n y_{zi}(k+n) + a_{n-1} y_{zi}(k+n-1) + \dots + a_1 y_{zi}'(k+1) + a_0 y_{zi}(k) = 0 \quad (12-1-8)$$

$y_{zi}(k)$  为此齐次微分方程的齐次解, 其中的待定系数由零输入响应的初始条件 ( $y_{zi}(0)$ ,  $y_{zi}(1)$ ,  $\dots$ ,  $y_{zi}(n-1)$ ) 确定。

### 12.1.2.2 零状态响应

零状态响应  $y_{zs}(k)$  为系统在初始状态为零时仅由输入引起的响应, 即

$$a_n y_{zs}(k+n) + a_{n-1} y_{zs}(k+n-1) + \dots + a_1 y_{zs}(k+1) + a_0 y_{zs}(k) \quad (12-1-9)$$

$$= b_m f(k+m) + b_{m-1} f(k+m-1) + \dots + b_1 f(k+1) + b_0 f(k)$$

$$y_{zs}(k) = y_{zs_h}(k) + y_{zs_p}(k), \quad k \geq 0 \quad (12-1-10)$$

式中,  $y_{zs_h}(k)$ 、 $y_{zs_p}(k)$  分别为式 (12-1-9) 的通解和特解,  $y_{zs}(k)$  中的待定系数由零状态响应的初始条件 ( $y_{zs}(0)$ ,  $y_{zs}(1)$ ,  $\dots$ ,  $y_{zs}(n-1)$ ) 确定。

## 12.2 时域卷积和分析法

### 12.2.1 单位函数响应

单位函数  $\delta(k)$  激励下离散时间系统的零状态响应称为单位函数响应或单位序列响应, 记为  $h(k)$ , 它反映了系统的时域特性。由此, 系统可用  $h(k)$  来表示, 如图 12-2-1 所示。

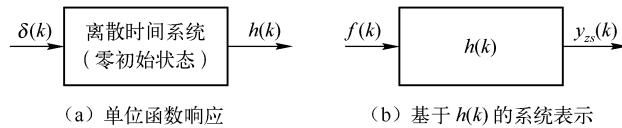


图 12-2-1 单位函数响应以及系统表示

$h(k)$  的求解方法可分为两类: 直接法和间接法。直接法就是直接在时域进行求解的一种方法。如果已知组成系统的各子系统的单位函数响应及这些子系统的联接方式, 则采用这种方法一般是易于求解的。

间接法是先求解  $h(k)$  的  $z$  变换  $H(z)$  (称为  $z$  域系统函数), 然后进行  $z$  反变换即可得  $h(k)$ 。这种方法只能适用于线性时不变系统。

下面介绍由差分方程直接求解单位函数响应。根据单位函数响应的定义, 对于  $n$  阶线性时不变系统, 有

$$a_n h(k+n) + a_{n-1} h(k+n-1) + \dots + a_1 h(k+1) + a_0 h(k) \quad (12-2-1)$$

$$= b_m \delta(k+m) + b_{m-1} \delta(k+m-1) + \dots + b_1 \delta(k+1) + b_0 \delta(k)$$

$$h(k) = 0, \quad k < 0 \quad (12-2-2)$$

引入  $h_0(k)$ , 而且

$$a_n h_0(k+n) + a_{n-1} h_0(k+n-1) + \dots + a_1 h_0(k+1) + a_0 h_0(k) = \delta(k) \quad (12-2-3)$$

$$h_0(k) = 0, \quad k < 0 \quad (12-2-4)$$

令式 (12-2-3) 中的  $k = -n$ , 有

$$a_n h_0(0) + a_{n-1} h_0(-1) + \dots + a_1 h_0(-n+1) + a_0 h_0(-n) = \delta(-n) \quad (12-2-5)$$

由式 (12-2-4) 以及  $\delta(-n)=0$  得  $h_0(0)=0$ ，同理，再依次令式 (12-2-3) 中的  $k=-n+1, k=-n+2, \dots, k=0$ ，可得

$$\begin{cases} h_0(1)=h_0(2)=\dots=h_0(n-2)=0 \\ h_0(n)=\frac{1}{a_n} \end{cases} \quad (12-2-6)$$

在  $k>1$  时， $h_0(k)$  即为式 (12-2-3) 的齐次解，其中的待定系数由式 (12-2-6) 确定。

根据线性时不变系统的线性性和时不变性，最终可得

$$h(t)=b_m h_0(k+m)+b_{m-1} h_0(k+m-1)+\dots+b_1 h_0(k+1)+b_0 h_0(k) \quad (12-2-7)$$

例 12-2-1 求系统  $y(k)=2f(k)+3f(k-1)$  的单位函数响应  $h(k)$ 。

解：根据题意得

$$h(k)=2\delta(k)+3\delta(k-1)$$

例 12-2-2 如图 12-2-2 所示系统， $h_1(k)=\delta(k)$ ， $h_2(k)=\delta(k-N)$ ， $N$  为常数， $h_3(k)=\varepsilon(k)$ ，求  $h(k)$ 。

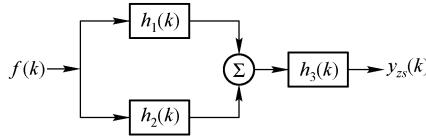


图 12-2-2 由多个子系统联接而成的系统

解：依题意知

$$\begin{aligned} h(k) &= [\delta(k)*h_1(k) - \delta(k)*h_2(k)]*h_3(k) = [\delta(k) - \delta(k-N)]*\varepsilon(k) \\ &= \varepsilon(k) - \varepsilon(k-N) \end{aligned}$$

例 12-2-3 求系统  $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2f(k+1)+f(k)$  的单位函数响应  $h(k)$ 。

解：(1) 求  $h_0(k)$

根据题意引入  $h_0(k)$ ，而且

$$h_0(k+2)+3h_0(k+1)+2h_0(k)=\delta(k)$$

$$h_0(k)=0, \quad k<0$$

特征方程为  $\gamma^2+3\gamma+2=0$ ，于是特征根  $\gamma_1=-1$ ， $\gamma_2=-2$ ，从而

$$h_0(k)=A_1(-1)^k+A_2(-2)^k, \quad k>0$$

据式 (12-2-6) 知，初始条件为  $h_0(1)=0$ ， $h_0(2)=1$ ，即

$$-A_1-2A_2=0$$

$$A_1+4A_2=1$$

联立上述方程解得  $A_1=-1$ ， $A_2=\frac{1}{2}$ ，从而

$$h_0(k)=-(1)^k+\frac{1}{2}(-2)^k, \quad k>0$$

考虑到  $k \leq 0$  时， $h_0(k)=0$ ，故  $h_0(k)$  可改写为

$$h_0(k)=[-(-1)^k+\frac{1}{2}(-2)^k]\varepsilon(k-1)$$

(2) 求  $h(k)$

据式 (12-2-7) 得

$$h(k) = 2h_0(k+1) + h_0(k) = 2[-(-1)^{k+1} + 0.5(-2)^{k+1}] \varepsilon(k) + [-(-1)^k + 0.5(-2)^k] \varepsilon(k-1)$$

利用  $\varepsilon(k) = \delta(k) + \varepsilon(k-1)$ ,  $h(k)$  可简化为

$$\begin{aligned} h(k) &= [-(-1)^{k-1} + 3(-2)^{k-1}] \varepsilon(k-1) \\ &= [(-1)^k + 3(-2)^{k-1}] \varepsilon(k-1) \end{aligned}$$

## 12.2.2 时域卷积和分析法及其应用

卷积和分析法是利用卷积和求解线性时不变离散时间系统零状态响应的一种方法, 即由激励  $f(k)$  与单位函数响应  $h(k)$  的卷积和求解系统的零状态响应  $y_{zs}(k)$ 。

$$y_{zs}(k) = f(k) * h(k) \quad (12-2-8)$$

此方法基于线性时不变系统的线性性和时不变性, 即对于线性时不变零状态系统有

$$\begin{aligned} \delta(k) &\rightarrow h(k) \\ f(n)\delta(k-n) &\rightarrow f(n)h(k-n) \\ f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(k-n) &\rightarrow y_{zs}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)h(k-n) = f(k) * h(k) \end{aligned}$$

例 12-2-4 已知  $f(k) = \gamma^k \varepsilon(k)$ ,  $h(k) = \varepsilon(k)$ , 求  $y_{zs}(k)$ 。

解: 采用时域卷积和分析法, 得

$$\begin{aligned} y_{zs}(k) &= f(k) * h(k) = \gamma^k \varepsilon(k) * \varepsilon(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n \varepsilon(n) \varepsilon(k-n) \\ &= \left( \sum_{n=0}^k \gamma^n \right) \varepsilon(k) = \frac{1-\gamma^{k+1}}{1-\gamma} \varepsilon(k) \end{aligned}$$

## 12.3 z 变换分析法

z 变换分析法是利用 z 变换求取线性时不变离散时间系统响应的一种方法。此方法既可以求解系统的零状态响应, 也可以求解系统的零输入响应。

重写描述线性时不变离散时间系统的常系数线性差分方程如下:

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) \\ = b_m f(k+m) + b_{m-1} f(k+m-1) + \cdots + b_1 f(k+1) + b_0 f(k) \end{aligned} \quad (12-3-1)$$

### 12.3.1 零输入响应

系统在零输入下的差分方程为

$$a_n y_{zi}(k+n) + a_{n-1} y_{zi}(k+n-1) + \cdots + a_1 y_{zi}(k+1) + a_0 y_{zi}(k) = 0 \quad (12-3-2)$$

对上式进行 z 变换。利用 z 变换的移位性质, 有

$$a_i y_{zi}(k+i) \rightarrow a_i z^i [Y_{zi}(z) - y_{zi}(0) - y_{zi}(1)z^{-1} - \cdots - y_{zi}(i-1)z^{-(i-1)}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (12-3-3)$$

$$Y_{zi}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{i-1} y_{zi}(k) z^{i-k}}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \quad (12-3-4)$$

对  $Y_{zi}(z)$  进行  $z$  反变换，即可得零输入响应  $y_{zi}(k)$ 。

**例 12-3-1** 已知  $y_{zi}(k+2) - 5y_{zi}(k+1) + 6y_{zi}(k) = 0$ ，其中  $y_{zi}(0) = 2$ ， $y_{zi}(1) = 3$ ，求  $y_{zi}(k)$ 。

解：将差分方程进行  $z$  变换，可得

$$z^2[Y_{zi}(z) - y_{zi}(0) - y_{zi}(1)z^{-1}] - 5z[Y_{zi}(z) - y_{zi}(0)] + 6Y_{zi}(z) = 0$$

代入初始条件后，整理得

$$Y_{zi}(z) = \frac{2z^2 - 7z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{3z}{z-2} - \frac{z}{z-3}$$

从而有

$$y_{zi}(k) = 3 \cdot 2^k - 3^k, \quad k \geq 0$$

注意：此处不能用  $\varepsilon(k)$  代替  $k \geq 0$ ，因为  $y_{zi}(k)$  不是因果信号。

### 12.3.2 零状态响应

根据卷积和分析法， $f(k)$  激励下系统的零状态响应为  $y_{zs}(k) = f(k) * h(k)$ ，由  $z$  变换的卷积定理得

$$Y_{zs}(z) = F(z)H(z) \quad (12-3-5)$$

式中， $F(z)$ 、 $H(z)$  和  $Y_{zs}(z)$  分别为  $f(k)$ 、 $h(k)$  和  $y_{zs}(k)$  的  $z$  变换，其中  $H(z)$  称为  $z$  域系统函数。由此，可知  $z$  变换分析法求解零状态响应一般可分为以下几个步骤：

- (1) 求取激励  $f(k)$  的  $z$  变换  $F(z)$ ；
- (2) 确定  $z$  域系统函数  $H(z)$ ；
- (3) 求取零状态响应的  $z$  变换  $Y_{zs}(z) = F(z)H(z)$ ；
- (4) 将响应  $Y_{zs}(z)$  进行  $z$  反变换即得  $y_{zs}(k)$ 。

对于如式 (12-3-1) 所描述的系统，易得其  $z$  域系统函数  $H(z)$  如下：

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{F(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (12-3-6)$$

反之，如式 (12-3-6) 所示  $z$  域系统函数  $H(z)$ ，相应地，描述此系统的  $n$  阶前向差分方程必如式 (12-3-1) 所示。

另外，鉴于  $H(z)$  是  $h(k)$  的  $z$  变换，反映了系统的  $z$  域特性，从而零状态离散时间系统也可用  $H(z)$  来表示，如图 12-3-1 所示。

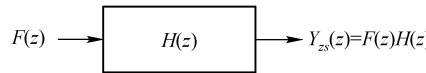


图 12-3-1 基于  $H(z)$  的系统表示

**例 12-3-2** 已知某系统的  $z$  域系统函数  $H(z) = \frac{1}{z+1}$ ，激励  $f(k) = 2^k \varepsilon(k)$ ，求系统的零状态响应  $y_{zs}(k)$ 。

$$\text{解: } f(k) = 2^k \varepsilon(k) \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$Y_{zs}(z) = F(z)H(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{-\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{\frac{1}{3}}{z-2}$$

于是得

$$y_{zs}(k) = -\frac{1}{3}(-1)^k \varepsilon(k) + \frac{1}{3}2^k \varepsilon(k)$$

例 12-3-3 求系统  $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2f(k+1) + f(k)$  的单位函数响应  $h(k)$ 。

解: 根据式 (12-3-6), 有

$$H(z) = \frac{2z+1}{z^2+3z+2} = \frac{2z+1}{(z+1)(z+2)} = \frac{-1}{z+1} + \frac{3}{z+2}$$

从而得

$$h(k) = [ -(-1)^{k-1} + 3 \cdot (-2)^{k-1} ] \varepsilon(k-1)$$

例 12-3-4 已知某系统的单位函数响应  $h(k) = 2\delta(k) + (3^k - 2^k)\varepsilon(k-1)$ , 求描述此系统的差分

方程。

解: 依题意知

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = 2 + \frac{3}{z-3} - \frac{2}{z-2} = \frac{2z^2 - 9z + 12}{z^2 - 5z + 6}$$

从而得 2 阶前向差分方程为

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 2f(k+2) - 9f(k+1) + 12f(k)$$

例 12-3-5 已知系统的差分方程为  $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = f(k+2) - 3f(k)$ ,  $f(k) = \varepsilon(k)$ , 求系统的单位函数响应  $h(k)$  和零状态响应  $y_{zs}(k)$ 。

解: 依题意知

$$H(z) = \frac{z^2 - 3}{z^2 - 5z + 6}$$

于是

$$Y_{zs}(z) = F(z) \cdot H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2 - 3}{z^2 - 5z + 6}$$

对  $H(z)$  和  $Y_{zs}(z)$  取 z 反变换, 得

$$h(k) = \delta(k) + (2 \cdot 3^k - 2^{k-1})\varepsilon(k-1)$$

$$y_{zs}(k) = (-1 - 2^k + \frac{1}{2} \cdot 3^{k+1})\varepsilon(k)$$

### 12.3.3 全响应

求取全响应视给出的初始条件的不同可分为两种情况: 已知零输入响应的初始条件、已知全响应的初始条件。

(1) 已知零输入响应的初始条件

按前述方法分别求取  $y_{zi}(k)$  和  $y_{zs}(k)$ , 从而

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$

## (2) 已知全响应的初始条件

已知全响应的初始条件时, 可以根据差分方程先求出零输入响应的初始条件, 然后再按照上述方法求解; 或者通过直接对差分方程进行  $z$  变换来予以求解。譬如, 对于如式 (12-3-1) 所描述的系统, 将其两端进行  $z$  变换, 通过整理后可得

$$Y(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \cdot F(z) + \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{i-1} y(k) z^{i-k} - \sum_{j=0}^m b_j \sum_{k=0}^{j-1} f(k) z^{j-k}}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) \quad (12-3-7)$$

$$\text{其中, } Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \cdot F(z) = F(z)H(z), \quad Y_{zi}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^{i-1} y(k) z^{i-k} - \sum_{j=0}^m b_j \sum_{k=0}^{j-1} f(k) z^{j-k}}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}, \text{ 对其进行}$$

$z$  反变换即可得  $y_{zs}(k)$ 、 $y_{zi}(k)$  和  $y(k)$ 。

**例 12-3-6** 已知  $y(k+2) - 0.7y(k+1) + 0.1y(k) = 7f(k+2) - 2f(k+1)$ , 其中  $f(k) = \varepsilon(k)$ ,  $y(0) = 9$ ,  $y(1) = 13.9$ 。(1) 求全响应; (2) 求零输入响应, 零状态响应, 并由此求全响应。

解: (1) 求全响应。

对差分方程两端进行  $z$  变换, 得

$$\begin{aligned} & z^2[Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}] - 0.7z[Y(z) - y(0)] + 0.1Y(z) \\ & = 7z^2[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}] - 2z[F(z) - f(0)] \end{aligned}$$

整理得

$$Y(z) = \frac{9z^3 + 4.27z^2 - 8.27z}{(z^2 - 0.7z + 0.1)(z - 1)}$$

从而

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = 12.5 + 7 \cdot 0.5^k - 10.5 \cdot 0.2^k, \quad k \dots 0$$

(2) 求零输入响应, 零状态响应, 并由此求全响应。

对差分方程两端进行  $z$  变换, 得

$$\begin{aligned} & z^2[Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}] - 0.7z[Y(z) - y(0)] + 0.1Y(z) \\ & = 7z^2[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}] - 2z[F(z) - f(0)] \end{aligned}$$

整理得

$$Y_{zi}(z) = \frac{2z^2 + 8.27z}{z^2 - 0.7z + 0.1}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{7z^2 - 2z}{z^2 - 0.7z + 0.1} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

从而得

$$y_{zi}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_{zi}(z)] = 12 \cdot 0.5^k - 10 \cdot 0.2^k, \quad k \dots 0$$

$$y_{zs}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_{zs}(z)] = (12.5 - 5 \cdot 0.5^k - 0.5 \cdot 0.2^k) \varepsilon(k)$$

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) = 12.5 + 7 \cdot 0.5^k - 10.5 \cdot 0.2^k, \quad k \dots 0$$

## 12.4 系统函数零、极点对系统特性的影响

离散时间系统  $H(z)$  的零点和极点概念及零、极点图绘制方法与 11.7 节所述相同。相应地

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)} \quad (12-4-1)$$

式中,  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 为零点;  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 为极点;  $H_0 = \frac{b_m}{a_n}$  为标量系数。譬如,

$H(z) = \frac{2(z+2)(z-0.5)^2(z-2+j)(z-2-j)}{z(z+1)^2(z+0.5+j2)(z+0.5-j2)}$  的零、极点图如图 12-4-1 所示。

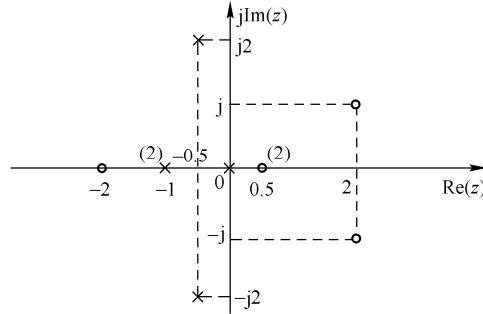


图 12-4-1 零、极点图示例

### 12.4.1 单位函数响应模式

$H(z)$  的极点分布及  $h(k)$  变化模式示意图如图 12-4-2 所示。

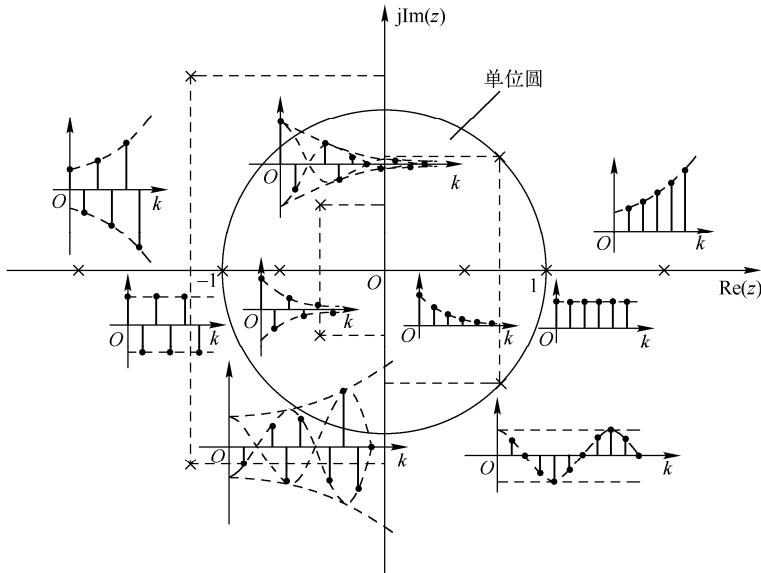


图 12-4-2  $H(z)$  极点分布及  $h(k)$  变化模式

(1)  $H(z)$  有极点位于  $z$  平面单位圆上,  $H(z)$  包含  $\frac{Az}{z-\gamma}$ , 其中  $\gamma = |\gamma| e^{j\theta}$ ,  $|\gamma|=1$ , 则  $h(k)$  中含有  $A\gamma^k \varepsilon(k) = A e^{jk\theta} \varepsilon(k)$ , 单位函数响应的模式为等幅变化的序列。

(2)  $H(z)$  有极点位于  $z$  平面单位圆外,  $H(z)$  包含  $\frac{Az}{z-\gamma}$ ,  $|\gamma|>1$ , 则  $h(k)$  中含有  $A\gamma^k \varepsilon(k) = A|\gamma|^k e^{jk\theta} \varepsilon(k)$ , 单位函数响应的模式为幅度按指数单调增长或振荡增长的序列。

(3)  $H(z)$  有极点位于  $z$  平面单位圆内,  $H(z)$  包含  $\frac{Az}{z-\gamma}$ ,  $|\gamma|<1$ , 则单位函数响应的模式为幅度按指数单调衰减或振荡衰减的序列。

若  $H(z)$  具有  $r$  重极点, 则单位函数响应的模式中含有  $k^{r-1}$  因子。譬如,  $H(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ 。

## 12.4.2 频率响应特性

与连续时间系统类似, 已知系统函数  $H(z)$  的零、极点分布, 同样可以借助几何作图的方法确定其频率响应特性。若  $H(z)$  的极点全部位于  $z$  平面单位圆内, 则有

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = |H(e^{j\omega T})| e^{j\theta(\omega)} \quad (12-4-2)$$

因为  $e^{j\omega T}$  是  $\omega$  的周期函数, 故  $H(e^{j\omega T})$  也是  $\omega$  的周期函数。结合式 (12-4-1) 有

$$H(e^{j\omega T}) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (e^{j\omega T} - z_i)}{\prod_{k=1}^n (e^{j\omega T} - p_k)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m N_i}{\prod_{k=1}^n M_k} \quad (12-4-3)$$

式中,  $N_i = (e^{j\omega T} - z_i) = N_i e^{j\varphi_i}$  为由零点  $z_i$  引向单位圆上某点  $e^{j\omega T}$  的一个矢量, 称为零点矢量;  $M_k = (e^{j\omega T} - p_k) = M_k e^{j\psi_k}$  为由极点  $p_k$  引向单位圆上某点  $e^{j\omega T}$  的一个矢量, 称为极点矢量, 从而有

$$|H(\omega)| = H_0 \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m N_i}{\prod_{k=1}^n M_k} \quad (12-4-4)$$

$$\theta(\omega) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m - \psi_1 - \psi_2 - \cdots - \psi_n = \sum_{i=1}^m \varphi_i - \sum_{k=1}^n \psi_k \quad (12-4-5)$$

当  $\omega$  改变致使  $e^{j\omega T}$  沿单位圆变化时, 各零点矢量和极点矢量的模和辐角都随之改变, 于是可得出幅频特性和相频特性曲线。下面举例说明。

**例 12-4-1** 已知  $H(z) = \frac{z}{z-a}$ , 其中  $0 < a < 1$ , 试画出其零、极点图及频率特性曲线。

解: 由题意有

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a} = \frac{N}{M} = |H(e^{j\omega T})| e^{j\theta(\omega)} \\ |H(e^{j\omega T})| &= \frac{N}{M} \\ \theta(\omega) &= \varphi - \psi \end{aligned}$$

零、极点图, 频率特性曲线等分别如图 12-4-3 (a) 和 (b) 所示。

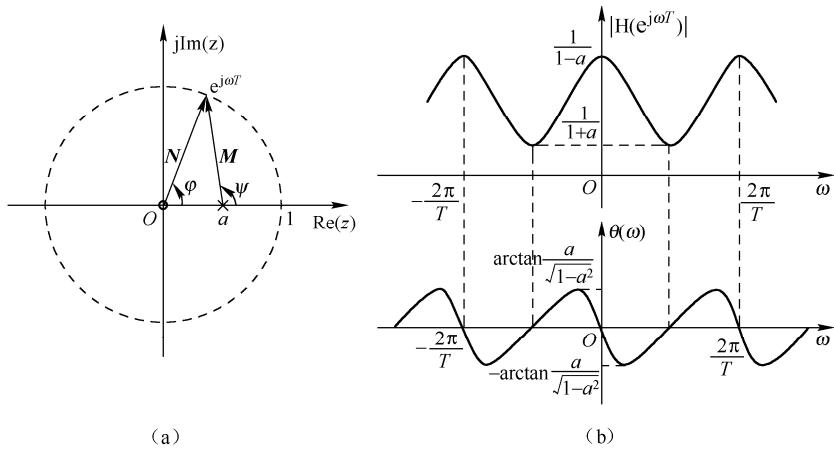


图 12-4-3 例 12-4-1 用图

基于上述分析, 可知:

- (1) 位于  $z=0$  处的零点或极点不会影响幅频特性, 只会影响相频特性;
- (2) 若有极点靠近单位圆, 则当  $\omega$  变化经过此极点附近时, 幅频特性出现峰值; 若有零点靠近单位圆, 则当  $\omega$  变化经过此零点附近时, 幅频特性出现谷值。

## 12.5 离散时间系统的稳定性

### 12.5.1 稳定系统的含义

与连续时间系统类似, 对于任意有界的激励均产生有界的零状态响应的系统称为稳定系统, 反之称为不稳定系统。

设线性时不变离散时间系统的输入信号  $f(k)$  有界, 即  $|f(k)|_b, M_f, M_f$  为有界正值, 从而有

$$y_{zs}(k) = f(k) * h(k) = h(k) * f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)f(k-n) \quad (12-5-1)$$

$$|y_{zs}(k)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)f(k-n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| |f(k-n)| \leq M_f \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \quad (12-5-2)$$

欲使  $y_{zs}(k)$  有界, 即  $|y_{zs}(k)| < \infty$ , 则由式 (12-5-2) 知, 必有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (12-5-3)$$

对于因果系统的单位函数响应, 当  $k < 0$  时,  $h(k) = 0$ , 式 (12-5-3) 可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (12-5-4)$$

上式即为线性时不变因果系统稳定的充分必要条件。

### 12.5.2 系统稳定性

线性时不变因果离散系统的  $H(z)$  可假设如下:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m, n$$
(12-5-5)

由  $z$  反变换知,  $H(z)$  的极点均位于  $z$  平面单位圆内时,  $h(k)$  是随  $k$  衰减的。因此, 依据式 (12-5-4), 线性时不变因果离散系统稳定的充分必要条件是  $H(z)$  的极点均位于  $z$  平面的单位圆内, 或者说系统的特征方程  $D(z)=0$  的根的模均小于 1。

可应用裘利判别法来判别系统的稳定性, 而不需要求解特征方程的根。特别地, 对于二阶系统, 即  $n=2$  的情形, 离散系统稳定的条件是

$$a_2 > |a_0|$$

$$D(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$$

$$D(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$$

**例 12-5-1** 试判别如下系统的稳定性。

$$(1) \quad H(z) = \frac{z+0.5}{(z-0.5)(z-2)}$$

$$(2) \quad H(z) = \frac{z-2}{z(z^2+0.5)}$$

$$(3) \quad H(z) = \frac{2z+1}{z^2+3z+5}$$

$$(4) \quad H(z) = \frac{z+2}{4z^2+z-2}$$

解: (1) 不稳定, 因为极点  $z_2 = 2$  位于  $z$  平面单位圆外;

(2) 稳定, 因为极点  $z_1 = 0$ ,  $z_{2,3} = \pm j\sqrt{0.5}$  均位于  $z$  平面单位圆内;

(3) 不稳定, 因为  $a_2 = 1 < a_0 = 5$ ;

(4) 稳定, 因为  $a_2 = 4 > |a_0| = 2$ ,  $D(1) = 4 + 1 - 2 = 3 > 0$ ,  $D(-1) = 4 - 1 - 2 = 1 > 0$ 。

**例 12-5-2** 求为使如下系统稳定的实数  $K$  的取值范围。

$$(1) \quad y(k+1) + (K-1)y(k) = 2f(k)$$

$$(2) \quad y(k+2) + y(k+1) + (2K-1)y(k) = 2f(k+1) - f(k)$$

解: (1) 此一阶系统的特征方程为  $D(z) = z + (K-1) = 0$ , 为使系统稳定, 则

$$|-(K-1)| < 1$$

于是

$$0 < K < 2$$

(2) 此二阶系统的特征方程为  $D(z) = z^2 + z + (2K-1) = 0$ , 为使系统稳定, 则

$$a_2 = 1 > |a_0| = |2K-1|$$

$$D(1) = 1 + 1 + 2K - 1 > 0$$

$$D(-1) = 1 - 1 + 2K - 1 > 0$$

从而有

$$0.5 < K < 1$$

## 练习题

### A. 基本概念类

12-1 解释时域经典分析法的含义, 举例说明其应用。

- 12-2 解释单位函数响应的含义。
- 12-3 解释时域卷积和分析法，举例说明其应用。
- 12-4 举例说明差分方程的  $z$  域求解。
- 12-5 举例说明差分方程与  $H(z)$  之间的关系。
- 12-6 举例说明  $H(z)$  与  $h(k)$  之间的关系。

12-7 关于系统函数零极点分布：

- (1) 说明系统函数的零、极点分布对系统单位函数响应模式有何影响。
- (2) 如何由系统函数的零、极点确定系统的频率特性？举例说明。

12-8 关于离散时间系统的稳定性：

- (1) 系统稳定的条件是什么？
- (2) 如何由  $H(z)$  判别系统的稳定性？举例说明其应用。

## B. 分析计算类

12-9 采用时域经典法求如下系统的响应。

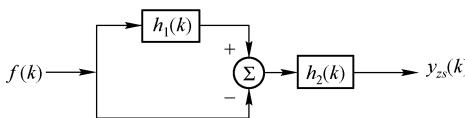
- (1)  $y(k+1) + 3y(k) = f(k)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $f(k) = (-2)^k \varepsilon(k)$
- (2)  $y(k+2) + 6y(k+1) + 8y(k) = 2f(k+1) - f(k)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = -1$ ,  $f(k) = \varepsilon(k)$
- (3)  $y(k+2) + 5y(k+1) + 4y(k) = 2f(k+1)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 0$ ,  $f(k) = (-1)^k \varepsilon(k)$

12-10 求如下系统的单位函数响应。

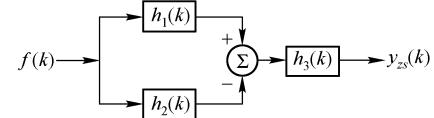
- (1)  $y(k+1) + 2y(k) = f(k)$
- (2)  $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 2f(k)$
- (3)  $y(k+2) - 3y(k+1) - 4y(k) = 3f(k+1) + 2f(k)$

12-11 由三个子系统构成的复合系统如题图 12-1 所示，其中  $h_1(k) = \varepsilon(k)$ ,  $h_2(k) = \delta(k-3)$ ，试求系统的单位序列响应  $h(k)$ 。

12-12 复合系统如题图 12-2 所示，其中， $h_1(k) = \varepsilon(k)$ ,  $H_2(z) = \frac{z}{z+1}$ ,  $H_3(z) = \frac{1}{z}$ 。试求输入  $f(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-2)$  时的零状态响应  $y_{zs}(k)$ 。



题图 12-1



题图 12-2

12-13 求下列系统的系统函数  $H(z)$  和单位序列响应  $h(k)$ 。

- (1)  $y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = f(k) - 3f(k-2)$
- (2)  $8y(k+2) - 2y(k+1) - 3y(k) = f(k+1) + 2f(k)$
- (3)  $y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{1}{8}y(k-2) = f(k)$
- (4)  $y(k) - 1.5y(k-1) - y(k-2) = f(k-1)$

12-14 采用  $z$  变换分析法求解下列差分方程。

- (1)  $y(k) - 0.9y(k-1) = 0.1\varepsilon(k)$ ,  $y(-1) = 2$ ;
- (2)  $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = \varepsilon(k)$ ,  $y(-1) = 0$ ,  $y(-2) = 0.5$ ;

$$(3) \quad y(k+2) - y(k+1) - 2y(k) = \varepsilon(k), \quad y(0) = y(1) = 1;$$

$$(4) \quad y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 3^k \varepsilon(k), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

12-15 求下列系统的零输入响应  $y_{zi}(k)$ 、零状态响应  $y_{zs}(k)$  和全响应  $y(k)$ 。

$$(1) \quad y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k), \quad f(k) = \varepsilon(k), \quad y(-1) = -1, \quad y(-2) = 0.25;$$

$$(2) \quad y(k+2) - 0.7y(k+1) + 0.1y(k) = 7f(k+1) - 2f(k), \quad f(k) = 0.4^k \varepsilon(k), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

12-16 已知某系统的  $z$  域系统函数为  $H(z) = \frac{z+3}{z^2+3z+2}$ ，试求系统的单位序列响应  $h(k)$  和描述系统的二阶前向差分方程。

12-17 试粗略画出如下系统的频率特性曲线。

$$(1) \quad H(z) = \frac{z}{z+0.5}$$

$$(2) \quad H(z) = \frac{z+0.5}{z-0.5}$$

$$(3) \quad H(z) = \frac{z-1}{z}$$

$$(4) \quad H(z) = \frac{1}{(z^2+1.2z+0.85)}$$

12-18 判别如下系统的稳定性。

$$(1) \quad H(z) = \frac{z-0.5}{(z+0.5)(z+2)}$$

$$(2) \quad H(z) = \frac{2z}{(z-0.5)(z^2+0.25)}$$

$$(3) \quad H(z) = \frac{2z-1}{z^2+2z+3}$$

$$(4) \quad H(z) = \frac{z-2}{5z^2-z-3}$$

12-19 判别如下系统的稳定性。

$$(1) \quad y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = f(k) - 3f(k-2)$$

$$(2) \quad 8y(k+2) - 2y(k+1) - 3y(k) = f(k+1) + 2f(k)$$

12-20 求解为使如下系统稳定的实数  $K$  的取值范围。

$$(1) \quad H(z) = \frac{z-1}{z+K}$$

$$(2) \quad H(z) = \frac{z+1}{(K-1)z+2}$$

$$(3) \quad H(z) = \frac{z^2+3z+2}{2z^2-(K-1)z+1}$$

$$(4) \quad H(z) = \frac{2z+3}{z^2+z+K}$$

# 第 13 章 系统模拟

系统的模拟不是对系统的仿制，而是功能上的等效。也就是说，用来模拟系统的装置和被模拟的系统具有相同的数学模型，在功能上是等效的，而且这种模拟也并不唯一。

本章介绍系统模拟，涉及基于数学模型的模拟和基于系统函数的模拟。

## 13.1 基于数学模型的模拟

### 13.1.1 基于微分方程的系统模拟

#### 13.1.1.1 一阶系统

一阶 LTI 连续时间系统的微分方程如下式，其中  $f(t)$  为输入信号， $y(t)$  为输出信号。

$$y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (13-1-1)$$

上式可改写为

$$y'(t) = f(t) - a_0 y(t) \quad (13-1-2)$$

由此可用相加、倍乘、积分等三个基本运算单元来实现，如图 13-1-1 所示。

#### 13.1.1.2 二阶系统

二阶 LTI 连续时间系统的微分方程如下：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (13-1-3)$$

上式可改写为

$$y''(t) = f(t) - a_1 y'(t) - a_0 y(t) \quad (13-1-4)$$

从而易得其模拟图如图 13-1-2 所示。

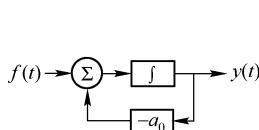


图 13-1-1 一阶系统的模拟图

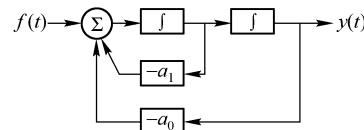


图 13-1-2 二阶系统的模拟图 (一)

式 (13-1-5) 所示二阶系统的微分方程中没有包含输入信号  $f(t)$  的导数。在一般情况下，微分方程可能会含有  $f(t)$  的导数，即

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 f'(t) + b_0 f(t) \quad (13-1-5)$$

对于这样的系统，可引入一个辅助函数  $q(t)$ ，使其满足

$$q''(t) + a_1 q'(t) + a_0 q(t) = f(t) \quad (13-1-6)$$

从而有

$$y(t) = b_1 q'(t) + b_0 q(t) \quad (13-1-7)$$

于是, 可先根据式(13-1-6)模拟出  $q(t)$  与  $f(t)$  所表达的系统, 然后根据式(13-1-7)可得  $y(t)$ , 如图 13-1-3 所示。

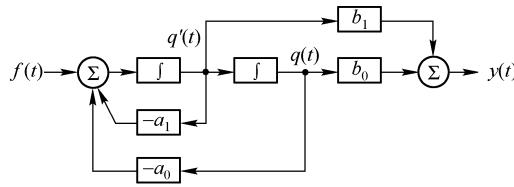


图 13-1-3 二阶系统的模拟图 (二)

### 13.1.1.3 高阶系统

$n$  阶 LTI 连续时间系统的微分方程如下:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) \quad (13-1-8)$$

$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

引入辅助函数  $q(t)$ , 使其满足

$$q^{(n)}(t) + a_{n-1}q^{(n-1)}(t) + \dots + a_1q'(t) + a_0q(t) = f(t) \quad (13-1-9)$$

从而有

$$y(t) = b_m q^{(m)}(t) + b_{m-1} q^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 q'(t) + b_0 q(t) \quad (13-1-10)$$

参照二阶系统的模拟图, 可得其模拟图如图 13-1-4 所示。

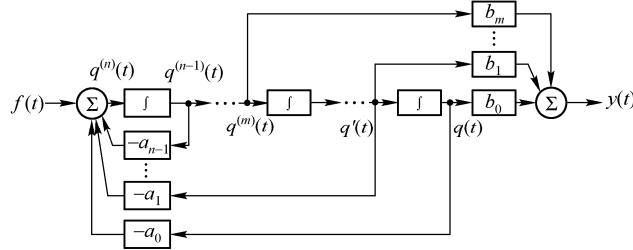


图 13-1-4  $n$  阶系统的模拟图

### 13.1.2 基于差分方程的系统模拟

基于差分方程的模拟与基于微分方程的模拟类似, 只是模拟图中的积分器对应于延时器。譬如, 二阶 LTI 离散时间系统的差分方程如下式, 其中  $f(k)$  为输入信号,  $y(k)$  为输出信号。

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_1f(k+1) + b_0f(k) \quad (13-1-11)$$

可引入一个辅助函数  $q(k)$ , 使其满足

$$q(k+2) + a_1q(k+1) + a_0q(k) = f(k) \quad (13-1-12)$$

从而有

$$y(k) = b_1q(k+1) + b_0q(k) \quad (13-1-13)$$

于是, 可先根据式(13-1-12) 模拟出  $q(k)$  与  $f(k)$  所表达的系统, 然后根据式(13-1-13) 可得  $y(k)$ , 如图 13-1-5 所示。

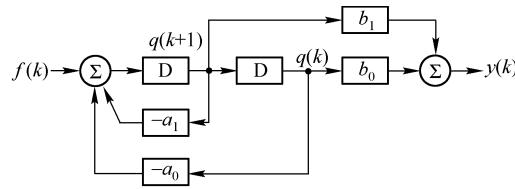


图 13-1-5 二阶系统的模拟图

类似地，由式 (13-1-14) 所描述的  $n$  阶 LTI 离散时间系统，其模拟图如图 13-1-6 所示。

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ & = b_m f(k+m) + b_{m-1}f(k+m-1) + \cdots + b_1f(k+1) + b_0f(k) \end{aligned} \quad (13-1-14)$$

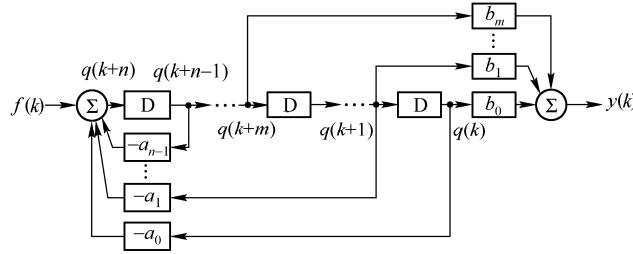


图 13-1-6  $n$  阶系统的模拟图

## 13.2 基于系统函数的模拟

### 13.2.1 基于 $H(s)$ 的系统模拟

对于同一系统函数  $H(s)$ ，通过不同的运算，可以得到多种形式的模拟方案。常用的有直接形式、级联形式、并联形式等。

#### 13.2.1.1 直接形式

对于一阶系统，

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s + a_0} = \frac{s^{-1}}{1 + a_0 s^{-1}} \quad (13-2-1)$$

从而有

$$Y(s) = [F(s) - a_0 Y(s)]s^{-1} \quad (13-2-2)$$

由此可得其模拟图如图 13-2-1 所示。

显然，图 13-2-1 是图 13-1-1 的  $s$  域模型。事实上， $s^{-1}$  即为时域积分对应于  $s$  域的运算。

对于由式 (13-1-8) 所描述的系统，其  $H(s)$  为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (13-2-3)$$

类似地，其  $s$  域模拟图即为图 13-1-4 对应的  $s$  域模型，如图 13-2-2 所示。

#### 13.2.1.2 级联形式

级联形式是将  $H(s)$  分解为几个较简单的子系统函数的乘积，即

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)\cdots H_n(s) = \prod_{i=1}^n H_i(s) \quad (13-2-4)$$

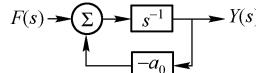


图 13-2-1 一阶系统的 s 域模拟图

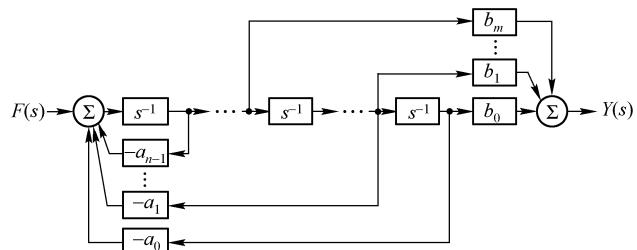


图 13-2-2  $n$  阶系统的 s 域模拟图

模拟图如图 13-2-3 所示，其中每一子系统  $H_i(s)$ ， $i=1,2,\dots,n$  的模拟可以用直接形式实现。

### 13.2.1.3 并联形式

并联形式是将  $H(s)$  分解为几个较简单的子系统函数之和，即

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \dots + H_n(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s) \quad (13-2-5)$$

模拟图如图 13-2-4 所示，其中每一子系统  $H_i(s)$ ， $i=1,2,\dots,n$  的模拟可以用直接形式实现。

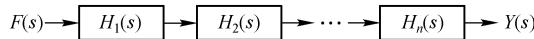


图 13-2-3 级联形式的 s 域模拟图

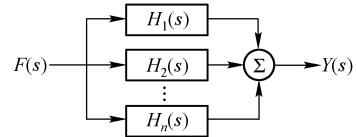


图 13-2-4 并联形式的 s 域模拟图

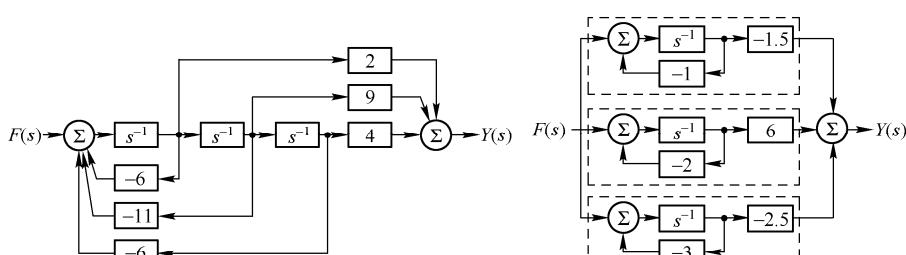
**例 13-2-1** 已知  $H(s) = \frac{(2s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ ，画出其直接形式、并联形式、级联形式等的 s 域模拟图。

解：据题意有

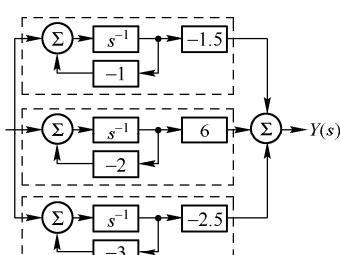
(1)  $H(s) = \frac{2s^2 + 9s + 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ ，其直接形式的模拟图如图 13-2-5 (a) 所示。

(2)  $H(s) = \frac{-1.5}{s+1} + \frac{6}{s+2} + \frac{-2.5}{s+3}$ ，其并联形式的模拟图如图 13-2-5 (b) 所示。

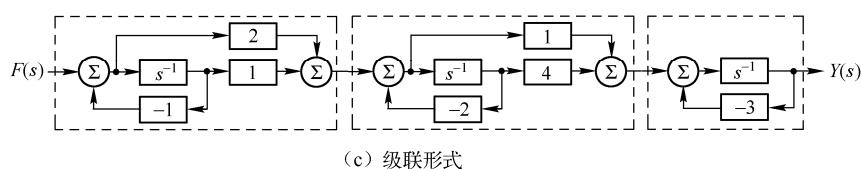
(3)  $H(s) = \frac{2s+1}{s+1} \cdot \frac{s+4}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3}$ ，其级联形式的模拟图如图 13-2-5 (c) 所示。



(a) 直接形式



(b) 并联形式



(c) 级联形式

图 13-2-5 例 13-2-1 中三种形式的 s 域模拟图

### 13.2.2 基于 $H(z)$ 的系统模拟

基于  $H(z)$  的系统模拟与基于  $H(s)$  的系统模拟类似, 亦有直接形式、级联形式、并联形式等, 只是  $s$  域中的  $s^{-1}$  运算器对于应于  $z$  域中的  $z^{-1}$  运算器。譬如, 系统函数如式(13-2-6)、式(13-2-7)、式(13-2-8)的系统, 其直接形式、级联形式、并联形式的模拟图分别如图 13-2-6、图 13-2-7、图 13-2-8 所示。

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (13-2-6)$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_n(z) = \prod_{i=1}^n H_i(z) \quad (13-2-7)$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z) = \sum_{i=1}^n H_i(z) \quad (13-2-8)$$

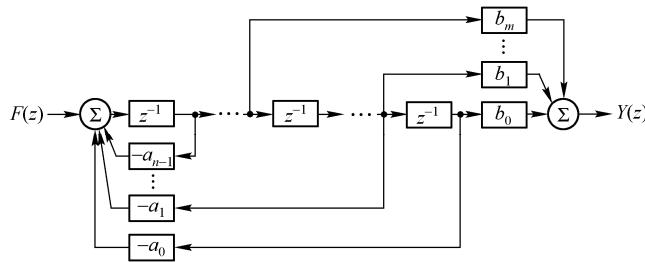


图 13-2-6  $n$  阶系统的  $z$  域模拟图

$$F(z) \rightarrow H_1(z) \rightarrow H_2(z) \rightarrow \cdots \rightarrow H_n(z) \rightarrow Y(z)$$

图 13-2-7 级联形式的  $z$  域模拟图

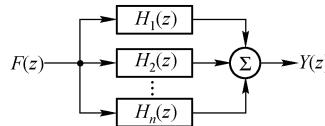


图 13-2-8 并联形式的  $z$  域模拟图

例 13-2-2 已知  $H(z) = \frac{(2z+1)(z+4)}{(z+1)(z+2)(z+3)}$ , 画出其直接形式、并联形式、级联形式等的  $z$

域模拟图。

解: 据题意有

$$(1) \quad H(z) = \frac{2z^2 + 9z + 4}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}, \text{ 其直接形式的模拟图如图 13-2-9 (a) 所示。}$$

$$(2) \quad H(z) = \frac{-1.5}{z+1} + \frac{6}{z+2} + \frac{-2.5}{z+3}, \text{ 其并联形式的模拟图如图 13-2-9 (b) 所示。}$$

$$(3) \quad H(z) = \frac{2z+1}{z+1} \cdot \frac{z+4}{z+2} \cdot \frac{1}{z+3}, \text{ 其级联形式的模拟图如图 13-2-9 (c) 所示。}$$

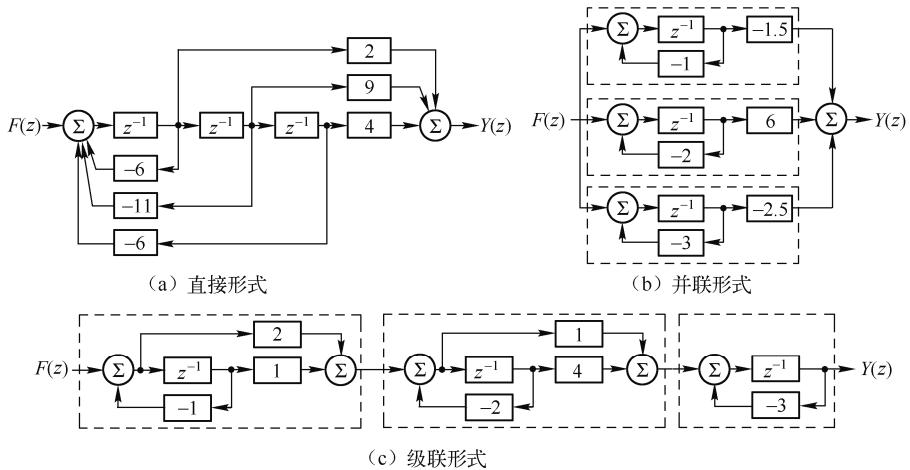


图 13-2-9 例 13-2-2 中三种形式的 z 域模拟图

## 练习题

### A. 基本概念类

- 13-1 解释系统模拟的含义。  
 13-2 给定系统功能，是否存在不同的系统模拟？  
 13-3 举例说明基于微分方程的系统模拟方法。  
 13-4 举例说明基于差分方程的系统模拟方法。  
 13-5 举例说明基于系数函数的系统模拟方法。

### B. 分析计算类

- 13-6 画出如下系统的时域模拟图。  
 (1)  $y'(t) - 2y(t) = 2f(t)$       (2)  $2y''(t) + 2y'(t) - 6y(t) + 4y'(t) = 2f'(t) - 4f(t)$   
 (3)  $2y(k+1) + 3y(k) = 2f(k)$       (4)  $y(k+2) + 4y(k+1) - 3y(k) = 3f(k+1) + 2f(k)$

- 13-7 画出如下系统直接形式的模拟图。

$$(1) H(s) = \frac{s+2}{2s^2 - 5s + 6} \quad (2) H(s) = \frac{2s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(3) H(z) = \frac{2z+1}{z^2 + 4z + 6} \quad (4) H(z) = \frac{z+2}{2z^2 - 3z + 4}$$

- 13-8 画出如下系统级联形式的模拟图。

$$(1) H(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)} \quad (2) H(s) = \frac{s-2}{(s+2)(2s^2 - 3s + 1)}$$

$$(3) H(z) = \frac{2z+1}{z^2 + 6z + 8} \quad (4) H(z) = \frac{z+1}{2z^2 - z - 6}$$

- 13-9 画出如下系统并联形式的模拟图。

$$(1) H(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} \quad (2) H(s) = \frac{s-1}{(s+3)(2s^2 + 3s + 1)}$$

$$(3) H(z) = \frac{2z-1}{(z+0.5)(z^2 + z - 6)} \quad (4) H(z) = \frac{z+2}{(2z-3)(z^2 + z - 3)}$$

## 第 14 章 状态变量分析

前述线性时不变系统的分析方法强调系统外部特性的分析，不关心系统内部的情况。如果要了解系统内部状态的特性，则需要建立基于状态变量的方程，并予以求解。另外，通过状态变量可将系统的输入和输出联系起来，从而获得系统的外部特性。此方法称为状态变量分析法。

本章介绍系统的状态变量分析，涉及状态变量与状态变量方程的含义、状态方程的建立、状态方程的求解、系统的可控制性和可观测性等内容。

### 14.1 状态变量与状态方程

#### 14.1.1 状态与状态变量

系统状态是系统在某一时刻所呈现的可描述其某种性质的物理状况。譬如，对于电路系统而言，其状态可由电压和电流来描述。本质上，系统的状态是指系统的储能状态。

一个系统在  $t = t_0$  时的状态可以用一组变量来描述，这组变量称为状态变量。状态变量应符合以下两个条件：(1) 变量间相互独立；(2)  $t = t_0$  的状态变量值以及  $t > t_0$  的激励可以唯一确定  $t_0$  以后任意时刻的系统状态，从而确定  $t > t_0$  时系统的响应。系统状态变量的个数为系统的阶数，而且一个系统的状态变量不是唯一的，只要其满足上述两个条件即可。

对于电路而言，状态变量的个数即为其中独立的动态元件个数。鉴于电感元件上的电流和电容元件两端的电压能直接反映电路的储能，因此习惯上选取它们作为电路的状态变量。

连续时间系统的状态变量通常用  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  来表示，可以将其看成一个矢量  $\mathbf{x}(t)$  的各个分量，此时称  $\mathbf{x}(t)$  为状态矢量，即

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T \quad (14-1-1)$$

对离散时间系统而言，其状态矢量  $\mathbf{x}(k)$  为

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \cdots \ x_n(k)]^T \quad (14-1-2)$$

状态矢量所在的空间称为状态空间。状态矢量所包含的状态变量的个数即为状态空间的维数，也是系统的阶数。

#### 14.1.2 状态方程

对于连续时间系统，用状态变量和输入来描述系统状态的一阶微分方程组称为状态变量方程（简称状态方程）。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} \quad (14-1-3)$$

式中,  $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$ ,  $f_i(t)$  为系统的输入。

用状态变量和输入来表示输出的代数方程组称为输出方程。

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} \quad (14-1-4)$$

式中,  $y_i(t)$  为系统的输出。式 (14-1-3) 和式 (14-1-4) 可简写如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bf}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Df}(t) \end{cases} \quad (14-1-5)$$

此式为标准形式的状态变量方程和输出方程, 其中, 系数矩阵  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  方阵, 称为系统矩阵; 系数矩阵  $\mathbf{B}$  为  $n \times m$  矩阵, 称为控制矩阵; 系数矩阵  $\mathbf{C}$  为  $r \times n$  方阵, 称为输出矩阵; 系数矩阵  $\mathbf{D}$  为  $r \times m$  方阵。对于线性时不变系统, 这些矩阵均为常系数矩阵。

类似地, 可得离散时间系统标准形式的状态变量方程和输出方程。

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bf}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Df}(k) \end{cases} \quad (14-1-6)$$

建立系统的状态变量方程和输出方程, 并予以求解的分析方法称为状态变量分析法。

## 14.2 状态方程的建立

### 14.2.1 由电路建立状态方程

由电路直接建立状态方程的一般步骤如下:

- (1) 选择独立的电感电流和电容电压作为状态变量;
- (2) 对连接有独立电容支路的独立节点, 列写用状态变量、非状态变量(亦称为中间变量)和输入变量表达的 KCL 方程;
- (3) 对包含有独立电感支路的独立回路, 列写用状态变量、非状态变量和输入变量表达的 KVL 方程;
- (4) 用状态变量和输入变量表示非状态变量;
- (5) 消除非状态变量, 整理出状态变量方程和输出方程的标准形式。

**例 14-2-1** 电路如图 14-2-1 所示, 输出量分别为  $i(t)$  和  $u(t)$ , 试列写其状态变量方程和输出方程。

解: 选择电感电流  $i_L(t)$  和电容电压  $u_C(t)$  为状态变量, 从而有

KCL:  $C \frac{du_C(t)}{dt} + i_L(t) = i(t)$

KVL:  $R_1 i(t) + R_2 i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = u_S(t)$

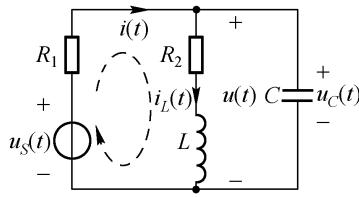


图 14-2-1 例 14-2-1 用图

补充:

$$i(t) = \frac{u_s(t) - u_C(t)}{R_1}$$

整理可得

状态变量方程:

$$\begin{cases} \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} u_C(t) - \frac{1}{C} i_L(t) + \frac{1}{R_1 C} u_s(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_C(t) - \frac{R_2}{L} i_L(t) \end{cases}$$

输出方程:

$$\begin{cases} i(t) = -\frac{1}{R_1} u_C(t) + \frac{1}{R_1} u_s(t) \\ u(t) = u_C(t) \end{cases}$$

写成矩阵形式为

状态变量方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} [u_s(t)]$$

输出方程:

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} [u_s(t)]$$

## 14.2.2 从输入-输出方程导出状态方程

输入-输出方程是描述系统输入和输出关系的方程。对于  $n$  阶的连续时间系统而言，其输入-输出方程为  $n$  阶微分方程；类似地，对于  $n$  阶的离散时间系统而言，其输入-输出方程为  $n$  阶差分方程。

### 14.2.2.1 从输入-输出的微分方程导出状态方程

在输入-输出方程中没有输入信号的一阶导数及高阶导数项时， $n$  阶 LTI 连续时间系统的输入-输出方程如下：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \quad (14-2-1)$$

此时，可按如下方式选取状态变量。

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad (14-2-2)$$

从而有

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-1}x_n(t) + f(t) \end{cases} \quad (14-2-3)$$

于是可得标准形式的状态变量方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(t)] \quad (14-2-4)$$

标准形式的输出方程为

$$[y(t)] = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + [0][f(t)] \quad (14-2-5)$$

对于输入-输出方程中出现输入信号的一阶导数项及高阶导数项的情形，此处不予介绍，读者可参考相关书籍。

#### 14.2.2.2 从输入-输出的差分方程导出状态方程

对于  $n$  阶 LTI 离散时间系统，在输入-输出方程中没有输入信号的一阶差分及高阶差分项时，其差分方程如下：

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = f(k) \quad (14-2-6)$$

此时，可按如下方式选取状态变量。

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) \end{cases} \quad (14-2-7)$$

从而可得标准形式的状态变量方程和输出方程，分别为式 (14-2-8) 和式 (14-2-9)。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(k)] \quad (14-2-8)$$

$$[y(k)] = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + [0][f(k)] \quad (14-2-9)$$

### 14.2.3 从模拟图建立状态方程

由模拟图建立状态方程时, 对连续时间系统而言, 通常选取积分器的输出信号为状态变量; 对离散时间系统则一般选取延时器的输出信号为状态变量。

例 14-2-2 建立如图 14-2-2 所示系统的状态变量方程和输出方程。

解: 选择积分器的输出信号为状态变量, 如图 14-2-2 中的  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 从而有

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t)$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t)$$

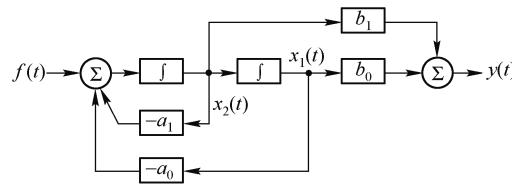


图 14-2-2 二阶连续时间系统

则标准形式的状态变量方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$[y(t)] = [b_0 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0] [f(t)]$$

例 14-2-3 建立如图 14-2-3 所示系统的状态变量方程和输出方程。

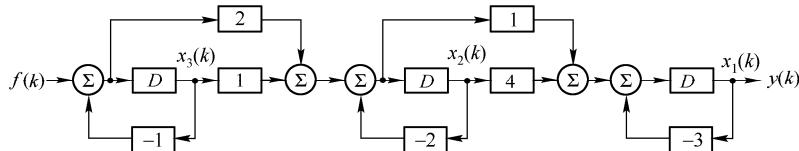


图 14-2-3 三阶离散时间系统

解: 选择延时器的输出信号为状态变量, 如图 14-2-3 中  $x_1(k)$ 、 $x_2(k)$  和  $x_3(k)$  所示, 从而有

$$x_1(k+1) = -3x_1(k) + [4x_2(k) + x_2(k+1)]$$

$$x_2(k+1) = -2x_2(k) + [x_3(k) + 2x_3(k+1)]$$

$$x_3(k+1) = f(k) - x_3(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

经整理后得标准形式的状态变量方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [f(k)]$$

$$[y(k)] = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + [0][f(k)]$$

### 14.3 状态方程的求解

状态方程的求解有时域和变换域两种方法, 其中变换域法较为简便。此处仅介绍变换域求解, 关于时域求解, 读者可参考相关书籍。

对于连续时间系统, 其状态方程的变换域求解即为  $s$  域求解; 对于离散时间系统, 其状态方程的变换域求解即为  $z$  域求解。两者非常类似。

#### 14.3.1 连续时间系统状态方程的 $s$ 域求解

重写连续时间系统状态变量方程和输出方程如下:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t) \quad (14-3-1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Df(t) \quad (14-3-2)$$

##### 14.3.1.1 状态变量的求解

对式 (14-3-1) 两端进行拉普拉斯变换得

$$sX(s) - x(0_-) = AX(s) + BF(s) \quad (14-3-3)$$

于是有

$$X(s) = (sI - A)^{-1}[x(0_-) + BF(s)] \quad (14-3-4)$$

令  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  称为预解矩阵, 则

$$X(s) = \Phi(s)[x(0_-) + BF(s)] = \Phi(s)x(0_-) + \Phi(s)BF(s) = X_{zi}(s) + X_{zs}(s) \quad (14-3-5)$$

式中,  $X_{zi}(s) = \Phi(s)x(0_-)$  为状态矢量  $s$  域的零输入响应,  $X_{zs}(s) = \Phi(s)BF(s)$  为状态矢量  $s$  域的零状态响应。对上式取拉普拉斯反变换得

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)x(0_-)] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)BF(s)] = x_{zi}(t) + x_{zs}(t) \quad (14-3-6)$$

式中, 状态矢量时域的零输入响应  $x_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)x(0_-)]$ , 状态矢量时域的零状态响应  $x_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)BF(s)]$ 。

##### 14.3.1.2 系统响应的求解

如果状态变量的时域解求出后, 可将其代入式 (14-3-2) 直接求得系统响应的时域解, 否则, 可对式 (14-3-2) 两端进行拉普拉斯变换, 于是有

$$Y(s) = CX(s) + DF(s) \quad (14-3-7)$$

将式 (14-3-5) 中的  $X(s)$  代入上式后得

$$Y(s) = C\Phi(s)x(0_-) + [C\Phi(s)B + D]F(s) \quad (14-3-8)$$

从而有

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[C\Phi(s)x(0_-)] + \mathcal{L}^{-1}\{[C\Phi(s)B + D]F(s)\} = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (14-3-9)$$

式中,  $y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[C\Phi(s)x(0_-)]$  为系统的零输入响应,  $y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[C\Phi(s)B + D]F(s)\}$  为系统的零状态响应。

##### 14.3.1.3 系统函数及单位冲激响应

根据式 (14-3-8), 系统零状态响应的  $s$  域解为

$$Y_{zs}(s) = [C\Phi(s)B + D]F(s) \quad (14-3-10)$$

则系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  为

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (14-3-11)$$

由系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  的拉普拉斯反变换可得系统的单位冲激响应。

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}] \quad (14-3-12)$$

**例 14-3-1** 已知某连续时间系统的状态变量方程和输出方程如下, 且  $x_1(0_-) = 1$ ,  $x_2(0_-) = 1$ ,  $f(t) = \varepsilon(t)$ , 求状态变量、系统响应、系统函数及系统的单位函数响应。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [f(t)] \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [f(t)] \end{aligned}$$

解: (1) 状态变量的求解

$$\begin{aligned} \Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\ X(s) = \Phi(s)[\mathbf{x}(0_-) + \mathbf{B}F(s)] &= \Phi(s) \left\{ \begin{bmatrix} x_1(0_-) \\ x_2(0_-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \right] \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 4s - 1}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{s^2 + 1}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-0.5 + 4e^{-t} - e^{-2t}}{s+1} + \frac{-2.5}{s+2} \\ \frac{0.5 + -2}{s+1} + \frac{2.5}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0.5 + 4e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t) \\ (0.5 - 2e^{-t} + 2.5e^{-2t})\varepsilon(t) \end{bmatrix}$$

(2) 系统响应

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [f(t)] = \begin{bmatrix} (2.5 - 8e^{-t} + 6e^{-2t})\varepsilon(t) \\ (-2 + 6e^{-t} - 3.5e^{-2t})\varepsilon(t) \end{bmatrix}$$

(3) 系统函数及单位冲激响应

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{s+2} \\ -1 + \frac{-2s+6}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{s+2} \\ -1 + \frac{8}{s+1} + \frac{-10}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而得

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(t) + 3e^{-2t}\varepsilon(t) \\ -\delta(t) + (8e^{-t} - 10e^{-2t})\varepsilon(t) \end{bmatrix}$$

### 14.3.2 离散时间系统状态方程的 $z$ 域求解

重写离散时间系统状态变量方程和输出方程如下：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bf}(k) \quad (14-3-13)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Df}(k) \quad (14-3-14)$$

#### 14.3.2.1 状态变量的求解

对式 (14-3-13) 两端进行  $z$  变换得

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(z) + \mathbf{BF}(z) \quad (14-3-15)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{BF}(z)] \quad (14-3-16)$$

令  $\Phi(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  称为预解矩阵，则

$$\mathbf{X}(z) = \Phi(z)[\mathbf{x}(0) + z^{-1}\mathbf{BF}(z)] = \Phi(z)\mathbf{x}(0) + z^{-1}\Phi(z)\mathbf{BF}(z) = \mathbf{X}_{zi}(z) + \mathbf{X}_{zs}(z) \quad (14-3-17)$$

式中， $\mathbf{X}_{zi}(z) = \Phi(z)\mathbf{x}(0)$  为状态矢量  $z$  域的零输入响应， $\mathbf{X}_{zs}(z) = z^{-1}\Phi(z)\mathbf{BF}(z)$  为状态矢量  $z$  域的零状态响应。对上式取  $z$  反变换得

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\Phi(z)\mathbf{x}(0)] + \mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}\Phi(z)\mathbf{BF}(z)] = \mathbf{x}_{zi}(k) + \mathbf{x}_{zs}(k) \quad (14-3-18)$$

式中，状态矢量时域的零输入响应  $\mathbf{x}_{zi}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\Phi(z)\mathbf{x}(0)]$ ，状态矢量时域的零状态响应  $\mathbf{x}_{zs}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}\Phi(z)\mathbf{BF}(z)]$ 。

#### 14.3.2.2 系统响应的求解

如果状态变量的时域解求出后，可将其代入式 (14-3-14) 直接求得系统响应的时域解，否则，可对式 (14-3-2) 两端进行  $z$  变换，于是有

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{CX}(z) + \mathbf{DF}(z) \quad (14-3-19)$$

将式 (14-3-17) 中的  $\mathbf{X}(z)$  代入上式后得

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\Phi(z)\mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{F}(z) \quad (14-3-20)$$

从而有

$$\mathbf{y}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}\Phi(z)\mathbf{x}(0)] + \mathcal{Z}^{-1}\{[\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{F}(z)\} = \mathbf{y}_{zi}(k) + \mathbf{y}_{zs}(k) \quad (14-3-21)$$

式中， $\mathbf{y}_{zi}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}\Phi(z)\mathbf{x}(0)]$  为系统的零输入响应， $\mathbf{y}_{zs}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{[\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{F}(z)\}$  为系统的零状态响应。

#### 14.3.2.3 系统函数及单位函数响应

根据式 (14-3-8)，系统零状态响应的  $z$  域解为

$$\mathbf{Y}_{zs}(z) = [\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{F}(z) \quad (14-3-22)$$

则系统函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  为

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(Iz - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (14-3-23)$$

由系统函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  的  $z$  反变换可得系统的单位函数响应：

$$\mathbf{h}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{H}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}] \quad (14-3-24)$$

**例 14-3-2** 已知某连续时间系统的状态变量方程和输出方程如下，且  $x_1(0) = 1$ ， $x_2(0) = -1$ ， $f(k) = \varepsilon(k)$ ，求状态变量、系统响应、系统函数及系统的单位函数响应。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f(k)]$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(k)]$$

解: (1) 状态变量的求解

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= z(zI - A)^{-1} = z \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z(z-5)}{(z-2)(z-3)} & \frac{z}{(z-2)(z-3)} \\ \frac{-6z}{(z-2)(z-3)} & \frac{z^2}{(z-2)(z-3)} \end{bmatrix} \\ X(z) &= \Phi(z)[x(0) + z^{-1}BF(z)] = \Phi(z) \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + z^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z^3 - 6z^2 + z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\ \frac{-z^3 - 5z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2z}{z-1} + \frac{7z}{z-2} + \frac{-4z}{z-3} \\ \frac{-3z}{z-1} + \frac{14z}{z-2} + \frac{-12z}{z-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2 + 7 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k) \varepsilon(k) \\ (-3 + 14 \cdot 2^k - 12 \cdot 3^k) \varepsilon(k) \end{bmatrix}$$

(2) 系统响应

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(k)] = \begin{bmatrix} (-5 + 21 \cdot 2^k - 16 \cdot 3^k) \varepsilon(k) \\ (2 - 7 \cdot 2^k + 8 \cdot 3^k) \varepsilon(k) \end{bmatrix}$$

(3) 系统函数及单位冲激响应

$$\begin{aligned} H(z) &= Cz^{-1}\Phi(z)B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z-5}{(z-2)(z-3)} & \frac{1}{(z-2)(z-3)} \\ \frac{-6}{(z-2)(z-3)} & \frac{z}{(z-2)(z-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z-11}{(z-2)(z-3)} \\ 1 + \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{z-2} + \frac{-8}{z-3} \\ 1 + \frac{-1}{z-2} + \frac{2}{z-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而得

$$h(k) = \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (9 \cdot 2^{k-1} - 8 \cdot 3^{k-1}) \varepsilon(k-1) \\ \delta(k) - (2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) \varepsilon(k-1) \end{bmatrix}$$

## 14.4 系统的可控性与可观测性

与系统的稳定性一样, 系统的可控性和可观测性亦是系统的重要特性。系统的可控性(或可控制性)亦称为能控性(或能控制性), 是系统输入对于系统状态控制能力的体现; 系统的可观测性亦称能观测性, 是系统状态对于系统输出影响能力的体现。

### 14.4.1 系统的可控性

当系统用状态方程描述时, 给定系统的任意初始状态, 若可以找到输入矢量(即控制矢量)

能在有限时间内把系统的所有状态变量引向状态空间的原点(即零状态),则称此系统是完全可控的(简称可控系统)。如果只对部分状态变量做到这一点,则称此系统是不完全可控的(简称不可控系统)。

另外,如果输入矢量能在有限的时间内把系统从状态空间的原点引向预先指定的状态,则称此系统是完全可达的(简称可达系统)。对于线性时不变系统而言,可控性和可达性是一致的。

对于由式(14-1-5)或式(14-1-6)描述的系统,定义可控性矩阵 $M$ 如下:

$$M = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B] \quad (14-4-1)$$

于是,系统可控的充要条件是 $M$ 满秩,即

$$\text{rank}(M) = n \quad (14-4-2)$$

**例 14-4-1** 试判断如下系统是否可控。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} f(k)$$

解: (1) 由题意知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $n = 2$ , 从而

$$M = [B \ AB] = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

于是  $\text{rank}(M) = 1 \neq 2$ , 故系统是不完全可控的。

$$(2) \text{由题意知 } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ n = 2, \ \text{从而}$$

$$M = [B \ AB] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

于是  $\text{rank}(M) = 2$ , 故系统是完全可控的。

## 14.4.2 系统的可观测性

系统的可观测性考察的是从系统的输出中能够获得多少系统状态变量信息的问题。如果系统的每一个状态变量都可以影响输出,或者在有限的时间内能够由系统的输出唯一确定所有状态变量的信息,则称此系统是完全可观测的(简称可观测系统);如果只能确定部分状态变量的信息,则称此系统是不完全可观测的(简称不可观测系统)。

对于由式(14-1-5)或式(14-1-6)描述的系统,定义可观测性矩阵 $N$ 如下:

$$N^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (14-4-3)$$

于是,系统可观测的充要条件是 $N$ 满秩,即

$$\text{rank}(N) = n \quad (14-4-4)$$

例 14-4-2 试判断如下系统是否可观测。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$$

解: (1) 由题意知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $n = 2$ , 从而,

$$N^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 & 0) \\ (1 & 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是  $\text{rank}(N) = 2$ , 故系统是可观测的。

(2) 由题意知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $n = 2$ , 从而,

$$N^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

于是  $\text{rank}(N) = 2$ , 故系统是可观测的。

## 练习题

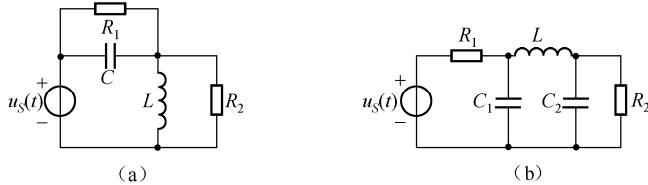
### A. 基本概念类

- 14-1 解释系统的状态及状态变量, 说明状态变量分析法的含义。
- 14-2 给出连续时间系统和离散时间系统状态变量方程和输出方程的一般形式。
- 14-3 举例说明如何建立电路的状态变量方程。
- 14-4 举例说明如何由输入-输出方程导出状态变量方程和输出方程。
- 14-5 举例说明如何由模拟图建立状态变量方程和输出方程。
- 14-6 举例说明状态方程的求解方法。
- 14-7 关于系统可控性:
  - (1) 解释系统可控制性含义;
  - (2) 给出系统可控的条件, 举例说明其应用。
- 14-8 关于系统可观测性:
  - (1) 解释系统可观测性含义;
  - (2) 给出系统可观测的条件, 举例说明其应用。

14-9 说明系统可控性和可观测性的实际意义。

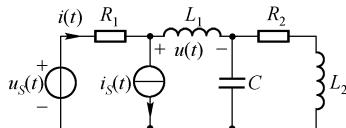
### B. 分析计算类

14-10 如题图 14-1 所示电路, 试列写其状态方程。



题图 14-1

14-11 如题图 14-2 所示电路,  $u_s(t)$  和  $i_s(t)$  为输入,  $u(t)$  和  $i(t)$  为输出, 试列写其状态变量方程和输出方程。



题图 14-2

14-12 建立如下连续时间系统的状态变量方程和输出方程。

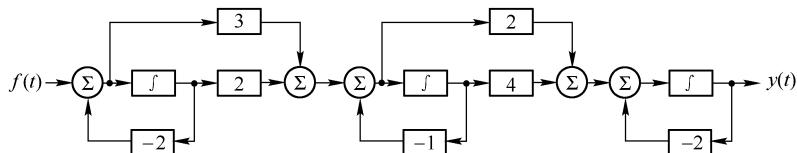
- (1)  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$
- (2)  $2y'''(t) + 4y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 4f(t)$

14-13 建立如下离散时间系统的状态变量方程和输出方程。

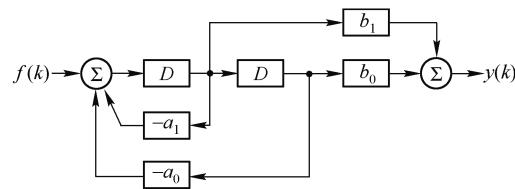
- (1)  $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = f(k)$
- (2)  $2y(k+3) + 2y(k+1) + 4y(k) = 3f(k)$

14-14 如题图 14-3 所示系统, 建立其状态变量方程和输出方程。

14-15 如题图 14-4 所示系统, 建立其状态变量方程和输出方程。



题图 14-3



题图 14-4

14-16 已知某连续时间系统的状态变量方程和输出方程如下, 且  $x_1(0_-) = 2$ ,  $x_2(0_-) = -1$ ,

$f(t) = 2\varepsilon(t)$ , 求状态变量、系统响应、系统函数及系统的单位函数响应。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f(t)]$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(t)]$$

14-17 已知某连续时间系统的状态变量方程和输出方程如下, 且  $x_1(0) = -1$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $f(k) = 3^k \varepsilon(k)$ , 求状态变量、系统响应、系统函数及系统的单位函数响应。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f(k)]$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [f(k)]$$

14-18 试判别如下系统是否可控。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} f(k)$$

14-19 试判别如下系统是否可观测。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$$

## 参 考 文 献

- [1] 周围. 电路分析基础. 北京: 人民邮电出版社, 2003.
- [2] 刘永健. 信号与线性系统. 北京: 人民邮电出版社, 1994.
- [3] 郑秀珍. 电路与信号分析. 北京: 人民邮电出版社, 2009.
- [4] 陈飞, 张轶. 电路与信号. 北京: 北京邮电大学出版社, 2010.
- [5] 秦曾煌. 电工学. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [6] 沈元隆, 周井泉. 信号与系统. 北京: 人民邮电出版社, 2003.
- [7] 吴湘淇. 信号与系统. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [8] 张永瑞, 陈生潭, 高建宁. 电路分析基础. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [9] 吴大正, 杨林耀, 张永瑞. 信号与线性系统分析. 北京: 高等教育出版社, 2002.

## 反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010) 88254396; (010) 88258888

传 真：(010) 88254397

E-mail : [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)

通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036



欢迎登录 **免费** 获取本书教学资源  
<http://www.hxedu.com.cn>

# 电路、信号与系统

全书共 14 章，分为 4 部分：基础知识、电路分析、信号分析、系统分析与模拟。基础知识部分介绍“电路的基本概念与两类约束”、“信号与系统的基本概念”、“电路、信号与系统相互关系及分析方法概述”；电路分析部分含有“电路的等效变换分析”、“电路的一般分析法及基本定理”、“直流一阶动态电路的时域分析”、“正弦稳态电路分析”；信号分析部分涉及“连续时间信号的频谱分析”、“连续时间信号的复频域分析”、“离散时间信号的  $z$  变换”；系统分析与模拟部分包括“连续时间系统的分析”、“离散时间系统的分析”、“系统模拟”、“状态变量分析”。

本书可作为高等院校非电类专业本科以及电类专业专科学生的教学用书，还适用于各类专业自学者使用，亦可供有关技术人员和高校教师参考。

策划编辑：章海涛



责任编辑：周宏敏 章海涛

封面设计：一克米工作室

ISBN 978-7-121-17103-1



9 787121 171031 >

定价：35.00元