

普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书
考研首轮基础复习优选图书

线性代数 深化训练与考研指导

(工科类·经管类)

刘 强 丛书主编

孙 阳 郭文英 刘 强 孙激流 编著

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的. 全书共分为 6 章, 每章包括 5 个模块, 即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练. 本书编写的主要目的有两个: 一是为了满足学生报考研究生的需要; 二是帮助学有余力的在校学生更好地学习“线性代数”课程, 开阔学习视野, 拓展解题思路. 本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲, 贴切考试实际, 做到分门别类, 详略得当, 帮助考生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧, 提高综合分析问题、解决问题的能力, 以达到融会贯通、举一反三的学习效果.

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“线性代数”课程的深化训练用书, 也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书.

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.

版权所有, 侵权必究.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数深化训练与考研指导 / 孙阳等编著. —北京: 电子工业出版社, 2017.4

ISBN 978-7-121-31150-5

I. ①线… II. ①孙… III. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 057524 号

策划编辑: 王二华

责任编辑: 王二华

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 12 字数: 310 千字

版 次: 2017 年 4 月第 1 版

印 次: 2017 年 4 月第 1 次印刷

定 价: 36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换. 若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888.

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn.

本书咨询联系方式: (010) 88254532.

前 言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学,同时为了满足众多学生考研的需要,我们结合多年的考研辅导经验,编写了“高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书”,该丛书包括微积分、高等数学、线性代数和概率论与数理统计四门数学课程的辅导用书,由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编。

本书为线性代数分册,内容涵盖了考研“数学一”和“数学三”的全部考点。本书编写的主要目的有两个:一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“线性代数”课程,以开阔学习视野,拓展解题思路;二是为了满足学生报考研究生的需要。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲,贴切考试实际,做到分门别类、详略得当,使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧,综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升,达到融会贯通、举一反三的学习效果。

全书共分为6章,每章包括5个模块,即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练。具体模块内容介绍如下。

一、知识要点:本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理,方便读者查阅相关内容。

二、典型例题分析:本模块是作者在多年来考研辅导经验的基础上,创新性地构思了大量有代表性的例题,并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目,汇集了一些有代表性的考研真题,按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类,通过专题讲解,详细阐述了相关问题的解题方法与技巧。

三、深化训练:本模块精心选编了部分具有代表性的习题及历年的考研真题,帮助读者巩固强化所学知识,提升读者学习效果,做到融会贯通和举一反三。

四、深化训练详解:本模块对深化训练习题给出了详细的解答过程,部分习题给出多种解法,以开拓读者的解题思路,培养读者的分析能力和发散思维。

五、综合提高训练:本模块的例题综合性较强,有较高的难度和较强的灵活性,通过本模块的学习,提升读者的综合能力和应变能力。

为了便于读者阅读本书,书中的“数学一”要求、“数学三”不要求的内容将用“*”标出,有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出。另外为了方便读者查阅,本书在考研真题后面加上了标志,例如【2010(1)】表示该题是2010年硕士研究生入学考试“数学一”考题,【2010(1,3)】表示该题是2010年“数学一”和“数学三”考题等。

本丛书在编写过程中,得到了北京工商大学曹显兵教授,北京工业大学李高荣教授,北方工业大学刘喜波教授,昆明理工大学吴刘仓教授,北京化工大学李志强副教授,首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授及同事们的大力支持,电子工业出版社

社高等教育分社的谭海平社长和王二华编辑也为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行们不吝指正。邮件地址为：cuebliuqiang@163.com.

作 者
2017 年 3 月

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 知识要点	1
1.1.1 排列	1
1.1.2 对换	1
1.1.3 n 阶行列式	1
1.1.4 行列式的性质	2
1.1.5 余子式、代数余子式	2
1.1.6 行列式展开定理	2
1.1.7 特殊的行列式的计算	3
1.2 典型例题分析	4
1.2.1 题型一、排列问题	4
1.2.2 题型二、利用定义计算行列式	4
1.2.3 题型三、利用性质计算行列式	5
1.2.4 题型四、行列式按行或列展开	8
*1.2.5 题型五、行列式按拉普拉斯方法展开	13
1.3 深化训练	13
1.4 深化训练详解	17
1.5 综合提高训练	23
第 2 章 矩阵	28
2.1 知识要点	28
2.1.1 矩阵的概念	28
2.1.2 矩阵的运算	28
2.1.3 伴随矩阵	29
2.1.4 可逆矩阵	29
2.1.5 矩阵分块	30
2.1.6 分块矩阵的运算	31
2.1.7 线性方程组	31
2.2 典型例题分析	32
2.2.1 题型一、矩阵的乘法及乘法的运算规律	32
2.2.2 题型二、伴随矩阵的相关问题	35
2.2.3 题型三、矩阵可逆的判定及逆矩阵的求法	36
2.2.4 题型四、矩阵的分块及分块运算	41

2.2.5	题型五、矩阵方程的求解	43
2.2.6	题型六、克莱姆法则的应用	44
2.3	深化训练	46
2.4	深化训练详解	48
2.5	综合提高训练	53
第3章	矩阵的初等变换与线性方程组	56
3.1	知识要点	56
3.1.1	矩阵的初等变换与初等矩阵	56
3.1.2	矩阵的秩	56
3.1.3	用初等变换求逆矩阵及解矩阵方程	57
3.1.4	线性方程组解的判定定理	57
3.2	典型例题分析	58
3.2.1	题型一、矩阵的初等变换问题	58
3.2.2	题型二、矩阵的秩的求解	59
3.2.3	题型三、利用初等变换求矩阵的逆矩阵	60
3.2.4	题型四、线性方程组的求解	61
3.3	深化训练	63
3.4	深化训练详解	67
3.5	综合提高训练	73
第4章	向量组的线性相关性	76
4.1	知识要点	76
4.1.1	向量的线性组合(线性表示)	76
4.1.2	向量组的线性相关性	76
4.1.3	向量组的极大线性无关组的定义与性质	77
4.1.4	线性方程组解的结构	77
4.1.5	向量空间的概念与性质	78
4.2	典型例题分析	79
4.2.1	题型一、向量线性表示的相关问题	79
4.2.2	题型二、向量组的线性相关性问题	80
4.2.3	题型三、极大线性无关组及秩的求解	82
4.2.4	题型四、线性方程组解的相关问题	84
4.2.5	题型五、向量空间的相关问题	92
4.3	深化训练	93
4.4	深化训练详解	100
4.5	综合提高训练	113
第5章	特征值与特征向量、相似矩阵	128
5.1	知识要点	128

5.1.1	向量的内积、长度及夹角	128
5.1.2	正交向量组	128
5.1.3	正交矩阵及正交变换	129
5.1.4	矩阵的迹	129
5.1.5	矩阵的特征值与特征向量	130
5.1.6	相似矩阵	130
5.1.7	一般矩阵的对角化	131
5.1.8	实对称矩阵的对角化	131
5.2	典型例题分析	132
5.2.1	题型一、向量的内积、长度及正交问题	132
5.2.2	题型二、正交矩阵问题	133
5.2.3	题型三、特征值与特征向量问题的计算	133
5.2.4	题型四、特征值与特征向量的证明问题	134
5.2.5	题型五、相似矩阵问题	135
5.2.6	题型六、对称矩阵的对角化问题	138
5.3	深化训练	141
5.4	深化训练详解	142
5.5	综合提高训练	146
第6章	二次型	151
6.1	知识要点	151
6.1.1	二次型及其矩阵表示	151
6.1.2	二次型的标准形与规范形	151
6.1.3	矩阵的合同	152
6.1.4	利用正交变换化二次型为标准形	152
6.1.5	用配方法化二次型成标准型	153
6.1.6	惯性定理	153
6.1.7	正定二次型与正定矩阵	154
6.1.8	顺序主子式	154
6.2	典型例题分析	154
6.2.1	题型一、二次型的基本概念问题	154
6.2.2	题型二、将二次型化为标准型	155
6.2.3	题型三、二次型的规范形的求解	157
6.2.4	题型四、矩阵的合同、相似问题	158
6.2.5	题型五、二次型(或二次型矩阵)正定性的判定	159
6.2.6	题型六、二次型的参数求解问题	159
6.2.7	题型七、二次型(二次型矩阵)的证明问题	160
6.3	深化训练	160
6.4	深化训练详解	162

6.5 综合提高训练	165
2013 年考研试题线性代数考题	169
2014 年考研试题线性代数考题	172
2015 年考研试题线性代数考题	174
2016 年考研试题线性代数考题	178
2017 年考研试题线性代数考题	182
参考文献	184

第1章 行列式

1.1 知识要点

1.1.1 排列

把 n 个不同的元素排成一排, 叫做这 n 个元素的**全排列**, 简称**排列**, n 个不同元素的所有排列的种数为 $n!$.

对于 n 个不同的元素, 先规定各元素之间有个标准次序 (常用的标准是从小到大), 于是 n 个不同元素的任一排列中, 某两个元素的先后次序与标准次序不同时, 就称它们构成一个**逆序**, 排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**; 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

特别地, 由 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序的数组称为一个 **n 级排列**. 规定 n 级排列的标准次序为从小到大, 也称为**自然序**, n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$; n 级排列的种数共有 $n!$ 个, 其中奇排列、偶排列各占一半.

1.1.2 对换

将一个排列中的两个数对调, 其余的数不动, 就会得到一个新排列, 称这样的一个变动为**对换**.

对换的性质:

- (1) 排列经一次对换奇偶性发生改变;
- (2) 任意一个 n 级排列与排列 $1, 2, \dots, n$ 都可以经过有限次对换互变, 并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

1.1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. n 阶行列式也可以简记为 $D = |a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$, 其中 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) 称为行列式的**元素**. 显然二阶、三阶行列式是 n 阶行列式的特例.

注 规定一阶行列式等于行列式中元素, 即 $|a| = a$, 注意不要与绝对值的记号混淆.

n 阶行列式的等价定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

1.1.4 行列式的性质

(1) 转置 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^T 称为 D 的**转置行列式**，则行列式与其转置行列式相等，即有 $D = D^T$ 。

(2) **换行(列)** 交换行列式的两行(列)，行列式变号。

(3) **数乘** 用数 k 乘行列式等于将 k 乘到行列式的某一行(列)中所有元素，反过来一个行列式可以按行(列)提取公因式。特别的，若行列式中有一行元素为零，则行列式为零。

(4) **倍加** 将行列式某一行(列)的所有元素乘以一个数对应加到另一行(列)的元素上，行列式值不变。

(5) **分解** 行列式某一行(列)的元素均为两数之和，可按这一行(列)将其分解为两个行列式相加。

(6) **成比例** 一个行列式中若有两行(列)的元素对应成比例，则行列式的值为零。特别的，一个行列式中若有两行(列)元素相同，则行列式的值为零。

1.1.5 余子式、代数余子式

将行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 的第 i 行、第 j 列元素去掉，剩余元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij} ；称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

在 n 阶行列式 D 中任选 k 行 k 列，交叉位置的元素按原顺序构成的 k 阶行列式 D_k 称为 D 的一个 **k 阶子式**，去掉选定的 k 行 k 列元素后余下的元素按原顺序构成的 $n-k$ 阶行列式称为子式 D_k 的**余子式**，记为 M_k 。若选定的 k 行 k 列元素的行标为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ ，列标为 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ ，则 $(-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} M_k$ 称为子式 D_k 的**代数余子式**。

1.1.6 行列式展开定理

(1) **(按行列展开定理)** 行列式等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和；行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零。即若 $D = |a_{ij}|_n$ ，则

$$a_{11}A_{j1} + a_{12}A_{j2} + \cdots + a_{1n}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

* (2) **(拉普拉斯定理)** 行列式等于它任意选定 k 行(列)的全部 k 阶子式与其代数余子

式乘积之和. 若在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \dots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \dots, A_t$, 则

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots + M_t A_t.$$

1.1.7 特殊的行列式的计算

(1) 上三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(3) 对角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

(4) 分块上三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & y_{11} & \cdots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & y_{k1} & & y_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

(5) 分块下三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & & 0 \\ y_{11} & \cdots & y_{1k} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

(6) 分块对角形行列式:

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

(7) 范德蒙德行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j).$$

1.2 典型例题分析

1.2.1 题型一、排列问题

例 1.2.1 若 7 级排列 $214i5k6$ 是偶排列, 确定 i, k 的值.

解 由题意, 当 $i=3, k=7$ 时,

$$N(2143576) = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 3,$$

排列为奇排列, 由对换的性质必有排列 2147536 为偶排列, 故 $i=7, k=3$.

例 1.2.2 若规定排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的逆序数为 k , 求排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ 的逆序数.

解 若两个元素 a_i 和 a_j 在排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中产生逆序, 则在排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ 中就不产生逆序, 反之亦然. 因此排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的逆序数与排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ 的逆序数之和等于 n 个元素中取 2 个元素的组合数 C_n^2 , 从而排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ 的逆序数为 $C_n^2 - k$.

1.2.2 题型二、利用定义计算行列式

例 1.2.3 用行列式的定义计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & x-2 & -1 \\ 2 & x-3 & -2 & 1 \\ x-4 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 x^4 与 x^3 来自行列式 D_4 展开中的 $(-1)^{N(4321)}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 项, 故 x^4 前的系数为 $(-1)^{N(4321)} = 1$, x^3 前的系数为 $(-1)^{N(4321)}(-1-2-3-4) = -10$.

例 1.2.4 【1991 (4)】 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由行列式定义有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{N(12\cdots n)} a^n + (-1)^{N(23\cdots n1)} b^n = a^n + (-1)^{n-1} b^n.$$

例 1.2.5 【1990 (4)】设 A 为 10×10 矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算行列式 $|A - \lambda E|$, 其中 E 为 10 阶单位矩阵, λ 为常数.

解 由题意, 由行列式定义有

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{N(12\cdots 10)} \times (-\lambda)^{10} + (-1)^{N(23\cdots 10\ 1)} \times 1^9 \times 10^{10} \\ &= \lambda^{10} - 10^{10}. \end{aligned}$$

例 1.2.6 若行列式 $D_n (n \geq 2)$ 中每个元素只取 1 或 -1, 证明: 行列式的值为偶数.

证 由行列式的定义, D_n 表示 $n!$ 个一般项的和, 当 $n \geq 2$ 时, $n!$ 为偶数. 再由 D_n 中每个元素只取 1 或 -1, 从而其一般项的值也只为 1 或 -1. 进而, 若一般项中 1 的个数为奇数, 则 -1 也为奇数, 此时和为偶数; 若 1 的个数为偶数, 则 -1 也为偶数, 此时和也为偶数, 故命题成立.

1.2.3 题型三、利用性质计算行列式

例 1.2.7 已知 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2$, 求行列式 $D = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$ 的值.

解法 1

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3} \begin{vmatrix} 2(x_1 + y_1 + z_1) & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ 2(x_2 + y_2 + z_2) & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ 2(x_3 + y_3 + z_3) & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & y_1 + z_1 & z_1 + x_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 & y_2 + z_2 & z_2 + x_2 \\ x_3 + y_3 + z_3 & y_3 + z_3 & z_3 + x_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1, c_3 - c_1} 2 \begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & -x_1 & -y_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 & -x_2 & -y_2 \\ x_3 + y_3 + z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3} 2 \begin{vmatrix} z_1 & -x_1 & -y_1 \\ z_2 & -x_2 & -y_2 \\ z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} -2 \begin{vmatrix} -x_1 & z_1 & -y_1 \\ -x_2 & z_2 & -y_2 \\ -x_3 & z_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} -2 \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & z_1 \\ -x_2 & -y_2 & z_2 \\ -x_3 & -y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times 2 = 4.
\end{aligned}$$

解法 2 用行列式按列分解的性质, 可将行列式 D 分解为 $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 8$ 个行列式相加,

但其中只有 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}$ 的值不为零, 其余的行列式都有两列元素相同, 值为零. 故

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

例 1.2.8 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解 根据行列式的性质, 有

$$\begin{aligned}
D_4 &\xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{r_2 - br_1 \\ r_3 - br_1 \\ r_4 - br_1}} (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3.
\end{aligned}$$

注 在行列式的计算中, 一个常用的技巧是“**扫**”的方法, 即首先构造出一个基本行(或基本列), 然后利用基本行(或基本列)将其余行(或列)中相同元素化为 0, 其核心思想是构造出尽量多的 0 元素. 本题的另一种解法见例 1.2.14.

例 1.2.9 【1989 (4)】计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由题意, 由行列式的性质, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2+c_1 \\ c_3-c_1 \\ c_4+c_1}} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{N(4321)} x^3 = x^4.$$

例 1.2.10 【2014 (1,3)】行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\quad).$

(A) $(ad-bc)^2$;

(B) $-(ad-bc)^2$;

(C) $a^2d^2-b^2c^2$;

(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

解 根据行列式的性质, 有

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} \\
 = (cb-ad)(da-cb) = -(ad-cb)^2,$$

故答案选 (B).

例 1.2.11 (爪形行列式) 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$

解 根据行列式的性质, 有

$$D_4 \xrightarrow{\substack{r_1-\frac{1}{2}r_2 \\ r_1-\frac{1}{3}r_3 \\ r_1-\frac{1}{4}r_4}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \times 2 \times 3 \times 4 = -2.$$

例 1.2.12 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \end{vmatrix}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad D_4 & \xrightarrow{c_4+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \\
 & = (a_1+a_2+a_3+a_4)b^3.
 \end{aligned}$$

注 在行列式的计算中, 一个常用的技巧是“滚动”的方法, 即按照一定的顺序用前一行(或前一列)的结果处理后一行(或后一列), 如本题中首先利用第4列处理第3列, 然后再利用第3列处理第2列, 最后再利用第2列处理第1列.

1.2.4 题型四、行列式按行或列展开

行列式按行(列)展开的性质建立了一个行列式与较之低一阶行列式之间的关系, 使用公式对行列式进行升、降阶再进行计算. 利用该方法计算行列式时, 需要记清按行(列)展开的性质及推论中的元素乘代数余子式的形式.

$$\text{例 1.2.13} \quad \text{计算行列式 } D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & -24 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式的性质, 有

$$\begin{aligned}
 D_4 & \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \\ -6 & -4 & -9 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第4列展开}} \begin{vmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -9 \\ -6 & -4 & -9 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \\ -3 & 0 & -18 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第2列展开}} (-4) \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -18 \end{vmatrix} \\
 & = (-4) \times (-72 + 18) = 216.
 \end{aligned}$$

$$\text{例 1.2.14} \quad \text{计算行列式 } D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } a \neq b).$$

解 首先将行列式升阶, 然后利用行列式的性质进行求解:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & b & b \\ 0 & b & a & b & b \\ 0 & b & b & a & b \\ 0 & b & b & b & a \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 - br_1 \\ r_3 - br_1 \\ r_4 - br_1 \\ r_5 - br_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -b & a-b & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & a-b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & a-b & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_1 + \frac{b}{a-b}r_2 \\ \dots \\ r_1 + \frac{b}{a-b}r_5 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 + \frac{4b}{a-b} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{4b}{a-b}\right)(a-b)^4$$

$$= (a+3b)(a-b)^3.$$

注 本题的另一种解法见例 1.2.8.

例 1.2.15 计算 n ($n \geq 3$) 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}.$

解 结合行列式的性质, 利用“扫”的技巧, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[r_i - r_3]{i=1 \dots n, i \neq 3} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第3列展开}} \begin{vmatrix} -2 & & & & & 0 \\ & -1 & & & & \\ 3 & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & n-3 \\ 0 & & & & & \end{vmatrix} = 6(n-3)!.$$

例 1.2.16 (带状行列式) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \dots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$ (其中 $a \neq b$).

$$\text{解 } D_n \xrightarrow{\text{将第1列分解}} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{前行列式} \\ \underline{\underline{r_i - r_{i-1}}} \\ i = 2 \cdots n \end{array} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

后行列式按
第1列展开

$$= a^n + bD_{n-1},$$

类似地,

$$D_n \xrightarrow{\text{将第1行分解}} \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{前行列式} \\ \underline{\underline{c_i - c_{i-1}}} \\ i = 2 \cdots n \end{array} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

后行列式按
第1列展开

$$= b^n + aD_{n-1},$$

从而有

$$\begin{cases} D_n = a^n + bD_{n-1} \\ D_n = b^n + aD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aD_n = a^{n+1} + abD_{n-1} \\ bD_n = b^{n+1} + abD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1},$$

再由 $a \neq b$, 解得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n.$$

例 1.2.17 【1996 (4)】计算行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$\begin{aligned}
 & \text{解} \quad \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4,5]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\
 & = D_4 - (-1)^{5+1} a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix} = D_4 - (-1)^{5+1} a^5 = \dots \\
 & = D_1 - (-1)^{1+1} a^1 - (-1)^{2+1} a^2 - (-1)^{3+1} a^3 - (-1)^{4+1} a^4 - (-1)^{5+1} a^5 \\
 & = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5.
 \end{aligned}$$

例 1.2.18 设 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, 试求:

(1) $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$; (2) $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44}$.

解 (1) 由于 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 1 \times A_{14} + 1 \times A_{24} + 1 \times A_{34} + 1 \times A_{44}$, 因此用 1, 1, 1, 1 替代行列式 A 中的第四列构造一个新的行列式, 即

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

可见 B_1 与 A 的第四列元素的代数余子式分别相同, 因此将 B_1 按第四列元素展开恰好等于 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$, 故

$$\begin{aligned}
 A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = B_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 2 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8.
 \end{aligned}$$

(2) 由于 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + 2A_{44}$, 因此用 -1, 1, -1, 2 替代行列式 A 中的第四行构造一个新的行列式, 即

$$B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

而 B_2 由于 2, 3 行相同, 其值为 0. 故 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + 2M_{44} = 0$.

例 1.2.19 证明: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a).$

证 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ 升阶, 构造新的行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix},$$

其为范德蒙德行列式, 两个行列式之间的关联是前者为后者中元素 x^2 的余子式 (用 M_{34} 表示),

即 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = M_{34}$. 对行列式 D_4 我们有两种计算方式, 一是按范德蒙德行列式的公式, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix} = (x-c)(x-b)(x-a)(c-b)(c-a)(b-a).$$

另一种计算方式是将行列式 D_4 按第四列展开, 并由 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix} = A_{14} + xA_{24} + x^2A_{34} + x^3A_{44} = -M_{14} + xM_{24} - x^2M_{34} + x^3M_{44},$$

从而有

$$-M_{14} + xM_{24} - x^2M_{34} + x^3M_{44} = (x-c)(x-b)(x-a)(c-b)(c-a)(b-a),$$

两侧同为关于 x 的多项式, 由待定系数法并结合所要证明问题, 等式左右两侧 x^2 前系数相等, 其中, 等式左侧 x^2 前系数为 $-M_{34}$, 而等式右侧 x^2 前系数为

$$\begin{aligned} & -a(c-b)(c-a)(b-a) - b(c-b)(c-a)(b-a) - c(c-b)(c-a)(b-a) \\ & = -(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a), \end{aligned}$$

所以 $M_{34} = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$, 命题得证.

***1.2.5 题型五、行列式按拉普拉斯方法展开**

例 1.2.20 计算行列式 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & & \\ c_1 & & & & d_1 \end{vmatrix}.$

解 由拉普拉斯定理可知

$$\begin{aligned} D_{2n} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & & d_{2n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & & & b_3 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_3 & & & & d_{2n-4} \end{vmatrix} = \dots \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i). \end{aligned}$$

1.3 深化训练**1.3.1 填空题**

- (1) 排列 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$ 的逆序数为_____.
- (2) 排列 $2n(2n-2)\cdots 42(2n-1)(2n-3)31$ 的逆序数_____.
- (3) 6级排列 $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6$ 与 $j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1$ 的逆序数之和_____.
- (4) 若9级排列 $1274i56k9$ 是奇排列, 则 $i = \underline{\hspace{1cm}}$, $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

(5) 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

(6) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & x-2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & x+3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为_____, 常数项为_____.

(7) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$, 则 $D_1 = \begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_1 - 3a_2 & a_3 \\ 4b_1 & 2b_1 - 3b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 2c_1 - 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

(8) 若行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的余子式 $M_{22} = 3$, 则 $x =$ _____.

(9) 【2001 (4)】 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则第4行各元素余子式之和的值为_____.

(10) 三阶行列式 D 中, 第1列元素分别为 $1, -3, 2$, 第3列元素的余子式依次是 $2, a, -2$, 则 a 的值为_____.

(11) 若行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$, 则 $M_{21} + M_{22} + M_{23} =$ _____.

1.3.2 单项选择题

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ x & -2 & 2 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 中, 元素 x 的代数余子式是 ().

(A) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(B) $-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$;

(C) $-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(D) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

(2) 若3阶行列式 $D = 0$, 则下列结论正确的是 ().

(A) 行列式 D 中有一行或列的元素全为零;

(B) 行列式 D 中的元素全为零;

(C) 行列式 D 中有两行或列的元素对应成比例;

(D) 前三个选项不一定成立.

(3) 【1999 (2)】 方程 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 0$ 的根的个数为 ().

(A) 1个;

(B) 2个;

(C) 3个;

(D) 4个.

(4) 下列关于行列式表述不正确的是 ().

(A) 行列式转置值不变;

(B) 某一行元素乘以一个数对应加到另外一行, 行列式值不变;

(C) 数乘行列式等于将数乘到行列式的每一个元素上;

(D) 行列式中两行元素互换, 行列式变号.

(5) 【1996 (1)】四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于 ().

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$;

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$;

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$;

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

1.3.3 计算下列行列式:

(1) $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$; (2) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (3) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

1.3.4 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

1.3.5 计算行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$, ($a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$).

1.3.6 计算行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$.

1.3.7 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, ($a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$).

1.3.8 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$.

1.3.9 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + 1 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 + 1 \end{vmatrix}$.

1.3.10 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

1.3.11 设 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$, 求 D 展开式的正项总数.

1.3.12 已知行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$, 求 $A_{41} + A_{43}$ 和 $A_{42} + A_{44}$.

1.3.13 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 b_1 & a_1 b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2 b_2 & a_2 b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2 b_3 & a_3 b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2 b_4 & a_4 b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix}$, 其中 $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$.

1.3.14 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 + \cos \phi_1 & 1 + \cos \phi_2 & 1 + \cos \phi_3 & 1 + \cos \phi_4 \\ \cos \phi_1 + \cos^2 \phi_1 & \cos \phi_2 + \cos^2 \phi_2 & \cos \phi_3 + \cos^2 \phi_3 & \cos \phi_4 + \cos^2 \phi_4 \\ \cos^2 \phi_1 + \cos^3 \phi_1 & \cos^2 \phi_2 + \cos^3 \phi_2 & \cos^2 \phi_3 + \cos^3 \phi_3 & \cos^2 \phi_4 + \cos^3 \phi_4 \end{vmatrix}.$$

1.3.15 证明 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) \left[2 \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \right]$.

1.3.16 若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个 n 级排列, 证明: 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序数之和为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

1.3.17 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

1.3.18 设 $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, 证明:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2+x & b_2+y & c_2+z \end{vmatrix} = D + x \sum_{i=1}^3 A_{i1} + y \sum_{i=1}^3 A_{i2} + z \sum_{i=1}^3 A_{i3},$$

其中, $A_{ij}, i, j=1, 2, 3$ 为 D 的代数余子式.

1.4 深化训练详解

1.3.1 填空题

(1) $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

提示 $N((n-1)(n-2)\cdots 321n) = 0+1+\cdots+(n-2)+0 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$.

(2) $\frac{n(3n+1)}{2}$. **提示** 由于

$$\begin{array}{cccccccc} 2n & 2n-2 & \cdots & 2 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & \cdots & n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{array}$$

从而

$$\begin{aligned} & N(2n(2n-2)\cdots 42(2n-1)(2n-3)31) \\ &= 0+1+2+\cdots+n+1+3+\cdots+2n-1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n^2}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}. \end{aligned}$$

(3) 15. **提示** 由于本题为填空题, 可以使用特例进行求解, 如取 $j_1j_2j_3j_4j_5j_6$ 与 $j_6j_5j_4j_3j_2j_1$ 分别为 123456 和 654321, 计算逆序数之和为 15, 其一般方法见证明题 1.3.16.

(4) $i=3, k=8$. **提示** $N(127435689)=5$ 为奇排列.

(5) $2x^2y^2 - y^4 - x^4$. **提示** 根据行列式的定义, 有

$$\begin{aligned} D_4 &= (-1)^{N(2143)} yxyx + (-1)^{N(2341)} yyyx + (-1)^{N(4123)} xxxx + (-1)^{N(4321)} xyxy \\ &= yxyx - yyyx - xxxx + xyxy = 2x^2y^2 - y^4 - x^4. \end{aligned}$$

(6) 4, 300. **提示** x^3 的系数来自于主对角线上元素 $x-1, x-2, x+3, x+4$ 的乘积项, 从而 $-1-2+3+4=4$, 而常数项为

$$\begin{aligned} f(0) &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \\ &= (-2) \times 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 300. \end{aligned}$$

(7) -12. 提示

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} 4a_1 & 2a_1-3a_2 & a_3 \\ 4b_1 & 2b_1-3b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 2c_1-3c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_1-3a_2 & a_3 \\ b_1 & 2b_1-3b_2 & b_3 \\ c_1 & 2c_1-3c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} 4 \begin{vmatrix} a_1 & -3a_2 & a_3 \\ b_1 & -3b_2 & b_3 \\ c_1 & -3c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (-3) \times 4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -12.
 \end{aligned}$$

(8) 5. 提示 由已知 $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - x = 3$, 有 $x = 5$.

(9) -28. 提示 由题意, 第4行各元素余子式之和

$$\begin{aligned}
 M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} &= -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-7) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 7 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \times 4 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -28.
 \end{aligned}$$

(10) $\frac{2}{3}$. 提示 行列式第三列元素的余子式依次是 $2, a, -2$, 则第三列元素的代数余子式依次是 $2, -a, -2$, 由行列式按行列展开的推论, 有 $1 \times 2 + (-3) \times (-a) + 2 \times (-2) = 0$, 解得 $a = \frac{2}{3}$.

(11) 16. 提示 $M_{21} + M_{22} + M_{23} = -A_{21} + A_{22} - A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 16$.

1.3.2 单项选择题

(1) (B). (2) (D).

(3) (B). 提示 由题意, 由于

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{c_4+c_2} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 5x(x-1),
 \end{aligned}$$

从而方程有两个解, 因此选择 (B).

(4) (C).

(5) (D). **提示** 由题意, 由拉普拉斯定理有

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4).$$

1.3.3

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 100c_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -25.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_3} 10 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 10 \times (-4) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ = 10 \times (-4) \times (-4) = 160.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2 \\ r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - r_2 \\ r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

$$1.3.4 \quad D_n \xrightarrow{\text{按第1列展开}} \begin{vmatrix} x & y & & & \\ & x & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & y \\ & & & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & & & & \\ x & y & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & y & \\ & & & x & y \end{vmatrix} \\ = xx^{n-1} + (-1)^{n+1} yy^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

$$1.3.5 \quad \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1 - \frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1 - \frac{1}{a_2}c_3 \\ \vdots \\ c_1 - \frac{1}{a_n}c_{n+1}}} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \\ = \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

$$1.3.6 \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_2 \\ \cdots \\ r_{n+1}+r_n \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$1.3.7 \quad \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \cdots \\ r_{n+1}-r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n+1} \begin{matrix} c_1+\frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1+\frac{1}{a_2}c_3 \\ \cdots \\ c_1+\frac{1}{a_n}c_{n+1} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

$$1.3.8 \quad \begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 1+\sum_{i=1}^n a_i & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-a_2c_1, c_3-a_3c_1, \cdots, c_n-a_nc_1} (1 + \sum_{i=1}^n a_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1 + \sum_{i=1}^n a_i).$$

$$1.3.9 \quad \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2 & a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} c_2 - a_1 c_1 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ \hline c_3 - a_2 c_1 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ c_{n+1} - a_n c_1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} \begin{vmatrix} c_1 - a_1 c_2 & 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ \hline c_1 - a_2 c_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ c_1 - a_n c_{n+1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2.
\end{aligned}$$

$$1.3.10 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 - r_2 \\ \hline r_2 - r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} - r_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{按第1列展开} \\
& \underline{\underline{(-1)^{n+1}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} r_1 - r_2 \\ \hline r_2 - r_3 \\ \vdots \\ r_{n-2} - r_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} a^{n-2}.
\end{aligned}$$

1.3.11 由行列式的定义有, D 的展开式 $n!$ 项, 且每一项为 1 或 -1 , 设展开式中的正项总数为 a , 负项总数为 b , 则有

$$D = a - b, \quad n! = a + b.$$

而

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_i + r_n \\ \hline r_i + r_n \\ \vdots \\ r_i + r_n \end{vmatrix}_{i=1,2,\dots,n-1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^{n-1},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}(D + n!) = \frac{1}{2}(2^{n-1} + n!).$$

1.3.12 由行列式按行展开的性质及推论有

$$\begin{cases} 1A_{41} + 2A_{42} + 1A_{43} + 2A_{44} = D_4 = -6, \\ 2A_{41} + 3A_{42} + 2A_{43} + 3A_{44} = 0 \end{cases},$$

从而可解得 $A_{41} + A_{43} = 18$, $A_{42} + A_{44} = -12$.

$$1.3.13 \quad \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2 b_1 & a_1 b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2 b_2 & a_2 b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2 b_3 & a_3 b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2 b_4 & a_4 b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{每行提取公因式}} a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_1^2}{a_1^2} & \frac{b_1^3}{a_1^3} \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \frac{b_2^3}{a_2^3} \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \frac{b_3^2}{a_3^2} & \frac{b_3^3}{a_3^3} \\ 1 & \frac{b_4}{a_4} & \frac{b_4^2}{a_4^2} & \frac{b_4^3}{a_4^3} \end{vmatrix}$$

范德蒙德
行列式

$$\begin{aligned} & a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \left(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_3}{a_3} \right) \left(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_2}{a_2} \right) \left(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1} \right) \left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_2}{a_2} \right) \left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1} \right) \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} \right) \\ &= (a_3 b_4 - a_4 b_3)(a_2 b_4 - a_4 b_2)(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

1.3.14

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 + \cos \phi_1 & 1 + \cos \phi_2 & 1 + \cos \phi_3 & 1 + \cos \phi_4 \\ \cos \phi_1 + \cos^2 \phi_1 & \cos \phi_2 + \cos^2 \phi_2 & \cos \phi_3 + \cos^2 \phi_3 & \cos \phi_4 + \cos^2 \phi_4 \\ \cos^2 \phi_1 + \cos^3 \phi_1 & \cos^2 \phi_2 + \cos^3 \phi_2 & \cos^2 \phi_3 + \cos^3 \phi_3 & \cos^2 \phi_4 + \cos^3 \phi_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} r_2 - r_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_3 - r_2 & \cos \phi_1 & \cos \phi_2 & \cos \phi_3 & \cos \phi_4 \\ r_4 - r_3 & \cos^2 \phi_1 & \cos^2 \phi_2 & \cos^2 \phi_3 & \cos^2 \phi_4 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \phi_1 & \cos \phi_2 & \cos \phi_3 & \cos \phi_4 \\ \cos^2 \phi_1 & \cos^2 \phi_2 & \cos^2 \phi_3 & \cos^2 \phi_4 \\ \cos^3 \phi_1 & \cos^3 \phi_2 & \cos^3 \phi_3 & \cos^3 \phi_4 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (\cos \phi_i - \cos \phi_j). \end{aligned}$$

1.3.15 由题意

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{c_i - c_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) - \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) \\
&= \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) \left[2 \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \right].
\end{aligned}$$

1.3.16 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中必含有1, 若1在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中的逆序个数为 s , 则其在排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 中的逆序个数为 $n-s-1$, 从而1在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序个数和为 $n-1$, 即 $1, 2, \cdots, n$ 中比1大的数字个数; 类似的2在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序个数和为 $n-2$, 依此类推, n 在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序个数和为 0 , 所以 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序数和为 $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.3.17 设反对称行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 其中的 n 为奇数, 则

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{每行提}(-1)} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D^T,$$

再由 $D = D^T$, 从而 $D = (-1)^n D^T = -D^T$, 故 $D = 0$.

1.3.18 由行列式的性质有

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2+x & b_2+y & c_2+z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & c \\ x & b_1 & c_1 \\ x & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y & c \\ a_1 & y & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & z \\ a_1 & b_1 & z \\ a_2 & b_2 & z \end{vmatrix} \\
&= D + x \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= D + x \sum_{i=1}^3 A_{i1} + y \sum_{i=1}^3 A_{i2} + z \sum_{i=1}^3 A_{i3}.
\end{aligned}$$

1.5 综合提高训练

例 1.5.1 【2015 (1)】 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 记 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$, 则由行列式展开公式有

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} 2(-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2 \\ &= 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 = 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

例 1.5.2 【2016 (1, 3)】行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由题意

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4. \end{aligned}$$

例 1.5.3 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, a 为任意实数, 证明: $|\mathbf{E} - a\mathbf{xy}| = 1 - a\mathbf{yx}$.

证 由题意

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} - a\mathbf{xy}| &= \begin{vmatrix} 1 - ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ -ax_2y_1 & 1 - ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1 - ax_ny_n \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{升阶}}{=} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 - ax_1y_1 & -ax_1y_2 & \cdots & -ax_1y_n \\ 0 & -ax_2y_1 & 1 - ax_2y_2 & \cdots & -ax_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -ax_ny_1 & -ax_ny_2 & \cdots & 1 - ax_ny_n \end{vmatrix} \stackrel{\substack{r_i + ax_{i-1}r_1 \\ i=2,3,\cdots,n+1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ ax_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{c_1 - ax_{i-1}c_i \\ i=2,3,\cdots,n+1}}{=} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n ax_iy_i & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 - \sum_{i=1}^n ax_iy_i = 1 - a\mathbf{yx}. \end{aligned}$$

例 1.5.4 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$ (其中 $a \neq b$).

解

$$\begin{aligned}
 D_n & \xrightarrow{\text{按第1列分解}} \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{前行列式 } c_i - bc_{i-1}} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\
 & = a^n + bD_{n-1},
 \end{aligned}$$

从而有 $D_n = a^n + bD_{n-1}$, 类似的还可以

$$\begin{aligned}
 D_n & \xrightarrow{\text{按第1列分解}} \begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{\text{前行列式 } c_i - ac_{i-1}} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\
 & = b^n + aD_{n-1},
 \end{aligned}$$

得到 $D_n = b^n + aD_{n-1}$, 从而有

$$\begin{cases} D_n = a^n + bD_{n-1} \\ D_n = b^n + aD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aD_n = a^{n+1} + abD_{n-1} \\ bD_n = b^{n+1} + abD_{n-1} \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1},$$

再由 $a \neq b$, 解得 $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$.

例 1.5.5 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}.$

解 $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix} \begin{matrix} r_n - r_{n-1} \\ r_{n-1} - r_{n-2} \\ \cdots \\ r_2 - r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z-x & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-x & x-y \end{vmatrix}$

$$\begin{matrix} c_1 - c_2 \\ c_2 - c_3 \\ \cdots \\ c_{n-1} - c_n \end{matrix} \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ z-2x+y & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -z+x & z-2x+y & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-2x+y & x-y \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n} y \begin{vmatrix} z-2x+y & x-y & & & 0 \\ -z+x & z-2x+y & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & & x-y \\ 0 & & & -z+x & z-2x+y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+ (-1)^{n+n} (x-y) \begin{vmatrix} x-y & & & & 0 \\ z-2x+y & x-y & & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & & & z-2x+y & x-y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= y \begin{vmatrix} 2x-y-z & y-x & & & 0 \\ z-x & 2x-y-z & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & & y-x \\ 0 & & & z-x & 2x-y-z \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+ (x-y) \begin{vmatrix} x-y & & & & 0 \\ z-2x+y & x-y & & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & & & z-2x+y & x-y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= y \Delta_{n-1} + (x-y)^n,$$

而对于其中的 Δ_{n-1} , 利用本章例 1.2.16 的方法有

$$\begin{cases} \Delta_{n-1} = (x-y)^{n-1} + (x-z)\Delta_{n-2} \\ \Delta_{n-1} = (x-z)^{n-1} + (x-y)\Delta_{n-2} \end{cases},$$

解得当 $y \neq z$ 时, $\Delta_{n-1} = \frac{(x-y)^n - (x-z)^n}{z-y}$, 代回有

$$D_n = y \frac{(x-y)^n - (x-z)^n}{z-y} + (x-y)^n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y},$$

当 $y = z$ 时 $\Delta_{n-1} = n(x-y)^{n-1}$, 代回有

$$D_n = ny(x-y)^{n-1} + (x-y)^n = [x + (n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

第2章 矩 阵

2.1 知 识 要 点

2.1.1 矩阵的概念

将 m 行 n 列的数表称为 $m \times n$ 矩阵, 其中 $m \times n$ 称为矩阵的型; 若两个矩阵 A 和 B 的型相同, 则称 A 和 B 为同型矩阵; 对于两个同型矩阵, 若它们对应位置的元素分别相等, 则称两个矩阵相等; 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 称 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵, 记为 $-A$.

一些特殊的矩阵:

- (1) 零矩阵: 矩阵的所有元素都为 0.
- (2) 单位矩阵: 对角线元素均为 1, 其余位置的元素均为 0 的方阵, 一般记为 E .
- (3) 数量矩阵: 对角线元素相同, 其余位置的元素均为 0 的方阵.
- (4) 对角矩阵: 非对角线元素均为 0 的方阵.
- (5) 上(下)三角形矩阵: 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 满足 $a_{ij} = 0 (i > j, i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为上三角矩阵; 若 A 满足 $a_{ij} = 0 (i < j, i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为下三角矩阵.
- (6) 对称(反对称)矩阵: 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 A 满足 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为对称矩阵; 若 A 满足 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为反对称矩阵. 显然, 反对称矩阵的对角线上元素都为零.

2.1.2 矩阵的运算

- (1) 加法 若矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则称阵 $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 为 A 与 B 的和, 记为 $A + B$.
- (2) 数量乘法 设 k 为常数, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则称矩阵 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 为数与矩阵的数量乘法, 记为 kA .

矩阵的加法和数量乘法统称为矩阵的线性运算, 矩阵的线性运算满足的性质:

- 1) $A + B = B + A$; 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3) $A + O = A$; 4) $A + (-A) = O$;
- 5) $1A = A$; 6) $k(A + B) = kA + kB$;
- 7) $(k + l)A = kA + lA$; 8) $k(lA) = (kl)A$.

(3) 矩阵乘法 若矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 称矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 与 B 的乘积, 记为 $C = AB$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj}$. 矩阵的乘法运算满足的性质:

- 1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $(A + B)C = AC + BC$;
- 3) $C(A + B) = CA + CB$; 4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

注 矩阵的乘法一般不满足交换律、消去律, 若矩阵 A, B 满足 $AB = BA$, 则称 A, B 是可交换的.

(4) 方阵的幂 若矩阵 A 为方阵, 可定义矩阵的乘幂. 规定

$$A^0 = E, \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \uparrow} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

矩阵的幂运算满足的运算性质:

$$1) \quad A^k A^l = A^{k+l}; \quad 2) \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (k, l \text{ 为自然数}).$$

(5) 矩阵的转置 若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的**转置矩阵**, 记为 A^T . 矩阵转置的运算性质:

$$\begin{aligned} 1) \quad (A^T)^T &= A; & 2) \quad (A+B)^T &= A^T + B^T; \\ 3) \quad (kA)^T &= kA^T; & 4) \quad (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned}$$

(6) 方阵的行列式 若矩阵 A 为方阵, 由 A 中元素按原顺序构成的行列式, 称为方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$. 方阵的行列式满足的运算性质:

$$\begin{aligned} 1) \quad |A^T| &= |A|; & 2) \quad |kA| &= k^n |A| \quad (n \text{ 为方阵 } A \text{ 的阶数, } k \text{ 为常数}); \\ 3) \quad |AB| &= |A| |B| \quad (A, B \text{ 为同阶方阵}). \end{aligned}$$

2.1.3 伴随矩阵

设有方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的**伴随矩阵**, 记为 A^* . 注意伴随矩阵的构成方式, 元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 应该放在 A^* 的 (j, i) 位置. 由伴随矩阵的定义可知, 对于任意的方阵 A , 有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

2.1.4 可逆矩阵

对于方阵 A , 若存在同阶方阵 B , 使得 $AB = BA = E$, 则称 A 为**可逆矩阵**, 或称 A **可逆**, 并称 B 为 A 的**逆矩阵**.

矩阵的逆满足的运算性质:

$$1) \quad (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$2) (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad (k \neq 0);$$

$$3) (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1};$$

$$4) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

$$5) |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

逆矩阵的几个主要结论:

1) 若矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一;

2) 矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 且 A 可逆时, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$;

3) 若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $B = A^{-1}$;

4) 当 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆时, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.1.5 矩阵分块

将矩阵 A 用一些横线和竖线分成若干个小矩阵, 每个小矩阵称为 A 的一个子块, 以子块为元素的矩阵称为 A 的分块矩阵.

几种特殊的分块矩阵如下.

(1) 若方阵 A 经分块后可以表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 均为方阵, 则称 A 为分块对角矩阵.

(2) 若方阵 A 经分块后可以表示为

$$A = \begin{pmatrix} O & \cdots & O & A_1 \\ O & \cdots & A_2 & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_m & \cdots & O & O \end{pmatrix},$$

其中 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 均为方阵, 则称 A 为分块反对角矩阵.

(3) 若方阵 A 经分块后可以表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{ii} (i=1, 2, \dots, m)$ 均为方阵, 则称 A 为分块上三角矩阵.

(4) 若方阵 A 经分块后可以表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ii} ($i=1,2,\cdots,m$) 均为方阵, 则称 A 为分块下三角矩阵.

2.1.6 分块矩阵的运算

(1) **加法** 若 $A+B$ 有意义, 对 A, B 进行相同的分块后得到的分块矩阵可以相加, 并且加法表现为对应的子块相加.

(2) **数量乘法** 数与分块矩阵的乘法表现为数乘到每个子块上.

(3) **矩阵乘法** 若 AB 有意义, 对 A, B 进行分块时只要 A 的列分割方式与 B 的行分割方式相同, 得到分块矩阵可以相乘, 并且乘法与普通矩阵的乘法运算一致.

(4) **转置** 把分块矩阵行上的子块换到同序数的列上, 再对每个子块取转置, 得到的矩阵称为分块矩阵的转置矩阵.

(5) **分块矩阵的行列式** 对于分块对角矩阵, 分块上(下)三角矩阵, 它们的行列式都等于对角线上子块的行列式相乘, 即

$$\begin{vmatrix} A_{11} & & \mathbf{O} \\ & A_{22} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & A_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ \mathbf{O} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix} = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|.$$

(6) 分块矩阵的逆矩阵

$$1) \text{ 若分块对角矩阵 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & A_m \end{pmatrix} \text{ 可逆, 则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \mathbf{O} \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{O} & & & A_m^{-1} \end{pmatrix};$$

$$2) \text{ 若分块反对角矩阵 } A = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & & A_1 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ A_m & & \mathbf{O} \end{pmatrix} \text{ 可逆, 则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & & A_m^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ A_1^{-1} & & \mathbf{O} \end{pmatrix};$$

$$3) \text{ 若分块上三角矩阵 } \begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{O} & B \end{pmatrix} \text{ 可逆, 则其逆为 } \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ \mathbf{O} & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$4) \text{ 若分块下三角矩阵 } \begin{pmatrix} A & \mathbf{O} \\ C & B \end{pmatrix} \text{ 可逆, 则其逆为 } \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{O} \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.1.7 线性方程组

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方程组

由于 A 为上三角形, 因此当 $i < j$ 时, $|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 为上三角行列式, 且主对角线中含有 0 元素 ($a_{ii} = a_{i+1,i+1} = \cdots = a_{jj} = 0$), 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{i-1,i-1}0\cdots 0a_{j+1,j+1}\cdots a_{nn} = 0,$$

进而 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = 0$, 再由 A^* 的定义可知 A^* 为上三角形矩阵. 当 A 可逆时, 由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 可知, A^{-1} 也是上三角形矩阵.

例 2.2.2 已知 $A = E - \frac{2}{aa^T} a^T a$, 其中 a 为行矩阵, 证明: A 为对称矩阵, 且 $AA^T = E$.

解 由于

$$A^T = \left(E - \frac{2}{aa^T} a^T a \right)^T = E^T - \frac{2}{aa^T} (a^T a)^T = E - \frac{2}{aa^T} a^T (a^T)^T = E - \frac{2}{aa^T} a^T a = A,$$

故 A 为对称矩阵. 进而

$$\begin{aligned} AA^T &= \left(E - \frac{2}{aa^T} a^T a \right) \left(E - \frac{2}{aa^T} a^T a \right) = E - \frac{4}{aa^T} a^T a + \left(\frac{2}{aa^T} \right)^2 (a^T aa^T a) \\ &= E - \frac{4}{aa^T} a^T a + \frac{4}{(aa^T)^2} a^T (aa^T) a = E - \frac{4}{aa^T} a^T a + \frac{4}{aa^T} a^T a = E, \end{aligned}$$

命题得证.

例 2.2.3 设 A, B 分别为 3 阶实对称矩阵与反对称矩阵, 且满足 $A^2 = B^2$, 证明 $A = B = O$.

证 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & * & * \\ * & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & * \\ * & * & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b_{12}^2 + b_{13}^2) & * & * \\ * & -(b_{12}^2 + b_{23}^2) & * \\ * & * & -(b_{13}^2 + b_{23}^2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由于 $A^2 = B^2$, 因此有

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = -(b_{12}^2 + b_{13}^2),$$

从而 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = b_{12} = b_{13} = 0$, 类似地可得到 $a_{22} = a_{23} = a_{33} = b_{23} = 0$, 故 $A = B = O$.

例 2.2.4 【1994 (1)】已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则 $A^n =$ _____.

解 由题意有

$$\alpha\beta^T = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = 1+1+1=3, \quad \alpha^T\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

由于 $\beta\alpha^T = (\alpha\beta^T)^T = 3$, 因此

$$A^n = (\alpha^T\beta)^n = (\alpha^T\beta) \cdots (\alpha^T\beta) = \alpha^T \underbrace{(\beta\alpha^T) \cdots (\beta\alpha^T)}_{n-1} \beta = 3^{n-1} \alpha^T \beta = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.5 【1999 (3)】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$ 为正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} =$ _____.

解 由于

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A,$$

从而

$$A^n - 2A^{n-1} = A^{n-2}(A^2 - 2A) = O.$$

例 2.2.6 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, 求 A^n . ($n \geq 2$)

解 记 $B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = B + aE,$$

由于 E 与 B 可交换, 因此

$$A^n = (B + aE)^n = C_n^0 B^0 (aE)^n + C_n^1 B^1 (aE)^{n-1} + C_n^2 B^2 (aE)^{n-2} + \cdots + C_n^n B^n (aE)^0,$$

而

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O,$$

故

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 (aE)^n B^0 + C_n^1 (aE)^{n-1} B^1 + C_n^2 (aE)^{n-2} B^2 \\ &= a^n E + na^{n-1} EB + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} EB^2 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & na^{n-1}b & na^{n-1}c \\ 0 & 0 & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2.2 题型二、伴随矩阵的相关问题

认真把握伴随矩阵的定义, 注意用代数余子式构造伴随矩阵方式, 特别记住 2 阶方阵伴随矩阵的写法, 即“主对角线上元素互换, 副对角线上元素变号”; 涉及伴随矩阵的计算与证明, 一般应从具体问题出发, 并结合公式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 进行分析, 特别地, 当矩阵 A 可逆时, 其伴随矩阵 A^* 常用 $|A|A^{-1}$ 替换.

例 2.2.7 【2005 (3)】设矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵. 若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数, 则 a_{11} 为 ().

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (B) 3; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\sqrt{3}$.

解 由 $A^* = A^T$, 有

$$|AA^*| = |AA^T| = |A||A^T| = |A|^2,$$

再由 $AA^* = |A|E$, 以及 A 为 3 阶矩阵, 有

$$|AA^*| = |A||E| = |A|^3,$$

从而有 $|A|=1$ 或 $|A|=0$, 因为

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a_{11}^2 \neq 0,$$

故 $|A|=1$, 进而解得 $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因此本题选择 (A).

例 2.2.8 【2009(1,3)】设 A^*, B^* 分别为 2 阶矩阵 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A|=2, |B|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ().

$$(A) \begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix};$$

$$(B) \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix};$$

$$(C) \begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix};$$

$$(D) \begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}.$$

解 由于 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} |A||B| = 2 \times 3 = 6 \neq 0$, 故 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆, 从而

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & 2|B|B^{-1} \\ 3|A|A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以本题选择 (B).

例 2.2.9 【1996(4)】设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶非奇异矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^*$ 等于 ().

$$(A) |A|^{n-1} A;$$

$$(B) |A|^{n+1} A;$$

$$(C) |A|^{n-2} A;$$

$$(D) |A|^{n+2} A.$$

解 由于 $AA^* = |A|E$, 以及 A 为非奇异矩阵, 有 $A^* = |A|A^{-1}$, 进而

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^n |A^{-1}| |A|^{-1} (A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2} A.$$

本题选择 (C).

2.2.3 题型三、矩阵可逆的判定及逆矩阵的求法

矩阵可逆的判定方法主要如下几种.

(1) 矩阵的行列式不为零.

(2) 两个方阵乘积为单位阵, 则两个方阵都可逆且互为逆矩阵.

(3) 一个矩阵可以表示为一些可逆矩阵的乘积, 则该矩阵可逆.

(4) 方阵是满秩的, 则其可逆 (参见第 3 章).

(5) 方阵的全部特征值不为零, 则其可逆 (参见第 5 章).

逆矩阵的求解方法主要有如下几种.

(1) 解方程组的方法. 这种方法在计算上很麻烦, 基本不用.

(2) 伴随矩阵的方法. 常在证明中使用的公式有:

$$AA^* = A^*A = |A|E, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

在计算上, 这种方法也基本不用, 但应记住 2 阶方阵的逆矩阵公式.

(3) 矩阵的初等变换的方法. 这是求逆计算中主要使用的方法, 也是一个重要的考点, 必须熟练掌握 (参见第 3 章).

例 2.2.10 讨论矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix}$ 是否可逆.

解 由于

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

有: 当 $n=1$ 时, $|A| = 1+a_1b_1$; 当 $n=2$ 时, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$; 当 $n > 2$ 时,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

因此, 当 $n=1$ 时, 若 $a_1b_1 \neq -1$, 则 A 可逆; 当 $n=2$ 时, 若 $a_2 \neq a_1$ 且 $b_2 \neq b_1$, A 可逆; 而 $n > 2$ 时, A 不可逆.

例 2.2.11 【2003 (3)】设 n 维向量 $\alpha = (a, 0, \dots, 0, a)^T, a < 0$; E 为 n 阶单位矩阵, 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$, $B = E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T$, 其中 A 的逆矩阵为 B , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由题意

$$\alpha^T\alpha = (a, 0, \dots, a) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = 2a^2, \quad \alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (a, 0, \dots, a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \cdots & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^2 & 0 & \cdots & a^2 \end{pmatrix} \neq O,$$

由于 B 是 A 的逆矩阵, 从而

$$E = AB = (E - \alpha\alpha^T) \left(E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T \right) = E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$$

$$= E - a\alpha^T + \frac{1}{a}a\alpha^T - \frac{1}{a}a(\alpha^T a)\alpha^T = E - (1 - \frac{1}{a} + 2a)a\alpha^T,$$

于是 $1 - \frac{1}{a} + 2a = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, $a = -1$, 再由已知 $a < 0$, 所以 $a = -1$.

例 2.2.12 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 - 5A + 6E = O$, 判断 $A + 3E$ 与 $A - 3E$ 是否一定可逆, 如果可逆, 求出其逆.

解 由 $A^2 - 5A + 6E = O$ 整理可得

$$(A + 3E)\left(\frac{4}{15}E - \frac{1}{30}A\right) = E,$$

故 $A + 3E$ 必可逆, 且有 $(A + 3E)^{-1} = \frac{4}{15}E - \frac{1}{30}A$.

对于矩阵 $A - 3E$, 由于 $A = 2E$ 或 $A = 3E$ 都满足 $A^2 - 5A + 6E = O$, 并且当 $A = 2E$ 时, $A - 3E = 2E - 3E = -E$, $A - 3E$ 可逆, 而 $A = 3E$ 时, $A - 3E = 3E - 3E = O$, $A - 3E$ 不可逆, 因此 $A - 3E$ 不一定可逆.

例 2.2.13 已知 $A, B, AB - E$ 均为可逆矩阵, 证明矩阵 $A - B^{-1}$ 及 $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$ 都可逆.

证 由于

$$A - B^{-1} = AE - B^{-1} = ABB^{-1} - B^{-1} = (AB - E)B^{-1},$$

故 $A - B^{-1}$ 可逆. 又因为

$$\begin{aligned} (A - B^{-1})^{-1} - A^{-1} &= (A - B^{-1})^{-1}AA^{-1} - (A - B^{-1})^{-1}(A - B^{-1})A^{-1} \\ &= (A - B^{-1})^{-1}[A - (A - B^{-1})]A^{-1} = (A - B^{-1})^{-1}(A - A + B^{-1})A^{-1} \\ &= (A - B^{-1})^{-1}B^{-1}A^{-1}, \end{aligned}$$

而 $A - B^{-1}$ 可逆, 因此 $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$ 也可逆.

例 2.2.14 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 $(A^*)^{-1}$.

解 由 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 有 A 可逆, 从而 $A^* = |A|A^{-1}$, 因此

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.15 设可逆矩阵 A 的每行元素之和都等于常数 a , 证明 $a \neq 0$, 且 A^{-1} 的每行元素之和都等于 $\frac{1}{a}$.

证法 1 不妨设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 由 A 可逆, 有 $|A| \neq 0$, 从而

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故 $a \neq 0$. 再由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 以及 A^* 的第 1 行元素为 $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ 可知, A^{-1} 的第 1 行元素之和为

$$\frac{1}{|A|} (A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1}) = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \frac{|A|}{a} = \frac{1}{a},$$

命题得证.

证法 2 若设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 则由已知有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix},$$

再由 A 可逆, 有 $a \neq 0$, 从而

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix},$$

由矩阵乘法可知, A^{-1} 的每行元素之和都等于 $\frac{1}{a}$.

例 2.2.16 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的全部代数余子式之和.

解 由于 A^* 由 A 的全部代数余子式构成, 在 A 可逆时, 可以利用 $A^* = |A|A^{-1}$ 求出 A^* , 再求全部代数余子式之和. 将 A 分块并记为 $\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

由于 $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 因此 A_1, A_2 可逆, 且

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A_1|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A_2|} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

从而

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

因此

$$A^* = |A|A^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $|A|$ 的全部代数余子式之和为 $(-2)+1+4+6+(-4)+(-2)+2=5$.

2.2.4 题型四、矩阵的分块及分块运算

矩阵分块的主要目的是为了简化高阶矩阵运算, 要注意分块的方式及分块运算怎么进行. 合理分块后, 分块矩阵之间的运算与矩阵的运算规则相似, 矩阵分块常和矩阵的逆、行列式及矩阵的幂等知识点构成一些综合性题目.

例 2.2.17 【2010 (3)】 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$, 则 $|A+B^{-1}|=$ _____.

解 由题意

$$2 = |A^{-1} + B| = |A^{-1}B^{-1}B + A^{-1}AB| = |A^{-1}(B^{-1} + A)B| = |A^{-1}| |B^{-1} + A| |B|,$$

所以

$$|B^{-1} + A| = 2 |B^{-1}| |A| = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 = 3.$$

例 2.2.18 【1988 (1)】 设 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A|=4$, $|B|=1$, 则 $|A+B|=$ _____.

解 由题意

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 8|\alpha + \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 8(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + |\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|) = 8(|A| + |B|) = 40. \end{aligned}$$

例 2.2.19 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $|A^6|$ 和 A^8 .

解 依题意, 记 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 对于 A_1 有, $|A_1|=1$, 且

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_1^8 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \times 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

对于 A_2 有 $|A_2|=0$, 且

$$\begin{aligned} A_2^8 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^8 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -3) \right)^8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underbrace{\left((1 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \dots \left((1 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}_{7 \text{ 个}} (1 \quad -3) \\ &= 4^7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -3) = 4^7 A_2, \end{aligned}$$

因此,

$$|A^6| = |A|^6 = \begin{vmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{vmatrix}^6 = (|A_1| |A_2|)^6 = 0,$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^7 \times 1 & -4^7 \times 3 \\ 0 & 0 & -4^7 \times 1 & 4^7 \times 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.20 【1997 (3)】 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数, 记分块矩阵

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ . (2) 证明: Q 可逆的充分必要条件是 $-\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

解 (1) 由题意, 及 $A^* A = |A| E$, 有

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A + |A| \alpha^T & -\alpha^T A^* \alpha + b |A| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0^T & |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 有

$$|PQ| = |P| |Q| = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0^T & |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{vmatrix} = |A|^2 (b - \alpha^T A^{-1} \alpha),$$

再由 A 为可逆矩阵, 及 $|P| = |A| \neq 0$, 可得 $|Q| = |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha)$, 所以 Q 可逆的充分必要条件是 $|Q| \neq 0$, 即 $-\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

例 2.2.21 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, 分块矩阵 $D = \begin{pmatrix} A^{-1} + B^{-1} & A^{-1} - B^{-1} \\ A^{-1} - B^{-1} & A^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix}$. 证明 D 可逆,

并求 D^{-1} .

证 由题意

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} A^{-1} + B^{-1} & A^{-1} - B^{-1} \\ A^{-1} - B^{-1} & A^{-1} + B^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^{-1} + B^{-1} & A^{-1} - B^{-1} \\ 2A^{-1} & 2A^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2B^{-1} & A^{-1} - B^{-1} \\ O & E \end{vmatrix} \\ &= |2A^{-1}| |2B^{-1}| \neq 0, \end{aligned}$$

从而 D 可逆, 设 $D^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned} DD^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1} + B^{-1} & A^{-1} - B^{-1} \\ A^{-1} - B^{-1} & A^{-1} + B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A^{-1} + B^{-1})X_1 + (A^{-1} - B^{-1})X_3 & (A^{-1} + B^{-1})X_2 + (A^{-1} - B^{-1})X_4 \\ (A^{-1} - B^{-1})X_1 + (A^{-1} + B^{-1})X_3 & (A^{-1} - B^{-1})X_2 + (A^{-1} + B^{-1})X_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(A^{-1} + B^{-1})X_1 + (A^{-1} - B^{-1})X_3 &= E, \quad (A^{-1} + B^{-1})X_2 + (A^{-1} - B^{-1})X_4 = O, \\(A^{-1} - B^{-1})X_1 + (A^{-1} + B^{-1})X_3 &= O, \quad (A^{-1} - B^{-1})X_2 + (A^{-1} + B^{-1})X_4 = E,\end{aligned}$$

解得

$$X_1 = (A+B)/4, \quad X_2 = (A-B)/4, \quad X_3 = (A-B)/4, \quad X_4 = (A+B)/4,$$

所以

$$D^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (A+B) & (A-B) \\ (A-B) & (A+B) \end{pmatrix}.$$

2.2.5 题型五、矩阵方程的求解

求解矩阵方程的基本原则是“先化简，后计算”，以 X 是未知矩阵为例，一般先将已知中含有 X 的矩阵等式化简为 $AX=C$ ， $XB=C$ ， $AXB=C$ 等基本形式，若 A, B 可逆，可进一步化简为 $X=A^{-1}C$ ， $X=CB^{-1}$ ， $X=A^{-1}CB^{-1}$ ，然后再将 A, B, C 代入进行计算；若 A, B 不可逆，则应假设 X 的元素形式，进行矩阵乘法，按矩阵相等联立方程组来解。

例 2.2.22 【1998 (3)】 设矩阵 A, B 满足 $A^*BA=2BA-8E$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， E 为

单位矩阵， A^* 为 A 伴随矩阵，则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 由题意 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ ，故 A 可逆，再由 $A^*BA=2BA-8E$ ，有

$$A(A^*BA)A^{-1} = A(2BA-8E)A^{-1},$$

整理可得

$$|A|B = 2AB - 8E,$$

从而有

$$B = 8(2A - |A|E)^{-1},$$

其中

$$(2A - |A|E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

因此

$$B = 8 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = 8 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 2.2.23 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $XA^* = 3X + A^{-1}$, 求矩阵 X .

解 方程两边右乘 A , 得

$$(XA^*)A = (3X + A^{-1})A,$$

整理得

$$X(A^*A) = 3XA + A^{-1}A,$$

因此

$$X|A|E = 3XA + E, \quad X(|A|E - 3A) = E,$$

故 $|A|E - 3A$ 可逆, 且

$$X = (|A|E - 3A)^{-1},$$

而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) = -2,$$

所以

$$X = (-2E - 3A)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.6 题型六、克莱姆法则的应用

克莱姆法则适用于方程数与未知数相等的线性方程组, 该法则建立了方程组中系数、常数与方程组解之间的关系. 在利用该法则时, 需要注意非齐次线性方程组系数行列式为零, 方程组存在无解和无穷多解两种情况.

例 2.2.24 设 a 为常数, 讨论线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$ 解的情况.

解 由于方程组的系数矩阵的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{r_1+r_2} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2,$$

从而当 $a \neq 1$, $a \neq -2$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解, 否则方程组无解或有无穷多解.

当 $a=1$ 时, 方程组化为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

即 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, 故其有无穷多解, 而当 $a = -2$ 时, 方程组化为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

这需要 x_1, x_2, x_3 满足 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$, 因此方程组无解.

例 2.2.25 【1996 (3)】 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则线性方程组 $A^T x = b$ 的解是_____.

解 由题意, 由范德蒙德行列式有 $|A^T| = |A| = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0$. 从而方程组有唯一解,

并且

$$x_j = \frac{D_j}{|A^T|} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 D_j 为将 $|A^T|$ 的第 j 列用 b 替换后对应的行列式, 因此有

$$D_1 = |A^T|, \quad D_j = 0 \quad (j = 2, \cdots, n),$$

故线性方程组的解是 $x = (1, 0, \cdots, 0)^T$.

例 2.2.26 求二次多项式 $f(x)$, 使其满足 $f(1) = 2$, $f(2) = 6$, $f(3) = 12$.

解 设 $f(x) = a + bx + cx^2$, 由题意, 可得到以 a, b, c 为未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a + b1 + c1^2 = 2, \\ a + b2 + c2^2 = 6, \\ a + b3 + c3^2 = 12, \end{cases}$$

其系数矩阵的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{范德蒙德}} (3-2)(3-1)(2-1) = 2 \neq 0,$$

因此, 方程组有唯一解. 又因为

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1^2 \\ 6 & 2 & 2^2 \\ 12 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1^2 \\ 1 & 6 & 2^2 \\ 1 & 12 & 3^2 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 2,$$

从而方程组的解为

$$a = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{0}{2} = 0, \quad b = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2}{2} = 1, \quad c = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2}{2} = 1,$$

故二次多项式为 $f(x) = x + x^2$.

2.3 深化训练

2.3.1 填空题

(1) 【2004 (4)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为 3 阶可逆矩阵, 则

$$B^{2004} - 2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 【2004 (3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的

伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设 A, B 为 3 阶方阵, 并且 $|A| = 2$, $|B| = -3$, 则 $\left| -((AB)^T)^{-1} \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 【2005 (3)】 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A| = 1$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 【1992 (3)】 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a$, $|B| = b$, 令 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则 $|C| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 已知 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

2.3.2 单项选择题

(1) 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 且 $(A+B)^2 = E$, 则 $(E + BA^{-1})^{-1} = (\quad).$

(A) $(A+B)B$; (B) $E + AB^{-1}$; (C) $A(A+B)$; (D) $(A+B)A$.

(2) 设 A, B 为同阶方阵, 且满足 $(AB)^2 = E$, 则下列选项一定正确的是 $(\quad).$

(A) $AB = E$; (B) $(BA)^2 = E$; (C) $A^{-1} = BAB$; (D) $A^{-1} = B$.

(3) 【2008 (3)】 设 A 为 n 阶非 O 矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则 $(\quad).$

(A) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆; (B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆;

(C) $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆; (D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆.

(4) 【1998 (2)】 设 A 为任一 $n(n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $k(\neq 0, \pm 1)$ 为常数, 则必有 $(kA)^* =$ ().

(A) kA^* ; (B) $k^{n-1}A^*$; (C) k^nA^* ; (D) $k^{-1}A^*$.

(5) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X + 2A^{-1} = X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵,

则 $|X| =$ ().

(A) $\frac{3}{5}$; (B) $\frac{2}{15}$; (C) $\frac{1}{12}$; (D) $-\frac{1}{12}$.

(6) 【1993 (4)】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为 4×1 矩阵, 且行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$ _____.

(A) $m+n$; (B) $-(m+n)$; (C) $n-m$; (D) $m-n$.

2.3.3 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求与 A 可交换的一切矩阵.

2.3.4 已知 $\alpha = (1, 1, -1)$, $\beta = (1, 2, 3)$, 试求: $\alpha\beta^T$, $\alpha^T\beta$ 及 $(\alpha^T\beta)^n$.

2.3.5 设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $AB = A + B$. 证明 $AB = BA$.

2.3.6 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 满足 $3AB - B - 3A = O$, 证明: $3A - E$ 可逆及 A, B 可交换.

2.3.7 已知 3 阶非零实矩阵 A 满足 $A^* = A^T$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明 A 是可逆矩阵.

2.3.8 【1993 (1)】 已知矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

2.3.9 已知 A 为 3 阶方阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

2.3.10 【2001 (2)】 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = BXA + AXB + E,$$

其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

2.3.11 【1992 (4)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX + E = A^2 + X$, 其中 E 为三

阶单位矩阵, 求矩阵 X .

2.3.12 【2000 (1)】 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$,

其中 E 为 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B .

2.3.13 设四阶矩阵 B 满足 $\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right]^{-1}BA^{-1} = 2AB + 12E$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵 B .

2.3.14 设 A 为 n 阶方阵, 若对任意的列向量 α 都有 $A\alpha = 0$, 证明 $A = O$.

2.3.15 设 A, B, C, D 都是 n 阶矩阵, 其中 $|A| \neq 0$ 并且 $AC = CA$, 试证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

2.3.16 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + cx_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 试求 c, d 应满足的条件.

2.4 深化训练详解

2.3.1 填空题

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 提示 由于 $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 从而

$$B^{2004} - 2A^2 = (P^{-1}AP)^{2004} - 2A^2 = P^{-1}A^{2004}P - 2A^2$$

$$= P^{-1}(A^2)^{1002}P - 2A^2 = E - 2A^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $\frac{1}{9}$. 提示 依题 $|A| = 3$, 再由 $ABA^* = 2BA^* + E$ 整理得

$$B = \frac{1}{3}(A - 2E)^{-1}A,$$

故

$$|B| = \left| \frac{1}{3}(A - 2E)^{-1}A \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^3 |A - 2E|^{-1} |A| = \frac{1}{9}.$$

(3) $\frac{1}{6}$. 提示

$$\left| -((AB)^T)^{-1} \right| = (-1)^3 \frac{1}{|(AB)^T|} = -\frac{1}{|AB|} = -\frac{1}{|A||B|} = -\frac{1}{2 \times (-3)} = \frac{1}{6}.$$

(4) 2. 提示 由题意

$$\begin{aligned} |B| &= |a_1 + a_2 + a_3, a_1 + 2a_2 + 4a_3, a_1 + 3a_2 + 9a_3| \\ &= \frac{c_3 - c_2}{c_2 - c_1} |a_1 + a_2 + a_3, a_2 + 3a_3, a_2 + 5a_3| \frac{c_3 - c_2}{c_3 \div 2} 2 |a_1 + a_2 + a_3, a_2 + 3a_3, a_3| \\ &= \frac{c_2 - 3c_3}{c_1 - c_2 - c_3} 2 |a_1, a_2, a_3| = 2 |A| = 2. \end{aligned}$$

(5) ab .

(6) -3. 提示 由已知 B 必有某一列向量 B_i 满足 $B_i \neq O$, 且 $AB_i = O$, 从而齐次线性方程组 $Ax = O$ 有非零解, 由克莱姆法则则有

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $x = -3$.

2.3.2 单项选择题

(1) (C). (2) (C). (3) (C).

提示 $A^3 = O$, 有 $E - A^3 = E$, $E + A^3 = E$, 从而有

$$(E - A)(E + A + A^2) = E, (E + A)(E - A + A^2) = E,$$

故 $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆.

(4) (B). (5) (B).

(6) (C). 提示 由题意

$$\begin{aligned} |a_3, a_2, a_1, \beta_1 + \beta_2| &= |a_3, a_2, a_1, \beta_1| + |a_3, a_2, a_1, \beta_2| \\ &= -|a_1, a_2, a_3, \beta_1| + |a_1, a_2, \beta_2, a_3| = -m + n = n - m. \end{aligned}$$

2.3.3 设与 A 可交换的矩阵 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, 则有

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

由 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 可得 $a_1 = 0, b_1 = a, c_1 = b, a_2 = 0, b_2 = a_1, c_2 = b_1, b_2 = 0$, 从而

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c 为任意一实数.

2.3.4 依题

$$\alpha\beta^T = (1, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0, \quad \alpha^T\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

由于 $\beta\alpha^T = \alpha\beta^T = 0$, 因此

$$(\alpha^T\beta)^n = (\alpha^T\beta) \cdots (\alpha^T\beta) = \alpha^T \underbrace{(\beta\alpha^T) \cdots (\beta\alpha^T)}_{n-1} \beta = 0\alpha^T\beta = \mathbf{O}.$$

2.3.5 由 $\mathbf{AB} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, 整理得 $(\mathbf{B} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{E}$, 故 $(\mathbf{B} - \mathbf{E})$ 与 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})$ 互为逆矩阵, 从而有

$$(\mathbf{B} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{E},$$

所以 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

2.3.6 由 $3\mathbf{AB} - \mathbf{B} - 3\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 整理有

$$(3\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{E},$$

故 $3\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 可逆, 其逆为 $\mathbf{B} - \mathbf{E}$, 进而有

$$(3\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = (\mathbf{B} - \mathbf{E})(3\mathbf{A} - \mathbf{E}),$$

化简得 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 即 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可交换.

2.3.7 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 且 $a_{11} \neq 0$, 由 $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$ 有 $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 从而

$$|\mathbf{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0,$$

因此 $\mathbf{A}$ 可逆.

2.3.8 由 $\mathbf{A}$ 可逆, 有 $\mathbf{A}^*$ 可逆, 且 $(\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} = |\mathbf{A}^{-1}| \mathbf{A}$, 再由 $\mathbf{A}^{-1}$ 可求得

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.3.9 \quad |(2A)^{-1} - 5A^*| = 2|A| |(2A)^{-1} - 5A^*| = 2 \left| \frac{1}{2}E - \frac{5}{2}E \right| = -2^4.$$

2.3.10 由已知 $AXA + BXB = BXA + AXB + E$, 整理得

$$(A - B)X(A - B) = E,$$

因为

$$|A - B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

故 $A - B$ 可逆, 求得 $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 从而

$$X = [(A - B)^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.11 由 $AX + E = A^2 + X$, 整理有

$$(A - E)X = A^2 - E = (A - E)(A + E),$$

其中 $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 从而有

$$X = (A + E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3.12 由题及 $AA^* = |A|E$, 有 $|A|^3 = |A^*| = 8$, $|A| = 2$, 再由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 整理可得

$$|A|B = A^*B + 3|A|E,$$

将 $|A| = 2$ 代入, 进一步整理有 $(2E - A^*)B = 6E$, 由于 $2E - A^*$ 可逆, 且

$$(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

所以

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3.13 依题有 $|A|=2$ ，从而可得

$$\left[\left(\frac{1}{2}A \right)^* \right]^{-1} = \frac{\frac{1}{2}A}{\left| \frac{1}{2}A \right|} = 4A,$$

代入 $\left[\left(\frac{1}{2}A \right)^* \right]^{-1} BA^{-1} = 2AB + 12E$ ，整理可得 $B = 6(2E - A)^{-1}$ ，其中

$$(2E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix},$$

所以

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3.14 证法 1 取 $\alpha = \varepsilon_i = (\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_n)^T$ ，则有 $A\varepsilon_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)，从而

$$O = (0, 0, \dots, 0) = (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n) = A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = AE = A,$$

命题得证.

证法 2 将 A 按列分块，并记 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ，由

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n) = (A_1, A_2, \dots, A_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

有 $A_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)，故 $A = O$.

2.3.15 由于

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix},$$

两端取行列式，可得

$$\begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & -CA^{-1}B + D \end{vmatrix},$$

从而有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= |A| \cdot |-CA^{-1}B + D| = |-ACA^{-1}B + AD| \xrightarrow{\text{AC可交换}} |-CAA^{-1}B + AD| \\ &= |AD - CB|. \end{aligned}$$

2.3.16 由克莱姆法则方程组的系数行列式为零，从而有

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & c-1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & c-1 & d-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c-1 & d-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-1 \\ 0 & -4 & 1-c \\ 0 & c+3 & d-1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -4 & 1-c \\ c+3 & d-1 \end{vmatrix} = (c+1)^2 - 4d,
 \end{aligned}$$

故应满足的条件为 $(c+1)^2 = 4d$.

2.5 综合提高训练

例 2.5.1 【2009(3)】设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

若 $P = (a_1, a_2, a_3)$, $Q = (a_1 + a_2, a_2, a_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为 ().

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解 由题意有

$$Q = (a_1 + a_2, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T,$$

因此

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

故选项 (A) 正确.

例 2.5.2 【2012 (1, 3)】设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

若 $P = (a_1, a_2, a_3)$, $Q = (a_1 + a_2, a_2, a_3)$, 则 $Q^{-1} A Q$ 为 ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 由题意有

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1},$$

因此

$$\boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

故选项 (B) 正确.

例 2.5.3 【2013 (1, 3)】设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零方阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $|\boldsymbol{A}| =$ _____.

解 由题意 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为非零方阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 由 $a_{ij} = -A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 有

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 \neq 0,$$

及

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{A}^T,$$

从而有

$$|\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^*| = |-\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^T| = (-1)^3 |\boldsymbol{A}|^2 = -|\boldsymbol{A}|^2,$$

再由 $\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}| \boldsymbol{E}$, 有 $|\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^3$, 故 $|\boldsymbol{A}| = -1$.

例 2.5.4 【2013 (1, 3)】设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 问当 a, b 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$, 并求出所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 由题意, 设 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$, 整理有

$$\begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases},$$

经整理为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4, \\ x_2 = -x_3 \end{cases},$$

令 $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, 则其全部解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = -c_1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$$

其中 c_1, c_2 为任意实数, 因此

$$C = \begin{pmatrix} 1 + c_1 + c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

例 2.5.5 【2015 (3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值.

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

解 (1) 因为 $A^3 = O$, 有

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3,$$

解得 $a = 0$.

(2) 由 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 整理有

$$X - XA^2 - A(X - XA^2) = E,$$

即

$$(E - A)X(E - A^2) = E,$$

从而

$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = (E - A^2 - A)^{-1},$$

经计算

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 3 章 矩阵的初等变换与线性方程组

3.1 知 识 要 点

3.1.1 矩阵的初等变换与初等矩阵

对矩阵施以下列三种变换，称为矩阵的初等变换.

- (1) **交换**: 交换矩阵的某两行(列)对应位置元素.
- (2) **数乘**: 用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列)的所有元素.
- (3) **倍加**: 将某一行(列)所有元素的 l 倍加到另一行(列)的对应元素上.

若矩阵 A 经过有限次初等变换化为矩阵 B ，则称 A 与 B 等价，记作 $A \rightarrow B$. 任意一个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 经过若干次初等变换后，可以化为形式为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ 的标准形.

对单位矩阵 E 实施一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵. 分别记为 $E(ij)$ 、 $E(i(k))$ 、 $E(ij(k))$ ，其中 $E(ij)$ 表示将单位矩阵中的第 i, j 两行(或列)对换得到的初等矩阵； $E(i(k))$ 表示将单位矩阵中的第 i 行(或列)乘以数 k ($k \neq 0$) 得到的初等矩阵； $E(ij(k))$ 表示将单位矩阵中的第 j 行乘以数 k ($k \neq 0$) 加到 i 行或将单位矩阵中的第 i 列乘以数 k 加到 j 列得到的初等矩阵.

初等矩阵的性质如下:

- (1) 初等矩阵均可逆，则其逆矩阵还是初等矩阵. 且

$$E^{-1}(ij) = E(ij), \quad E^{-1}(i(k)) = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad E^{-1}(ij(l)) = E(ij(-l)).$$

- (2) 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，对 A 施以某种初等行变换，等价于在 A 左侧乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施以某种初等列变换，等价于在 A 右侧乘以相应的 n 阶初等矩阵.

- (3) A 可逆 $\Leftrightarrow A = P_1 P_2 \cdots P_s$ ，其中 P_i ($i = 1, 2, \dots, s$) 为初等矩阵.

3.1.2 矩阵的秩

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，在 A 中任取 k 行、 k 列 ($k \leq \min(m, n)$)，位于这些行、列交叉点的 k^2 个元素保持相对位置不变组成一个 k 阶行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

矩阵 A 中最高不为零的子式的阶数 r 为矩阵 A 的秩，记为秩 $(A) = r$ 或 $R(A) = r$. 当 $A = O$ 时，规定 $R(A) = 0$. 若 n 阶方阵 A 满足 $R(A) = n$ ，则称 A 为满秩矩阵；若 $R(A_{m \times n}) = m$ ，则称 A 为行满秩矩阵；若 $R(A_{m \times n}) = n$ ，则称 A 为列满秩矩阵.

矩阵秩的常用结论:

- (1) 若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，则 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$;

- (2) $R(A) = R(A^T) = R(-A)$;
 (3) 初等变换不改变矩阵的秩, 即若 $A \rightarrow B$, 则有 $R(A) = R(B)$;
 (4) 设 n 阶方阵 A , A 为非奇异阵 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow R(A) = n \Leftrightarrow A$ 满秩 $\Leftrightarrow A \rightarrow E$;
 (5) 若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, P 为 m 阶可逆矩阵, Q 为 n 阶可逆矩阵, 则

$$R(PA) = R(AQ) = R(PAQ) = R(A) ;$$

$$(6) \max\{R(A), R(B)\} \leq R(A \ B) \leq R(A) + R(B) ;$$

$$(7) R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\} ;$$

$$(8) \text{ 设 } A_{m \times n} B_{n \times k} = O_{m \times k}, \text{ 则 } R(A) + R(B) \leq n ;$$

$$(9) \text{ 设 } A \text{ 为 } n \text{ 阶方阵, 则 } R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}.$$

3.1.3 用初等变换求逆矩阵及解矩阵方程

(1) 用初等变换求逆矩阵.

方法 1: 用初等行变换.

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}).$$

方法 2: 用初等列变换.

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) 解矩阵方程.

设 A 为可逆的 n 阶方阵, 且满足矩阵方程 $AX = B$, 则 $X = A^{-1}B$, 即有

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B).$$

设 A 为可逆的 n 阶方阵, 且满足矩阵方程 $XA = B$, 则 $X = BA^{-1}$, 即有

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}.$$

3.1.4 线性方程组解的判定定理

设非齐次线性方程组为 $A_{m \times n}x = b$, 对应的齐次线性方程组为 $A_{m \times n}x = 0$, 则:

- (1) $R(A) = R(A \ b) = n \Leftrightarrow Ax = b$ 有唯一解;
 (2) $R(A) = R(A \ b) < n \Leftrightarrow Ax = b$ 有无穷多解;
 (3) $R(A) \neq R(A \ b) \Leftrightarrow Ax = b$ 无解;
 (4) $R(A) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解;
 (5) $R(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$ 有非零解.

3.2 典型例题分析

3.2.1 题型一、矩阵的初等变换问题

例 3.2.1 用初等变换将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 化为标准型.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 3.2.2 设 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 A 满足 $PAQ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试求

矩阵 A .

解 依题有

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由初等矩阵的性质可知, 先将矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的第一行与第二行、第三行依次交换, 再将

第一列减去第三列即可得到矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{21} - a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - a_{33} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} - a_{13} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}.$$

3.2.2 题型二、矩阵的秩的求解

例 3.2.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $R(A)$, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $R(A) = 3$; 且 A 的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

例 3.2.4 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵. 则下列结论正确的是 ().

- (A) 当 $m > n$ 时, $|AB| = 0$; (B) 当 $m > n$ 时, $|AB| \neq 0$;
 (C) 当 $m < n$ 时, $|AB| = 0$; (D) 当 $m < n$ 时, $|AB| \neq 0$.

解 当 $m > n$ 时, $R(AB) \leq R(B) < m$, 而 AB 是一个 $m \times m$ 的矩阵, 故 $|AB| = 0$, 因此 (A) 正确.

例 3.2.5 设 A 为 4×3 矩阵, 且 $R(A) = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $R(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由于 $|B| \neq 0$, 因此 B 可逆, 故 $R(AB) = R(A) = 2$.

例 3.2.6 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 已知 $R(AB) < \min R\{A, B\}$, 求 a, b

的值, 以及 $R(AB)$.

解 由 $R(AB) < R(A)$, 有 $|A| = 0$, $|B| = 0$, 即有

$$a + b = 3, \quad -a + 2b = 3,$$

解得 $a = 1$, $b = 2$. 此时 $AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 因此 $R(AB) = 1$.

例 3.2.7 设 A 为 n 阶方阵, 证明 $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 及

$b_1, b_2, \dots, b_n$ 均不全为零.

证 $\Rightarrow$ 由 $R(A)=1$, 因此存在可逆矩阵 P 、 Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 从而有

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1},$$

设 P^{-1} 的第一列元素为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, Q^{-1} 的第一行元素为 $b_1, b_2, \dots, b_n$, 且 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 均不全为零, 则有

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \dots, 0) Q^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

$$\Leftarrow \text{由 } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ 有 } R(A) \leq R((b_1, b_2, \dots, b_n)) = 1, \text{ 再由 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 及 } b_1, b_2, \dots, b_n$$

均不全为零, 因此 A 为非零矩阵, 故 $R(A)=1$.

例 3.2.8 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = E$, 证明 $R(A+E) + R(A-E) = n$.

证 因为 $A^2 = E$, 所以 $(A-E)(A+E) = O$, 则有

$$R(A+E) + R(A-E) \leq n.$$

另一方面, 由于 $(E+A) + (E-A) = 2E$, 从而

$$R(A+E) + R(E-A) \geq R(2E) = n,$$

所以

$$R(A+E) + R(A-E) = n.$$

3.2.3 题型三、利用初等变换求矩阵的逆矩阵

例 3.2.9 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 由于

$$\begin{aligned} (A | E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\xrightarrow{r_3+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2-r_3 \\ r_1-3r_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 34 & -21 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{r_1-4r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 题型四、线性方程组的求解

例 3.2.10 解非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

解 对增广矩阵做初等变换, 有

$$(A \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

从而 $R(A \mathbf{b}) = R(A) = 3 < 4$, 故方程组有无穷多解. 上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 2 + \frac{5}{2}x_2 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

因此方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}c \\ x_2 = c \\ x_3 = 2 + \frac{5}{2}c \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad (c \text{ 为任意常数}).$$

例 3.2.11 解齐次线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 对系数矩阵做初等变换:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\mathbf{A}) = 2 < 4$ ，因此方程组有无穷多解. 上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4, \\ x_3 = 2x_2 - x_4, \end{cases}$$

因此方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 2c_1 - c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意实数}).$$

例 3.2.12 当 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} 4x + 3y + z = \lambda x \\ 3x - 4y + 7z = \lambda y \\ x + 7y - 6z = \lambda z \end{cases}$ 有非零解？

解 原方程组等价于

$$\begin{cases} (4 - \lambda)x + 3y + z = 0 \\ 3x - (4 + \lambda)y + 7z = 0 \\ x + 7y - (6 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

上述齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 & 1 \\ 3 & -4 - \lambda & 7 \\ 1 & 7 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 6\lambda - 75) = 0,$$

从而当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -3 \pm 2\sqrt{21}$ 时，方程组有非零解.

例 3.2.13 设有非齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 2 \end{cases}$ ，讨论该方程组的解的情况.

解 利用初等行变换，有

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & a & 1 \\ 0 & -1 & a+2 & b+1 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3b+2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5b-2 \\ 0 & 1 & 2 & -4b+2 \\ 0 & 0 & a+4 & 3-3b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

从而，当 $a \neq -4$ 时， $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A} \mathbf{b}) = 3$ ，方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = 5b - 2 \\ x_2 = -4b + 2 - \frac{6 - 6b}{a + 4} \\ x_3 = \frac{3 - 3b}{a + 4} \end{cases}$$

当 $a = -4$, $b \neq 1$ 时, $R(A) = 2 < R(A \ b) = 3$, 方程组无解;

当 $a = -4$, $b = 1$ 时, $R(A) = R(A \ b) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解. 此时

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 - 2c \\ x_3 = c \end{cases} \quad (c \text{ 为任意实数}).$$

例 3.2.14 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 的矩阵 B , 使得 $AB = O$, 且 $R(B) = 2$.

解 利用初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

设 B 的一个列向量为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, 则有

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases},$$

解得基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足条件.

3.3 深化训练

3.3.1 填空题

(1) 【2007 (2, 3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

(2) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 考虑命题:

①行列式 $|A| = |B|$; ② $A = B$; ③矩阵 A 与 B 必有同阶不为零的子式; ④若矩阵 A 不可逆, 则矩阵 B 一定不可逆. 其中正确的个数为_____.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2015} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2016} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 已知 $A^*XA = B$, 且 $R(X) = 2$, 则 $t =$ _____.

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $n < m$, 则 $|AA^T| =$ _____.

(6) 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a =$ _____.

(7) 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A 、 B 为 $m \times n$ 矩阵. 考虑以下命题:

① 若 $Ax = 0$ 的解都是 $Bx = 0$ 的解, 则 $R(A) \geq R(B)$;

② 若 $R(A) \geq R(B)$, 则 $Ax = 0$ 的解都是 $Bx = 0$ 的解;

③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 $R(A) = R(B)$;

④ 若 $R(A) = R(B)$, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

其中正确的个数是 _____.

(8) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_2 + 6x_3 = 7 \\ k(k-2)x_3 = (k-1)(k-2) \end{cases}$, 当 _____ 时, 线性方程组有唯一解; 当 _____ 时, 线性方程组无解; 当 _____ 时, 线性方程组有无穷多解.

3.3.2 单项选择题

(1) 【2004 (3)】 设 n 阶方阵 A 与 B 等价, 则必有 ().

(A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$;

(B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$;

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$;

(D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 A 可逆, 则 $B^{-1} =$ ().

(A) $A^{-1}P_1P_2$;

(B) $P_1A^{-1}P_2$;

(C) $P_1P_2A^{-1}$;

(D) $P_2A^{-1}P_1$.

(3) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则其秩 $R(A) = r$ 的充分必要条件是 ().

(A) A 中有 r 阶子式不等于零;

(B) A 中所有 $r+1$ 阶子式全都等于零;

(C) A 中非零子式的最高阶数小于 $r+1$;

(D) A 中非零子式的最高阶数等于 r .

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{pmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1, 则 $k =$ ().

- (A) -1 ; (B) 1 ; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $-\frac{1}{3}$.

(5) 已知 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则下列选项正确的是 ().

- (A) $t \neq 6$ 时, P 的秩为 2; (B) $t \neq 6$ 时, P 的秩为 1;
(C) $t = 6$ 时, P 的秩为 2; (D) $t = 6$ 时, P 的秩为 1.

(6) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩 $R(A)$ 满足 ().

- (A) 小于 m ; (B) 小于 n ; (C) 等于 m ; (D) 等于 n .

(7) 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的导出组, 如果 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ ().

- (A) 必要无穷多解; (B) 必要唯一解;
(C) 必定无解; (D) 选项 A、B、C 都不对.

(8) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 方程组 $Ax = 0$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的导出组, 如果 $m < n$, 则下列结论成立的是 ().

- (A) $Ax = b$ 必要无穷多解; (B) $Ax = b$ 必要唯一解;
(C) $Ax = 0$ 必非零解; (D) $Ax = 0$ 只有零解.

(9) 设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r , 则 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件为 ().

- (A) $r = n$; (B) $r < n$; (C) $r \geq n$; (D) $r > n$.

(10) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $R(A) = r$, 对于方程组 $Ax = b$, 下列结论成立的是 ().

- (A) 当 $r = m$ 时, $Ax = b$ 有解; (B) 当 $r = n$ 时, $Ax = b$ 有解;
(C) 当 $m = n$ 时, $Ax = b$ 有唯一解; (D) 当 $r < n$ 时, $Ax = b$ 有无穷多解.

(11) 若矩阵 A 是 n 阶方阵, 且 $|A| = 0$, 则线性方程组 $Ax = b$ ().

- (A) 有无穷多解; (B) 有唯一解;
(C) 无解; (D) 可能无解, 也可能有无穷多解.

(12) 设 A 是 n 阶方阵, 则以下选项错误的结论是 ().

- (A) 当 $Ax = b$ 无解时, $|A| = 0$; (B) 当 $Ax = b$ 有无穷多解时, $|A| = 0$;
(C) 当 $|A| = 0$ 时, $Ax = b$ 无解; (D) 当 $Ax = b$ 有唯一解时, $|A| \neq 0$.

(13) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 矩阵 A 的秩 $R(A) = m < n$, 下列论断中错误的是 ().

- (A) $A^T x = 0$ 只有零解; (B) $A^T Ax = 0$ 必有非零解;
(C) $\forall b \in R^n, Ax = b$ 总有无穷多解; (D) $\forall b \in R^n, A^T x = b$ 总有唯一解.

(14) 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times m$ 阶矩阵, 则下列选项正确的是 ().

- (A) 当 $n > m$ 时, 方程组 $ABx = 0$ 仅有零解;
(B) 当 $m > n$ 时, 方程组 $ABx = 0$ 仅有零解;
(C) 当 $n > m$ 时, 方程组 $ABx = 0$ 必有非零解;
(D) 当 $m > n$ 时, 方程组 $ABx = 0$ 必有非零解.

(15) 设 A 为 n 阶实矩阵, 则对于线性方程组 I: $Ax=0$; II: $A^T Ax=0$, 正确的结论为 ().

- (A) I 与 II 同解;
 (B) I 的解是 II 的解, 但 II 的解不是 I 的解;
 (C) I 的解不是 II 的解, 但 II 的解是 I 的解;
 (D) I 的解不是 II 的解, II 的解也不是 I 的解.

3.3.3 用初等变换将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -9 & -5 & -21 \end{pmatrix}$ 化为标准型.

3.3.4 若 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 且 $|A|=0$, 试证明 $|B|=0$.

3.3.5 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 用初等变化法求 A^{-1} .

3.3.6 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $R(A)$, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

3.3.7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & \lambda & -16 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & \mu & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 其中 λ, μ 为参数, 求 A 的秩的最大值和最小值.

3.3.8 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & k & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \ 5 \ 6)$, 若 $R(A+AB)=2$, 求 k .

3.3.9 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

3.3.10 证明: 秩为 r 的矩阵可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

3.3.11 证明: 设 A 为 n 阶方阵, 则 $R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$.

3.3.12 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 方程 $AX = E_m$ 有解的充分必要条件为 $R(A) = m$.

3.3.13 解方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$.

3.3.14 解方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}.$$

3.3.15 讨论方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$
 中的未知参数 λ 回答解的情况, 并求解.

3.3.16 当 a 与 b 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有唯一解? 无解? 有无穷多

解? 当有无穷多解时, 求出全部解.

3.4 深化训练详解

3.3.1 填空题

(1) 1. 提示 由于 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 因此 A^3 的秩为 1.

(2) 2. 提示 ③、④正确.

(3) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 提示 由于 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 的左右两侧的矩阵均为初等矩阵, 因此

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2015} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2016}$ 相当于对 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 实施初等变化.

(4) -2. 提示 由于 $|A| \neq 0$, 故 A^* 、 A 均可逆, 因此 $R(B) = R(X) = 2$, 故 $|B| = 0$, 即 $t = -2$.

(5) 0. 提示 由于 $R(AA^T) \leq R(A) \leq \min\{m, n\} < n$, 而 AA^T 为 $m \times m$ 矩阵, 故 $|AA^T| = 0$.

(6) $a = -1$. 提示 由于

$$(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix},$$

显然, 当 $a = 3$ 时, 方程组有无穷多解; $a = -1$ 时, 方程组无解.

(7) 2 个. 提示: ①、③正确.

(8) $k \neq 0$ 且 $k \neq 2$; $k = 0$; $k = 2$.

3.3.2 单项选择题

(1) (D). 提示 A 与 B 等价, 则存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PAQ=B$, 故 $|PAQ|=|B|$, 因此选项 (D) 正确.

(2) (C). 提示 由于 $B=AP_2P_1$, 故 $B^{-1}=(AP_2P_1)^{-1}=P_1P_2A^{-1}$.

(3) (D).

(4) (D). 提示 A^* 的秩为 1, 因此 A 的秩为 $4-1=3$, 即 $|A|=0$, 若 $k=1$, 则 A 的秩为 1, 因此当 $k \neq 1$ 时, $|A|=(1+3k)(1-k)^3$, 故 $k=-\frac{1}{3}$ 时, A 的秩为 3.

(5) (B). 提示 由 $PQ=O$ 有 $R(P)+R(Q)<3$; $t \neq 6$ 时, Q 的秩为 2, 因此 P 的秩小于等于 1, 又 P 为 3 阶非零矩阵, 故 P 的秩为 1.

(6) (D). (7) (D). (8) (C). (9) (B).

(10) (A). 提示 因为当 $r=m$ 时, $m=R(A)=R(A \ b) \leq \min\{m, n\} \leq n$;

(11) (D). 提示 虽然 $R(A)<n$, 但是 $R(A)$ 与 $R(A \ b)$ 不一定相等.

(12) (C). (13) (D).

(14) (D). 提示: $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\} \leq \min\{m, n\}$, 当 $m>n$ 时, $R(AB)<m$, $ABx=0$ 必有非零解.

(15) (A). 提示 设 x_0 是 I 的解, 即 $Ax_0=0$, 因此 $A^T Ax_0=0$, 故 I 的解是 II 的解;

设 x_1 是 II 的解, 即 $A^T Ax_1=0$, 因此 $x_1^T A^T Ax_1=0$, 所以 $Ax_1=0$, 故 II 的解也是 I 的解.

$$3.3.3 \quad A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & -26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.4 由于 A 与 B 等价, 所以 $R(A)=R(B)$; 而 $|A|=0$, 从而 $R(A)<n$, 故 $R(B)<n$, 所以有 $|B|=0$.

3.3.5

$$(AE) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right),$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3.3.6 \quad A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故 } R(A)=2; A \text{ 的一个最高阶非零子式}$$

$$\text{为 } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 3.3.7 \quad A &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & \mu+3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & \mu+3 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & \mu+3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+4 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

故 $\lambda=5, \mu=-4$ 时, A 的秩的最小值是 2; $\lambda \neq 5, \mu \neq -4$ 时, A 的秩的最大值是 4.

3.3.8 由于 $A+AB=A(E+B)$, 而

$$E+B=E+\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 8 & 11 & 12 \\ 12 & 15 & 19 \end{pmatrix},$$

因此 $|E+B| \neq 0$, 故 $E+B$ 可逆. 故

$$2=R(A+AB)=R(A(E+B))=R(A),$$

又因为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & k & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & k-9 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

故 $k=9$.

3.3.9 由题意

$$|A|=(1+(n-1)a)(1-a)^{n-1},$$

故 $a \neq -\frac{1}{n-1}$ 且 $a \neq 1$ 时, $|A| \neq 0$, 因此 $R(A)=n$; 当 $a=1$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $R(A)=1$. 当 $a=-\frac{1}{n-1}$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix},$$

故 $R(A)=n-1$.

3.3.10 设 $R(A)=r$, 因此存在可逆矩阵 P 、 Q , 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 从而有

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1},$$

而

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{r \uparrow},$$

因此

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} + P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} + \cdots + P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

即 A 表示为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

3.3.11 由于 $AA^* = A^*A = |A|E$, 因此有以下结论.

(1) 若 $R(A)=n$, 则 $|A| \neq 0$, 因此 $|A^*| \neq 0$, 故 $R(A^*)=n$.

(2) 若 $R(A)=n-1$, 则 $|A|=0$, 因此 $AA^* = O$. 由于 $R(A)+R(A^*) \leq n$, 因此 $R(A^*) \leq 1$. 再由 $R(A)=n-1$ 知 A 中至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 中至少存在一个非零元素, 故 $R(A^*)=1$.

(3) 若 $R(A) < n-1$, A 中所有 $n-1$ 阶子式均为零, 因此 $A^* = O$, 故 $R(A^*)=0$.

3.3.12 必要性 方程 $AX=E$ 有解, 而

$$m = R(E) = R(AX) \leq R(A) \leq m,$$

故 $R(A)=m$.

充分性 因为 $R(A)=m$, 故存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}$, 因此

$$AQ = P^{-1} \begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix}.$$

进而

$$AQ \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix} P = P^{-1} \begin{pmatrix} E_m & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix} P = E,$$

故 $X = Q \begin{pmatrix} E_m \\ O \end{pmatrix} P$ 为方程 $AX = E$ 的解.

3.3.13 利用初等行变换, 有

$$(A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $R(A\mathbf{b}) = R(A) = 2 < 4$, 所以方程组有无穷多解, 上述矩阵对应的的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases},$$

解得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}).$$

3.3.14 利用矩阵的初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 - c_2 \\ x_2 = -c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = 0. \end{cases} \quad (\text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数}).$$

3.3.15 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda \neq 1$ 时, 方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -8 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 6 \end{cases},$$

当 $\lambda=1$ 时, 由于

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(\mathbf{A} \mathbf{b}) = R(\mathbf{A}) = 3 < 4$, 故方程组有无穷多解. 上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = -8 + 2x_3 \\ x_4 = 6 \end{cases}$$

因此方程组的所有解为

$$\begin{cases} x_1 = 3 - c \\ x_2 = -8 + 2c \\ x_3 = c \\ x_4 = 6 \end{cases} \quad (c \text{ 为任意实数}).$$

3.3.16 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $a \neq 1$ 时, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A} \mathbf{b}) = 4$, 方程组有唯一解.

当 $a=1$, $b \neq -1$ 时, $R(\mathbf{A})=2$, $R(\mathbf{A} \mathbf{b})=3$, 方程组无解.

当 $a=1$, $b=-1$ 时, $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A} \mathbf{b})=2 < 4$, 方程组有无穷多解, 此时

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases},$$

故方程组的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = 1 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意实数}).$$

3.5 综合提高训练

例 3.5.1 【2011 (1, 2, 3)】设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 B ,

再交换 B 的第 2 行和第 3 行得到单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = (\quad)$.

- (A) $P_1 P_2$; (B) $P_1^{-1} P_2$; (C) $P_2 P_1$; (D) $P_2 P_1^{-1}$.

解 将 A 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 B , 即

$$AP_1 = B, \quad A = BP_1^{-1},$$

交换 B 的第 2 行和第 3 行得到单位矩阵, 即

$$P_2 B = E, \quad B = P_2^{-1} = P_2,$$

故 $A = P_2 P_1^{-1}$, 选项 (D) 正确.

例 3.5.2 【2006 (1, 2, 3)】设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得到矩阵 B , 再

交换 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $(\quad)$ 正确.

- (A) $C = P^{-1}AP$; (B) $C = PAP^{-1}$; (C) $C = P^TAP$; (D) $C = PAP^T$.

解 由已知有 $B = PA$, 由于 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此 $C = BP^{-1}$, 故 $C = PAP^{-1}$, 则 (B)

正确.

例 3.5.3 【2005 (1, 2)】设 A 为 n 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B , A^* 、 B^* , 分别为 A 、 B 伴随矩阵, 则 $(\quad)$ 正确.

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到矩阵 B^* ;
(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B^* ;
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到矩阵 $-B^*$;
(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 $-B^*$.

解 设 P 是交换单位矩阵 E 的第 1、2 行所得到的初等矩阵, 则 $B = PA$, 从而可得到

$$B^{-1} = (PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1},$$

进而

$$B^* = |B|B^{-1} = -|A|A^{-1}P^{-1} = -A^*P,$$

故 (C) 正确.

例 3.5.4 【2004 (1, 2)】设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得到矩阵 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为 $(\quad)$.

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 令 $A = E$, 则 $Q = C$. 故 (D) 正确.

例 3.5.5 【2004(1)】 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 则 () 正确.

- (A) 秩 $R(A) = m$, 秩 $R(B) = m$; (B) 秩 $R(A) = m$, 秩 $R(B) = n$;
 (C) 秩 $R(A) = n$, 秩 $R(B) = m$; (D) 秩 $R(A) = n$, 秩 $R(B) = n$.

解法 1 由于

$$R(A) \leq \min\{m, n\} \leq m, \quad R(B) \leq \min\{m, n\} \leq m,$$

由 $AB = E$ 可知,

$$m = R(E) = R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\},$$

即 $R(A) \geq m$, $R(B) \geq m$. 因此 $R(A) = m$, $R(B) = m$, 故 (A) 正确.

解法 2 令

$$m = 2, \quad n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $AB = E$ 满足已知条件. 而 $R(A) = 2$, $R(B) = 2$, 故 (A) 正确.

例 3.5.6 【2012(3)】 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 伴随矩阵, 若将 A 的第 1 行与第 2 行交换得到矩阵 B , 则 $|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解法 1 由行列式的性质可知 $|B| = -|A| = -3$, 而 $|A^*| = |A|^2 = 9$, 故 $|BA^*| = -27$.

解法 2 记 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|P| = -1$, 且 $B = PA$, 故

$$|BA^*| = |PA A^*| = ||A|P| = |A|^3 |P| = -27.$$

例 3.5.7 【2016(2)】 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 A 与 B 等价, 有 $R(A) = R(B)$, 而 $R(B) = 2$, 故 $R(A) = 2$, 再由

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) \end{pmatrix},$$

因此 $a = 2$.

例 3.5.11 【2016(1)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$, 当 a 为何值时,

方程组 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求此方程组的解.

解 由矩阵的初等行变换有

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $a = -2$ 时, 方程组 $AX = B$ 无解.

当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$ 时, 方程组 $AX = B$ 有唯一解, 此时

$$(A \ B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

因此方程组的解为 $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

当 $a = 1$ 时, 方程组 $AX = B$ 有无穷多解, 此时

$$(A \ B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此方程组的解为 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-c_1 & -1-c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 为任意实数).

第 4 章 向量组的线性相关性

4.1 知 识 要 点

4.1.1 向量的线性组合（线性表示）

给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和向量 β ，若存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s,$$

则称向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，或称向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合。

向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_s \alpha_s = \beta$ 有解
 $\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$ 。

设两个向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ， $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ ，若 B 中的每个向量 $\beta_i (i=1, 2, \dots, t)$ 都可由向量组 A 中的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示，则称向量组 B 可由向量组 A 线性表示；若向量组 A 与向量组 B 可以相互线性表示，则称这两个向量组等价。

向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示可以写成

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1t} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{st} \end{pmatrix},$$

其中，矩阵 $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1t} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{st} \end{pmatrix}$ 为线性表示的系数矩阵。

4.1.2 向量组的线性相关性

(1) 向量组线性相关的概念

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为一个 n 维向量组，若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关；否则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关。

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0}$ 有非零解

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \mathbf{0}$ 只有零解

$$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m.$$

特别地, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为一个 n 维向量组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |A| = 0$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

对于 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 若 $m > n$, 则其必线性相关.

(2) 向量组线性相关性的几个结论

1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 为一个 n 维向量组, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在着一个向量 α_i 可由其余向量线性表示.

2) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示方法唯一.

3) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 存在部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性相关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关; 反之, 若向量组线性无关, 则它的任何部分组也线性无关.

4) 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 若 $k > s$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性相关; 反之, 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性无关, 则 $k \leq s$.

特别地, 若两个线性无关的向量组等价, 则它们所含向量的个数必相等.

4.1.3 向量组的极大线性无关组的定义与性质

(1) 极大线性无关组的定义

向量组的极大线性无关组有以下两个等价的定义形式.

定义 1 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 满足

1) 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关,

2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量 (如果存在) 线性相关, 则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

定义 2 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的 r 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 满足

1) 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关,

2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都可被 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表示, 则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

(2) 极大线性无关组的性质

1) 向量组与它的极大线性无关组等价.

2) 一般的, 向量组的极大线性无关组并不唯一, 但不同的极大线性无关组所含的向量的个数相等.

(3) 向量组的秩

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的秩, 记作 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

4.1.4 线性方程组解的结构

(1) 齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集的最大线性无关组称为 $Ax = 0$ 的基础解系.

若齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 系数矩阵的秩 $R(A) = r < n$, 则该方程组存在基础解系, 且每个基础解系所含解向量的个数均为 $n - r$.

若已知 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则齐次线性方程组 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的全部解可表示为

$$\mathbf{x} = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_{n-r} \eta_{n-r},$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ 为任意实数, 上式称为齐次线性方程组 $A_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解.

(2) 非齐次线性方程组解的结构

对于非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 称 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对应的齐次线性方程组 (也称为导出组).

设 η 是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个解 (特解), $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是其导出组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的全部解可表示为

$$\mathbf{x} = \eta + c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_{n-r} \eta_{n-r},$$

其中, $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ 为任意实数, 上式称为非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解.

4.1.5 向量空间的概念与性质

(1) 向量空间

设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上 n 维向量组成的非空集合, 若集合 V 对向量的加法及数乘运算封闭, 即

1) 若 $\alpha, \beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$,

2) 若 $\alpha \in V, k \in \mathbf{R}$, 则 $k\alpha \in V$, 则称 V 是数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

特别地, 实数域 $\mathbf{R}$ 上的全体 n 维向量组成的向量空间记为 $\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \mid a_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \dots, n \}.$$

若 V_1, V_2 都是向量空间, 且 $V_1 \subseteq V_2$, 则称 V_1 是 V_2 的子空间.

(2) 空间的基与维数

设 V 是数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间, 若有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in V$, 且满足

1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关,

2) V 中任意一个向量都可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 中的一个基, r 称为向量空间 V 的维数, 记作 $\dim V$, 即 $\dim V = r$.

(3) 向量的坐标

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 中的一个基, V 中的向量 α 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 表示为

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_r \alpha_r,$$

则称数组 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标. 向量在一个基下的坐标是唯一的.

(4) 基变换公式与坐标变换公式

设空间 $\mathbf{R}^r$ 中两个基分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, 并且有

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) P,$$

称 P 为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 的过渡矩阵. 对于 $\mathbf{R}^r$ 中的向量 α , 若 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标为 $x_1, x_2, \dots, x_r$, 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 下的坐标为 $y_1, y_2, \dots, y_r$, 则有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \text{ 或 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}.$$

4.2 典型例题分析

4.2.1 题型一、向量线性表示的相关问题

例 4.2.1 设向量组 $\beta = (0, 0, 0, 1)$, $\alpha_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 3, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 0, 0)$, 判断 β 是否可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 如果可以, 写出其表达式.

解 利用矩阵的初等行变有

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \beta^T) = R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T),$$

因此 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并且 $\beta = \alpha_1 - \alpha_3$.

例 4.2.2 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, 试问当 a, c 为何值时:

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法唯一;
- (2) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示法不唯一.

解 利用矩阵的初等行变换有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{a}{2} & -1 - \frac{a}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & c \end{pmatrix},$$

(1) 当 $a \neq -4$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 因此 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法唯一;

(2) 当 $a = -4$, $c \neq -1$ 时, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \neq R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 因此 β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(3) 当 $a = -4$, $c = -1$ 时, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$, 因此 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法不是唯一的.

例 4.2.3 设两个向量组

$$A: \alpha_1 = (3, 4, 8)^T, \alpha_2 = (2, 2, 5)^T, \alpha_3 = (0, 2, 1)^T; \quad B: \beta_1 = (1, 2, 3)^T, \beta_2 = (1, 0, 2)^T$$

证明向量组 A 与向量组 B 等价.

证 利用矩阵的初等行变换有

$$(\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$\alpha_1 = 2\beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_1 - \beta_2,$$

反之可得

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3,$$

所以向量组 A 与向量组 B 等价.

4.2.2 题型二、向量组的线性相关性问题

例 4.2.4 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否线性相关.

解 利用矩阵的初等行变换有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 4.2.5 设 $\alpha_1 = (3, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -1, 4)^T$, $\alpha_3 = (0, 5, 2)^T$, 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

解 因为

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -63 \neq 0,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例 4.2.6 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$, 讨论当 t 为何值时:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; (2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

解 由于

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix},$$

(1) $t=5$ 时, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 由于

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

(2) $t \neq 5$ 时, 由于 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例 4.2.7 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明:

(1) α_1 可被 α_2, α_3 线性表示; (2) α_4 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证 (1) 由向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则它的部分组 α_2, α_3 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 α_1 可被 α_2, α_3 线性表示.

(2) 反证法. 假设 α_4 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且有

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3,$$

再由 (1) 有 α_1 可被 α_2, α_3 线性表示, 不妨设 $\alpha_1 = x_1\alpha_2 + x_2\alpha_3$, 代入上式有

$$\alpha_4 = (k_1x_1 + k_2)\alpha_2 + (k_1x_2 + k_3)\alpha_3,$$

即 α_4 能被 α_2, α_3 线性表示, 这与向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关矛盾, 因此原命题成立.

例 4.2.8 设 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 是一组互不相同的数, 令向量 $\alpha_i = (1, a_i, \dots, a_i^{n-1})^T$, $i = 1, 2, \dots, r$. 证明: 若 $r < n$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

证 依题意

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_r^{n-1} \end{pmatrix},$$

再因为 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 互不相同及 $r < n$, 根据范德蒙德行列式有 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ 存在 r 阶非零子式 (前 r 行、对应行列式), 因此 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

例 4.2.9 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 向量 β_1 可由它线性表示, 向量 β_2 不能由它线性表示. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, l\beta_1 + \beta_2$ 线性无关, 其中 l 为某个实数.

证 设存在 $k_1, k_2, \dots, k_r, k$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + k(l\beta_1 + \beta_2) = \mathbf{0},$$

若 $k \neq 0$, 则有 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1$ 线性表示, 因为 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 这与已知矛盾. 因此 $k = 0$, 进而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \mathbf{0},$$

再由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0.$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, l\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

4.2.3 题型三、极大线性无关组及秩的求解

例 4.2.10 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的列向量组的一个极大线性无关组, 并将其余

的向量用所求的极大线性无关组线性表示.

解 对 A 进行初行变换有

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $R(A) = 3$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为极大线性无关组, 并且有

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4.$$

例 4.2.11 求向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (2, 6, 6)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 3)^T$, $\alpha_4 = (3, 2, 9)^T$ 的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该向量组线性表示.

解 由题意并结合初等变换有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 取 α_1, α_2 为极大线性无关组, 进而

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 7\alpha_1 - 2\alpha_2.$$

例 4.2.12 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

若 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 有相同的秩, 求 a, b 的值.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & (5-b)/3 \end{pmatrix},$$

由于 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 因此 $b = 5$.

并且此时, 再由

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a-15 & 0 \end{pmatrix},$$

易得 $a = 15$.

例 4.2.13 设三维向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, 已知向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 等价.

- (1) 求未知参数 a, b 的值.
- (2) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩及其一个极大无关组.
- (3) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示 β_1 的表达式.

解 由矩阵的初等行变换有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & b-1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 等价, 有 $a = -1, b = 1$.
- (2) $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组.
- (3) 由于

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故

$$\beta_1 = (-1 - 2c)\alpha_1 + c\alpha_2 + (2 + 3c)\alpha_3 \quad (c \text{ 为任意实数}).$$

例 4.2.14 给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 向量组

$$\beta_1 = \alpha - \alpha_1, \beta_2 = \alpha - \alpha_2, \beta_3 = \alpha - \alpha_3, \beta_4 = \alpha - \alpha_4.$$

证明: $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.

证 由题意有

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

$$\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \quad \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

即

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, 因此有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 等价, 故结论成立.

例 4.2.15 设向量组

$$\text{I: } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \quad \text{II: } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t; \quad \text{III: } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t.$$

它们的秩分别为 r_1, r_2, r_3 . 证明: $\max(r_1, r_2) \leq r_3 \leq r_1 + r_2$.

证 设这三个向量组的极大无关组分别为:

$$\text{I': } \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_1}}; \quad \text{II': } \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_{r_2}}; \quad \text{III': } \gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}, \dots, \gamma_{k_{r_3}}.$$

由于 I 可由 III 线性表示, 因此 I' 可由 III' 线性表示, 所以 $r_1 \leq r_3$, 同理 $r_2 \leq r_3$, 再由于 III 可由 I、II 线性表示, 故 III' 可由 I'、II' 线性表示, 因此 $r_3 \leq r_1 + r_2$, 故结论成立.

4.2.4 题型四、线性方程组解的相关问题

例 4.2.16 求解齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 利用初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

故方程组基础解系为 $\eta = (2, -1, 0, 1)^T$, 因此方程组的通解为 $c\eta$ (c 为任意实数).

例 4.2.17 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 11x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

解 利用初等行变换, 有

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 11 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -1 - x_4 \end{cases},$$

因此非齐次线性方程组的一个特解 $\eta = (1, -1, 0, 0)^T$, 而对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases},$$

导出组的基础解系为 $\eta_1 = (2, 0, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (-3, -1, 0, 1)^T$, 因此方程组的通解为

$$x = \eta + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 4.2.18 设有线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k - 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}.$$

讨论常数 k 为何值时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解? 当方程组有无穷多解时, 求出其通解.

解 利用初等行变换, 有

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k-3 \\ 1 & k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-3 \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 3(k-1) \end{pmatrix},$$

当 $k = -2$ 时, $R(A) = 2$, $R(A \ b) = 3$, 因此方程组无解.

当 $k \neq -2$ 且 $k \neq 1$ 时, $R(A) = R(A \ b) = 3$, 方程组有唯一解.

当 $k = 1$ 时, $R(A) = R(A \ b) = 1$, 方程组有无穷多解, 此时

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程为

$$x_1 = -2 - x_2 - x_3,$$

因此方程组的一个特解 $\eta = (-2, 0, 0)^T$, 而其导出组为

$$x_1 = -x_2 - x_3,$$

导出组的基础解系为 $\eta_1 = (-1, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (-1, 0, 1)^T$, 因此方程组的通解为

$$x = \eta + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 4.2.19 当 a, b 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$
 无解、有唯一解、有无穷多解? 在

无穷多解的时, 求出通解.

解 利用初等行变换, 有

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$ 时, $R(A \ b) = R(A) = 3$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $a=1$ 时, 由于

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1-b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{pmatrix},$$

若 $b = \frac{1}{2}$, 则 $R(A \ b) = R(A) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, 此时

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases},$$

因此非齐次线性方程组的一个特解 $\eta = (2, 2, 0)^T$, 对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

导出组的基础解系 $\eta_1 = (-1, 0, 1)^T$, 因此方程组的通解为

$$x = \eta + c_1\eta_1 \quad (c_1 \text{ 为任意常数}).$$

(3) 其余情况, 方程组无解.

例 4.2.20 求一个齐次线性方程组, 使其通解为 $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

解 设所求方程组为 $Ax = 0$, 且 A 的一个行向量为 (a_1, a_2, a_3, a_4) , 则依题有

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ 5a_1 + 6a_2 + 7a_3 + 8a_4 = 0 \end{cases}.$$

对此方程组的系数矩阵施以初等行变换, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} a_1 = a_3 + 2a_4 \\ a_2 = -2a_3 - 3a_4 \end{cases},$$

基础解系为 $\eta_1 = (1, -2, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (2, -3, 0, 1)^T$, 因此可取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所求齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

例 4.2.21 设四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 3, 试回答下列问题:

(1) 若 η_1, η_2, η_3 为 $Ax = b$ 的解, 并且 $\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $2\eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$, 求该方程组的通解;

(2) 若 A 为 3×4 矩阵, 判断向量 b 可否由 A 的列向量组线性表示.

解 (1) 依题意, 方程组 $Ax = b$ 的导出组 $Ax = 0$ 的基础解系中含有 $4 - 3 = 1$ 个解向量, 由于 $A\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3}\right) = 0$, 有

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

可以作为 $Ax = 0$ 的基础解系. 再由 $A\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) = b$, 有

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

为 $Ax = b$ 的一个特解, 故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ 为任意常数}).$$

(2) 由 A 为 3×4 矩阵, 有 $R(A \ b) = R(A) = 3$, 从而 $Ax = b$ 有解, 故向量 b 可由 A 的列向量组线性表示.

例 4.2.22 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都是 4 维向量. 已知非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 其中 c_1 为任意常数.

(1) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组, 并将 b 用此极大线性无关组表示;

(2) 令 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b + \alpha_3)$, 证明方程组 $Bx = \alpha_1 - \alpha_2$ 有无穷多解, 并求其通解.

解 (1) 依题意, 由 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, 有 $R(A) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 以及

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0,$$

易见, 可选取 α_2, α_3 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组, 并且有 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - 3\alpha_3$. 又因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $Ax = b$

的一个解, 因此有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b,$$

故

$$b = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 3\alpha_2 - 4\alpha_3.$$

(2) 方程组 $Bx = \alpha_1 - \alpha_2$ 的增广矩阵为

$$(B \ \alpha_1 - \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 3\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2),$$

由 (1) 易得 $R(B \ \alpha_1 - \alpha_2) = R(B) = 2 < 4$, 故其有无穷多解. 再由

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 3\alpha_2 - 3\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2,$$

有 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 $Bx = \alpha_1 - \alpha_2$ 的解, 以及

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 3\alpha_2 - 3\alpha_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 3\alpha_2 - 3\alpha_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

有 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 $Bx = \mathbf{0}$ 的解, 且它们线性无关. 因为 $R(B) = 2$, $Bx = \mathbf{0}$ 的基础解系

中含有 2 个解向量, 所以 $Bx = \alpha_1 - \alpha_2$ 的通解为

$$x = \eta + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 4.2.23 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times k$ 矩阵, 且 $AB = \mathbf{O}$, 求证 $R(A) + R(B) \leq n$.

证 将矩阵 B 按列分块, 记 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, 因为

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_k) = \mathbf{O},$$

有 $A\beta_j = \mathbf{0}$ ($j = 1, 2, \dots, k$), 即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解. 不妨设 $R(A) = r$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 可由 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系线性表示, 所以

$$R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \leq n - r = R(A),$$

故有 $R(A) + R(B) \leq n$.

例 4.2.24 设 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解, 且系数矩阵的秩为 r , $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 是 $Ax = b$ 线性无关的解, 证明: $Ax = b$ 的任意一个解可以表示为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},$$

其中 $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-r+1} = 1$.

证 依题有 $\eta_1 - \eta_{n-r+1}, \eta_2 - \eta_{n-r+1}, \dots, \eta_{n-r} - \eta_{n-r+1}$ 是 $Ax = b$ 的导出组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解. 设

$$x_1(\eta_1 - \eta_{n-r+1}) + x_2(\eta_2 - \eta_{n-r+1}) + \dots + x_{n-r}(\eta_{n-r} - \eta_{n-r+1}) = \mathbf{0},$$

整理有

$$x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \dots + x_{n-r}\eta_{n-r} - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-r})\eta_{n-r+1} = \mathbf{0},$$

由于 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关, 可得

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-r} = 0,$$

因此 $\eta_1 - \eta_{n-r+1}, \eta_2 - \eta_{n-r+1}, \dots, \eta_{n-r} - \eta_{n-r+1}$ 线性无关, 即是导出组 $Ax = \mathbf{0}$ 的基础解系. 进而 $Ax = b$ 的通解为

$$x = \eta_{n-r+1} + c_1(\eta_1 - \eta_{n-r+1}) + c_2(\eta_2 - \eta_{n-r+1}) + \dots + c_{n-r}(\eta_{n-r} - \eta_{n-r+1}),$$

整理得

$$x = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r} + [1 - (c_1 + c_2 + \dots + c_{n-r})]\eta_{n-r+1}.$$

令

$$k_1 = c_1, \quad k_2 = c_2, \quad \dots, \quad k_{n-r} = c_{n-r}, \quad k_{n-r+1} = 1 - (c_1 + c_2 + \dots + c_{n-r}),$$

则 $Ax=b$ 的任意一个解可以表示为

$$x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \cdots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1},$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$.

例 4.2.25 知线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = b \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 + ax_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

(1) a, b 为何值时, 方程组 I 与 II 有公共解? 并求其公共解.

(2) a, b 为何值时, 方程组 I 与 II 有相同解? 并求其解.

解 (1) 方程组 I 与 II 有公共解意味着方程组

$$\text{III: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = b \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

有解. 对方程组 III 的增广矩阵进行初等行变换, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b \\ 1 & a & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix},$$

当 $b=-1$ 时, 方程组 III 有解. 此时方程组 III 的增广矩阵变换为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $a \neq 1$, 上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

其通解为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1 为任意常数. 若 $a=1$, 上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases},$$

其通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中 c_2, c_3 为任意常数.

(2) 由于方程组 I 的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 将方程组 I 的解 $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ 代入方程组 II, 可得 $b = -1$, 即方程组 I 的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 取 $c_1 = 1, c_2 = 0$ 得到方程组 I 的一个解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 将此解代入方程组 II,

可得 $a = 1$. 此时方程组 II 变为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \end{cases},$$

方程组的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 综上, 当 $a = 1, b = -1$ 时, 方程组 I 与 II 有相同解, 且通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

4.2.5 题型五、向量空间的相关问题

例 4.2.26 下列 n 维向量组成的集合是否构成数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

(1) $V_1 = \{ (a, b, \dots, a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}.$

(2) $V_2 = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \}.$

解 (1) 对任意常数 $k \in \mathbf{R}$, 设

$$\alpha = (a_1, b_1, \dots, a_1, b_1) \in V_1, \quad \beta = (a_2, b_2, \dots, a_2, b_2) \in V_1,$$

由于

$$\alpha + \beta = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, \dots, a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in V_1,$$

$$k\alpha = (ka_1, kb_1, \dots, ka_1, kb_1) \in V_1,$$

因此 V_1 构成数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

(2) 设

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_2, \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V_2,$$

则

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1,$$

而

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = 1 + 1 = 2 \neq 1,$$

即 $\alpha + \beta \notin V_2$, 因此 V_2 不构成数域 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间.

例 4.2.27 设向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)^T$, $\beta = (1, 2, 1, 1)^T$.

(1) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是向量空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

(2) 求向量 β 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的坐标.

解 (1) 由于 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

(2) 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

由此得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases},$$

解方程组得

$$x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = x_4 = -\frac{1}{4},$$

故 β 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的坐标为 $\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$.

例 4.2.28 设 R^3 中的两个基为:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, -1)^T, \alpha_3 = (1, -1, -1)^T;$$

$$\beta_1 = (1, 3, 5)^T, \beta_2 = (6, 3, 2)^T, \beta_3 = (3, 1, 0)^T.$$

向量 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, 试求:

(1) 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P ;

(2) 向量 α 关于这两个基的坐标.

解 (1) 令

$$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

则有

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\alpha = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3$, 即

$$\begin{cases} y_1 + 6y_2 + 3y_3 = 1 \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 = 2 \\ 5y_1 + 2y_2 = 1 \end{cases}$$

解方程组得 $y_1 = 7, y_2 = -17, y_3 = 32$, 因此 α 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标为 $7, -17, 32$. 再设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$, 根据坐标变换公式, 有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

因此 α 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标为 $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

4.3 深化训练

4.3.1 填空题

(1) 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (5, 6, 7, 8)^T, \alpha_3 = (7, 10, t, 16)^T$ 线性相关, 则 $t =$ _____.

(2) 设向量 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta$ 线性相关, 则 β 可用 α_1, α_2 线性表示为 _____.

(3) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 令 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 则向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) =$ _____.

(4) 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 则 $R(A)$ _____ $R(B)$ (填 $\geq, =$ 或 $\leq$).

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 若 $R(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) < 3$, 则 t 满

足的关系是_____.

(6) 【2005 (3)】 设行向量组 $(2, 1, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)$ 线性相关, 且 $a \neq 1$, 则 $a =$ _____.

(7) 方程组 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ 的基础解系是_____.

(8) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均等于零, 且 $R(A) = n - 1$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

(9) 方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系含有 2 个解向量, 则 $a =$ _____.

(10) 已知线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a =$ _____.

(11) 设 A 是 3×4 矩阵, 其秩为 3, 若 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, 则此方程组的通解是_____.

(12) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^*x = 0$ 的通解为_____.

(13) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为 A , 若存在非零矩阵 B , 使得

$AB = O$, 则 $\lambda =$ _____, $|B| =$ _____.

(14) 若 $\alpha_1 = (-1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$ 为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 a 的取值范围为_____.

(15) 写出一个以 $x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为通解的齐次线性方程组_____.

(16) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且满足 $AB = O$, 则 $R(B) =$ _____.

(17) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $t =$ _____.

(18) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $s \times m$ 矩阵, 且 $R(A) = r$, $R(B) = m$, 则齐次线性方程组

$B\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有线性无关的解向量的个数为_____.

(19) n 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 r , 当此方程组有解时, 解向量组中最多有_____个解向量线性无关.

(20) n 维向量空间的子空间 $W=\left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=0 \\ x_2+\dots+x_n=0 \end{cases} \right.\right\}$ 的维数是_____.

(21) 设 A 是 4×5 的矩阵, 且 $R(A)=2$, 则齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数是_____.

(22) 设 e_1, e_2, e_3 为线性空间 V 的一组基, 则从基 e_2, e_3, e_1 到基 e_3, e_1, e_2 的过渡矩阵为_____.

(23) 【2010 (1)】设 $\alpha_1=(1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2=(1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3=(2, 1, 1, a)^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数是 2, 则 $a=$ _____.

4.3.2 单项选择题

(1) 【2015 (1, 3)】设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega=\{1, 2\}$, 则线性方程组

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ().

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$; (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$;
(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$; (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(2) 设 A 为 n 阶方阵, α 是 n 维列向量, 若 $R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=R(A)$, 则 ().

- (A) $A\mathbf{x}=\alpha$ 必有无穷多解; (B) $A\mathbf{x}=\alpha$ 必有唯一解;
(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 仅有零解; (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 必有非零解.

(3) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列命题正确的是 ().

- (A) 若 $R(A)=m$, 则齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只有零解;
(B) 若 $m < n$, 则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 必有无穷多解;
(C) 若 $m \geq n$, 非齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 要么有解, 要么有唯一解, 两者必居其一;
(D) 以上命题都不对.

(4) 【2011 (3)】设 A 是 4×3 的矩阵, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是非齐次方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的三个线性无关的解, 则设 k_1, k_2 为任意实数, 则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解为 ().

- (A) $\frac{\beta_2+\beta_3}{2}+k_1(\beta_2-\beta_1)$; (B) $\frac{\beta_2-\beta_3}{2}+k_1(\beta_2-\beta_1)$;
(C) $\frac{\beta_2+\beta_3}{2}+k_1(\beta_2-\beta_1)+k_2(\beta_3-\beta_1)$; (D) $\frac{\beta_2-\beta_3}{2}+k_1(\beta_2-\beta_1)+k_2(\beta_3-\beta_1)$.

(5) 【2007 (1, 3)】若向量组 α, β, γ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ().

- (A) $\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$; (B) $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$;
(C) $\alpha-2\beta, \beta-2\gamma, \gamma-2\alpha$; (D) $\alpha+2\beta, \beta+2\gamma, \gamma+2\alpha$.

(6) 【2006 (1, 2, 3)】设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ().

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关;
 (B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关;
 (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关;
 (D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(7) 【2004 (1, 2)】设矩阵 A 、 B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 ().

- (A) A 的列向量线性相关, B 的行向量线性相关;
 (B) A 的列向量线性相关, B 的列向量线性相关;
 (C) A 的行向量线性相关, B 的行向量线性相关;
 (D) A 的行向量线性相关, B 的列向量线性相关.

(8) 【2013 (2)】设 A 、 B 、 C 均为 n 阶矩阵, 若有 $AB=C$, 且 B 可逆, 则 () 正确.

- (A) 矩阵的 C 行向量组与矩阵 A 的行向量组等价;
 (B) 矩阵的 C 列向量组与矩阵 A 的列向量组等价;
 (C) 矩阵的 C 行向量组与矩阵 B 的行向量组等价;
 (D) 矩阵的 C 列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

(9) 【2010 (3)】设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 则下列命题正确的是 ().

- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$; (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$;
 (C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$; (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

(10) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, A 的秩为 r , 则齐次线性方程 $Ax=0$ 的所有解构成一个向量空间, 其维数是 ().

- (A) $n-r$; (B) $m-r$; (C) r ; (D) 无法确定.

(11) 设向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则下列结论正确的是 ().

- (A) α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示;
 (B) α_m 不能由 (I) 线性表示, 但可由 (II) 线性表示;
 (C) α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示;
 (D) α_m 可由 (I) 线性表示, 但不能由 (II) 线性表示.

(12) 【2012 (1, 3)】设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的是 ().

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$; (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$; (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(13) A 为 n 阶方阵, $R(A)=r < n$, 那么 A 的 n 个列向量中 ().

- (A) 任意 r 个列向量线性无关;
 (B) 必有某 r 个列向量线性无关;
 (C) 任意 r 个列向量都构成一个极大无关组;
 (D) 任意一个列向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表示.

- (14) 若 $m \times n$ 阶矩阵 A 的 n 个列向量线性无关, 则下列结论一定成立的是 ().
 (A) $R(A) > m$; (B) $R(A) < m$; (C) $R(A) = m$; (D) $R(A) = n$.
- (15) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $m > n$. 若 $AB = E$, 则必有 ().
 (A) 矩阵 A 与 B 的行向量组线性无关;
 (B) 矩阵 A 与 B 的列向量组线性无关;
 (C) 矩阵 A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关;
 (D) 矩阵 A 的行列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关.
- (16) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分条件是 ().
 (A) 向量 b 可由 A 的行向量组线性表示;
 (B) 向量 b 可由 A 的列向量组线性表示;
 (C) A 的行向量组线性无关;
 (D) A 的列向量组线性无关.
- (17) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 已知 $\beta_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 则 () 正确.
 (A) α_1, α_3 必线性无关; (B) α_2, α_4 必线性无关;
 (C) α_1 必可由 α_2, α_4 线性表示; (D) α_4 必可由 α_2, α_3 线性表示.

(18) 下列集合中是向量空间的是 ().

- (A) $V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1 x_2 \cdots x_n = 0, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$;
 (B) $V_2 = \{x = (x_1, x_2, 0)^T \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$;
 (C) $V_3 = \{x \mid Ax = b, b \neq 0, A \text{ 为 } m \times n \text{ 矩阵}\}$;
 (D) $V_4 = \{x = (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$.

4.3.3 设 $\beta = (4, 4, 1, 2)$, $\alpha_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\alpha_2 = (2, -1, 0, 5)$, $\alpha_3 = (-4, -2, 3, 0)$, $\alpha_4 = (0, -1, 2, 5)$, 判断 β 是否可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示?

4.3.4 设 $\alpha_1 = (-1, \lambda, 2)$, $\alpha_2 = (0, 2, 1)$, $\alpha_3 = (1, -1, \lambda)$, $\beta = (\lambda, 1, \lambda^2)$, λ 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出其表达式.

4.3.5 向量组 I: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, II: $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, 判断 II 可否由 I

线性表示.

4.3.6 讨论参数 t , 回答 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 2)$, $\alpha_2 = (1, 3, 5, t)$, $\alpha_3 = (0, 1, 2, 2)$ 的相关性.

4.3.7 假设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 证明: 表示方法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

4.3.8 假设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 且 $\beta_j = \alpha_j + \alpha_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$), $\beta_m = \alpha_m + \alpha_1$, 讨论 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的线性相关性.

4.3.9 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 n 维单位向量组, A 是 n 阶方阵, 求证: A 可逆的充分必要条件是 $A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \dots, A\varepsilon_n$ 线性无关.

4.3.10 设 A 三阶方阵, 若非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足 $A\alpha_1 = \mathbf{0}$, $A\alpha_2 = \alpha_1$, $A^2\alpha_3 = \alpha_1$, 试证: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

4.3.11 给定向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)^T$, 求:

(1) 向量组的秩; (2) 向量组的一个极大无关组, 并将其余的向量用其线性表示.

4.3.12 已知两个向量组的秩相同, 且其中一个可由另外一个线性表示. 证明: 这两个向量组等价.

4.3.13 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$, 则此向量组的秩 $\geq r + m - s$.

4.3.14 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.

4.3.15 求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$ 的通解.

4.3.16 讨论 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷解?

并在有无穷解时, 求其通解.

4.3.17 讨论当 a, b 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + x_5 = b \end{cases}$ 有解? 并在有解时

先求出对应的齐次方程组的基础解系, 再求出非齐次方程组的通解.

4.3.18 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 解空间的维数是 2, 求 $Ax = \mathbf{0}$ 的

通解.

4.3.19 矩阵 A 按列分块记为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 若向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求方程 $Ax = \beta$ 的通解.

4.3.20 设 A 是秩为 3 的 5×4 矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个不同的解, 若

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix},$$

求方程组 $Ax = b$ 的通解.

4.3.21 求一个非齐次线性方程组 $Ax=b$, 使它的通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2

为任意实数.

4.3.22 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 若 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $Ax=b$ 的一个解, 求该方程组的通解.

4.3.23 给定向量组

$$\text{I: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ a-2 \end{pmatrix} \quad \text{II: } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ t+1 \\ 10-a \end{pmatrix}.$$

已知 I 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 问当 t 取何值时, II 也是方程组 $Ax=0$ 基础解系.

4.3.24 设 A, B 都是 n 阶方阵, 满足 $ABA=B^{-1}$, 证明: $R(E+AB)+R(E-AB)=n$.

4.3.25 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $Ax=0$ 的基础解系. 证明: $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$, $\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3$, $\beta_3=3\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

4.3.26 设 η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 证明:

(1) $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关; (2) $\xi_1+\eta, \xi_2+\eta, \dots, \xi_{n-r}+\eta, \eta$ 线性无关.

4.3.27 若矩阵 A 的秩为 r , 且其 r 个列向量为某个齐次线性方程组的基础解系, B 为 r 阶可逆矩阵. 证明: AB 的 r 个列向量也为该齐次线性方程组的基础解系.

4.3.28 设 A 是 $m \times n$ ($m < n$) 矩阵, 且 A 的行向量线性无关. B 是 $n \times (n-m)$ 矩阵, B 的列向量线性无关, 且 $AB=O$. 证明: 若 η 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解, 则 $Bx=\eta$ 有唯一解.

4.3.29 已知线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + ax_4 = 0 \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + bx_4 = 0 \end{cases}$$

问 a, b 为何值时, 方程组 I 与 II 有非零公共解, 并求其公共解.

4.3.30 设 R^3 的两个基分别为:

$$\text{I: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{II: } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P ;

(2) 已知向量 $a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求向量 a 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

4.3.31 设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基, 已知

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3, \quad \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3, \quad \alpha_3 = \beta_1 + \beta_3.$$

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一个基, 并求向量 $\eta = 6\beta_1 - \beta_2 - \beta_3$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

4.3.32 设 R^3 的一个基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为

x_1, x_2, x_3 , 在另一组基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 y_1, y_2, y_3 , 且有 $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = -x_1 + x_2$, $y_3 = x_1 + 2x_3$.

(1) 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 P ; (2) 求基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

4.4 深化训练详解

4.3.1 填空题

(1) $t=13$.

(2) $\beta = \frac{k}{k+l}\alpha_1 + \frac{l}{k+l}\alpha_2$. 提示 由于 $\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta$ 线性相关, 因此存在 k, l 使得

$$k(\alpha_1 + \beta) + l(\alpha_2 + \beta) = 0.$$

又由于 α_1, α_2 线性无关, 因此 $k+l \neq 0$, 因此 $\beta = \frac{k}{k+l}\alpha_1 + \frac{l}{k+l}\alpha_2$.

(3) $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=3$. 提示 由于

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 故向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价, 从而 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=3$.

(4) $\leq$. 提示 向量组 A 的极大无关组可由向量组 B 的极大无关组线性表示.

(5) $t=1$. 提示 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 因此

$$R(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = R(A) < 3,$$

而

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $t=1$.

(6) $\frac{1}{2}$. 提示 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)(2a-1) = 0$, 因此 $a = \frac{1}{2}$.

$$(7) \quad c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ 为任意常数}).$$

$$(8) \quad c(1, 1, \dots, 1)^T \quad (c \text{ 为任意常数}).$$

$$(9) \quad 1. \text{ 提示 } \text{齐次线性方程组有非零解, 因此} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0, \text{ 故 } a=1, -2. \text{ 当 } a=-2 \text{ 时,}$$

系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(A)=2$, 故基础解系含有 1 个解向量, 与已知不符; 当 $a=1$ 时, 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(A)=1$, 故基础解系含有 2 个解向量, 与已知相符.

$$(10) \quad a=-1. \text{ 提示 } \text{由于}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix},$$

因此 $a=-1$.

(11) $\eta_1 + c_1(\eta_1 - \eta_2)$ (c_1 为任意常数). 提示 由于 A 的秩为 3, $Ax=b$ 对应的导出组 $Ax=0$ 的基础解系中只含有一个解向量, 即为 $\eta_1 - \eta_2$, 因此 $Ax=b$ 的通解是 $\eta_1 + c_1(\eta_1 - \eta_2)$ (c_1 为任意常数).

$$(12) \quad c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}). \text{ 提示 } \text{由题意 } |A|=0, \text{ 因此 } A^*A=O, \text{ 故 } A \text{ 的}$$

列向量为 $A^*x=0$ 的解, 而 A 的前两个列向量线性无关, 故它们构成 $A^*x=0$ 的基础解系.

$$(13) \quad \lambda=0 \text{ 或 } 1, |B|=0. \text{ 提示 } \text{由已知有 } Ax=0 \text{ 存在非零解, 故 } |A|=0, \text{ 即 } \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故 $\lambda=0$ 或 1 ; 由于 $AB=O$, 且 $R(A) \geq 1$, 因此 $R(B) \leq 3 - R(A) \leq 2$, 故 $|B|=0$.

$$(14) \quad a \neq -4. \text{ 提示 } |a_1 \quad a_2 \quad a_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$(15) \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

(16) 1. 提示 $R(A)=2$, 由 $AB=O$, 有 $R(B) \leq 3 - R(A) = 1$, B 为非零矩阵, 故 $R(B)=1$.

(17) -3. 提示 由 $AB=O$, 有 $R(A)+R(B) \leq 3$, 而 B 为三阶非零矩阵, 因此 $R(A) \leq 2$, 即 $|A|=0$, 从而 $t=-3$.

(18) $n-r$. 提示 由 $R(B)=m$ 知, $R(BA)=R(A)=r$, 因此 $BAx=0$ 的基础解系中包含 $n-r$ 个线性无关的解向量.

(19) $n-r+1$.

(20) $n-2$.

(21) 3.

$$(22) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(23) 6. \text{ 提示 } (a_1 \ a_2 \ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故 } a=6.$$

4.3.2 单项选择题

$$(1) (D). \text{ 提示 } (A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{pmatrix}, \ Ax=b \text{ 有无}$$

$$\text{无穷多解} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ d^2-3d+2=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a=1, 2 \\ d=1, 2 \end{cases}, \text{ 故 (D) 正确.}$$

(2) (D). (3) (D).

(4) (C). 提示 由于 $Ax=b$ 有三个线性无关的解向量, 因此对应的导出组 $Ax=0$ 的基础解系中含有两个解向量, 故 (C) 正确.

(5) (A). 提示 $(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$, 因此 $\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$ 线性相关. 故 (A) 正确.

(6) (A).

(7) (A). 提示 取 $A=(1 \ 0)$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有 $AB=0$, 并且 A 的列向量线性相关, A 的行向量线性无关; B 的行向量线性相关, B 的列向量线性无关. 故 (A) 正确.

(8) (B). 提示 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $C=(c_1, c_2, \dots, c_n)$, 由 $AB=C$ 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

因此

$$c_1 = b_{11}a_1 + b_{21}a_2 + \cdots + b_{n1}a_n, \quad \cdots, \quad c_n = b_{1n}a_1 + b_{2n}a_2 + \cdots + b_{nn}a_n,$$

即 C 列向量组可由 A 的列向量组线性表示; 由于 B 可逆, 因此 $A = CB^{-1}$, 因此 A 列向量组可由 C 的列向量组线性表示. 因此 C 列向量组与矩阵 A 的列向量组等价. 故 (B) 正确.

(9) (A). (10) (A).

(11) (B). 提示 因为 β 可由 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表示, 则

$$\beta = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m,$$

这里 $k_m \neq 0$ (否则与条件矛盾), 则 a_m 可由 (II) 线性表示;

假设 a_m 可由 (I) 线性表示, 即 $a_m = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_{m-1} a_{m-1}$, 又因为 $\beta = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$, 将 $a_m = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_{m-1} a_{m-1}$ 代入到 β 中, 即有

$$\beta = (x_1 + k_1) a_1 + (x_2 + k_2) a_2 + \cdots + (x_{m-1} + k_{m-1}) a_{m-1},$$

可知 β 可由 $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ 线性表示, 与题设矛盾, 因此 a_m 不能由 (I) 线性表示.

(12) (C). 提示 由于

$$|a_1, a_3, a_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0,$$

故 a_1, a_3, a_4 线性相关.

(13) (B).

(14) (D). 提示 $n \leq R(A) \leq \min\{m, n\} \leq n$.

(15) (C). 提示 由于

$$n = R(E) = R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\} \leq \min\{m, n\} = n,$$

有 $R(A) = n, R(B) = n$, 故矩阵 A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关, 即 (C) 正确.

(16) (B). (17) (D). (18) (B).

4.3.3 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T, \beta^T) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可得 $R(a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T, \beta^T) \neq R(a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T)$, 因此 β 不可由 a_1, a_2, a_3, a_4 线性表示.

4.3.4 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(a_1^T, a_2^T, a_3^T, \beta^T) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & -1+\lambda & 1+\lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 2+\lambda & \lambda^2+2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-5 & -\lambda^2-4\lambda+1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda \neq -5$ 时, β 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示. 且

$$\beta = -\frac{\lambda+1}{\lambda+5} a_1 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{\lambda+5} a_2 + \frac{\lambda^2+4\lambda-1}{\lambda+5} a_3.$$

4.3.5 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_i) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $i=1, 2$, 因此 Π 可由 I 线性表示, 并且

$$\beta_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

4.3.6 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & t & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & t-2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix},$$

当 $t \neq 4$ 时, $R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

当 $t = 4$ 时, $R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = 2 < 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2$.

4.3.7 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 故存在 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m.$$

$\Rightarrow$ 设存在 $l_1, l_2, \dots, l_m$ 使得

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

因此

$$\beta = (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \dots + (k_m + l_m)\alpha_m,$$

由于 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 唯一线性表示, 所以

$$k_1 = k_1 + l_1, k_2 = k_2 + l_2, \dots, k_m = k_m + l_m$$

故 $l_1 = l_2 = \dots = l_m = 0$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关;

$\Leftarrow$ 设 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m$, 因此

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m,$$

即

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \dots + (k_m - l_m)\alpha_m = \mathbf{0},$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 因此 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_m = l_m$, 即表示法唯一.

4.3.8 设存在 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_m\beta_m = \mathbf{0},$$

因此

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \dots + k_m(\alpha_m + \alpha_1) = \mathbf{0},$$

即

$$(k_1 + k_m)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + \dots + (k_{m-1} + k_m)\alpha_m = \mathbf{0},$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 因此

$$\begin{cases} k_1 & & + k_m = 0 \\ k_1 + k_2 & & = 0 \\ & \vdots & \\ & k_{m-1} + k_m = 0 \end{cases}$$

此齐次线性方程组的系数行列式为 $1+(-1)^{m+1}$, 因此 m 为偶数时, 系数行列式为零, 此齐次线性方程组有非零解, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性相关; 当 m 为奇数时, 系数行列式不为零, 此齐次线性方程组只有零解, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关.

4.3.9 $\Rightarrow A$ 可逆, 则

$$R(A\epsilon_1, A\epsilon_2, \dots, A\epsilon_n) = R(A(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)) = R(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = n,$$

因此 $A\epsilon_1, A\epsilon_2, \dots, A\epsilon_n$ 线性无关.

$\Leftarrow$ 由 $A\epsilon_1, A\epsilon_2, \dots, A\epsilon_n$ 线性无关, 有 $|A\epsilon_1, A\epsilon_2, \dots, A\epsilon_n| = |A||\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n| \neq 0$, 因此 $|A| \neq 0$, 即 A 可逆.

4.3.10 设存在 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0},$$

等式两边左乘 A , 由 $A\alpha_1 = \mathbf{0}$, 有

$$k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = k_2\alpha_1 + k_3A\alpha_3 = \mathbf{0},$$

等式两端再左乘 A , 得

$$k_2A\alpha_1 + k_3A^2\alpha_3 = k_3\alpha_1 = \mathbf{0},$$

由于 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 故 $k_3 = 0$, 从而 $k_2 = 0$, 进而 $k_1 = 0$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

4.3.11 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) $R(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T) = 3$;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大无关组, 并且有 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

4.3.12 依题, 设两个向量组的极大无关组分别为:

$$\text{I: } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \quad \text{II: } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m,$$

并且 I 可由 II 线性表示, 则存在 $A = (a_{ij})_{m \times m}$ 使得

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_m) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_m) A,$$

因此有

$$m = R(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_m) = R((\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_m) A) \leq R(A) \leq m,$$

故 $R(A)=m$ ，从而 A 可逆. 所以

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_m) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_m) A^{-1},$$

即 II 可由 I 线性表示, 因此这两个向量组等价.

4.3.13 记向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 I, 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ 为 II, 从 I 中去掉 II 中向量后, 剩余的向量构成向量组 III, 因此 III 与 II 合并就是 I, 所以 I 的秩 $\leq$ II 的秩 + III 的秩 $\leq$ II 的秩 + $s - m$, 即 II 的秩 $\geq r + m - s$.

4.3.14 对系数矩阵进行初等行变换,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases},$$

方程组的基础解系为 $\eta_1 = (2, -2, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (5, -4, 0, 3)^T$, 方程组的通解为

$$x = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意实数}).$$

4.3.15 对增广矩阵施以初等行变换,

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 4x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases},$$

此方程组的一个特解 $\eta = (-1, 1, 0, 0)^T$. 对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases},$$

导出组的基础解系, $\eta_1 = (4, -2, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (-1, -2, 0, 1)^T$. 因此线性方程组的通解为

$$x = \eta + c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意实数}).$$

4.3.16 对增广矩阵施以初等行变换, 有

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -\lambda(\lambda+3) & 0 & -2(\lambda+3) \\ 0 & -\lambda & \lambda & \lambda-3 \end{pmatrix},$$

故 $\lambda \neq 0, -3$ 时, 方程组有唯一解; 当 $\lambda = 0$ 时,

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有 $R(A) \neq R(A \ b)$, 方程组无解; 当 $\lambda = -3$ 时,

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有 $R(A) = R(A \ b) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解; 上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = 2 + x_2 \end{cases},$$

非齐次线性方程组的一个特解 $\eta = (1, 0, 2)^T$. 对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases},$$

方程组基础解系为 $\eta_1 = (1, 1, 1)^T$. 因此齐次线性方程组的通解为

$$x = \eta + c_1 \eta_1 \quad (c_1 \text{ 为任意实数}).$$

4.3.17 对增广矩阵施以初等行变换,

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix},$$

因此 $a=0$ 且 $b=2$ 时, 方程组有解; 此时

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

方程组的一个特解为 $\eta = (-2, 3, 0, 0, 0)^T$, 对应的导出组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

基础解系为

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)^T, \quad \eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)^T,$$

故非齐次方程组的通解为

$$x = \eta + c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ 为任意实数}).$$

4.3.18 利用矩阵的初等行变换有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2t & 2-2t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 0 & (t-1)^2 & (t-1)^2 \end{pmatrix},$$

由解空间的维数是 2, 有 $R(A) = 4 - 2 = 2$, 因此 $t = 1$, 此时上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$$

基础解系为 $\eta_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $\eta_2 = (0, -1, 0, 1)^T$, 因而可得此方程组的通解为

$$x = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意实数}).$$

4.3.19 由于 a_2, a_3, a_4 线性无关, a_2, a_3 又可以表示 a_1 , 有 $R(A) = 3$, 进而 $Ax = \beta$ 的导出组 $Ax = 0$ 的基础解系中只含有一个解向量. 再由 $a_1 = 2a_2 - a_3$, 有 $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$, 因此 $\eta_1 = (1, -2, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解. 由 $\beta = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $\eta = (1, 1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解. 故方程组的通解为 $x = \eta + c_1 \eta_1$, 其中 c_1 为任意常数.

4.3.20 由于 A 是秩为 3 的 5×4 矩阵, 因此 $Ax = b$ 的导出组 $Ax = 0$ 基础解系中只含有一个解向量, 而

$$A[(3a_1 + a_2) - (a_1 + a_2 + 2a_3)] = 4b - 4b = 0,$$

因此

$$\eta_1 = (3a_1 + a_2) - (a_1 + a_2 + 2a_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

是导出组 $Ax = 0$ 基础解系, 又由 $A(a_1 + a_2 + 2a_3) = 4b$, 因此

$$\eta = \frac{a_1 + a_2 + 2a_3}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

是方程组 $Ax = b$ 的一个特解, 故原方程组的通解为

$$x = \eta + c_1 \eta_1,$$

其中 c_1 为任意实数.

4.3.21 设 A 的一个行向量为 (a_1, a_2, a_3) , 由已知 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为对应的导出组 $Ax = 0$ 的基础

解系, 因此有

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases},$$

对此方程组的系数矩阵施以初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = -2a_3 \end{cases},$$

基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此可取 $\mathbf{A}$ 为 $(1 \ -2 \ 1)$, 故导出组为:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

又由 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个特解, 因此 $b = 1 - 2 \times (-1) + 1 = 4$, 故所求方程为

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4.$$

4.3.22 由 $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{b}$ 可得 $\lambda = \mu$, 进而有

$$(\mathbf{A} \ \mathbf{b}) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时,

$$(\mathbf{A} \ \mathbf{b}) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 1 - 2x_3 \end{cases},$$

方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 导出组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = -2x_3 \end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta} + c_1 \boldsymbol{\eta}_1$, 其中 c_1 为任意常数.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,

$$(\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{b}) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 2 + 2x_1 - 5x_3 \\ x_4 = -1 - 2x_1 + 2x_3 \end{cases},$$

方程组的一个特解为 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 导出组为

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 5x_3 \\ x_4 = -2x_1 + 2x_3 \end{cases},$$

基础解系为 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 因此方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + c_2 \boldsymbol{u}_1 + c_3 \boldsymbol{u}_2$, 其中 c_2, c_3 为任意实数.

4.3.23

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & t+1 \\ -2 & -4 & a-2 & -2 & a-2 & 10-a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-4 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & a-2 & 2-a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由于 I 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 因此 $a \neq 2$, 此时

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix},$$

因此 $t=4$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 即 Π 也是方程组 $Ax=0$ 基础解系.

4.3.24 由 $ABA=B^{-1}$ 整理可得 $(E-AB)(E+AB)=0$, 因此有

$$R(E+AB)+R(E-AB)\leq n,$$

再由

$$R(E+AB)+R(E-AB)\geq R(E+AB+E-AB)=R(E)=n,$$

故 $R(E+AB)+R(E-AB)=n$.

4.3.25 依题有

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 因此

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)=(\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1},$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

4.3.26 (1) (反正法) 设 $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关, 则 η 可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示, 从而 η 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解 (与题设矛盾). 因此结论成立;

(2) 设存在 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r+1}$, 使得

$$k_1(\xi_1+\eta)+k_2(\xi_2+\eta)+\dots+k_{n-r}(\xi_{n-r}+\eta)+k_{n-r+1}\eta=0,$$

整理得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}+(k_1+k_2+\dots+k_{n-r}+k_{n-r+1})\eta=0,$$

由 (1) 已证 $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 则有

$$k_1=k_2=\dots=k_{n-r}=k_{n-r+1}=0,$$

所以有 $\xi_1+\eta, \xi_2+\eta, \dots, \xi_{n-r}+\eta, \eta$ 线性无关.

4.3.27 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, $AB=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$, 有

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)B,$$

由于 B 为可逆矩阵, 从而有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)=(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)B^{-1},$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 等价, 故 A 的 r 个列向量为某个齐次线性方程组的基础解系时, AB 的 r 个列向量也为该齐次线性方程组的一个基础解系.

4.3.28 由 A 的行向量线性无关有 $R(A)=m$, 因此 $Ax=0$ 的基础解系中含有 $n-m$ 个解向量. 由 B 的列向量线性无关, 有 $R(B)=n-m$. 再由 $AB=O$ 有 B 的列向量均为 $Ax=0$ 的解,

且 $\mathbf{B}$ 的列向量构成 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系. 因此 $\boldsymbol{\eta}$ 可表示为 $\mathbf{B}$ 的列向量的线性组合, 所以 $\mathbf{Bx}=\boldsymbol{\eta}$ 有解, 又由 $R(\mathbf{B})=n-m$, 故 $\mathbf{Bx}=\boldsymbol{\eta}$ 有唯一解.

4.3.29 设方程组

$$\text{III: } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + ax_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + bx_4 = 0 \end{cases},$$

方程组 I 与 II 有非零公共解等价于 III 有非零解, 对 III 的系数矩阵进行初等变换有

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b+1 \\ 0 & 0 & -6 & 4b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+1+a \end{pmatrix},$$

因此 $b=1, a=0$ 时, 进一步可求得方程组 III 有非零解 $c_1(5, -7, 5, 6)^T$, 其中 c_1 为任意常数.

$$4.3.30 \quad (1) \text{ 记 } \mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix};$$

(2) 由 (1) 有 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\mathbf{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 1, 2, 2.

4.3.31 由题意

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 因此

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一组基, 且有

$$\eta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

因此 η 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 1, 2, 3.

4.3.32 (1) 依题有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

而

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

所以由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 由 (1) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)P$, 有

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \\ \beta_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即

4.5 综合提高训练

例 4.5.1 【2011(2)】设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ().

(A) α_1, α_3 ; (B) α_1, α_2 ; (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

解 由 $Ax = 0$ 的基础解系中只有一个解向量, 有 $R(A) = 4 - 1 = 3$, 进而 $R(A^*) = 1$, 所以 $A^*x = 0$ 的基础解系中含有 3 个解向量. 再由 $R(A) = 3$, 可知 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 又 $A(1, 0, 1, 0)^T = 0$, 因此

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)(1, 0, 1, 0)^T = 0,$$

即 $\alpha_1 + \alpha_3 = \mathbf{0}$, α_1, α_3 线性相关, 因此 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 由于 $A^*A = |A|E = \mathbf{O}$, 有

$$A^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \mathbf{O},$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $A^*x = \mathbf{0}$ 的解向量. 因此 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 可为 $A^*x = \mathbf{0}$ 基础解系. 故 (D) 正确.

例 4.5.2 【2005 (2)】确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可由向量组

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 & a & 1 \\ a & 4 & a & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-4 & 0 & 3(1-a) & -(1-a)^2 \end{pmatrix},$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 因此

$$R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = R(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_i), \quad i=1, 2, 3,$$

从而 $a \neq -2, 4$;

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & 0 & 3a+6 & 4a+2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 因此至少存在一个 i 使得

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_i),$$

因此 $a=1$ 或 $a=-2$. 综上, 可知 $a=1$ 为所求.

例 4.5.3 【2006 (3)】设四维向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3+a \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4+a \end{pmatrix},$$

问 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求一个极大无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

当 $a=0$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(A)=1$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, α_1 为一个极大无关组, 且

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1;$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $a=-10$ 时, $R(A)=3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为一个极大无关组, 且

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4.$$

例 4.5.4 【2004 (3)】 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

讨论 a, b 为何值时,

- (1) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- (2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示, 并求出表达式;
- (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表达式不唯一, 并求出表达式.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(A \ \beta) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix},$$

(1) $a=0$ 时,

$$(A \ \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

此时 $R(A) \neq R(A \ \beta)$, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(2) $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时, $R(A) = R(A \ \beta) = 3$, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示,

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2.$$

(3) $a = b \neq 0$ 时,

$$(A \ \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(A) = R(A \ \beta) = 2 < 3$, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一,

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1}{a} + c\right)\alpha_2 + c\alpha_3,$$

其中 c 为任意常数.

例 4.5.5 【2011 (1, 3)】设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 不能由向量组

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 故 $a = 5$;

(2) 当 $a = 5$ 时,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3.$$

例 4.5.6 【2009 (1,3)】 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1$, $A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2 , ξ_3 ;

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

解 (1) 利用矩阵的初等行变换, 有

$$(A \ \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 1 - 2x_2 \end{cases},$$

从而 $Ax = \xi_1$ 的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 对应的导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 因此

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

其中 c 为任意实数. 再由

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A^2 \ \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $A^2x = \xi_1$ 的特解为 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应的导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意实数.

(2) 由于

$$|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & c & -\frac{1}{2}-c_1 \\ 1 & -c & c_1 \\ -2 & 1+2c & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -c & c_1 \\ -2 & 1+2c & c_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

例 4.5.7 【2005(3)】 已知线性方程组 I: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ 和 II: $\begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$

同解. 求 a, b, c 的值.

解 显然 II 有非零解, 因此 I 也有非零解. 对于 I, 利用矩阵的初等行变换有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

故 $a=2$. 进一步可解得 $(-1, -1, 1)^T$ 是 I 的基础解系, 再将其代入 II 中有

$$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -2-b^2+(c+1)=0 \end{cases},$$

因此有

$$\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases},$$

当 $b=1, c=2$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

此时 I 与 II 同解; 当 $b=0, c=1$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 I 与 II 不同解. 因此 $a=2, b=1, c=2$ 时, I 与 II 同解.

例 4.5.8 【2007(1, 3)】 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1$ 有

公共解, 求 a 的值及所有的公共解.

解 设 ξ 为公共解, 则 ξ 是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \end{cases}$$

的解, 对此方程组的增广矩阵进行初等行变换,

$$\begin{aligned} (A \ b) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $a=1$ 或 $a=2$ 时, $R(A)=R(A \ b)$, 上述方程组有解. 当 $a=1$ 时,

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得公共解为 $c_1(-1, 0, 1)^T$, 其中 c_1 为任意的数; 当 $a=2$ 时,

$$(A \ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得公共解为 $(0, 1, -1)^T$.

例 4.5.9 【2008 (1, 3)】设 n 元方程组 $Ax=b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明: $|A| = (n+1)a^n$;

(2) a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求出解 x_1 ;

(3) a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求出通解.

解 (1) 由题意, 有

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & 3a/2 & 1 & & \\ & a^2 & 2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & 3a/2 & 1 & & \\ & 4a/3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & na/(n-1) & 1 \\ & & & a^2 & (n+1)a/n \end{vmatrix} = (n+1)a^n;
 \end{aligned}$$

(2) 由(1)知, 当 $a \neq 0$ 时, $|A| \neq 0$, 此时该方程组有唯一解. 由克莱姆法则

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} = na^{n-1},$$

$$\text{因此 } x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{n}{(n+1)a};$$

(3) 当 $a = 0$ 时,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $R(A) = R(A \ b) = n-1$, 因此该方程组有无穷多解. $Ax = b$ 的特解为 $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应的导出

组的基础解系为 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, 因此 $Ax = b$ 的通解为 $u + cv$, 其中 c 为任意实数.

例 4.5.10 【2013 (1, 3)】 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使

得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

解 由题意, 设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $AC - CA = B$, 整理有

$$\begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases},$$

即若矩阵 C 存在, 则方程组有解, 而

$$(Ab) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right),$$

因此可得 $a = -1, b = 0$, 并且此时

$$(Ab) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

返回方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases},$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 则其全部解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = -c_1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$$

其中 c_1, c_2 为任意实数, 且 $C = \begin{pmatrix} 1+c_1+c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

例 4.5.11 【2012 (1,3)】 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

$$\text{解 (1) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4;$$

(2) 利用矩阵的初等行变换, 有

$$\begin{aligned} (A \ \beta) &= \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此 $\begin{cases} 1 - a^4 = 0 \\ -a - a^2 = 0 \end{cases}$, 即 $a = -1$ 时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解. 当 $a = -1$ 时,

$$(A \ \beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$Ax = \beta$ 的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 对应的导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故方程组的通解为

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c 为任意常数.

例 4.5.12 【2010 (1, 3)】已知 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知方程组 $Ax = b$ 存在两

个不同的解.

(1) 求 λ, a 的值;

(2) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

解 (1) 由条件知 $|A| = 0$, 因此 $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$, 即 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 若 $\lambda_1 = 1$, 则

$R(A)=1, R(A\ b)=2$, 此时方程组无解; 由于方程组有解, 所以必有 $\lambda_2=-1$, 此时

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix},$$

由于方程组有解, 故 $R(A)=R(A\ b)=2$, 因此 $a=-2$.

(2) 当 $\lambda_2=-1$, $a=-2$ 时, 此时

$$(A\ b) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程组的通解为 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 c 为任意实数.

例 4.5.13 【2006 (1)】已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有三个线性无关

的解.

(1) 证明方程组的系数矩阵 A 的秩 $R(A)=2$; (2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

解 (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是上述方程组的三个线性无关的解向量, 从而 $\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3$ 也线性无关, 且是对应的导出组的两个线性无关的解, 因此导出组的基础解系所含有的向量的个数 ≥ 2 , 即 $4 - R(A) \geq 2$, $R(A) \leq 2$; 而 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 因此 $R(A) \geq 2$, 故 $R(A)=2$.

(2) $(A\ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{pmatrix}$, 因为 $R(A)=2$, 因

此 $a=2, b=-3$, 此时

$$(A\ b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意实数.

例 4.5.14 【2005 (1)】已知三阶方阵 A 的第一行是 (a, b, c) (a, b, c 不全为零), 矩

阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB=O$. 求线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的通解.

解 由 a, b, c 不全为零知 $R(A) \geq 1$; 由 $AB=O$ 知 $Ax=0$ 有非零解, 因此 $R(A) \leq 2$, 故 $R(A)=1$ 或 $R(A)=2$. 若 $R(A)=1$, 则 $Ax=0$ 与 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 同解, 因此设 $a \neq 0$, $Ax=0$ 的通解为

$$x = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数; 若 $R(A)=2$, 则 $Ax=0$ 的基础解系中只含有一个解向量, 由 $AB=O$ 知,

这个解向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 因此 $Ax=0$ 的通解为 $c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 其中 c_3 为任意实数.

例 4.5.15 【2004 (1)】设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2),$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

解 利用矩阵的初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -2a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(n-1)a & 0 & \cdots & a & 0 \\ -na & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix},$$

当 $a=0$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有 $R(A)=1$, 方程组有非零解, 基础解系为

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, v_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此方程组的通解为 $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{n-1} v_{n-1}$, 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 为任意实数. 当 $a \neq 0$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} + a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(n-1) & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -(n-1) & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此 $R(A) = n-1$, 故方程组有非零解, 基础解系为 $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, 因此方程组的通解为 $c_n \mathbf{v}_n$, 其中

c_n 为任意常数.

例 4.5.16 【2016 (3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $A\mathbf{x} = \beta$ 无

解. (1) 求 a 的值; (2) 求方程组 $A^T A \mathbf{x} = A^T \beta$ 的通解.

解 (1) 由方程组 $A\mathbf{x} = \beta$ 无解, 可知 $R(A) \neq R(A, \beta)$, 故

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $a=0$ 或 $a=2$. 再由当 $a=0$ 时, $R(A) \neq R(A, \beta)$, 当 $a=2$ 时, $R(A) = R(A, \beta)$, 故 $a=0$.

(2) 当 $a=0$ 时, $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, 故

$$(A^T A, A^T \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

因此, 方程组 $A^T A \mathbf{x} = A^T \beta$ 的通解为

$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为任意实数}).$$

例 4.5.17 【2015 (1)】 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(1) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(2) k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

解 (1) 由题意

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 故向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

$$(2) \text{ 设 } \xi = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left(E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

因此

$$\left(E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等变换,

$$E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2k & 0 & -k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

当 $k=0$ 时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同. 此时,

$$E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c \end{cases},$$

故 $\xi = -c\alpha_1 + c\alpha_3$, 其中 c 为任意实数.

第5章 特征值与特征向量、相似矩阵

5.1 知 识 要 点

5.1.1 向量的内积、长度及夹角

(1) 向量的内积

设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则向量 α 和 β 的内积定义为

$$[\alpha, \beta] = \alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

内积的一些运算性质 (设 α 、 β 和 γ 均为 n 维向量, k 为实数):

- 1) $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$;
- 2) $[k\alpha, \beta] = k[\alpha, \beta]$;
- 3) $[\alpha + \beta, \gamma] = [\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma]$;
- 4) $[\alpha, \alpha] \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时, $[\alpha, \alpha] = 0$;
- 5) (施瓦兹不等式) $[\alpha, \beta]^2 \leq [\alpha, \alpha] \cdot [\beta, \beta]$.

(2) 向量的长度

设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 称 $\|\alpha\| = \sqrt{[\alpha, \alpha]} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 为向量 α 的长度 (或范数). 当 $\|\alpha\| = 1$ 时, 称 α 为单位向量. 若 $\alpha \neq 0$, 则向量 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 就是一个单位向量, 由 α 到 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 的

过程称为将向量 α 单位化.

向量长度的性质: (设 α 和 β 均为 n 维向量, k 为实数)

- 1) $\|\alpha\| \geq 0$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 时, $\|\alpha\| = 0$;
- 2) $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$;
- 3) (三角不等式) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

(3) 向量的夹角

设 α 和 β 均为 n 维非零向量, 称 $\theta = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 为 α 和 β 的夹角. 若 $[\alpha, \beta] = 0$, 则称 α 和 β 正交, 显然, 零向量与任何相同维数的向量正交.

5.1.2 正交向量组

若 n 维非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 两两正交, 即

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, s),$$

则称该向量组为正交向量组. 正交向量组一定是线性无关的向量组. 若正交向量组中的每个向量都是单位向量, 则称该向量组为单位正交向量组.

若单位正交向量组 $e_1, e_2, \dots, e_s$ 为向量空间 V ($V \subseteq \mathbf{R}^n$) 的基, 则称其为 V 的**标准正交基**. V 中的任意向量 α 都可以由 $e_1, e_2, \dots, e_s$ 线性表示, 设表示式为

$$\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_s e_s,$$

则有 $k_i = [e_i, \alpha]$ ($i=1, 2, \dots, s$).

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中线性无关向量组, 令

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1, \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2, \\ &\dots \\ \beta_s &= \alpha_s - \frac{[\alpha_s, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_s, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \dots - \frac{[\alpha_s, \beta_{s-1}]}{[\beta_{s-1}, \beta_{s-1}]} \beta_{s-1}.\end{aligned}$$

则有 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 两两正交, 这个过程称为**施密特 (Schmidt) 正交化过程**. 它还满足: 对于任意的 $1 \leq k \leq s$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 等价. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个基, 可以通过施密特正交化方法生成一个正交基, 然后将该正交基中的每一个向量进行单位化, 这样就得到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个标准正交基.

5.1.3 正交矩阵及正交变换

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^T A = E$, 则称 A 为**正交矩阵**, 简称**正交阵**. 若 A 为正交矩阵, 则称线性变换 $y = Ax$ 为**正交变换**. 对于正交变换而言, 由于 $\|y\| = \|x\|$, 因此正交变换能够保持向量的长度不变.

正交矩阵具有如下性质:

- (1) 若 A 为正交矩阵, 则 A 的行列式为 1 或 -1;
- (2) 若 A 为正交矩阵, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = A^T$;
- (3) 若 A 和 B 均为正交矩阵, 则 AB 也为正交矩阵;
- (4) 若 A 为 n 阶矩阵, 则 A 为正交矩阵的充分必要条件是其列 (行) 向量组是标准正交向量组.

5.1.4 矩阵的迹

矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的主对角线元素之和称为矩阵 A 的**迹**, 记为 $\text{tr}(A)$ 或 $\text{trace}(A)$, 即

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

矩阵迹的性质:

设 A 和 B 均为 n 阶方阵, λ 为常数, 则有:

- (1) $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;
- (2) $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$;
- (3) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$;
- (4) $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

5.1.5 矩阵的特征值与特征向量

(1) 特征值与特征向量的概念

设 A 为 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零列向量 x , 使得 $Ax = \lambda x$ 成立, 则称 λ 为矩阵 A 的**特征值**, 非零列向量 x 称为对应于 (或属于) 特征值 λ 的**特征向量**.

显然, 若 x 为矩阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量, 则 kx ($k \neq 0$) 也为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量. 若 $x_1, x_2, \dots, x_s$ 为 A 对应于同一特征值 λ 的特征向量, 则其非零线性组合 $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_sx_s$ 也为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

(2) 特征值、特征向量的求解

设 A 为 n 阶方阵, 则称 $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ 为矩阵 A 的**特征多项式**, $f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$ 为矩阵 A 的**特征方程**. 矩阵 A 的特征值就是特征方程的解. 在复数域内特征方程解的个数等于方程的次数, 而在实数域内解的个数小于等于方程的次数. (重根按重数计算.)

对于矩阵 A 的特征值 λ_i , 线性方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的非零解就是矩阵 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量. 若 λ_i 为实数, 则特征向量可以取实向量, 若 λ_i 为复数, 则特征向量为复向量.

求解特征值、特征向量的步骤是: 先通过特征方程 $f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$, 解得 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$; 然后对每个特征值 λ_i , 求解齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, 则 A 的对应于特征值 λ_i 的全部特征向量为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_r\eta_r$ (其中 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 不全为零).

(3) 特征值的性质

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, k 为正整数, 则有:

- 1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr}(A)$;
- 2) $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$;
- 3) 若 λ 为方阵 A 的特征值, 则 λ^k 为方阵 A^k 的特征值;
- 4) 若 $\varphi(\lambda)$ 为 λ 的多项式函数, 则 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(A)$ 的特征值;
- 5) 若方阵 A 可逆, 则 λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值, 更一般地, λ^{-k} 为 A^{-k} 的特征值;
- 6) 矩阵 A^T 与 A 具有相同的特征值;
- 7) 方阵 A 可逆的充要条件是 A 的特征值均不为零.

(4) 特征向量的性质

- 1) 方阵 A 的对应于不同特征值的特征向量线性无关;
- 2) λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关;
- 3) 若 λ 是矩阵 A 的 s 重特征值, 则与 λ 对应的线性无关的特征向量的个数不超过 s .

5.1.6 相似矩阵

设 A 和 B 均为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$, 此时 B 也称为 A 的**相似矩阵**, 运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行**相似变换**, 可逆矩阵 P 称为将 A 化为 B 的**相似变换矩阵**. 显然单位矩阵 E 只与自身相似 $P^{-1}EP = E$.

矩阵的相似关系可以看作是一种等价关系, 具有下列性质:

- (1) 自反性: A 与 A 相似;
- (2) 对称性: 若 A 与 B 相似, 则 B 与 A 相似;
- (3) 传递性: 若 A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似.

相似矩阵的性质:

设 A 和 B 均为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 相似, k 为某个正整数, 则

- (1) A 与 B 的行列式、秩和迹均对应相等, 即 $|A|=|B|$, $R(A)=R(B)$, $\text{tr}(A)=\text{tr}(B)$;
- (2) 若 A 可逆, 则 B 也可逆, 且 A^{-1} 与 B^{-1} 相似, A^* 与 B^* 相似;
- (3) A^T 与 B^T 相似, A^k 与 B^k 相似, 更一般地, A 的多项式 $\phi(A)$ 与 B 的多项式 $\phi(B)$ 也相似;
- (4) A 与 B 的特征多项式相等, 特征值相同.

注 (1) 若矩阵 A 与对角矩阵 $A=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值.

(2) 若两个矩阵特征值相同, 但它们不一定相似. 例如, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 有相同的特征值, 但 E 只与 E 相似, 不与 A 相似.

5.1.7 一般矩阵的对角化

若 n 阶方阵 A 与对角矩阵 $A=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似, 则称 A 能对角化.

(1) 矩阵 A 对角化的判定

- 1) n 阶矩阵 A 能对角化的充要条件为 A 有 n 个线性无关的特征向量;
- 2) 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 能对角化;
- 3) n 阶方阵 A 能对角化的充要条件是每个特征值 λ_i 的重数 k_i 等于对应于 λ_i 的线性无关特征向量的个数, 即齐次方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的系数矩阵满足 $R(A-\lambda_i E)+k_i=n$.

(2) 矩阵 A 对角化的步骤

若 n 阶方阵 A 能对角化, 使其对角化的步骤:

- 1) 求解特征方程 $|A-\lambda E|=0$, 得到 A 全部的互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 它们的重数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_s$ ($k_1+k_2+\dots+k_s=n$);
- 2) 对每个特征值 λ_i , 求齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系. 以这 n 个特征向量为列向量构成的矩阵 P 为可逆矩阵, 且满足 $P^{-1}AP=A$. 其中的 A 为对角矩阵主对角线上的元素为 A 的 n 个特征值, 并且特征值的排列应与 P 中的列向量的排列相对应.

5.1.8 实对称矩阵的对角化

(1) 实对称矩阵的性质

- 1) 实对称阵的特征值为实数.
- 2) 实对称阵 A 对应于不同特征值的特征向量是正交的.
- 3) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则必定存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP=P^TAP=A=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

4) n 阶实对称阵 A 的每个特征值 λ_i 的重数 k_i 等于对应于 λ_i 的线性无关特征向量的个数, 即齐次方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的系数矩阵满足 $R(A - \lambda_i E) + k_i = n$.

5) 实对称阵 A 的秩等于 A 的非零特征值个数.

6) 若 A 与 B 为 n 阶实对称阵, 则 A 与 B 相似的充要条件为 A 与 B 具有相同的特征值.

(2) 实对称矩阵的对角化的步骤

求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = P^TAP$ 为对角矩阵的步骤:

1) 求解特征方程 $|A - \lambda E| = 0$, 得到 A 全部的互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 它们的重数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_s$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$);

2) 对每个特征值 λ_i , 求齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的基础解系, 并进行正交化、单位化. 以这 n 个单位正交的特征向量为列向量构成的矩阵 P 为正交矩阵, 且满足 $P^{-1}AP = P^TAP = A$.

注 实对称矩阵对角化有两种方法, 一个是用一般的可逆矩阵, 一个是用正交矩阵, 在使用时要给合具体问题.

5.2 典型例题分析

5.2.1 题型一、向量的内积、长度及正交问题

例 5.2.1 求一个单位向量, 使其同时与向量 $\alpha_1 = (2, 1, -4)^T$ 和 $\alpha_2 = (-1, -1, 2)^T$ 正交.

解 依题意, 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 则有

$$\begin{cases} [x, \alpha_1] = \alpha_1^T x = 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ [x, \alpha_2] = \alpha_2^T x = -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

由矩阵的初等变换有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

上述矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

基础解系为 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 将 x 的单位化为 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 即可.

例 5.2.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是正交单位向量组, 求 $\|4\alpha_1 - 7\alpha_2 + 4\alpha_3\|$.

解 由题意

$$\begin{aligned} \|4\alpha_1 - 7\alpha_2 + 4\alpha_3\| &= \sqrt{(4\alpha_1 - 7\alpha_2 + 4\alpha_3)^T (4\alpha_1 - 7\alpha_2 + 4\alpha_3)} \\ &= \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 4^2} = 9. \end{aligned}$$

5.2.2 题型二、正交矩阵问题

例 5.2.3 设 A 为正交矩阵, 且 $|A| < 0$, 求: (1) $|A|$; (2) $|A+E|$.

解 (1) 由 A 为正交矩阵, 有 $A^T A = E$, 进而有 $|A|^2 = |A^T A| = |A^T| |A| = |A^T A| = 1$, 由此可得 $|A| = \pm 1$, 再由 $|A| < 0$, 故 $|A| = -1$.

(2) 由 A 为正交矩阵, 有 $A^T = A^{-1}$, 从而

$$|A+E| = |A+AA^T| = |A| |A^T + E| = |A| |(A+E)^T| = -|A+E|,$$

所有 $2|A+E| = 0$, 故得 $|A+E| = 0$.

例 5.2.4 设 A 与 B 为 n 阶正交矩阵, 证明 AB 也是正交矩阵.

证 因为 A 与 B 为正交矩阵, 所以 $A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$, 则

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1},$$

故 AB 也是正交矩阵.

5.2.3 题型三、特征值与特征向量问题的计算

例 5.2.5 【1999 (1)】设 n 阶矩阵 A 的所有元素为 1, 则 A 的特征值为_____.

解 由于 A 的特征方程

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-\lambda & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (n-\lambda) = 0, \end{aligned}$$

有 A 的特征值为 n , 0 ($n-1$ 重根).

例 5.2.6 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, -2, 2$, 求:

(1) $|A^2 + 2A + E|$ 的值, 并问 $A^2 + 2A + E$ 是否可逆; (2) $|3A^* + 4A + E|$ 的值.

解 (1) 设 $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, 则 $\varphi(A) = A^2 + 2A + E$ 的特征值为 $\varphi(1) = 4$, $\varphi(-2) = 1$, $\varphi(2) = 9$, 从而有 $|A^2 + 2A + E| = 4 \times 1 \times 9 = 36$. 再由 $|A^2 + 2A + E| \neq 0$, 有 $A^2 + 2A + E$ 可逆.

(2) 由 $|A| = 1 \times (-2) \times 2 = -4$, 以及

$$3A^* + 4A + E = 3|A|A^{-1} + 4A + E = -12A^{-1} + 4A + E,$$

设 $f(\lambda) = -\frac{12}{\lambda} + 4\lambda + 1$, 则 $f(A) = 3A^* + 4A + E$ 的特征值为 $f(1) = -7$, $f(-2) = -1$, $f(2) = 3$,

所以 $|3A^* + 4A + E| = (-7) \times (-1) \times 3 = 21$.

例 5.2.7 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = O$, $R(A) = 2$, 求 A 的特征值.

解 依题, A 为 3 阶实对称矩阵, 则 A 必有三个实特征值. 由 $A^2 + 2A = O$, 有 A 的特征值应满足 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, 可解得 λ 只能取值 0 和 -2 . 再由 $R(A) = 2$, 有 A 的特征值只有一个 0 , 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2$ (2 重根), $\lambda_2 = 0$.

例 5.2.8 设向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 都是非零向量, 且满足条件 $\alpha^T \beta = 0$, 记 $A = \alpha \beta^T$,

求: (1) A^2 ; (2) 矩阵 A 的特征值与特征向量.

解 (0) 因为 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha = 0$, 且 $A = \alpha \beta^T$, 则

$$A^2 = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha) \beta^T = O.$$

(2) 设 λ 为 A 的特征值, x 是 A 对应于 λ 的特征向量, 则由 $Ax = \lambda x$, 有 $A^2 x = \lambda^2 x$. 因为 $x \neq 0$ 及 (1) 中求得的 $A^2 = O$, 解得 $\lambda = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是 A 的一个特征值. 又因为 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 则它们至少有一个分量不等于零, 不妨设 $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$, 对应 $\lambda = 0$ 的特征向量满足方程组 $(A - 0E)x = 0$, 即 $Ax = 0$, 这里系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

方程的基础解系为:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{y_2}{y_1} \\ y_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{y_3}{y_1} \\ y_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -\frac{y_n}{y_1} \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是属于 $\lambda = 0$ 的所有特征向量为:

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_{n-1} \xi_{n-1} \quad (\text{其中 } k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \text{ 不全为零}).$$

5.2.4 题型四、特征值与特征向量的证明问题

例 5.2.9 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times m$ 阶矩阵, 证明矩阵 AB 和 BA 具有相同的非零特征值.

证 设 $\lambda \neq 0$ 为 AB 的特征值, x 是对应于 λ 的特征向量, 则有 $ABx = \lambda x$, 由其可得 $BA(Bx) = \lambda(Bx)$. 若其中的 $Bx = 0$, 则有 $ABx = \lambda x = 0$, 由于 $\lambda \neq 0$, 从而 $x = 0$, 这与 x 是特征向量矛盾. 因此 λ 为矩阵 BA 的特征值, Bx 为对应于特征值 λ 的特征向量.

类似方法可以证明 BA 的非零特征值也为 AB 的特征值, 从而结论得证.

例 5.2.10 设 A 为 3 阶方阵, 若 A 的秩 $R(A) = 1$, 证明 A 至少有两个为 0 的特征值.

证 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 则有

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - D(2)\lambda + |A|,$$

其中

$$D(2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由于 $R(A)=1$, 有 $D(2)=0$ 及 $|A|=0$, 从而

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2,$$

故矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \text{tr}(A)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

注 秩为1的 n 阶方阵 A , 其特征值为 $\lambda_1 = \text{tr}(A)$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

例 5.2.11 【2008 (3)】设 A 为3阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于 -1 和 1 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$. (1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

(1) 证 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \quad (1)$$

上式左乘 A , 并结合已知整理可得

$$-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

由①-②有

$$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = \mathbf{0},$$

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性无关, 故 $k_1 = k_3 = 0$. 代入①式得 $k_2\alpha_2 = \mathbf{0}$, 又因为 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 得 $k_2 = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 解 由 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 从而有

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由(1)可知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2.5 题型五、相似矩阵问题

例 5.2.12 矩阵 A, B 满足 $P^{-1}AP = B$, 其中 P 为可逆矩阵, λ_0 是 A 与 B 的特征值, 若 α 是 A 对应于 λ_0 的特征向量, 则 B 对应于 λ_0 的特征向量是 ().

(A) α ; (B) Pa ; (C) $P^{-1}\alpha$; (D) $P^T\alpha$.

解 由 $P^{-1}AP = B$, 有 $BP^{-1} = P^{-1}A$, 等式两端右乘 α 并整理有

$$B(P^{-1}\alpha) = P^{-1}(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(P^{-1}\alpha),$$

显然 $P^{-1}\alpha \neq \mathbf{0}$. 所以本题选 (C).

例 5.2.13 矩阵 A 与 B 相似的充分条件为 ().

- (A) A 与 B 具有相同的特征多项式; (B) A 与 B 具有相同的特征值;
 (C) 矩阵 A^T 与 B^T 相似; (D) A 与 B 具有相同的特征向量.

解 根据相似矩阵的性质, 若 A^T 与 B^T 相似, 则 $(A^T)^T$ 与 $(B^T)^T$ 相似, 从而 A 与 B 相似. 选项 (A) 和选项 (B) 为矩阵 A 与 B 相似的必要条件, 不是充分条件. 例如, 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

易得 A 与 B 具有相同的特征多项式和相同的特征向量, 但显然对于任意的逆矩阵 P 有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

选项 (D) 也是错误的. 例如, 取

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

显然对于任意的非零向量 x , 有 $Ax = 0x$, $Bx = 1x$, 即 A 与 B 具有相同的特征向量, 但对于任意的逆矩阵 P 有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

即 A 与 B 不相似. 所以本题选 (C).

注 零矩阵、单位矩阵只能与自己相似.

例 5.2.14 【2003, (4)】已知矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 若矩阵 A 与 B 相似, 则 $(A-2E)$ 与

$(A-E)$ 秩的和等于 ().

- (A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.

解 依题, 由于矩阵 A 与 B 相似, 有 $B-2E$ 与 $A-2E$ 相似, $B-E$ 与 $A-E$ 也相似. 从而 $R(B-2E) = R(A-2E)$, $R(B-E) = R(A-E)$. 再由

$$B-2E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

易得 $R(B-2E) = 3$, $R(B-E) = 1$. 所以本题选 (C).

例 5.2.15 【2015 (1, 3)】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) 求 a, b 的值; (2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 因为 A 与 B 相似, 有 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, $|A| = |B|$, 可解得 $a = 4, b = 5$.

(2) 显然 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 1, 1, 5, 则 A 的特征值也是 1, 1, 5.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 求解方程组 $(A - E)x = 0$, 解得基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 求解方程组 $(A - 5E)x = 0$, 解得基础解系为 $\eta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则有 $P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

例 5.2.16 【2016 (1, 3)】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A^{99} ; (2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

解 (1) 由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$; 当 $\lambda_1 = -1$, 求解方程组 $(A + E)x = 0$, 解得基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 当 $\lambda_2 = -2$ 时, 求解方程组 $(A + 2E)x = 0$, 解得基础解系为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; 当

$\lambda_3 = 0$ 时, 求解方程组 $Ax = 0$, 解得基础解系为 $\eta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 令 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则有

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$A^{99} = PA^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 + 2^{99} & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ -2 + 2^{100} & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $B^2 = BA$, 可得

$$B^{100} = B^{98}B^2 = B^{98}BA = B^{99}A = \cdots = BA^{99},$$

由 (1) 得

$$\mathbf{B}^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2; \quad \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2;$$

$$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2.$$

例 5.2.17 【2001, (1)】 设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 与三维向量 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}$ 线性无关, 且 $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = 3\mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^2\mathbf{x}$, 记 $\mathbf{P} = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \mathbf{A}^2\mathbf{x})$.

(1) 求 3 阶矩阵 $\mathbf{B}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$; (2) 计算行列式 $|\mathbf{A} + \mathbf{E}|$.

解 (1) 由 $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = 3\mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^2\mathbf{x}$, 有

$$\mathbf{A}^3\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

从而

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}, \mathbf{A}^3\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \mathbf{A}^2\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

所以有 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 使得 $\mathbf{AP} = \mathbf{PB}$, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$.

(2) 由 (1) 可知矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似, 所以 $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B} + \mathbf{E}$ 也相似, 故

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = |\mathbf{B} + \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

5.2.6 题型六、对称矩阵的对角化问题

例 5.2.18 【2010 (1)】 设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 满足 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{O}$, 若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3, 则 $\mathbf{A}$ 相似于 ().

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 设 λ 是 A 的特征值, 由 $A^2 + A = O$, 有 λ 应满足 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 解得 $\lambda = -1$ 或 0 . 又因为 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 A 的秩为 3, 所以 A 相似于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故选项为 (D).

例 5.2.19 设 n 阶实对称阵 A 为幂等矩阵, 即满足 $A^2 = A$, 证明 $R(A) = \text{tr}(A)$, 且存在正交阵 P 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中 $r = \text{tr}(A)$.

解 设 λ 是 A 的特征值, 由 $A^2 = A$, 有 λ 应满足 $\lambda^2 = \lambda$, 解得 $\lambda = 0$ 或 1 . 因为 A 为对称矩阵, 有 A 相似于对角矩阵 Λ , 且 Λ 的主对角线元素为 0 或 1. 对于 Λ , 显然有 $R(\Lambda) = \text{tr}(\Lambda)$, 从而由相似的性质可得

$$R(A) = R(\Lambda) = \text{tr}(\Lambda).$$

设 r 为对角阵 Λ 主对角线元素中 1 的个数, $e_1, e_2, \dots, e_r$ 为 A 的对应于特征值 1 的单位正交化向量组, $e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n$ 为 A 的对应于特征值 0 的单位正交化向量组, 令

$$P = (e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n),$$

则 P 为正交矩阵, 且满足

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}.$$

例 5.2.20 【2006(1)】设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量; (2) 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

解 (1) 依题有

$$A\alpha_i = 0 = 0\alpha_i \quad (i=1, 2),$$

因为 α_1, α_2 均为非零向量, 所以 A 有特征值 0, 且向量 α_1, α_2 是对应特征值 0 的特征向量. 再由 A 的各行元素之和为 3, 有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

从而 3 也是 A 的特征值, 且对应于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$.

(2) 将 α_1, α_2 正交化, 令

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

再将 $\alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 单位化, 令

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

令正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$, 并且有

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5.2.21 【2010 (2)】 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}$ 成为对角矩阵, 若 $\boldsymbol{Q}$

的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求 a , $\boldsymbol{Q}$.

解 依题意, 记 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 并设 γ_1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 特征向量, 则有

$\boldsymbol{A}\gamma_1 = \lambda_1\gamma_1$, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

解得 $a = -1, \lambda_1 = 2$, 进而由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(4+\lambda) = 0,$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 求解方程组 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 解得对应于 5 的特征向量 $\eta_2 = (1, -1, 1)^T$, 单位化得 $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$;

当 $\lambda_3 = -4$ 时, 求解方程组 $(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 解得对应于 -4 的特征向量 $\eta_3 = (-1, 0, 1)^T$, 单位化为 $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$. 令

$$\boldsymbol{Q} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\text{则有 } \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5.3 深化训练

5.3.1 填空题

(1) 【2015 (3)】 设3阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为3阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

(2) 设3阶矩阵 A 的特征多项式 $|A - \lambda E| = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-3 - \lambda)$, 则 $\text{tr}(A^{-1}) =$ _____.

(3) 【2000 (1, 3)】 若4阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则

$|B^{-1} - E| =$ _____.

(4) 【2009 (3)】 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k =$ _____.

(5) 设3阶对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, A 的对应于特征值 $1, 2$ 的特征向量分别为 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$, 则 A 对应于特征值 3 的特征向量可取为 _____.

(6) 设 A 为 n 阶方阵, $Ax = 0$ 有非零解, 则 A 必有一个特征值等于 _____.

(7) 设可逆矩阵 A 的三个特征值分别为 $1, -1, 2$, 则 A^* 的3个特征值分别为 _____.

(8) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是 A^{-1} 的特征向量, 则 $k =$ _____.

5.3.2 单项选择题

(1) 若矩阵 A 与 B 相似, 则下列结论可能错误的是 ().

(A) A 与 B 对应于相同的特征值, 它们的特征向量相同;

(B) A^2 与 B^2 相似;

(C) A 与 B 相似于同一矩阵;

(D) $|A| = |B|$.

(2) n 阶矩阵 A 仅有 λ_0 是 k 重特征值, 其余都不是重特征值. 若 A 可以对角化, 则矩阵 $A - \lambda_0 E$ 的秩为 ().

(A) n ;

(B) k ;

(C) $n - k$;

(D) $k - n$.

(3) 设 A 为 n 阶矩阵, 则下列结论正确的是 ().

(A) A 与对角矩阵相似;

(B) A 与对角矩阵不相似;

(C) 对应于 A 的不同特征值的特征向量正交;

(D) 存在正交矩阵 P , 使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

(4) 【2013 (1, 2, 3)】 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ().

(A) $a = 0, b = 2$;

(B) $a = 0, b$ 为任意常数;

(C) $a = 2, b = 0$;

(D) $a = 2, b$ 为任意常数.

(5) 【2012 (1, 2, 3)】设 A 为 3 阶矩阵, P 为可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ().

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5.3.3 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, 试求 A^{2015} .

5.3.4 【2014 (3)】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$. 证明 A 与 B 相似.

5.3.5 【1999 (3)】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 且 $|A| = -1$, 又设 A^* 有特征值 λ_0 , 且属

于 λ_0 的特征向量为 $\alpha = (-1, -1, 1)^T$, 求 a, b, c 及 λ_0 的值.

5.3.6 【2007 (3)】设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 全部特征值与特征向量; (2) 求矩阵 B .

5.3.7 【2011 (2)】设 A 为秩是 2 的 3 阶实对称矩阵, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求:

(1) 矩阵 A 的所有特征值与特征向量; (2) 矩阵 A .

5.3.8 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 且已知 A 的一个特征值是 -2 , 试求:

(1) k 的值; (2) 可逆矩阵 P , 使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

5.4 深化训练详解

5.3.1 填空题

(1) 21. 提示 由题意, 令 $\varphi(x) = x^2 - x + 1$, 则矩阵 B 的 3 个特征值分别为 $\varphi(2), \varphi(-2), \varphi(1)$, 从而 $|B| = \varphi(2) \times \varphi(-2) \times \varphi(1) = 21$.

$$(2) \frac{7}{6}.$$

(3) 24. 提示 由题意, 令 $\phi(x) = \frac{1}{x} - 1$, 有 $B^{-1} - E$ 的特征值为 1, 2, 3, 4, 因此

$$|B^{-1} - E| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

(4) 4. 提示 $\text{tr}(\alpha\beta^T) = \text{tr}(\beta^T\alpha) = 1 + k$, 再相似矩阵具有相同的迹, 从而 $1 + k = 3$, 解得 $k = 2$.

$$(5) \alpha_3 = (1, 0, 1)^T. \quad (6) 0. \quad (7) -2, 2, -1. \quad (8) k = 1 \text{ 或 } k = -2.$$

5.3.2 单项选择题

(1) (A). 提示 设 x 为 B 的对应于特征值为 λ 的特征向量, 则有 $Bx = \lambda x$. 又因为 A 与 B 相似, 因此存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 因此 $P^{-1}APx = \lambda x$, 从而 $PP^{-1}APx = P\lambda x$, 即 $A(Px) = \lambda(Px)$, 即对应于特征值 λ , B 的特征向量为 x , 矩阵 A 的特征向量为 Px , 若 $P \neq E$, 则 Px 与 x 是不相等的.

(2) (C). (3) (D).

(4) (B). 提示 由于 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 均为实对称矩阵, 所以它们相似的

充分必要条件是具有相同的特征值 2, b , 0.

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 有

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ a & b-2 & a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (b-2) + 2a^2 - (b-2) + 2a^2 = 4a^2 = 0,$$

解得 $a = 0$; 又因为 $|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$, 可知

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

对任意的 b 都成立. 故选 (B).

(5) (B). 提示 因为

$$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1} \right] A \left[P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (P^{-1}AP) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3.3 由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. 当 $\lambda_1 = -1$ 时, 求解 $(A + E)x = 0$, 解得基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 求解 $(A - E)x = 0$, 解得基础解系为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则有

$$P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$A^{2015} = PA^{2015}P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^{2015} & \\ & 1^{2015} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

5.3.4 依题有

$$|A - \lambda E| = |B - \lambda E| = (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (n - \lambda),$$

所以 A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = 0$ ($n-1$ 重根). 因为 A 是实对称矩阵, 从而其相似于

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

对于矩阵 B , 当 $\lambda_2 = 0$ 时, 由于 $R(B) = 1$, 所以方程组 $(B - 0E)x = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解向量, 即 B 对应 $\lambda_2 = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 进而 B 有 n 个线性无关的特征向量, 所以 B 也相似于 A . 因此 A 相似于 B .

5.3.5 依题有, $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$, 因为 $AA^* = |A|E = -E$, 从而有 $AA^* \alpha = -\alpha = \lambda_0 A \alpha$, 即

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

整理可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 \\ \lambda_0(-5-b+3)=1, \\ \lambda_0(1+a-c)=1 \end{cases}$$

由此解出 $\lambda_0 = 1$, $a = c$, $b = -3$, 再由

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{vmatrix} = a-3 = -1,$$

解得 $a = 2$, 故 $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$, $\lambda_0 = 1$.

5.3.6 因为

$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + E\alpha_1 = \lambda_1^5\alpha_1 - 4\lambda_1^3\alpha_1 + \alpha_1 \\ &= (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1, \end{aligned}$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于 $\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1$ 的特征向量, 且 B 属于 $\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1$.

设 $\varphi(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 1$, 则 B 全部特征值为 $\varphi(1) = -2$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(-2) = 1$. 由于 B 是实对称矩阵, 属于不同特征值的特征向量是正交的, 所以属于 1 (二重根) 的特征向量与向量 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 正交, 由此得到全部的特征向量为:

$$k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = k_2(1, 1, 0)^T + k_3(0, 1, 1)^T \quad (k_2, k_3 \text{ 不全为零}).$$

$$(2) \text{ 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 因此}$$

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5.3.7 \quad (1) \text{ 令 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 由条件可知 } A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, \text{ 则 } A \text{ 的特征值为}$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, 又因为 $R(A) = 2$, 所以 A 的另一个特征值为 $\lambda_3 = 0$, 且属于 $\lambda_3 = 0$ 的特征向

量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 与 α_1, α_2 正交, 由此有方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$, 解得基础解系为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 从而 A 的属

于 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ 的所有特征向量分别为:

$$k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, k_3\alpha_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ 均不为零}).$$

(2) 显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正交向量组, 将其单位化得到正交矩阵

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{使得 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则有}$$

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5.3.8 \quad (1) \text{ 依题意, 由 } |A + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k+2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 解得 } k = 0.$$

(2) 由于 A 为对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为矩阵 A 的特征值. 而

$$(AP)^T(AP) = P^T A^T AP = P^T A^2 P,$$

取 $P=Q$, 则

$$(AP)^T(AP) = Q^T A^2 Q = A^2 = \text{diag}\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}.$$

由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(2+\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 当 $\lambda_1 = -2$ 时, 解方程组 $(A+2E)x=0$, 解得基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程组 $(A-E)x=0$, 解得基础解系 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 将

η_2, η_3 正交化, 令

$$\xi_2 = \eta_2, \quad \xi_3 = \eta_3 - \frac{[\eta_3, \xi_2]}{[\xi_2, \xi_2]} \xi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将 η_1, ξ_2 和 ξ_3 单位化, 令

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此所求的正交矩阵 P 为

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

5.5 综合提高训练

例 5.5.1 设 A 为 3 阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的 3 个不同的特征值, 对应特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令向量 $x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 x, Ax, A^2x 线性无关; (2) 若 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, 求 A 的特征值及 $|A+E|$.

(1) **证** 设 $k_1x + k_2Ax + k_3A^2x = 0$, 由已知有

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_2 A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_3 A^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0},$$

整理得

$$(k_1 + \lambda_1 k_2 + \lambda_1^2 k_3)\alpha_1 + (k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_2^2 k_3)\alpha_2 + (k_1 + \lambda_3 k_2 + \lambda_3^2 k_3)\alpha_3 = \mathbf{0},$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是对应 A 的不同特征值的特征向量, 必线性无关, 故有齐次方程组

$$\begin{cases} k_1 + \lambda_1 k_2 + \lambda_1^2 k_3 = 0 \\ k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_2^2 k_3 = 0, \\ k_1 + \lambda_3 k_2 + \lambda_3^2 k_3 = 0 \end{cases}$$

由于其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$, 所以有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故得 $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}$ 线性无关.

(2) 设 λ 是 A 特征值, 则由 $A^3\mathbf{x} = 3A\mathbf{x} - 2A^2\mathbf{x}$ 易得, λ 必满足 $\lambda^3 - 3\lambda + 2\lambda^2 = 0$, 解出 A 的特征值为 $-3, 1, 0$, 从而 $A + E$ 的特征值为 $-2, 2, 1$, 故 $|A + E| = -4$.

例 5.5.2 【2003 (1)】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}A^*P$, 求 $B + 2E$

的特征值与特征向量.

解 由题意

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

进而有

$$B = P^{-1}A^*P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

故 $B + 2E$ 特征方程为

$$|(B + 2E) - \lambda E| = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 0 & 0 \\ -2 & 7 - \lambda & -4 \\ -2 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0,$$

所以 $B + 2E$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 9$. 当 $\lambda_1 = 3$ 时, 解方程组 $(A - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所有属于 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量为 $k_1\xi_1$ ($k_1 \neq 0$); 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ 时, 解方

程组 $(A-9E)x=0$ ，系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，所有属于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ 的特征向量为 $k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ (k_2, k_3 不全为零).

例 5.5.3 设 α 与 β 均为三维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=0$ ，令 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$ ，证明 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

证 由 $\alpha^T\beta=0$ ，有 $\beta^T\alpha=(\alpha^T\beta)^T=0$ ，从而有

$$A\alpha=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\alpha=\beta, \quad A\beta=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\beta=\alpha,$$

两式相加得 $A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$ ，故 1 是 A 的特征值，对应 1 的特征向量是 $\alpha+\beta$ ；两式相减得 $A(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$ ，所以 -1 是 A 的特征值，对应 -1 的特征向量是 $\alpha-\beta$ 。又因为

$$R(A) \leq R(\alpha\beta^T) + R(\beta\alpha^T) = 1 + 1 = 2,$$

因此 A 不可逆，从而必有特征值 0。综上所述，实对称矩阵 A 有三个不同的特征值 1, -1, 0，

所以必和对角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

例 5.5.4 已知 A 与 B 均为 3 阶矩阵，满足 $AB+2B=O$ ，且 $R(B)=2$ ，其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，又齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $(1, 1, 1)^T$ 。求：(1) a 的值；(2) 可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；(3) $R(A+2E)$ ；(4) $|A+E|$ ；(5) $(A+E)^{2016}$ 。

解 (1) 利用矩阵的初等变换有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

因为 $R(B)=2$ ，可得 $a=-2$ 。

(2) 记 B 的第一列、第三列向量分别为 ξ_1, ξ_2 ，显然 ξ_1, ξ_2 线性无关。由 $AB+2B=O$ ，即 $AB=-2B$ ，有 -2 是 A 的特征值，且 ξ_1, ξ_2 为属于 -2 的特征向量。令 $\xi_3 = (1, 1, 1)^T$ ，由已知有 $A\xi_3=0=0\xi_3$ ，故 0 也是 A 的特征值，且 ξ_3 为属于 0 的特征向量。令 $P=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ，则 P 可

逆，且有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

(3) 由 A 的特征值为 $-2, -2, 0$, 有 $A+2E$ 的特征值为 $0, 0, 2$, 故 $A+2E$ 与 $\text{diag}\{0, 0, 2\}$ 相似, 因此 $R(A+2E)=1$.

(4) 由 A 的特征值为 $-2, -2, 0$, 有 $A+E$ 的特征值为 $-1, -1, 1$, 所以 $|A+E|=1$.

(5) 由 (4) 有 $P^{-1}(A+E)P = \text{diag}\{-1, -1, 1\}$, 进而有

$$(A+E)^{2016} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2016} P^{-1} = PEP^{-1} = E.$$

例 5.5.5 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量; (2) 求可逆矩阵使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 当 $a \neq 0$ 时, 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & \cdots & a \\ a & 1-\lambda & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = [1 + (n-1)a - \lambda][1 - a - \lambda]^{n-1},$$

有 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + (n-1)a$, $\lambda_2 = 1 - a$ ($n-1$ 重根). 当 $\lambda_1 = 1 + (n-1)a$ 时, 解方程组 $(A - \lambda_1 E)x = 0$, 由矩阵的初等变换有

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 E) &= \begin{pmatrix} (1-n)a & a & \cdots & a \\ a & (1-n)a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & (1-n)a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (1-n) \end{pmatrix}, \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} n & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & -n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

得到基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 属于 $\lambda_1 = 1 + (n-1)a$ 的特征向量为 $k_1 \xi_1$ ($k_1 \neq 0$). 当 $\lambda_2 = 1 - a$ 时, 解

方程组 $(A - \lambda_2 E)x = 0$, 由矩阵的初等变换有

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\xi_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 属于 $\lambda_2 = 1 - a$ 的特征向量为

$k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 + \cdots + k_n \xi_n$ ($k_2, k_3, \cdots, k_n$ 不全为零). 当 $a = 0$ 时, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, A 的特征值

为 $\lambda_1 = 1$ (n 重根), 任意的非零列向量都是 A 的特征向量.

(2) 由 (1) 有, 当 $a \neq 0$ 时, A 有 n 个线性无关的列向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \xi_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

构造矩阵 $P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 + (n-1)a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix},$$

当 $a = 0$ 时, $A = E$, 对任意的可逆矩阵 P 都有 $P^{-1}AP = E$.

第6章 二次型

6.1 知识要点

6.1.1 二次型及其矩阵表示

n 个变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n 元二次型. 当系数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 为实数时, 称 f 为实二次型.

若记 $a_{ji} = a_{ij}$ ($i < j$), 则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$, 二次型可写为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

对称矩阵 $\mathbf{A}$ 称为二次型 f 的矩阵, 其主对角线元素 a_{ii} ($i=1, 2, \dots, n$) 等于平方项 x_i^2 的系数, 其他元素 a_{ij} ($i \neq j$) 等于交叉项 x_ix_j 系数的一半. 矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $R(\mathbf{A})$ 称为二次型 f 的秩.

二次型 f 与对称阵 $\mathbf{A}$ 之间存在一一对应关系, 即任给一个二次型 f , 就唯一地确定一个对称阵 $\mathbf{A}$; 反之, 亦然.

6.1.2 二次型的标准形与规范形

从变元 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 到变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个线性变换可表示为

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \quad \quad \quad \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

该线性变换的矩阵形式为 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 其中的

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

若矩阵 $\mathbf{C}$ 为可逆矩阵, 则称线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 为**可逆变换**; 若 $\mathbf{C}$ 为正交矩阵, 称线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 为**正交变换**.

将线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 代入二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 中, 有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y} \stackrel{\text{记为}}{=} \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(\mathbf{y}),$$

其中, $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$. 可以证明: 当 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 为可逆的线性变换时, $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ 仍为二次型, 并且 $\mathbf{B}$ 为该二次型的矩阵.

n 元二次型 f 经可逆的线性变换可化为只含平方项的形式:

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

称其为二次型 f 的**标准形**, 也可以经可逆的线性变换化为更简单的列式:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

称其为二次型 f 的**规范形**. 其中的 r 为二次型 f 的秩.

注 二次型的标准形不唯一, 它与可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 有关. 规范形是二次型的一个特殊的标准形.

6.1.3 矩阵的合同

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$, 若存在可逆矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$, 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **合同**. 矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同关系是一种等价关系, 具有下列性质:

- (1) **反身性** $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}$ 合同;
- (2) **对称性** 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同, 则 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 合同;
- (3) **传递性** 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同, $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 合同, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{C}$ 合同.

在二次型的化简中, 线性变换前后两个二次型的矩阵是合同的. 将二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 采用可逆的线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ 化为标准形, 等同于用矩阵 $\mathbf{C}$ 使 $\mathbf{A}$ 合同于对角阵 $\mathbf{A}$, 即 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{A}$.

矩阵合同的性质:

- (1) 设矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同, 若 $\mathbf{A}$ 为对称阵, 则 $\mathbf{B}$ 也为对称阵;
- (2) 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的秩相同, 即 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$;
- (3) 矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同的充分必要条件为对矩阵 $\mathbf{A}$ 的行和列实施相同的初等变换变成 $\mathbf{B}$.

6.1.4 利用正交变换化二次型为标准形

设 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵, 则存在正交阵 $\mathbf{P}$, 使得

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为二次型矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值. 即正交阵 $\mathbf{P}$ 使矩阵 $\mathbf{A}$ 与对角阵 $\mathbf{A}$ 既相似又合同. 相应地, 对于二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 总有正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 使

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

利用正交变换化二次型为标准形的步骤如下:

设 n 元二次型为 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$).

(1) 求解矩阵 $\mathbf{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 相应的重数记为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$.

(2) 对每个特征值 λ_i 求解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 并将其正交化、单位化得到 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{i,r_i}$.

(3) 以向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{i,r_i}$ ($i=1, 2, \cdots, s$) 为列向量构成矩阵 $\mathbf{P}$, 则 $\mathbf{P}$ 为正交矩阵, 变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ 为正交变换, 在此变换下二次型 f 的标准型为

$$f(\mathbf{P} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 (这里可能有重根).

6.1.5 用配方法化二次型成标准型

除了使用正交变换方法外, 还有一些其他的方法将二次型化为标准形, 如配方法、初等变换法等. 这里我们只讨论利用配方法化二次型为标准型. 配方法的使用分为以下两种情形.

(1) 二次型中同时含有平方项和非平方项, 如 $f = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$. 对于此种类型, 首先对含有平方项的第一个变元 (如 x_1) 进行完全平方, 使得余下的项中不再含有这个变元, 然后再对含有平方项的第二个变元 (如 x_2) 进行类似操作, 以此类推. 注意每次只对一个变元进行配方.

(2) 二次型中不含有平方项, 如 $f = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$. 对于此种类型, 首先需要使用平方差公式制造平方项, 然后转化为(1). 如本题可以作变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \text{ 这样 } f \text{ 可化为 } f = y_1^2 - \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$y_2^2 + 6y_1y_3 - 10y_2y_3.$$

6.1.6 惯性定理

前面我们提到二次型的标准形是不唯一的, 但标准形中所含有的项数是确定的, 并且标准形中正系数的个数也是确定的 (从而负系数的个数也是确定的), 与所作可逆变换无关, 这个结论称为**惯性定理**, 即对于秩为 r 的 n 元二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 存在两个可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{z}$, 使得

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2, \quad (\lambda_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, k)$$

及

$$f = d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 + \cdots + d_s z_s^2, \quad (d_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, s),$$

则 $k=s=r$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数与 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 中正数的个数相等.

二次型标准形中的正系数的个数称为**正惯性指数**, 负系数的个数称为**负惯性指数**. 若 n 元二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的秩为 r , 正惯性指数为 p , 则 f 的规范形可以表示为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

类似地, 对于 n 阶实对称矩阵 A , 存在可逆阵 P 和 Q , 使得

$$P^T A P = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O_{n-r} \end{pmatrix}, \quad Q^T A Q = \begin{pmatrix} E_q & & \\ & -E_{r-q} & \\ & & O_{n-r} \end{pmatrix},$$

则 $p=q$. 因此两个 n 阶实对称阵合同的充要条件是它们的秩相等、正惯性指数也相等.

6.1.7 正定二次型与正定矩阵

n 元二次型 $f = x^T A x$, 若对任意的 $x \neq 0$ 都有 $x^T A x > 0$ (< 0), 则称 $f = x^T A x$ 为正定 (负定) 二次型, 并称对称阵 A 为正定矩阵 (负定矩阵); 若对任意的 $x \neq 0$ 都有 $x^T A x \geq 0$ (≤ 0), 则称 $f = x^T A x$ 为半正定 (半负定) 二次型, 并称对称阵 A 为半正定矩阵 (半负定矩阵).

正定二次型的一些常用结论:

- (1) n 元二次型 $f = x^T A x$ 为正定的充要条件是它的正惯性指数为 n ;
- (2) 正定二次型经可逆变换得到的二次型仍为正定的;
- (3) 对称矩阵 A 正定的充要条件是 A 的特征值全为正数;
- (4) 对称阵 A 正定的充要条件是 A 与单位阵 E 合同, 即存在可逆阵 C , 使得 $A = C^T E C = C^T C$.

半正定二次型的一些常用结论:

- (1) 秩为 r 的 n 元二次型 $f = x^T A x$ 为半正定的充要条件是正惯性指数 $p = r < n$;
- (2) n 阶对称阵 A 半正定的充要条件是 A 与 $\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}$ 合同 ($r = R(A) < n$);
- (3) n 阶对称阵 A 半正定的充要条件是 A 的特征值大于或等于零.

6.1.8 顺序主子式

设 A 为 n 阶对称矩阵, 子式 $D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} (i=1, 2, \cdots, n)$ 称为矩阵 A 的顺序主子

式.

n 阶对称阵 A 正定的充要条件是 A 的顺序主子式 $D_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 均大于 0; A 负定的充要条件是 A 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正, 即 $(-1)^i D_i > 0, i=1, 2, \cdots, n$.

6.2 典型例题分析

6.2.1 题型一、二次型的基本概念问题

例 6.2.1 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2$ 的矩阵.

解 由题意

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此二次型对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

例 6.2.2 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的秩.

解 由题意, 对二次型矩阵 A 进行初等变换有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 $R(A) = 2$, 故二次型 f 的秩为 2.

6.2.2 题型二、将二次型化为标准型

例 6.2.3 【2011 (2)】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为_____.

解法 1 由配方法

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2, \end{aligned}$$

故令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

从而有可逆的线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

使得二次型化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2$, 所以 f 正惯性指数为 2.

解法 2 二次型矩阵 A 的特征方程为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$, 因此 f 正惯性指数为 2.

例 6.2.4 【2012 (1, 2, 3)】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (A^T A) \mathbf{x}$ 的

秩为 2. 求: (1) 实数 a 的值; (2) 正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 f 化成标准形.

解 (1) 因为 $R(A) = R(A^T A) = 2$, 对 A 作初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

故得 $a = -1$;

(2) 由于

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda),$$

所以 B 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$. 当 $\lambda_1 = 2$ 时, 求解方程组 $(B - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 基础解

系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 单位化为 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 当 $\lambda_2 = 6$ 时, 求解方程组 $(B - 6E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 单位化为 $\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; 当 $\lambda_3 = 0$ 时, 求解方程组 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单

位化为 $\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 取

$$\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵, 正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 f 化为标准形 $f = 2y_1^2 + 6y_2^2$.

6.2.3 题型三、二次型的规范形的求解

例 6.2.5 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$$

化成规范形, 并写出所用的可逆线性变换.

解 利用配方法有

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3x_4^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3\left(x_4^2 + 2x_2x_4 - \frac{2}{3}x_3x_4 + x_2^2 + \frac{1}{9}x_3^2 - \frac{2}{3}x_2x_3\right) + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + \frac{1}{3}x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 + 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 - 3\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4\right)^2, \end{aligned}$$

令线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 - y_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_3 + \frac{3}{2}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases},$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

此时 $f = y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$. 再作线性变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix},$$

其规范形为 $f = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$, 线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}.$$

6.2.4 题型四、矩阵的合同、相似问题

例 6.2.6 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 证明矩阵 A 与 B 合同, 但 A 与 B 不

相似.

解 由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. 矩阵 B 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 因此矩阵 A 与 B 不相似. 又因为 $R(A) = R(B) = 3$, 矩阵 A 与 B 正惯性指数均为 0, 因此 A 与 B 合同.

注 两个同阶对称矩阵合同的充要条件为二者具有相同的秩和相同的正惯性指数; 两个同阶对称矩阵相似的充要条件为二者具有相同的特征值及重数.

例 6.2.7 【2008 (3)】 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵与 P 合同的是 ().

(A) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; (B) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; (C) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (D) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 由于

$$|P - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda),$$

因此矩阵 P 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 从而 $R(P) = 2$, 正惯性指数为 1. 计算四个选项中矩阵的特征多项式有

$$|A - \lambda E| = (1+\lambda)(3+\lambda); \quad |B - \lambda E| = (1-\lambda)(3-\lambda);$$

$$|C - \lambda E| = (1-\lambda)(3-\lambda); \quad |D - \lambda E| = (-1-\lambda)(3-\lambda).$$

从上述四个矩阵的特征多项式可以看到, 只有矩阵 D 的秩 $R(D) = 2$, 正惯性指数为 1, 因此答案选 (D).

6.2.5 题型五、二次型（或二次型矩阵）正定性的判定

判定矩阵是否正定，应先检验该矩阵是否对称. 二次型（或对称矩阵）正定性（或负定性）的判定，常用的方法有顺序主子式法、定义法、特征值法及矩阵的合同法等.

例 6.2.8 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ，判别矩阵 A 的正定性.

解 由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda),$$

有 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ ，因此 A 是负定的.

注 本例使用了特征值法来判定矩阵的正定性（或负定性）. 一般来说，使用顺序主子式方法只需计算几个行列式的值，相对来说，比求解特征多项式 $|A - \lambda E| = 0$ 要简单些.

例 6.2.9 若 n 阶矩阵 A 和 B 均为正定矩阵，判定 $A+B$ 的正定性.

解 由于 A 和 B 均为正定矩阵，因此 A 和 B 均为对称矩阵，故 $A+B$ 也为对称矩阵. 而由 A 和 B 的正定性，对任意的 n 维向量 $x \neq 0$ ，均有 $x^T A x > 0$ ， $x^T B x > 0$ ，因此对任意的 $x \neq 0$ ，有

$$x^T (A+B) x = x^T A x + x^T B x > 0,$$

故 $A+B$ 为正定矩阵.

注 (1) 一般的，对于任意的正数 k_1, k_2 ，若 n 阶矩阵 A 和 B 均为正定矩阵，则 $k_1 A + k_2 B$ 也为正定矩阵.

(2) 本例使用了正定性的定义来判定二次型（或二次型矩阵）的正定性.

例 6.2.10 若 A 为正定矩阵，讨论逆矩阵 A^{-1} 的正定性.

解法 1 由 A 正定，有 $|A| > 0$ ，从而 A^{-1} 存在. 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，由于 A 正定，有 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 全大于零，故 A^{-1} 的全部特征值 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ 全大于零，因此 A^{-1} 正定.

解法 2 由 A 正定，有 A 与单位阵 E 合同，即存在可逆阵 C ，使得 $A = C^T E C$. 从而有

$$A^{-1} = (C^T E C)^{-1} = C^{-1} E (C^T)^{-1} = C^{-1} E (C^{-1})^T = [(C^{-1})^T]^T E (C^{-1})^T,$$

即 A^{-1} 与单位阵 E 合同，故 A^{-1} 正定.

注 本例使用了特征值法和矩阵的合同法来判定矩阵的正定性.

6.2.6 题型六、二次型的参数求解问题

例 6.2.11 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的秩为 2，求常数 a 的值.

解 设二次型矩阵为 A ，由矩阵的初等变换有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & a-2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & a-5 & 0 \end{pmatrix},$$

由题意 $R(A)=2$ ，因此 $a=5$ 。

例 6.2.12 【2009 (2)】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ，

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；(2) 若二次型 f 的规范性为 $y_1^2 + y_2^2$ ，求 a 的值。

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$ ，其特征方程为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)[(a+1)-\lambda][(a-2)-\lambda] = 0,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$ 。

(2) 因为 f 的规范性为 $y_1^2 + y_2^2$ ，所以 A 的特征值有两个正数，一个为零。又因为 $a-2 < a < a+1$ ，所以 $a=2$ 。

6.2.7 题型七、二次型（二次型矩阵）的证明问题

例 6.2.13 设 A 为 n 阶正定矩阵，证明 $|A+E| > 1$ 。

证 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1$ 。由于 A 正定，因此 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 全部大于零，故 $A+E$ 的特征值全部大于 1，因此

$$|A+E| = (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1) > 1.$$

例 6.2.14 若 n 阶对称矩阵 A 满足 $A^2 - 4A + 3E = 0$ ，则 A 为正定矩阵。

证 由题意，矩阵 A 的特征值 λ 满足方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ，解得 $\lambda_1 = 1$ 或 $\lambda_2 = 3$ ，即矩阵 A 的特征值全部为正，因此 A 为正定矩阵。

6.3 深化训练

6.3.1 填空题

(1) 3 阶实对称矩阵 A 满足方程 $A^3 + 7A^2 + 16A + 10E = O$ ，则二次型 $x^T Ax$ 经正交变换可化成标准形为_____。

(2) 【2011 (1)】 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$ ，则 $a =$ _____。

(3) 【2014 (1, 2, 3)】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围为_____。

(4) 已知 n 元二次型 $f = x^T Ax$ 正定，其正惯性指数为 p ，秩为 r ，则 r, p, n 三者间的关系为_____。

(5) 若 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的范围为_____。

(6) 设 3 元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$ ，则二次型矩阵 $A =$ _____。

6.3.2 单项选择题

(1) 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + kx_2^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2$, 当 $k = (\quad)$ 时, 其秩为 2.

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

(2) 【2007 (1, 2, 3)】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B $(\quad)$.

- (A) 合同且相似; (B) 合同但不相似;
(C) 不合同但相似; (D) 既不合同也不相似.

(3) 与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 合同的矩阵是 $(\quad)$.

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) 【2016 (1, 2, 3)】设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 $(\quad)$.

- (A) $a > 1$; (B) $a < -2$;
(C) $-2 < a < 1$; (D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

(5) 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 为正定的充分必要条件为 $(\quad)$.

- (A) $|\mathbf{A}| > 0$;
(B) 存在 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$;
(C) 负惯性指数为零;
(D) 存在非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 使得 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.

(6) n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵的充分必要条件为 $(\quad)$.

- (A) $\mathbf{A}$ 的所有 k 阶子式为正; (B) $\mathbf{A}$ 的所有特征值非负;
(C) $\mathbf{A}^{-1}$ 为正定矩阵; (D) $R(\mathbf{A}) = n$.

(7) 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为 n 阶实对称矩阵, 且都正定, 那么 $\mathbf{AB}$ 是 $(\quad)$.

- (A) 实对称矩阵; (B) 正定矩阵; (C) 可逆矩阵; (D) 正交矩阵.

6.3.3 【2003 (3)】设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$, 这里 $b > 0$, 且二次型的矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值; (2) 用正交变换将 f 化成标准形, 写出正交变换和对应的正交矩阵.

6.3.4 【1998 (1, 3)】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B = (kE + A)^2$, 其中 k 是实数, E 是

单位矩阵, 求对角矩阵 Λ , 使得 B 与 Λ 相似, 并求 k 为何值时, B 为正定矩阵.

6.3.5 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 均为 n 阶对称矩阵, 证明 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同的充分必要条件是二次型 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 与二次型 $g = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ 具有相同的秩与正惯性指数.

6.4 深化训练详解

6.3.1 填空题

(1) $2y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$. 提示 由题意, 设 λ 为 A 的特征值, 则 λ 满足方程

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 5) = 0,$$

解得特征值为 $2, -1, -5$.

(2) -1 . 提示 由题意, 二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz$ 可经正交变换

化为 $f = y_1^2 + 4z_1^2$, 从而该二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 有特征值 $1, 4, 0$, 故

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a - 1 = 1 \times 4 \times 0 = 0,$$

由此解得 $a = -1$.

(3) $[-2, 2]$. 提示 由配方法有

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + (4 - a^2)x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 4x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$

由于负惯性指数为 1, 所以 $4 - a^2 \geq 0$, 所以 a 的取值范围是 $[-2, 2]$.

(4) $r = p = n$. (5) $-4 < t < 4$.

(6) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3)$. 提示 由于

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

注意到二次型矩阵为对称矩阵, 因此二次型矩阵

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3).$$

6.3.2 单项选择题

(1) (B). 提示 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) (B). 提示 由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2,$$

可得矩阵 A 的特征值为 $3, 3, 0$ ，而 B 的特征值为 $1, 1, 0$ ，故 A 与 B 合同，而 $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$ ，则 A 与 B 不相似。

(3) (B). 提示 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda),$$

有 A 的特征值为 $1, 2, -2$ 。

(4) (C). 提示 设二次型矩阵为 A ，则 A 的特征方程为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = [(a+2)-\lambda][(a-1)-\lambda]^2 = 0,$$

解得特征值为 $a+2, a-1, a-1$ 。又因为其正、负惯性指数分别为 $1, 2$ ，则有 $a+2 > 0$ ， $a-1 < 0$ ，即 $-2 < a < 1$ 。

(5) (B). 提示 A, C, D 均为必要条件；当 $A = C^T C$ 时，对任意 $x \neq 0$ ，有

$$f = x^T A x = x^T (C^T C) x = (Cx)^T (Cx) > 0.$$

(6) (C). 提示 见例 6.2.10。

(7) C.

6.3.3 (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ，由题意有 $\begin{cases} 1 = \text{tr}(A) = a + 2 - 2 \\ -12 = |A| = -4a - 2b^2 \end{cases}$ ，解得

$a = 1, b = 2$ 。

(2) 由于 A 特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3+\lambda),$$

从而 A 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$ 。

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时，解方程组 $(A - 2E)x = 0$ ，得基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (η_1, η_2 恰巧正

交)，将其规范化得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ；

当 $\lambda_3 = -3$ 时，解方程组 $(A + 3E)x = 0$ ，得基础解系为 $\eta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，将其规范化得

$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，令

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

则 P 为正交矩阵, 正交变换为 $x = Py$, 且二次型的标准形为 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

6.3.4 由于

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2,$$

有 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$. 因为 A 是实对称矩阵, 故必存在正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而有 $B = (kE + A)^2$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = (k+2)^2, \lambda_3 = k^2$, 并且

$$P^T B P = P^{-1} B P = \begin{pmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix},$$

由此得对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}.$$

再由 B 与 A 合同, 有当 $k \neq -2$, 且 $k \neq 0$ 时, B 为正定矩阵.

6.3.5 必要性. 若 A 与 B 合同, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $B = P^T A P$. 则

$$g = y^T B y = y^T (P^T A P) y = (y^T P^T) A (P y) = (P y)^T A (P y),$$

即二次型 $f = x^T A x$ 经过可逆线性变换 $x = P y$ 化为 $g = y^T B y$, 根据惯性定理, f 与 g 具有相同的秩与正惯性指数.

充分性. 若 $f = x^T A x$ 与 $g = y^T B y$ 具有相同的秩与正惯性指数, 根据惯性定理, 经过线性变换后 f 与 g 具有相同的规范形. 即存在可逆矩阵线性变换 $x = C z$ 和 $y = D z$, 使得

$$f = x^T A x = (C z)^T A C z = z^T C^T A C z,$$

$$g = y^T B y = (D z)^T B D z = z^T D^T B D z,$$

且对任意的 n 维向量 z , 都有 $z^T C^T A C z = z^T D^T B D z$. 故有 $C^T A C = D^T B D$. 由于 D 可逆, 因此

$$B = (D^T)^{-1} C^T A C D^{-1} = (D^{-1})^T C^T A C D^{-1} = (C D^{-1})^T A C D^{-1},$$

由于 $C D^{-1}$ 可逆, 因此矩阵 A 与 B 合同, 结论得证.

6.5 综合提高训练

例 6.5.1 【2004 (3)】二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2$ 的秩为_____.

解 由于

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3, \end{aligned}$$

有二次型矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故二次型的秩为 2.

例 6.5.2 【2015 (1, 3)】设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. 若 $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 ().

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

解 由线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 得,

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

其中 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 因为

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

由线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, 得

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \\ &= 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

故选 (A).

例 6.5.3 【2001 (3)】设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为实对称矩阵, 且 $R(A) = n$, A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 代数余子式, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j$.

- (1) 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 把 $f(\mathbf{x})$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵为 A^{-1} ;
 (2) 二次型 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 与 $f(\mathbf{x})$ 的规范形是否相同? 并说明理由.

解 (1) 由题意, 二次型的矩阵形式为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 及 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$, 从而 A^{-1} 为对称矩阵, 因此二次型的矩阵为 A^{-1} .

(2) 由于 $A^{-1} = A^{-1} A A^{-1}$, 及 A^{-1} 为对称矩阵, 从而 $A^{-1} = (A^{-1})^T A A^{-1}$, 因此有 A 与 A^{-1} 相似, 所以 $g(\mathbf{x})$ 与 $f(\mathbf{x})$ 的规范形相同.

例 6.5.4 【1999 (1, 3)】设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 矩阵 $B = \lambda E + A^T A$, 试证: 当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

证 因为 $B^T = \lambda E + A^T A = B$, 所以 B 为实对称矩阵. 对于任意非零的实向量 $\mathbf{x}$, 有

$$\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\lambda E + A^T A) \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} + (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}),$$

这里 $\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} > 0$, $(A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) \geq 0$, 所以 $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} > 0$, 即矩阵 B 为正定矩阵.

例 6.5.5 【2000 (1, 3)】设 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$$

其中 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为实数, 试问: 当 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足什么条件时, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型.

解 由题意, 对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$. 并且 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ x_2 + a_2 x_3 = 0 \\ \cdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0 \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases}$$

有解. 由于方程组只有零解的充分必要条件为其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0,$$

所以当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$ 时, 对任意的不全为零的 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 有 $x_1 + a_1 x_2, x_2 + a_2 x_3, \dots, x_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n + a_n x_1$ 不全为零, 得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, 所以 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型.

例 6.5.6 【2005 (1, 3)】设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A 、 B 分别为 m 阶、 n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$ 矩阵.

(1) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$;

(2) 利用 (1) 的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

解 (1) 由题意,

$$\begin{aligned} P^T D P &= \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & C \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

(2) $B - C^T A^{-1} C$ 为正定矩阵, 这是因为由 (1) 可知 D 与 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}$ 合同, 再由已知 D 为正定矩阵, 从而 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 因此对任意的 $m+n$ 维非零向量 x , 均有 $x^T \begin{pmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix} x > 0$. 特别地将 x 的前 m 维分量全取为零, 则有对任意的 n 维非零向量 y , 有 $y^T (B - C^T A^{-1} C) y > 0$, 因此 $B - C^T A^{-1} C$ 为正定矩阵.

例 6.5.7 【2013 (1, 2, 3)】设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2,$$

$$\text{记 } \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明: f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(1) **证** 设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 由于

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ &= 2 \left[(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] + \left[(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2 \left[(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] + \left[(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$= 2\mathbf{x}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{x},$$

所以 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T$.

(2) 设 $\mathbf{A} = 2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T$, 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

于是 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. 又因为

$$R(\mathbf{A}) = R(2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T) \leqslant R(2\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T) + R(\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T) = 2,$$

所以 $R(\mathbf{A}) = 2$, 得 $\lambda_3 = 0$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

2013 年考研试题线性代数考题

1. 【2013 (1, 3)】 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则 ().

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价;
- (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价;
- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价;
- (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

解 由题意记 $B=(b_{ij})_{n \times n}$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $C=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, 由 $AB=C$ 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) (b_{ij})_{n \times n} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),$$

即 A 的列向量可以线性表示 C 的列向量组, B 为系数矩阵. 再由 B 可逆, 有 $A=CB^{-1}$, 类似地有 C 的列向量可以表示 A 的列向量组, B^{-1} 为系数矩阵. 从而两个向量组等价, 因此本题选择 B.

2. 【2013 (1, 3)】 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ().

- (A) $a=0, b=2$; (B) $a=0, b$ 为任意常数;
- (C) $a=2, b=0$; (D) $a=2, b$ 为任意常数.

解 由于两个矩阵均为对称矩阵, 因此它们相似的充分必要条件为具有相同的特征值, 而当 $a=0$ 时, 两个矩阵的特征多项式均为 $f(\lambda)=\lambda^3-(2+b)\lambda^3+2b\lambda$, 故本题选 B.

3. 【2013 (1, 3)】 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零方阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ ($i, j=1, 2, 3$), 则 $|A|=\underline{\hspace{2cm}}$.

解 由题意 $A=(a_{ij})$ 为非零方阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 由 $a_{ij}=-A_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$),

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2 \neq 0,$$

及

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-A^T,$$

从而 $|AA^*|=|-AA^T|=(-1)^3|A|^2=-|A|^2$, 再由 $AA^*=|A|E$, 有 $|AA^*|=|A|^3$, 故 $|A|=-1$.

4. 【2013 (1, 3)】 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得

$AC-CA=B$, 并求所有矩阵 C .

解 由题意, 设 $C=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $AC-CA=B$, 整理有

$$\begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases},$$

即若矩阵 $\mathbf{C}$ 存在, 则方程组有解, 而

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right),$$

因此可得 $a = -1, b = 0$, 并且此时

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

返回方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases},$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 则其全部解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + c_1 + c_2 \\ x_2 = -c_1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases},$$

其中 c_1, c_2 为任意实数, 且 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1+c_1+c_2 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

5. 【2013 (1, 3)】设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2,$$

记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明: f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

解 (1) 由题意, 由矩阵的运算有

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\
 &= 2(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1, x_2, x_3) \left(2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

故二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(2) 由于

$$(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha,$$

$$(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta,$$

从而 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 有特征值 2, 1. 由于

$$R(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq R(2\alpha\alpha^T) + R(\beta\beta^T) = 2 < 3,$$

即 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 不可逆, 其有特征值 0, 又因为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 为对称矩阵, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

2014 年考研试题线性代数考题

1. 【2014 (1, 3)】行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\quad)$.

- (A) $(ad-bc)^2$; (B) $-(ad-bc)^2$; (C) $a^2d^2-b^2c^2$; (D) $b^2c^2-a^2d^2$.

解 由于

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2,$$

故本题选 B.

2. 【2014 (1, 3)】设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ().

- (A) 必要非充分条件; (B) 充分非必要条件;
(C) 充分必要条件; (D) 既非充分也非必要条件.

解 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{\text{初等变换}} (\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3, \alpha_3),$$

及初等变换不改变矩阵秩, 有 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 即 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组线性无关的必要条件. 反之不真, 如令 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = 0$ 即可. 故本题选 A.

3. 【2014 (1, 3)】设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

解 由题意, 由配方法有

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + (ax_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - (ax_3)^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + 4x_3^2 - (ax_3)^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$

从而 $(4 - a^2) \geq 0$, 故 a 的取值范围是 $[-2, 2]$.

4. 【2014 (1, 3)】设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系; (2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

解 (1) 由矩阵的初等变换有

$$\begin{aligned}
 (A E) &= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right) \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

返回分别与 $Ax=0$, $Ax=\varepsilon_1$, $Ax=\varepsilon_2$, $Ax=\varepsilon_3$ 同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = -1 + 2x_4 \\ x_3 = -1 + 3x_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 6 - x_4 \\ x_2 = -3 + 2x_4 \\ x_3 = -4 + 3x_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -1 - x_4 \\ x_2 = 1 + 2x_4 \\ x_3 = 1 + 3x_4 \end{cases},$$

从而令 $x_4=1$, 有 $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi = (-1, 2, 3, 1)^T$.

(2) 由 (1) 可得

$Ax=\varepsilon_1$ 的通解为 $\eta_1 = (2-k_1, -1+2k_1, -1+3k_1, k_1)^T$, $k_1 \in \mathbb{R}$,

$Ax=\varepsilon_2$ 的通解为 $\eta_2 = (6-k_2, -3+2k_2, -4+3k_2, k_2)^T$, $k_2 \in \mathbb{R}$,

$Ax=\varepsilon_3$ 的通解为 $\eta_3 = (-1-k_3, 1+2k_3, 1+3k_3, k_3)^T$, $k_3 \in \mathbb{R}$,

因此满足 $AB=E$ 的所有矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

5. 【2014 (1, 3)】证明 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 相似.

证 由于

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - A| = \lambda^n - n\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda - n),$$

故 A, B 具有相同的特征值 0 ($n-1$ 重) 及 n . 由于 A 为对称矩阵, 则其必相似于对角矩阵 $\text{diag}(n, 0, \cdots, 0)$. 对于 B , 当特征值为 0 时, 由于 $r(0E - B) = r(B) = 1$, 故属于特征值 0 的线性无关的特征向量有 $n-1$ 个, 故 B 也能相似于对角矩阵 $\text{diag}(n, 0, \cdots, 0)$. 由相似的传递性有 A 与 B 相似.

2015 年考研试题线性代数考题

1. 【2015(1,3)】设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$

有无穷多解的充分必要条件为 ().

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$; (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$; (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$; (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

解 由于

$$(Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{pmatrix},$$

$Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ d^2-3d+2=0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a=1, 2 \\ d=1, 2 \end{cases}$, 故 D 正确.

2. 【2015 (1, 3)】设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 ().

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$; (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

解 由题, 2, 1, -1 为二次型矩阵的三个特征值, 再由 P 的构造方式有 e_1, e_2, e_3 为分别属于三个特征值的特征向量, 从而若令 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则在变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 故本题选 A.

3. 【2015 (1)】 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 原式 = $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 1+2 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \frac{1}{2}+1+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+1+2 \end{vmatrix} = 2^{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \cdots + 1 + 2 \right) = 2^{n+1} - 2.$

4. 【2015 (3)】设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, -2, 1, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由题意 B 矩阵的 3 个特征值为 $2^2 - 2 + 1 = 3$, $(-2)^2 - (-2) + 1 = 7$, $1^2 - 1 + 1 = 1$, 故 $|B| = 3 \times 7 \times 1 = 21$.

5. 【2015 (1)】 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(1) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 R^3 的一个基;

(2) k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

解 (1) 由题意

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 故向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 R^3 的一个基.

(2) 设

$$\xi = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

因此

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \left(E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

因此

$$\left(E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等变换,

$$E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2k & 0 & -k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

因此 $k=0$ 时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同. 此时,

$$E - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c \end{cases},$$

因此 $\xi = -c\alpha_1 + c\alpha_3$, 其中 c 为任意实数.

6. 【2015 (3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

解 (1) 因为 $A^3 = O$, 有 $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0$, 解得 $a = 0$.

(2) 由已知 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 整理有

$$X - XA^2 - A(X - XA^2) = E,$$

从而

$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = (E - A^2 - A)^{-1},$$

再由

$$(E - A^2 - A | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right),$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. 【2015 (1, 3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a, b 的值; (2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1) 由于相似矩阵具有相同的迹、相同的行列式, 从而有

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \\ |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}.$$

(2) 由 (1) 有

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0,$$

故 $\mathbf{B}$ 有特征值 $\lambda_1=1$ (2重), $\lambda_2=5$, 从而 $\mathbf{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1$ (2重), $\lambda_2=5$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 代入 $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有属于 1 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1=5$ 时, 代入 $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$5\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

有属于 5 的线性无关的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

令 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.

2016 年考研试题线性代数考题

1. 【2016 (1, 3)】 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ().

- (A) A^T 与 B^T 相似; (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似;
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似; (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

解 利用排除法. 由 A 与 B 相似可知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则

$$(P^{-1}AP)^T = B^T \Rightarrow P^T A^T (P^T)^{-1} = B^T \Rightarrow A^T \sim B^T,$$

即 A^T 与 B^T 相似, 故 (A) 不选; 又因为

$$(P^{-1}AP)^{-1} = B^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = B^{-1} \Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1},$$

即 A^{-1} 与 B^{-1} 相似, 故 (B) 不选; 又因为

$$P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1} \Rightarrow A + A^{-1} \sim B + B^{-1},$$

即 $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似, 故 (D) 不选, 从而 (C) 为正确选项.

2. 【2016 (1)】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 ().

- (A) 单叶双曲面; (B) 双叶双曲面; (C) 椭球面; (D) 柱面.

解 二次型对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5),$$

从而特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$, 故二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 从而二次型表示双叶双曲面, 正确选项为 B.

3. 【2016 (3)】 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则 ().

- (A) $a > 1$; (B) $a < -2$; (C) $-2 < a < 1$; (D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

解 可以利用特殊值法. 当 $a = 0$ 时, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$, 其矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

由此计算出特征值为 2, -1, -1, 满足题目已知条件, 故 $a = 0$ 成立, 因此 C 为正确选项.

4. 【2016 (1, 3)】 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 根据行列式的性质, 有

$$\text{原式} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

5. 【2016 (1)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$, 当 a 为何值时, 方程 $AX = B$

无解, 有无穷多解? 在有解时, 求此方程的解.

解 由于方程 $AX = B$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$, 并且

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1),$$

从而当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, $AX = B$ 有唯一解

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 + \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $a = -2$ 时, 由于

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $AX = B$ 无解; 当 $a = 1$ 时,

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时 $AX = B$ 有无穷多解, 并且方程组的通解为

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

6. 【2016 (3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

(1) 求 a 的值; (2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

解 (1) 由方程组 $Ax = \beta$ 无解, 可知 $R(A) \neq R(A, \beta)$, 故

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $a=0$ 或 $a=2$. 再由当 $a=0$ 时 $R(A) \neq R(A, \beta)$, 当 $a=2$ 时 $R(A) = R(A, \beta)$, 故 $a=0$.

$$(2) \text{ 当 } a=0 \text{ 时, } A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ 故}$$

$$(A^T A, A^T \beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

因此, 方程组 $A^T A x = A^T \beta$ 的通解为

$$x = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为任意实数}).$$

$$7. \text{【2016 (1, 3)】} \text{ 已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A^{99} ;

(2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

解 (1) 由 $|\lambda E - A| = 0$, 解得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$, 再代入方程 $(\lambda E - A)x = 0$ 求出对应的特征向量依次为

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \text{ 整理可得 } A = P\Lambda P^{-1},$$

从而

$$A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $B^2 = BA$, 易得 $B^{100} = BA^{99}$, 从而有

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) A^{99} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此

$$\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2, \quad \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2, \quad \beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2.$$

2017 年考研试题线性代数考题

1. 【2017 (1, 3)】 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 ().

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆; (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆;
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆; (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

解 由题意, $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的 n 阶对称矩阵, 再由 $\text{tr}(\alpha\alpha^T) = \text{tr}(\alpha^T\alpha) = 1$, 有 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 0, 1, 并且 0 为 $n-1$ 重特征值. 进而矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 有特征值 0, 故 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. 本题选 A.

2. 【2017 (1, 3)】 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则下列结

论正确的是 ().

- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似; (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似;
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似; (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

解 由题意, 由于

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0,$$

可得 A 与 B 的特征值均为 2, 2, 1. 对于特征值 2, 由于 $R(2E - A) = 1$, 有 $(2E - A)x = 0$ 的基础解系中有两个向量, 故 A 与对角阵 C 相似; 再由 $R(2E - B) = 2$, 有 $(2E - B)x = 0$ 的基础解系中只有一个向量, 所以 B 不能与 C 相似. 本题选 B.

3. 【2017 (1, 3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量

组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为_____.

解 由题意, 由三维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 有矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 再由

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

可知, $R(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = R(A)$. 由矩阵的初等变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $R(A) = 2$, 故 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 2.

4. 【2017 (2)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____.

解 由题意, 并结合特征值与特征向量的定义有

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

可解得 $a = -1$.

5. 【2017 (1, 2, 3)】设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1) 证明 $R(A) = 2$; (2) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

(1) 证 由题意, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 有 $R(A) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq 2$, 从而矩阵 A 不可逆, 故 A 有特征值 0. 设 A 的 3 个不同的特征值为 $a, b, 0$, 则 A 与 $\text{diag}(a, b, 0)$ 相似, 所以 $R(A) = 2$.

(2) 解 因为 $R(A) = 2$, 所以 $Ax = 0$ 的基础解系中含有一个解向量. 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 即 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, 可得 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi = (1, 2, -1)^T$. 再由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 可得 $Ax = \beta$ 的特解为 $\eta = (1, 1, 1)^T$. 故 $Ax = \beta$ 的通解为 $\eta + k\xi$ (k 为任意实数).

6. 【2017 (1, 2, 3)】设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$. 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

解 设二次型 f 的矩阵为 A , 由题意有 $R(A) < 3$, 由于

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

故 $a = 2$. 此时有

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 6)(\lambda + 3),$$

解得 A 有特征值 $6, -3, 0$. 当 $\lambda = 6$ 时, 由 $(6E - A)x = 0$ 解得属于 0 的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 当 $\lambda = -3$ 时, 由 $(-3E - A)x = 0$ 解得属于 -3 的特征向量为 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单

位化得 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 当 $\lambda = 0$ 时, 由 $(0E - A)x = 0$ 解得属于 0 的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得

$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则有二次型 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $6y_1^2 - 3y_2^2$, 故

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

- [1] Larry Smith, Linear Algebra, Springer-Verlag: New York,1978.
- [2] 王萼芳, 石生明. 高等代数 (第 3 版). 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] Gilbert Strang. Introduction To Linear Algebra(Fourth Edition), Wellesley-Cambridge Press,2009.
- [4] 吴传生. 经济数学——线性代数 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [5] 吴赣昌. 线性代数 (第 4 版, 理工类). 北京: 中国人民大学出版社, 2011.
- [6] 吴赣昌. 线性代数 (第 4 版, 经管类). 北京: 中国人民大学出版社, 2011.
- [7] 胡显佑. 线性代数 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [8] 赵树嫄. 线性代数 (第 4 版). 北京: 中国人民大学出版社, 2013.
- [9] 上海交通大学数学系. 线性代数 (第 3 版). 北京: 科学出版社, 2014.
- [10] 同济大学数学系. 工程数学线性代数 (第 6 版). 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [11] 张天德, 宫献军. 线性代数习题精选精解. 济南: 山东科学技术出版社, 2014.
- [12] Nicholas Loehr. Advanced Linear Algebra,CRC Press: Boca Raton,2014.
- [13] Sheldon Axler. Linear Algebra Done Right(Third edition), Springer:San Francisco,2014.
- [14] 刘强, 孙阳, 孙激流. 线性代数同步练习与模拟试题. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- [15] 教育部考试中心. 全国硕士研究生入学统一考试数学试题, 1990-2017.