

普通高等院校大学数学“十三五”规划教材

高等数学（同济第七版 下册）

习题辅导书

主 编 常桂娟

副主编 曹秀梅 王述香 吴 伟 孙春薇 姜兆英

参 编 姜德民 孙宝山 赵 静 吴春妹

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

《高等数学(同济第七版 下册)》包括五章内容,因此《高等数学(同济第七版 下册)习题辅导书》相应地包含五章的习题及其解答,每章内容包括基本内容、基本要求和习题解答。此外,书中还提供历年考研部分试题及解答、《高等数学(下册)》期末考试试卷选编及参考答案。全书习题丰富,解答详细完整,图表清晰,是学好高等数学课程的首选练习册和优秀的考研指导书。

本书可作为大学工科学生高等数学课程的复习指导和练习册,也可作为考研人员的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(同济第七版)习题辅导书.下册/常桂娟主编. —北京:电子工业出版社,2015.7

ISBN 978-7-121-26305-7

I. ①高… II. ①常… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 127824 号

策划编辑:王羽佳

责任编辑:王羽佳 特约编辑:王 崧

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:435 千字

版 次:2015 年 7 月第 1 版

印 次:2015 年 7 月第 1 次印刷

定 价:35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

本书是与同济大学数学系编写的教材《高等数学（第七版）》相配套的辅导教材. 同济大学数学系编写的《高等数学》是本科生学习高等数学的经典之作. 因此, 本书也力求成为更适合大学生学习《高等数学》的指导书, 可作为报考硕士研究生入学考试的复习参考书, 还可为高等数学教师批改作业或备课提供参考.

为方便读者使用, 本书在内容上严格按照同济大学《高等数学（第七版）》的各章顺序对应编写, 其内容包括三篇.

第一篇是《高等数学（下册）》习题解答, 内容包括: ① 基本内容, 列出各章节的基本理论知识; ② 基本要求, 提出学生对各章节知识点需要掌握的程度; ③ 习题解答, 给出《高等数学（下册）》教材各章节习题、总习题的解答.

第二篇是历年考研部分试题及解答, 内容涵盖向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数, 给出了每道试题的年份及类别, 学生可以根据自己的具体情况进行选做.

第三篇是《高等数学（下册）》期末考试试卷选编及参考答案.

本书由青岛农业大学理学与信息科学学院数学教师编写. 其中, 第一篇内容的第 8 章由曹秀梅编写, 第 9 章由姜兆英、赵静编写, 第 10 章由王述香、孙春薇编写, 第 11 章由吴春妹编写, 第 12 章由吴伟、孙宝山编写. 第二篇历年考研部分试题及解答由姜德民编写; 第三篇及最终的统稿、定稿由常桂娟完成.

由于时间仓促, 在编写上难免会有错误, 敬请同行、专家、读者批评指正.

编 者

2015 年 4 月

目 录

第一篇 《高等数学（下册）》习题解答

第 8 章 空间解析几何与向量代数	2
一、基本内容	2
二、基本要求	2
三、习题解答	3
总习题八	19
第 9 章 多元函数微分法及其应用	26
一、基本内容	26
二、基本要求	27
三、习题解答	27
总习题九	61
第 10 章 重积分	69
一、基本内容	69
二、基本要求	69
三、习题解答	69
总习题十	104
第 11 章 曲线积分与曲面积分	114
一、基本内容	114
二、基本要求	115
三、习题解答	115
总习题十一	154
第 12 章 无穷级数	163
一、基本内容	163
二、基本要求	164
三、习题解答	165
总习题十二	207

第二篇 历年考研部分试题及解答

第一部分	向量代数与空间解析几何	222
第二部分	多元函数微分学	225
第三部分	多元函数积分学	233
第四部分	无穷级数	243

第三篇 《高等数学（下册）》期末考试试卷选编及参考答案

高等数学（下）期末考试试卷（一）	255
高等数学（下）期末考试试卷（二）	259
参考文献	262

第 一 篇

《高等数学（下册）》习题解答

空间解析几何与向量代数

一、基本内容

1. 向量及其线性运算

- (1) 向量的相关概念: 向量、自由向量、向量相等、单位向量、零向量、向量的夹角、向量共线、向量共面、向量的模、向量的方向角、向量的方向余弦和向量在轴上的投影;
- (2) 空间直角坐标系的相关概念: 坐标轴、坐标面、卦限、向量的坐标、点的坐标和向径;
- (3) 向量的线性运算: 向量的加减法、向量与数的乘法及运算规律.

2. 数量积、向量积和*混合积

- (1) 数量积的定义、性质、运算规律、坐标表示式;
- (2) 向量积的定义、性质、运算规律、坐标表示式、几何意义;
- (3) 混合积的定义、性质、运算规律、坐标表示式、几何意义.

3. 平面及其方程

- (1) 曲面与空间曲线的概念;
- (2) 平面的点法式方程、一般方程和截距式方程;
- (3) 两平面的夹角和点到平面的距离的计算公式.

4. 空间直线及其方程

- (1) 空间直线的一般方程、对称式方程(即点向式方程)和参数方程;
- (2) 两直线的夹角和直线与平面的夹角的计算公式.

5. 曲面及其方程

- (1) 旋转曲面、母线和轴的概念;
- (2) 柱面、准线和母线的概念;
- (3) 九类特殊二次曲面: 椭圆锥面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面、椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面的标准方程与图形.

6. 空间曲线及其方程

- (1) 空间曲线的一般方程;
- (2) 空间曲线的参数方程和*曲面的参数方程;
- (3) 空间曲线在坐标面上的投影.

二、基本要求

1. 掌握向量的相关概念和空间直角坐标系的相关概念; 能够熟练利用坐标计算向量的模、方向角、方向余弦、向量在轴上的投影及向量的线性运算.

2. 掌握数量积和向量积的概念与性质; 能够熟练利用坐标计算数量积和向量积; 了解混合积的计算公式.
3. 熟练掌握平面的点法式方程和一般式方程的表示形式与求法; 牢记两平面的夹角和点到平面的距离的计算公式.
4. 熟练掌握空间直线的一般方程、对称式方程(即点向式方程)和参数方程的表示形式、相互转化方法及求法; 牢记两直线的夹角和直线与平面的夹角的计算公式.
5. 掌握九类特殊二次曲面的方程与图形; 会求坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转后所得到的旋转曲面的方程.
6. 了解空间曲线的一般方程与参数方程的表示形式; 会求空间曲线在坐标面上的投影.

三、习题解答

习题 8-1

1. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$. 试用 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 表示 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

解 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}) - 3(-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 5\mathbf{a} - 11\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.

证明 作四边形 $ABCD$ 如图 8-1 所示, 假设已知 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$,

则有 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}$, 即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 平行且相等, 从而四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

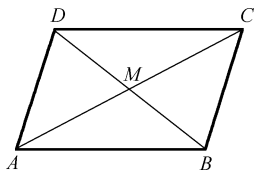


图 8-1

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 , 再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ 、 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$ 、 $\overrightarrow{D_2A}$ 、 $\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解 $\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c};$

$$\overrightarrow{D_2A} = \overrightarrow{D_2B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c};$$

$$\overrightarrow{D_3A} = \overrightarrow{D_3B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c};$$

$$\overrightarrow{D_4A} = \overrightarrow{D_4B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-0, -1-1, 0-2) = (1, -2, -2);$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2(1, -2, -2) = (-2, 4, 4).$$

5. 求平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

解 $|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11.$

平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量为 $\pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \pm \left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-6}{11} \right)$.

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限.

$$A(1, -2, 3); B(2, 3, -4); C(2, -3, -4); D(-2, -3, 1).$$

解 A 在第四卦限; B 在第五卦限; C 在第八卦限; D 在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置.

$$A(3, 4, 0); B(0, 4, 3); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0).$$

解 在 xOy 面上点的竖坐标为零; 在 yOz 面上点的横坐标为零; 在 zOx 面上点的纵坐标为零; 在 x 轴上点的纵、竖坐标均为零; 在 y 轴上点的横、竖坐标均为零; 在 z 轴上点的横、纵坐标均为零.

A 在 xOy 面上; B 在 yOz 面上; C 在 x 轴上; D 在 y 轴上.

8. 求点 (a, b, c) 关于(1)各坐标面; (2)各坐标轴; (3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 关于 xOy 面、 yOz 面、 zOx 面的对称点分别为 $(a, b, -c)$ 、 $(-a, b, c)$ 、 $(a, -b, c)$;

(2) 关于 x 轴、 y 轴、 z 轴的对称点分别为 $(a, -b, -c)$ 、 $(-a, b, -c)$ 、 $(-a, -b, c)$;

(3) 关于坐标原点的对称点为 $(-a, -b, -c)$.

9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 P_0 在 xOy 面、 yOz 面、 zOx 面的垂足坐标分别为 $(x_0, y_0, 0)$ 、 $(0, y_0, z_0)$ 、 $(x_0, 0, z_0)$; P_0 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的垂足坐标分别为 $(x_0, 0, 0)$ 、 $(0, y_0, 0)$ 、 $(0, 0, z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于 z 轴的直线上的所有点的横坐标均为 x_0 , 纵坐标均为 y_0 ; 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于 xOy 面的平面上的所有点的竖坐标均为 z_0 .

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

解 根据题意作图 8-2, 则各顶点坐标分别为

$$\begin{aligned} & A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \\ & C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), \\ & F\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), H\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right). \end{aligned}$$

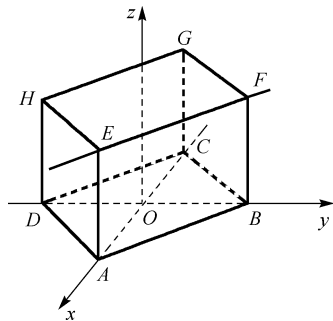


图 8-2

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 $M(4, -3, 5)$ 到 x 轴的距离为 $d_x = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$; 到 y 轴的距离为 $d_y = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$; 到 z 轴的距离为 $d_z = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

13. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 根据题意设所求点为 $P(0, y, z)$, 由 $|PA| = |PB| = |PC|$ 得

$$\begin{cases} \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} \\ \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2} \end{cases}$$

解得 $y = 1, z = -2$. 故所求点为 $(0, 1, -2)$.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 因为 $|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2}$$

所以 $|AB| = |AC|$ 且 $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overline{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 因为 $\overline{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$,

所以模为 $|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$;

方向余弦分别为 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{2}$;

方向角分别为 $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{1}{3}\pi$.

16. 设向量的方向余弦分别满足 (1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 当 $\cos \alpha = 0$ 时, 即 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 此时向量与 x 轴垂直, 与 yOz 面平行;

(2) 当 $\cos \beta = 1$ 时, 即 $\beta = 0$, 此时向量与 y 轴同向, 与 zOx 面垂直;

(3) 当 $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ 时, 即 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, 此时向量与 xOy 面垂直, 与 z 轴平行.

17. 设向量 $\mathbf{r}$ 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\mathbf{r}$ 在轴 u 上的投影.

解 $(\mathbf{r})_u = |\mathbf{r}| \cos \theta = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、-4 和 7. 求该向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 的坐标为 (x, y, z) , 则 $\overline{AB} = (2-x, -1-y, 7-z)$,
由题知 $2-x=4$, $-1-y=-4$, $7-z=7$, 即 $x=-2, y=3, z=0$,
故 A 的坐标为 $(-2, 3, 0)$.

19. 设 $m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k$ 和 $p=5i+j-4k$. 求向量 $a=4m+3n-p$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $a=4m+3n-p=4(3i+5j+8k)+3(2i-4j-7k)-(5i+j-4k)=13i+7j+15k$,
故 a 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量为 $7j$.

习题 8-2

1. 设 $a=3i-j-2k, b=i+2j-k$, 求:

(1) $a \cdot b$ 及 $a \times b$; (2) $(-2a) \cdot 3b$ 及 $a \times 2b$; (3) a, b 的夹角的余弦.

解 (1) $a \cdot b = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1) = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3$,

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5, 1, 7);$$

(2) $(-2a) \cdot 3b = -6(a \cdot b) = (-6) \times 3 = -18$,

$$a \times 2b = 2(a \times b) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14);$$

(3) $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}.$

2. 设 a, b, c 为单位向量, 且满足 $a+b+c=0$, 求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

解 因为 $a+b+c=0$, 所以 $(a+b+c) \cdot (a+b+c) = 0$,

$$\text{即 } |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b) + 2(b \cdot c) + 2(c \cdot a) = 0, \text{ 故 } a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}.$$

3. 已知 $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$. 求与 $\overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 由题知 $\overline{M_1M_2} = (2, 4, -1), \overline{M_2M_3} = (0, -2, 2)$,

$$\text{则 } \overline{M_1M_2} \times \overline{M_2M_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4),$$

$$\text{故所求向量为 } \pm \frac{\overline{M_1M_2} \times \overline{M_2M_3}}{|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_2M_3}|} = \pm \frac{1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}} \right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所作的功 (长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).

解 由题知 $F = (0, 0, -980), \overline{M_1M_2} = (-2, 3, -6)$,

$$\text{所作的功为 } W = F \cdot \overline{M_1M_2} = (0, 0, -980) \cdot (-2, 3, -6) = 5880 \text{ (J)}.$$

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overline{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着; 在 O

的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\mathbf{F}_2$ 作用着 (见图 8-3). 问 θ_1 、 θ_2 、 x_1 、 x_2 、 $|\mathbf{F}_1|$ 、 $|\mathbf{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

解 有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和等于零.

又根据对力矩正负号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\mathbf{F}_1| x_1 \sin \theta_1 - |\mathbf{F}_2| x_2 \sin \theta_2 = 0, \text{ 即 } |\mathbf{F}_1| x_1 \sin \theta_1 = |\mathbf{F}_2| x_2 \sin \theta_2.$$

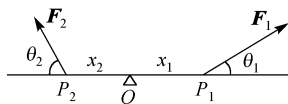


图 8-3

6. 求向量 $\mathbf{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ 上的投影.

$$\text{解 } \text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

7. 设 $\mathbf{a} = (3, 5, -2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直?

$$\text{解 } \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda(3, 5, -2) + \mu(2, 1, 4) = (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu),$$

记 z 上的一个单位向量 $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$, 要使 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直, 只需 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{e}$ 垂直,

即 $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \cdot \mathbf{e} = 0$, 代入坐标得 $-2\lambda + 4\mu = 0$, 故当 $\lambda = 2\mu$ 时, $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 设圆心为 O , 直径为 AB , C 为圆周上任取点 (除点 A 、 B 外), 则要证 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$,

只需 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$, 即 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{而 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= -|\overrightarrow{AO}|^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AO} + |\overrightarrow{OC}|^2 = 0, \end{aligned}$$

故直径所对圆周角为直角.

9. 已知向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, 计算:

(1) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$; (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$; (3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

$$\text{解 } (1) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = [2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 3](1, -2, 0) - [2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 0](1, -1, 3) \\ = (0, -8, -24);$$

$$(2) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (3, -4, 4) \times (2, -3, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -1, -1);$$

$$(3) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-8, -5, 1), (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-8, -5, 1) \cdot (1, -2, 0) = 2.$$

10. 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

$$\text{解 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |-3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

*11. 已知 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 试利用行列式的性质证明:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

$$\text{证明 } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

同理可知 $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$, 故 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.

12. 试用向量证明不等式 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|$, 其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数, 并指出等号成立的条件.

证明 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\text{因为 } |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|$$

$$\text{且 } |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|,$$

$$\text{故 } \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|.$$

其中当 $|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})| = 1$, 即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 也就是 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ 时, 等号成立.

习题 8-3

1. 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

解 由题知, 所求平面的法向量为 $(3, -7, 5)$, 平面又过点 $(3, 0, -1)$,

故所求平面方程为 $3(x-3) - 7(y-0) + 5(z+1) = 0$, 即 $3x - 7y + 5z - 4 = 0$.

2. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 由题知, 平面的法向量为 $\overrightarrow{OM_0} = (2, 9, -6)$, 平面又过点 $M_0(2, 9, -6)$, 故所求平面方程为 $2(x-2) + 9(y-9) - 6(z+6) = 0$, 即 $2x + 9y - 6z - 121 = 0$.

3. 求过 $M_1(1, 1, -1)$ 、 $M_2(-2, -2, 2)$ 和 $M_3(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.

解 平面的一个法向量为

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-3, 9, 6)$$

故所求平面方程为 $-3(x-1) + 9(y-1) + 6(z+1) = 0$, 即 $x - 3y - 2z = 0$.

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面.

- (1) $x = 0$; (2) $3y - 1 = 0$; (3) $2x - 3y - 6 = 0$; (4) $x - \sqrt{3}y = 0$;
(5) $y + z = 1$; (6) $x - 2z = 0$; (7) $6x + 5y - z = 0$.

解 (1) $x = 0$ 为 yOz 面, 如图 8-4(1)所示;

(2) $3y - 1 = 0$ 表示过点 $(0, \frac{1}{3}, 0)$ 且平行于 zOx 面的平面, 如图 8-4(2)所示;

(3) $2x - 3y - 6 = 0$ 表示平行于 z 轴的平面, 如图 8-4(3)所示;

- (4) $x - \sqrt{3}y = 0$ 表示过 z 轴的平面, 如图 8-4(4)所示;
 (5) $y + z = 1$ 表示平行于 x 轴的平面, 如图 8-4(5)所示;
 (6) $x - 2z = 0$ 表示过 y 轴的平面, 如图 8-4(6)所示;
 (7) $6x + 5y - z = 0$ 表示过原点的平面, 如图 8-4(7)所示.

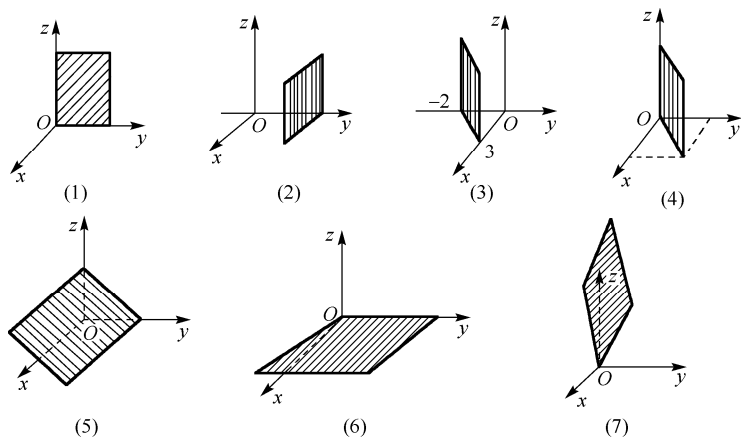


图 8-4

5. 求平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 设平面与 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面的夹角分别为 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 , 记平面的法向量为 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$, xOy 面、 yOz 面和 zOx 面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$ 、 $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 0)$ 和 $\mathbf{n}_3 = (0, 1, 0)$, 则

$$\cos \theta_1 = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{3},$$

$$\text{同理有 } \cos \theta_2 = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \theta_3 = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_3|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_3|} = -\frac{2}{3}.$$

6. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$, 试求该平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

故所求平面方程为 $1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) - 3 \cdot (z + 1) = 0$, 即 $x + y - 3z - 4 = 0$.

7. 求三平面 $x + 3y + z = 1$, $2x - y - z = 0$, $-x + 2y + 2z = 3$ 的交点.

解 联立方程组
$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$
 故三平面的交点为 $(1, -1, 3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程.

- (1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$;
 (2) 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$;
 (3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.

解 (1) 设所求平面方程为 $By + D = 0$, 将点 $(2, -5, 3)$ 代入方程得 $D = 5B$, 故所求平面方程为 $By + 5B = 0$, 即 $y + 5 = 0$.

(2) 设所求平面方程为 $Ax + By = 0$, 将点 $(-3, 1, -2)$ 代入方程得 $B = 3A$, 故所求平面方程为 $Ax + 3Ay = 0$, 即 $x + 3y = 0$.

(3) 设所求平面方程为 $By + Cz + D = 0$, 将点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$ 分别代入方程得

$$\begin{cases} -2C + D = 0 \\ B + 7C + D = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} D = 2C \\ B = -9C \end{cases}.$$

故所求平面方程为 $-9Cy + Cz + 2C = 0$, 即 $9y - z - 2 = 0$.

9. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.

解 距离 $d = \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1$.

习题 8-4

1. 求过点 $(4, -1, 3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{5}$ 的直线方程.

解 由题知, 所求直线的方向向量为 $(2, 1, 5)$, 直线过点 $(4, -1, 3)$, 故所求直线方程为

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$ 的直线方程.

解 由题知, 直线的方向向量为 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1-3, 0+2, 2-1) = (-4, 2, 1)$, 故所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

注: 由于取直线上的点不同, 所得直线的对称式方程表达式也不同.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

解 由题知, 直线的方向向量为

$$\mathbf{s} = (1, -1, 1) \times (2, 1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3).$$

令 $x = 1$ 代入直线的一般方程, 解得 $y = z = 1$.

故直线的对称式方程为 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$, 参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

4. 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解 由题知, 平面的法向量为直线的方向向量, 即

$$\mathbf{n} = \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 14, 11),$$

故所求平面的方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$, 即 $16x-14y-11z-65=0$.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

解 两直线的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = (5, -3, 3) \times (3, -2, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 4, -1),$$

$$\mathbf{s}_2 = (2, 2, -1) \times (3, 8, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (10, -5, 10),$$

故两直线夹角的余弦 $\cos(\widehat{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2}) = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|} = \frac{|3 \cdot 10 - 4 \cdot 5 - 1 \cdot 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2}} = 0$.

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

证明 两直线的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, 5), \quad \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3(3, 1, 5),$$

显然 $\mathbf{s}_2 = -3\mathbf{s}_1$, 故两直线必平行.

7. 求过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 要使所求直线与两平面都平行, 则所求直线的方向向量与两平面的法向量都垂直, 即

$$\mathbf{s} = (1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1),$$

故所求直线的方程为 $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$.

8. 求过点 $(3, 1, -2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

解 由题知, 平面过两点 $A(3, 1, -2)$ 和 $B(4, -3, 0)$, 且平面的法向量与向量 $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 2)$ 和

$\mathbf{s} = (5, 2, 1)$ 都垂直, 则平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-8, 9, 22),$$

故所求平面方程为 $-8(x-3) + 9(y-1) + 22(z+2) = 0$, 即 $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 直线的方向向量为 $\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, -2)$, 平面的法向量为 $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$, 则

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{s}| |\mathbf{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 0,$$

故直线与平面的夹角为 0.

10. 试确定下列各组中的直线与平面间的关系.

(1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 和 $4x - 2y - 2z = 3$;

(2) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ 和 $3x - 2y + 7z = 8$;

(3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 和 $x + y + z = 3$.

解 (1) 直线的方向向量为 $\mathbf{s} = (-2, -7, 3)$, 平面的法向量为 $\mathbf{n} = (4, -2, -2)$, 则 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = (-2) \cdot 4 + (-7) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = 0$, 即 $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$.

将直线上的点 $(-3, -4, 0)$ 代入平面方程不成立, 故直线与平面是平行的.

(2) 直线的方向向量为 $\mathbf{s} = (3, -2, -7)$, 平面的法向量为 $\mathbf{n} = (3, -2, 7)$, 则 $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}$, 即直线与平面垂直.

(3) 直线的方向向量为 $\mathbf{s} = (3, 1, -4)$, 平面的法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, 则 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$, 即 $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$.

将直线上的点 $(2, -2, 3)$ 代入平面方程成立, 故直线在平面内.

11. 求过点 $(1, 2, 1)$ 而与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3), \quad \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

又因为平面的法向量与两方向向量都垂直, 所以 $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$,

故平面方程为 $-(x-1)+(y-2)-(z-1)=0$, 即 $x-y+z=0$.

12. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 由题知, 过点 $(-1, 2, 0)$ 且与已知平面垂直的直线方程为 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$, 直线与平面的交点即为所求的投影, 所以将直线与平面方程联立方程组, 解得 $x = -\frac{5}{3}$, $y = z = \frac{2}{3}$. 故所求的投影坐标为 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

解 直线的方向向量为 $\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3)$, 则过点 $P(3, -1, 2)$ 且与直线垂直的

平面方程为 $-3(y+1)-3(z-2)=0$, 即 $y+z-1=0$.

将直线与平面方程联立方程组, 解得 $x=1, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{3}{2}$, 即为直线与平面的交点.

故点到直线的距离为 $d = \sqrt{(3-1)^2 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

14. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 $\mathbf{s}$, 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

证明 以 $|\overrightarrow{M_0M}|$ 和 $|\mathbf{s}|$ 为邻边作平行四边形如图 8-5 所示, 一方面由平行四边形的面积公式知 $A = |\mathbf{s}| \cdot d$, 另一方面由向量积的几何意义知平行四边形的面积为 $A = |\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|$, 所以

$$|\mathbf{s}| \cdot d = |\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|, \text{ 即 } d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

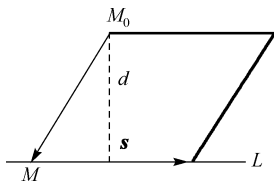


图 8-5

15. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 过直线的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

即 $(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$, 其中 λ 为待定常数.

该平面与已知平面垂直的条件是 $(2+3\lambda) \cdot 4 - (4+\lambda) \cdot (-1) + (1-2\lambda) \cdot 1 = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{13}{11}$, 将其代入平面束方程可得投影平面方程为 $17x+31y-37z-117=0$.

故所求的投影直线的方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0, \\ 4x-y+z=1. \end{cases}$$

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形.

(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$.

解 如图 8-6(1)和图 8-6(2)所示.

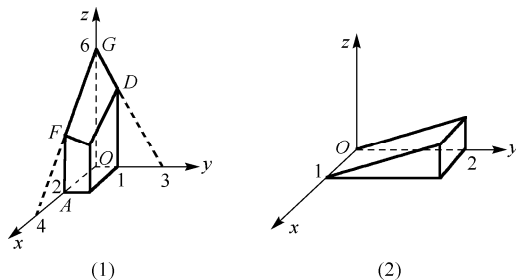


图 8-6

习题 8-5

1. 一球面过原点及 $A(4,0,0)$ 、 $B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点, 求球面的方程及球心的坐标和半径.

解 由题知, 设球面方程为

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz = 0,$$

分别将点 A 、 B 和 C 的坐标代入上述方程得
$$\begin{cases} 16A+4D=0 \\ A+9A+D+3E=0 \\ 16A-4F=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} D=-4A \\ E=-2A \\ F=4A \end{cases}, \text{ 故所求球面方程为 } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0, \text{ 整理得 } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9, \text{ 即球心坐标为 } (2,1,-2), \text{ 半径为 } 3.$$

2. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心且通过坐标原点的球面方程.

解 由题知, 球半径为 $\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$, 故所求球面方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 0$.

3. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面?

解 原方程可整理为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$, 所以方程表示的是以 $(1,-2,-1)$ 为球心、以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为 (x,y,z) , 由题知

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

化简整理得 $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z+\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2$, 即动点形成的轨迹是以 $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$ 为球心、以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 将 xOz 坐标面上的曲线 $f(x, z) = 0$ 绕 x 轴旋转一周时, 只需将方程 $f(x, z) = 0$ 中的 z 改成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$, 即为所求旋转曲面的方程.

由上知, 所求旋转曲面方程为 $(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 = 5x$, 化简为 $y^2+z^2 = 5x$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 将方程中的 x 改为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 得 $(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9$,

即 $x^2+y^2+z^2=9$ 为所求旋转曲面方程.

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 双曲线绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $4x^2-9y^2-9z^2=36$, 双曲线绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $4x^2+4z^2-9y^2=36$.

8. 画出下列各方程所表示的曲面.

$$(1) \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad (2) -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad (3) \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1;$$

$$(4) y^2 - z = 0; \quad (5) z = 2 - x^2.$$

解 如图 8-7(1)至图 8-7(5)所示.

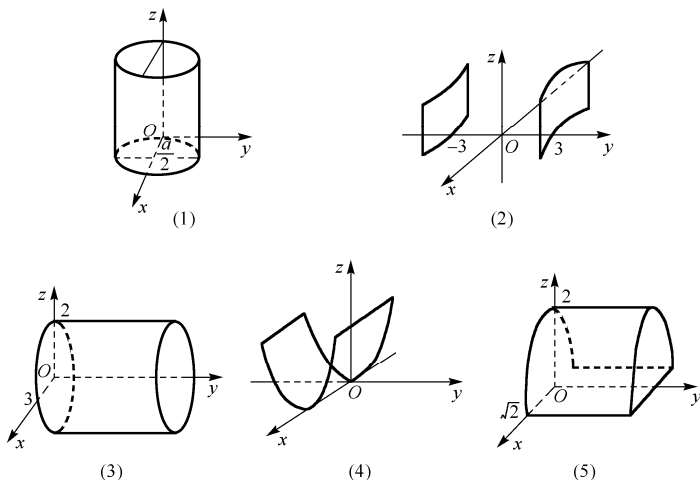


图 8-7

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形.

(1) $x = 2$; (2) $y = x + 1$; (3) $x^2 + y^2 = 4$; (4) $x^2 - y^2 = 1$.

解 (1) $x = 2$ 在平面解析几何中表示过 $(2, 0)$ 点且平行于 y 轴的一条直线; 在空间解析几何中表示过 $(2, 0, 0)$ 点且平行于 yOz 面的平面.

(2) $y = x + 1$ 在平面解析几何中表示过 $(-1, 0)$ 点且斜率为 1 的一条直线; 在空间解析几何中表示一个平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2 + y^2 = 4$ 在平面解析几何中表示以原点为圆心、以 2 为半径的圆周; 在空间解析几何中表示以 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 为准线, 母线平行于 z 轴的圆柱面.

(4) $x^2 - y^2 = 1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴、以 y 轴为虚轴的双曲线; 在空间解析几何中表示以 xOy 面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 为准线, 母线平行于 z 轴的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$; (2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$;

(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; (4) $(z - a)^2 = x^2 + y^2$.

解 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ 可视为由 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转椭球面; 或者也可视为由 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转椭球面.

(2) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 可视为由 xOy 面上的双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周而形成的单叶旋转双曲面; 或者也可视为由 yOz 面上的双曲线 $z^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周而形成的单叶旋转双曲面.

(3) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 可视为由 xOy 面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的双叶旋转双曲面; 或者也可视为由 xOz 面上的双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的双叶旋转双曲面.

(4) $(z - a)^2 = x^2 + y^2$ 可视为由 xOz 面上的两条直线 $z - a = \pm x$ 绕 z 轴旋转一周而形成的圆锥面; 或者也可视为由 yOz 面上的两条直线 $z - a = \pm y$ 绕 z 轴旋转一周而形成的圆锥面.

11. 画出下列方程所表示的曲面.

(1) $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$; (2) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$; (3) $\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

解 (1) 单叶双曲面, 参考主教材中的图 8-40.

(2) 双叶双曲面, 参考主教材中的图 8-41.

(3) 椭圆抛物面, 参考主教材中的图 8-50.

12. 画出下列各曲面所围立体的图形.

(1) $z = 0, z = 3, x - y = 0, x - \sqrt{3}y = 0, x^2 + y^2 = 1$ (在第一卦限内);

(2) $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2$ (在第一卦限内).

解 如图 8-8(1)和图 8-8(2)所示.

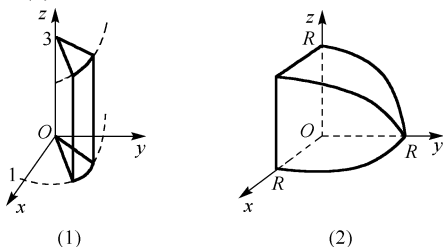


图 8-8

习题 8-6

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形.

$$(1) \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

解 如图 8-9(1)至图 8-9(3)所示.

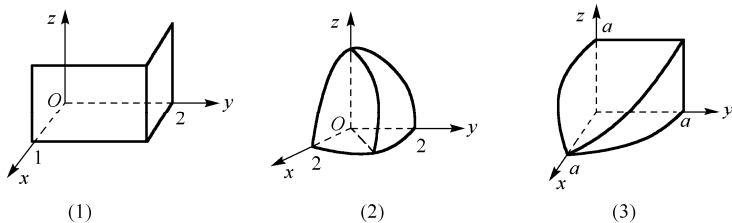


图 8-9

2. 指出下列方程组在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形.

$$(1) \begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3. \end{cases}$$

解 (1) 方程组在平面解析几何中表示两直线的交点; 在空间解析几何中表示两平面的交线.

(2) 方程组在平面解析几何中表示椭圆与其一条切线的交点 $(0,3)$; 在空间解析几何中表示圆柱面与其切平面的交线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 方程组消去 x 得 $3y^2-z^2=16$, 即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

同理, 方程组消去 y 得 $3x^2+2z^2=16$, 即为母线平行于 y 且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 将两方程联立方程组后消去 z 得 $2x^2-2x+y^2=8$, 此为球面与平面的交线关于 xOy 的投影柱面, 则所求投影曲线的方程为

$$\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}.$$

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

解 (1) 把 $y = x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, 得 $2x^2 + z^2 = 9$, 即 $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$.

令 $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$, 则 $z = 3 \sin t$, 从而该曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t \\ z = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

(2) 把 $z = 0$ 代入 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$, 得 $(x-1)^2 + y^2 = 3$, 令 $x-1 = \sqrt{3} \cos t$, 则 $y = \sqrt{3} \sin t$, 从而该曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos t \\ y = \sqrt{3} \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 方程组前两个方程联立消去 θ 得 $x^2 + y^2 = a^2$, 即为螺旋线关于 xOy 面的投影柱面, 所以螺旋线在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$.

方程组中第一个与第三个方程联立消去 θ 得 $y = a \sin \frac{z}{b}$, 即为螺旋线关于 zOx 面的投影柱面,

所以螺旋线在 zOx 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b} \\ x = 0 \end{cases}$.

方程组中第二个与第三个方程联立消去 θ 得 $y = a \cos \frac{z}{b}$, 即为螺旋线关于 yOz 面的投影柱面,

所以螺旋线在 yOz 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} y = a \cos \frac{z}{b} \\ x = 0 \end{cases}$.

7. 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解 如图 8-10 所示, 上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ z = 0 \end{cases}$, 结合图形可知两立体的公共部分在 xOy

面上的投影恰为该投影曲线的内部, 即圆面 $x^2 + y^2 \leq ax$.

上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 在 zOx 面上的投影

曲线为 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - ax} \\ y = 0 \end{cases}$, 结合图形可知, 两立体的公共部分在

zOx 面上的投影为由 x 轴、 z 轴和曲线 $z = \sqrt{a^2 - ax}$ 所围的区域.

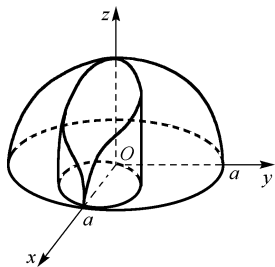


图 8-10

8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在三个坐标面上的投影.

解 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, 而所求旋转抛物面在 xOy 面上的投影恰为该曲线内部, 即 $x^2 + y^2 \leq 4$.

曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 与平面 $y = 0$ 的交线在 zOx 面上的投影曲线为 $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$, 其中

$0 \leq z \leq 4$, 而所求旋转抛物面在 zOx 面上的投影为该曲线内部, 即 $x^2 \leq z \leq 4$. 同理, 旋转抛物面在 yOz 面上的投影为 $y^2 \leq z \leq 4$.

总 习 题 八

1. 填空

(1) 设在坐标系 $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) , 则在 $[A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 坐标系中, 点 M 的坐标为_____, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为_____.

(2) 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量是_____的.

(3) 设 $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 10)$, $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda =$ _____.

(4) 设 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4, |\mathbf{c}| = 5$, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| =$ _____.

解 (1) 根据坐标系的平移知, M 的坐标为 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 (x, y, z) .

(2) 由于 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以 $[(\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = 0$, 从而得 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, 故三向量是共面的.

(3) 由题知 $\mathbf{c} = (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda)$, 又因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, 即 $2 \cdot (4 - 2\lambda) + 1 \cdot (-1 - \lambda) + 2 \cdot (10 - 2\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 3$.

(4) 由 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 得 $\mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 所以

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a}| = 3|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|,$$

又因为 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4, |\mathbf{c}| = 5$, 所以 $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$, 即以 $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|, |\mathbf{c}|$ 为边的三角形是直角三角形, 故 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| = 3|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 36$.

2. 下列两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论.

(1) 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程为 () ;

A. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, \\ z=1+3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-1+t, \\ z=1+3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1-t, \\ z=1+3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-1-t, \\ z=1+3t \end{cases}$

(2) 下列结论中, 错误的是 () .

A. $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

B. $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

C. $x^2+2y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

D. $y^2=5x$ 表示抛物柱面

解 (1) L 的方向向量为 $(1, -1, 1) \times (2, 1, 1) = (-2, 13)$, 排除 C、D, 再分别将 A 中的点 $(1, 1, 1)$ 和 B 中的点 $(1, -1, 1)$ 代入直线 L 方程, 满足方程的即为正确答案, 故选 A.

(2) 选项 B 为单叶双曲面, 故选 B.

3. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.

解 设所求点为 $P(0, y, 0)$, 由题知 $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$, 即 $\sqrt{1^2 + (-3-y)^2 + 7^2} = \sqrt{5^2 + (7-y)^2 + (-5)^2}$, 解得 $y=2$. 故所求点为 $(0, 2, 0)$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1)$ 、 $B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.

解 由题知, 线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{-1+7}{2}\right)$, 即 $(4, -1, 3)$, 故所求中线长度为 $\sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}$.

5. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overline{BC} = \mathbf{a}$ 、 $\overline{CA} = \mathbf{b}$ 、 $\overline{AB} = \mathbf{c}$, 三边中点依次为 D 、 E 、 F , 试用向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 表示 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$, 并证明 $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \mathbf{0}$.

证明 $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$, 同理有 $\overline{BE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\overline{CF} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

从而 $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \left(\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) + \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right) = \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$.

6. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

证明 设 $\triangle ABC$ 中, D 和 E 分别为边 AB 和 AC 的中点, 则

$$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC},$$

即 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $|\overline{DE}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$, 得证.

7. 设 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, z)$, 求 z .

解 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, -4, 8+z)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, -6, 8-z)$, 由 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 得

$$\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (8+z)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + (8-z)^2}$$

解得 $z = 1$.

8. 设 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角.

$$\text{解 } |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 7,$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 1,$$

$$\text{从而 } \cos(\widehat{\mathbf{a} + \mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{a} - \mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

故所求两向量的夹角为 $\arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

9. 设 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - 4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, 求 $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}})$.

$$\text{解 由 } \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 5\mathbf{b} \text{ 得 } (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 7|\mathbf{a}|^2 + 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 15|\mathbf{b}|^2 = 0; \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由 } \mathbf{a} - 4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b} \text{ 得 } (\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 7|\mathbf{a}|^2 - 30\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 8|\mathbf{b}|^2 = 0. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{将上面两式相减得 } 46\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 23|\mathbf{b}|^2 = 0, \text{ 即 } |\mathbf{b}|^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad \textcircled{3}$$

$$\text{再将 } \textcircled{3} \text{ 式代入 } \textcircled{1} \text{ 式可得 } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|. \text{ 故 } \cos(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } (\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\pi}{3}.$$

10. 设 $\mathbf{a} = (2, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}})$ 最小? 并求出此最小值.

解 记 $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \theta$. 因为

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot z}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + z^2}} = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}, \text{ 所以 } \theta = \arccos \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}.$$

$$\text{而 } \frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1-2z)^2}{9(2+z^2)}}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2+z^2} - (1-2z) \cdot \frac{2z}{2\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2} = \frac{z+4}{(2+z^2)\sqrt{5z^2+4z+17}},$$

显然, 当 $z < -4$ 时, $\frac{d\theta}{dz} < 0$, 函数单调递减; 当 $z > -4$ 时, $\frac{d\theta}{dz} > 0$, 函数单调递增.

$$\text{故当 } z = -4 \text{ 时, 夹角 } \theta \text{ 取到最小值 } \theta_{\min} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

11. 设 $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$, $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 为边的平行四边形面积.

解 平行四边形的面积

$$S = |(a+2b) \times (a-3b)| = |a \times a - 3a \times b + 2b \times a - 6b \times b| = 5|a \times b|$$

$$= 5|a||b|\sin(\widehat{a,b}) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 30.$$

12. 设 $a = (2, -3, 1), b = (1, -2, 3), c = (2, 1, 2)$, 向量 r 满足 $r \perp a, r \perp b$, $\text{Prj}_c r = 14$, 求 r .

解 设 $r = (x, y, z)$,

$$\text{由 } r \perp a, r \perp b \text{ 可得 } 2x - 3y + z = 0 \quad (1), \quad x - 2y + 3z = 0 \quad (2).$$

$$\text{又由 } \text{Prj}_c r = \frac{r \cdot c}{|c|} = 14 \text{ 可得 } 2x + y + 2z = 42 \quad (3).$$

将上面的式①、式②和式③联立方程组, 解得 $x = 14, y = 10, z = 2$. 故所求 $r = (14, 10, 2)$.

13. 设 $a = (-1, 3, 2), b = (2, -3, -4), c = (-3, 12, 6)$, 证明三向量 a, b, c 共面, 并用 a 和 b 表示 c .

$$\text{证明 因为 } [a, b, c] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

所以三向量 a, b, c 共面. 设 $c = \lambda a + \mu b$, 则

$$(-3, 12, 6) = \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -3, -4) = (-\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu, 2\lambda - 4\mu)$$

$$\text{从而有 } \begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3 \\ 3\lambda - 3\mu = 12 \\ 2\lambda - 4\mu = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \lambda = 5, \mu = 1. \text{ 故 } c = 5a + b.$$

14. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹方程.

解 由题知

$$|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2},$$

$$\text{化简整理得 } (x-1)^2 + (y+1)^2 - 4(z-1) = 0.$$

15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴.

$$(1) z = 2(x^2 + y^2); \quad (2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1; \quad (3) z^2 = 3(x^2 + y^2); \quad (4) x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

$$\text{解 (1) 母线 } \begin{cases} z = 2x^2 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 旋转轴为 } z \text{ 轴};$$

$$(2) \text{ 母线 } \begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 旋转轴为 } y \text{ 轴};$$

$$(3) \text{ 母线 } \begin{cases} z = \sqrt{3}x \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 旋转轴为 } z \text{ 轴};$$

$$(4) \text{ 母线 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 旋转轴为 } x \text{ 轴}.$$

16. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 由题知, 可设平面方程为 $A(x-3)+By+Cz=0$,

平面过点 $B(0,0,1)$, 可得 $-3A+C=0$, ①

平面与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 可得 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|(A,B,C) \cdot (0,0,1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \sqrt{1^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2}$,

整理得 $A^2+B^2-3C^2=0$, ②

由式①和式②联立方程组, 解得 $B=\pm\sqrt{26}A, C=3A$.

故所求平面方程为 $(x-3)\pm\sqrt{26}y+3z=0$.

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$, 并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面方程.

解 因为直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的方向向量为 $s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -1)$.

所以过点 $(1,-1,1)$ 且以 $s=(0,-1,-1)$ 为法向量的平面为 $-1 \cdot (y+1) - (z-1) = 0$, 即 $y+z=0$, 联

立方程组 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$, 解得 $x=0, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$, 即垂足为 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

由于所求平面垂直于平面 $z=0$, 故设所求平面方程为 $Ax+By+D=0$.

又知所求平面过点 $(1,-1,1)$ 及垂足 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 故有 $\begin{cases} A-B+D=0 \\ -\frac{1}{2}B+D=0 \end{cases}$, 解得 $B=2D, A=D$.

从而所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$, 即 $x+2y+1=0$.

18. 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解 设 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2} = t$, 则已知直线与所求直线的交点可记为 $(t-1, t+3, 2t)$, 从而所求直线的方向向量为 $s=(t, t+3, 2t-4)$.

又由所求直线与已知平面平行, 可得 $3t-4(t+3)+(2t-4)=0$, 解得 $t=16$.

故所求直线方程为 $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$.

19. 已知点 $A(1,0,0)$ 及点 $B(0,2,1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

解 设点 $C(0,0,z)$, 则所求面积为

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}.$$

由于 $\sqrt{5z^2 - 2z + 5} = \sqrt{5\left(z - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{24}{5}}$, 所以 $z = \frac{1}{5}$, 即 $C(0,0,\frac{1}{5})$ 时, $S_{\min} = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

20. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 方程组消去 z , 得 $x^2 + y^2 - x - y = 0$, 故已知曲线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

方程组消去 x , 得 $2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0$, 故已知曲线在 yOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

方程组消去 y , 得 $2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0$, 故已知曲线在 xOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

21. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 将两曲面方程联立方程组后消去 z , 得 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 故立体在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

同理, 方程组消去 x 后, 得 $\left(\frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 = 1$, 结合图 8-11 知立体在 yOz 面上的投影为

$$\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

方程组消去 y 后, 得 $z^2 = 2x$, 结合图 8-11 知立体在 xOz 面上的投影为 $\begin{cases} x \leq z \leq \sqrt{2x} \\ y = 0 \end{cases}$.

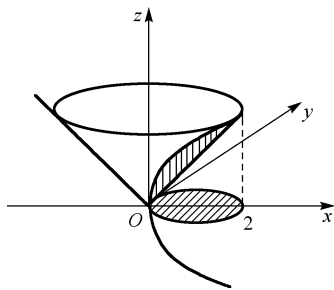


图 8-11

22. 画出下列各曲面所围立体的图形.

- (1) 抛物柱面 $2y^2 = x$, 平面 $z = 0$ 及 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$;
- (2) 抛物柱面 $x^2 = 1 - z$, 平面 $y = 0, z = 0$ 及 $x + y = 1$;
- (3) 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$;

(4) 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$, 柱面 $y^2 = x$, 平面 $z = 0$ 及 $x = 1$.

解 如图 8-12(1)至图 8-12(4)所示。

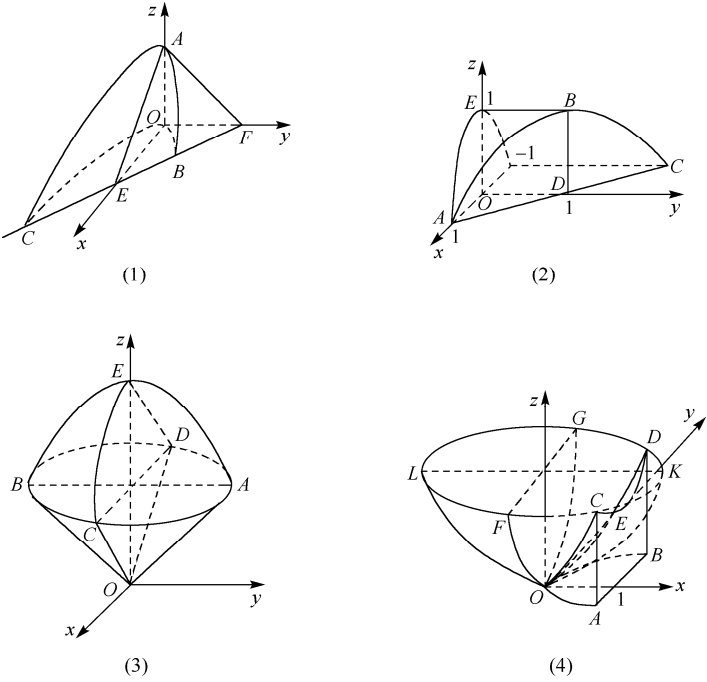


图 8-12

多元函数微分法及其应用

一、基本内容

1. 多元函数的基本概念
 - (1) 平面点集, n 维空间;
 - (2) 多元函数的概念;
 - (3) 多元函数的极限;
 - (4) 多元函数的连续性.
2. 偏导数
 - (1) 偏导数的定义及其算法;
 - (2) 高阶偏导数.
3. 全微分
 - (1) 全微分的定义;
 - * (2) 全微分在近似计算中的应用.
4. 多元复合函数的求导法则
 - (1) 一元函数与多元函数复合的情形;
 - (2) 多元函数与多元函数复合的情形;
 - (3) 其他情形, 全微分形式不变性.
5. 隐函数的求导公式
 - (1) 一个方程的情形: 隐函数存在定理 1、隐函数存在定理 2;
 - (2) 方程组的情形: 隐函数存在定理 3.
6. 多元函数微分学的几何应用
 - (1) 一元向量值函数及其导数;
 - (2) 空间曲线的切线与法平面;
 - (3) 曲面的切平面与法线.
7. 方向导数与梯度
 - (1) 方向导数;
 - (2) 梯度.
8. 多元函数的极值及其求法
 - (1) 多元函数的极值及最大值与最小值;
 - (2) 条件极值, 拉格朗日乘数法.

*9. 二元函数的泰勒公式

(1) 二元函数的泰勒公式;

(2) 极值充分条件的证明.

*10. 最小二乘法

二、基本要求

1. 理解多元函数的概念和二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念, 会求全微分, 了解全微分存在的必要条件, 了解全微分形式的不变性.
4. 掌握多元复合函数偏导数的求法.
5. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
6. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念, 会求它们的方程.
7. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数的极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值.
10. 了解多元函数最大值和最小值的概念, 并会解决一些简单的应用问题.

三、习题解答

习题 9-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集, 并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$;

(2) $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(3) $\{(x, y) | y > x^2\}$;

(4) $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

解 (1) 此集合是开集, 无界集; 导集为 $\mathbb{R}^2$, 边界为 $\{(x, y) | x=0 \text{ 或 } y=0\}$.

(2) 此集合既非开集也非闭集, 是有界集; 导集为 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 边界为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$.

(3) 此集合是开集, 区域, 无界集; 导集为 $\{(x, y) | y \geq x^2\}$, 边界为 $\{(x, y) | y = x^2\}$.

(4) 此集合为闭集, 有界集; 导集为集合本身, 边界为

$$\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 = 4\}.$$

2. 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

解
$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) \tan \frac{tx}{ty} = t^2 \left(x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right) = t^2 f(x, y).$$

3. 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

证明 $F(xy, uv) = \ln(xy) \cdot \ln(uv) = (\ln x + \ln y) \cdot (\ln u + \ln v)$
 $= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$
 $= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$

4. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

解 $f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{x+y+x-y} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$

5. 求下列各函数的定义域.

$$\begin{aligned} (1) \quad z &= \ln(y^2 - 2x + 1); & (2) \quad z &= \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}; \\ (3) \quad z &= \sqrt{x - \sqrt{y}}; & (4) \quad z &= \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \\ (5) \quad u &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} \quad (R > r > 0); \\ (6) \quad u &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

注: 求多元函数的定义域与求一元函数的定义域相类似, 就是先求出构成该函数的各个简单函数的定义域, 然后再求出它们的交集, 即为所求的定义域.

解 (1) $\{(x, y) | y^2 - 2x + 1 > 0\}.$
 (2) $\{(x, y) | x + y > 0, x - y > 0\}.$
 (3) $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}.$
 (4) $\{(x, y) | y - x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}.$
 (5) $\{(x, y, z) | r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$
 (6) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \geq z^2, x^2 + y^2 \neq 0\}.$

6. 求下列各极限.

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}; & \quad (2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}; & \quad (3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}; \\ (4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}; & \quad (5) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y}; & \quad (6) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}. \end{aligned}$$

解 (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$
 (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{1} = \ln 2.$

注: 上述两小题是利用多元初等函数在其定义域是连续的这个性质来求极限的, 即函数在该点

的极限值等于函数在该点的函数值.

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - (xy+4)}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{2 + \sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2 - e^{xy}} - 1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1 - e^{xy}} (\sqrt{2 - e^{xy}} + 1) = -1 \cdot 2 = -2.$$

注: 此题先运用了分母有理化, 然后又利用了当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $e^{xy} - 1 \sim xy$.

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2.$$

注: 本题利用了当 $(x, y) \rightarrow (2, 0)$ 时, $\tan(xy) \sim xy$.

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}} = \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2 y^2}} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

注: 本题利用了当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $1 - \cos(x^2 + y^2) \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.

*7. 证明下列极限不存在.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

注: 证明极限 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 不存在常用的方法有: (1) 找两条不同的路径, 使得点 P 沿着这两条路径趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限存在但不相等; (2) 找一条特殊的路径, 使得点 P 沿着这条路径趋于 P_0 时, $f(P)$ 的极限不存在. 本题采用第一种方法.

解 (1) 当点 (x, y) 沿直线 $y = \frac{1}{2}x, y = 2x$ 这两条路径趋于 $(0, 0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = \frac{1}{2}x}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{2}x}{x - \frac{1}{2}x} = 3, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = 2x}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2x}{x-2x} = -3.$$

故所求极限不存在.

(2) 当点 (x, y) 沿直线 $y = x, y = -x$ 这两条路径趋于 $(0, 0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 0} = 1, \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 4} = 0.$$

故所求极限不存在.

8. 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 在何处是间断的?

解 这个函数的定义域是 $\{(x, y) | y^2 - 2x \neq 0\}$, 也就是函数在曲线 $y^2 = 2x$ 上没有定义, 因此曲线 $y^2 = 2x$ 上的各点均为函数的间断点.

*9. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$.

因为 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, 要使 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\sqrt{x^2+y^2} < 2\varepsilon$,

所以取 $\delta = 2\varepsilon$, 则当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立, 即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

*10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

证明 取点 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 所以当 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$ 时, 有 $|x - x_0| < \rho(P, P_0) < \delta$, 从而有 $|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

习题 9-2

1. 求下列函数的偏导数.

$$(1) z = x^3y - y^3x; \quad (2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv}; \quad (3) z = \sqrt{\ln(xy)};$$

$$(4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy); \quad (5) z = \ln \tan \frac{x}{y}; \quad (6) z = (1 + xy)^y;$$

$$(7) u = x^{\frac{y}{z}}; \quad (8) u = \arctan(x - y)^z.$$

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$.

(2) 利用商的求导法则, 得

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{2u \cdot uv - (u^2 + v^2)v}{(uv)^2} = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{2v \cdot uv - (u^2 + v^2)u}{(uv)^2} = \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}.$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$(4) \frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) + 2 \cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y = y[\cos(xy) - \sin(2xy)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) + 2 \cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot x = x[\cos(xy) - \sin(2xy)].$$

$$(5) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{y \ln(1+xy)}) = (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right].$$

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x.$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2. 设 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, 求证 $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

证明 因为 $\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{l/g}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}$, $\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{l/g}} \cdot \left(-\frac{l}{g^2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$, 所以

$$l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = \pi\sqrt{l/g} - \pi\sqrt{l/g} = 0$$

3. 设 $z = e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$, 求证 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

证明 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2} e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$, 所以有

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} + e^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} = 2z.$$

4. 设 $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f_x(x, 1)$.

解 $f_x(x, y) = 1 + \frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y}$, 所以 $f_x(x, 1) = 1$.

5. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少?

解 设 $z = f(x, y)$, 按偏导数的几何意义, $f_x(2, 4)$ 就是曲线在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的斜率, 而 $f_x(2, 4) = \frac{1}{2}x \Big|_{x=2} = 1$, 所以所求倾角为 $\frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$(1) \quad z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2; \quad (2) \quad z = \arctan \frac{y}{x}; \quad (3) \quad z = y^x.$$

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -16xy.$$

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1}(1 + x \ln y).$$

7. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1)$, $f_{xz}(1, 0, 2)$, $f_{yz}(0, -1, 0)$ 和 $f_{zz}(2, 0, 1)$.

解 因为 $f_x = y^2 + 2xz$, $f_y = 2xy + z^2$, $f_z = 2zy + x^2$, $f_{xx} = 2z$, $f_{xz} = 2x$, $f_{yz} = 2z$, $f_{zz} = 2y$, $f_{zzx} = 0$, 所以有 $f_{xx}(0, 0, 1) = 2$, $f_{xz}(1, 0, 2) = 2$, $f_{yz}(0, -1, 0) = 0$, $f_{zz}(2, 0, 1) = 0$.

8. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 和 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = 1 + \ln(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

$$(1) \quad y = e^{-kn^2 t} \sin nx \text{ 满足 } \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

$$(2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ 满足 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

$$\text{证明} \quad (1) \text{ 因为 } \frac{\partial y}{\partial t} = -kn^2 e^{-kn^2 t} \sin nx, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = ne^{-kn^2 t} \cos nx, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

$$\text{所以有 } \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

$$(2) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \text{ 由于函数关于自变量对称, 得}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

$$\text{所以有 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

1. 求下列函数的全微分.

$$(1) z = xy + \frac{x}{y}; \quad (2) z = e^{\frac{y}{x}}; \quad (3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) u = x^{yz}.$$

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(y + \frac{1}{y}\right) dx + \left(x - \frac{x}{y^2}\right) dy.$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} (y dx - x dy).$$

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 所以}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (y dx - x dy).$$

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz} \ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz} \ln x$, 所以

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz.$$

2. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x=1, y=2$ 时的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{2}{3}$, 从而所求全微分

$$dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3} dx + \frac{2}{3} dy.$$

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} - \frac{y}{x}$, $dz = -\frac{y}{x^2} \Delta x + \frac{1}{x} \Delta y$, 所以当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量

$$\Delta z = \frac{1-0.2}{2+0.1} - \frac{1}{2} = -0.119, \text{ 全微分 } dz = -\frac{0.1}{4} + \frac{1}{2} \times (-0.2) = -0.125.$$

4. 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时的全微分.

解 因为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = ye^{xy} \Delta x + xe^{xy} \Delta y$,

所以当 $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时的全微分 $dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e$.

5. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续;

(2) $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续;

(3) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微分;

(4) $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质 P 推出性质 Q , 则下列四个选项中正确的是 ().

A. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)

B. (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)

C. (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1)

D. (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4)

解 由已证定理知, 二元函数可微分可推得二元函数偏导数存在且连续, 而偏导数连续可推得函数可微分, 也即得到 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), (4), 所以选 A.

*6. 计算 $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z = \sqrt{x^3 + y^3}$, 则 $z_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}, z_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sqrt{(x + \Delta x)^3 + (y + \Delta y)^3} &= \sqrt{x^3 + y^3} + \Delta z \\ &\approx \sqrt{x^3 + y^3} + dz = \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2 \Delta x + 3y^2 \Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}}. \end{aligned}$$

取 $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$, 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1 + 2^3} + \frac{3 \times 1 \times 0.02 + 3 \times 2^2 \times (-0.03)}{2\sqrt{1 + 2^3}} = 2.95.$$

*7. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值 ($\ln 2 = 0.693$).

解 设 $z = x^y$, 则 $z_x = yx^{y-1}, z_y = x^y \ln x$. 所以

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} = x^y + \Delta z \approx x^y + dz = x^y + yx^{y-1} \cdot \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y.$$

取 $x = 2, y = 1, \Delta x = -0.03, \Delta y = 0.05$, 可得

$$(1.97)^{1.05} \approx 2 - 0.03 + 2 \ln 2 \cdot 0.05 \approx 2.039.$$

*8. 已知边长为 $x = 6\text{m}$ 与 $y = 8\text{m}$ 的矩形, 如果 x 边增加 5cm 而 y 边减少 10cm , 问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \Delta x + y \Delta y).$$

所以当 $x = 6, y = 8, \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.1$ 时, 对角线的变化

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} (6 \times 0.05 - 8 \times 0.1) = -0.05,$$

也即这个矩形的对角线的长减少大约 5cm.

- *9.** 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1cm, 内高为 20cm, 内半径为 4cm. 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱形的体积 $V = \pi r^2 h$, 所求容器外壳体积就是圆柱体体积的增量 ΔV , 而

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

则当 $r = 4, h = 20, \Delta r = \Delta h = 0.1$ 时, $\Delta V \approx 2 \times 3.14 \times 4 \times 20 \times 0.1 + 3.1 \times 4^2 \times 0.1 \approx 55.3$, 即容器外壳的体积大约是 55.3cm^3 .

- *10.** 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为 $(7 \pm 0.1) \text{cm}$ 和 $(24 \pm 0.1) \text{cm}$. 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y , 则斜边长度为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\begin{aligned} |\Delta z| \approx |dz| &= \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x |\Delta x| + y |\Delta y|) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \delta_x + y \delta_y), \end{aligned}$$

可得 $\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \delta_x + y \delta_y)$. 则当 $x = 7, y = 24, \delta_x = 0.1, \delta_y = 0.1$ 时,

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}} (7 \times 0.1 + 24 \times 0.1) \approx 0.124.$$

即计算斜边长度的绝对误差约为 0.124cm.

- *11.** 测得一块三角形土地的两边边长分别为 $(63 \pm 0.1) \text{m}$ 和 $(78 \pm 0.1) \text{m}$, 这两边的夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$. 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b , 它们的夹角为 θ , 则三角形的面积为 $S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$,

$$\begin{aligned} |\Delta S| \approx |dS| &= \left| \frac{\partial S}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial S}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial S}{\partial \theta} \Delta \theta \right| \leq \left| \frac{\partial S}{\partial a} \right| |\Delta a| + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| |\Delta b| + \left| \frac{\partial S}{\partial \theta} \right| |\Delta \theta| \\ &= \frac{1}{2} b \sin \theta |\Delta a| + \frac{1}{2} a \sin \theta |\Delta b| + \frac{1}{2} ab \cos \theta |\Delta \theta| \\ &\leq \frac{1}{2} b \sin \theta \delta_a + \frac{1}{2} a \sin \theta \delta_b + \frac{1}{2} ab \cos \theta \delta_\theta, \end{aligned}$$

可得 $\delta_S = \frac{1}{2} b \sin \theta \delta_a + \frac{1}{2} a \sin \theta \delta_b + \frac{1}{2} ab \cos \theta \delta_\theta$,

则当 $a=63, b=78, \theta=\frac{\pi}{3}, \delta_a=0.1, \delta_b=0.1, \delta_\theta=\frac{\pi}{180}$ 时, 三角形面积的近似值为

$$S = \frac{1}{2} \times 63 \times 78 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \approx 2127.8 (\text{m}^2),$$

绝对误差为

$$\delta_s = \frac{1}{2} \times 78 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 63 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 63 \times 78 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180} \approx 27.6 (\text{m}^2),$$

相对误差为

$$\frac{\delta_s}{S} \approx \frac{27.6}{2127.8} \approx 1.30\%.$$

***12.** 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证明 设 $u = x + y$, 则

$$|\Delta u| \approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| = |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \leq \delta_x + \delta_y,$$

于是有 $\delta_u = \delta_x + \delta_y$, 即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

***13.** 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和; 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证明 设 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 则

$$|\Delta u| \approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| = |y \Delta x + x \Delta y| \leq |y| |\Delta x| + |x| |\Delta y| \leq |y| \delta_x + |x| \delta_y,$$

$$|\Delta v| \approx |dv| = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right| = \left| \frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2} \right| \leq \frac{|y| |\Delta x| + |x| |\Delta y|}{|y|^2} \leq \frac{|y| \delta_x + |x| \delta_y}{|y|^2},$$

于是有 $\delta_u = |y| \delta_x + |x| \delta_y$, $\delta_v = \frac{|y| \delta_x + |x| \delta_y}{|y|^2}$, 从而有

$$\frac{\delta_u}{|u|} = \frac{|y| \delta_x + |x| \delta_y}{|xy|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}, \quad \frac{\delta_v}{|v|} = \frac{1}{\left| \frac{x}{y} \right|} \cdot \frac{|y| \delta_x + |x| \delta_y}{|y|^2} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和; 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题 9-4

1. 设 $z = u^2 + v^2$, 而 $u = x + y, v = x - y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 4x,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot (-1) = 4y.$$

2. 设 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3 = \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{(3x - 2y)y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2) = -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x - 2y) - \frac{2x^2}{(3x - 2y)y^2}. \end{aligned}$$

3. 设 $z = e^{x-2y}$, 而 $x = \sin t$, $y = t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\text{解} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2 = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).$$

4. 设 $z = \arcsin(x - y)$, 而 $x = 3t$, $y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\text{解} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x - y)^2}} \cdot 3 + \frac{(-1)}{\sqrt{1 - (x - y)^2}} \cdot 12t^2 = \frac{3(1 - 4t^2)}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}}.$$

5. 设 $z = \arctan(xy)$, 而 $y = e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

$$\text{解} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + x^2 y^2} + \frac{x e^x}{1 + x^2 y^2} = \frac{(1 + x)e^x}{1 + x^2 e^{2x}}.$$

6. 设 $u = \frac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1}$, 而 $y = a \sin x$, $z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{ae^{ax}(y - z)}{a^2 + 1} + \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} \cdot a \cos x - \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x) = e^{ax} \sin x. \end{aligned}$$

7. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u + v$, $y = u - v$, 验证 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \\ &= \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

8. 求下列函数的一阶偏导数 (其中 f 具有一阶连续偏导数) .

$$(1) u = f(x^2 - y^2, e^{xy}); \quad (2) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right); \quad (3) u = f(x, xy, xyz).$$

解 (1) 令 $s = x^2 - y^2$, $t = e^{xy}$, 则函数 $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ 可视为由函数 $u = f(s, t)$ 及 $s = x^2 - y^2$, $t = e^{xy}$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2.$$

(2) 令 $s = \frac{x}{y}$, $t = \frac{y}{z}$, 则 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ 可视为由 $u = f(s, t)$ 及 $s = \frac{x}{y}$, $t = \frac{y}{z}$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_2.$$

(3) 令 $s = x$, $t = xy$, $r = xyz$, 则 $u = f(x, xy, xyz)$ 可视为由函数 $u = f(s, t, r)$ 及 $s = x$, $t = xy$, $r = xyz$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = xyf'_3.$$

9. 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \left[y + F(u) + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + y \left[x + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &= x \left[y + F(u) - \frac{y}{x}F'(u) \right] + y \left[x + F'(u) \right] = xy + xF(u) + xy = z + xy. \end{aligned}$$

10. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

证明 令 $u = x^2 - y^2$, 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-yf'(u) \cdot 2x}{f^2(u)} = -\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) + yf'(u) \cdot 2y}{f^2(u)} = \frac{f(u) + 2y^2 f'(u)}{f^2(u)},$$

所以 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2yf'(u)}{f^2(u)} + \frac{f(u) + 2y^2 f'(u)}{yf^2(u)} = \frac{1}{yf(u)} = \frac{z}{y^2}$.

11. 设 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u = x^2 + y^2$, 则 $z = f(x^2 + y^2)$ 可视为由函数 $z = f(u)$ 和 $u = x^2 + y^2$ 复合而成, 根据复合函数求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2 f''$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4y^2 f''.$$

*12. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数).

$$(1) z = f(xy, y); \quad (2) z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$$

$$(3) z = f(xy^2, x^2 y); \quad (4) z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y}).$$

解 (1) 令 $s = xy$, $t = y$, 则 $z = f(xy, y)$ 可视为由 $z = f(s, t)$ 及 $s = xy, t = y$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = yf'_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = xf'_1 + f'_2,$$

这里 f'_1, f'_2 仍然是以 s, t 为中间变量的关于变量 x, y 的函数. 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yf'_1) = yf''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = y^2 f''_{11},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yf'_1) = f'_1 + y \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{dt}{dy} \right) = f'_1 + xyf''_{11} + yf''_{12},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xf'_1 + f'_2) = x \left(f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{dt}{dy} \right) + f''_{21} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \cdot \frac{dt}{dy} = x^2 f''_{11} + 2xf''_{12} + f''_{22}.$$

注: 因为 f 具有二阶连续偏导数, 所以 $f_{12}'' = f_{21}''$.

(2) 令 $s = x$, $t = \frac{x}{y}$, 则 $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$ 可视为由 $z = f(s, t)$ 和 $s = x$, $t = \frac{x}{y}$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f_1' + \frac{1}{y} f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_2',$$

这里 f_1', f_2' 仍然是以 s, t 为中间变量的关于变量 x, y 的函数. 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1' + \frac{1}{y} f_2' \right) = f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f_{12}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{1}{y} \left(f_{21}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f_{22}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) = f_{11}'' + \frac{2}{y} f_{12}'' + \frac{1}{y^2} f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(f_1' + \frac{1}{y} f_2' \right) = f_{12}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y} f_{22}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_{12}'' - \frac{1}{y^2} f_2' - \frac{x}{y^3} f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} f_2' \right) = \frac{2x}{y^3} f_2' - \frac{x}{y^2} f_{22}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{2x}{y^3} f_2' + \frac{x^2}{y^4} f_{22}''.$$

(3) 令 $s = xy^2$, $t = x^2y$, 则 $z = f(xy^2, x^2y)$ 可视为由 $z = f(s, t)$ 和 $s = xy^2$, $t = x^2y$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = y^2 f_1' + 2xy f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 2xy f_1' + x^2 f_2',$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (y^2 f_1' + 2xy f_2') = y^2 \left(f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f_{12}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + 2y f_2' + 2xy \left(f_{21}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f_{22}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right)$$

$$= y^2 (y^2 f_{11}'' + 2xy f_{12}'') + 2y f_2' + 2xy (y^2 f_{21}'' + 2xy f_{22}'')$$

$$= y^4 f_{11}'' + 4xy^3 f_{12}'' + 2y f_2' + 4x^2 y^2 f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 f_1' + 2xy f_2') = 2y f_1' + y^2 \left(f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f_{12}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) + 2x f_2' + 2xy \left(f_{21}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f_{22}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right)$$

$$= 2y f_1' + y^2 (2xy f_{11}'' + x^2 f_{12}'') + 2y f_2' + 2xy (2xy f_{21}'' + x^2 f_{22}'')$$

$$= 2y f_1' + 2x f_2' + 2xy^3 f_{11}'' + 5x^2 y^2 f_{12}'' + 2x^3 y f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy f_1' + x^2 f_2') = 2x f_1' + 2xy \left(f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f_{12}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) + x^2 \left(f_{21}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f_{22}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right)$$

$$= 2x f_1' + 2xy (2xy f_{11}'' + x^2 f_{12}'') + x^2 (2xy f_{21}'' + x^2 f_{22}'')$$

$$= 2x f_1' + 4x^2 y^2 f_{11}'' + 4x^3 y f_{12}'' + x^4 f_{22}''.$$

(4) 令 $s = \sin x$, $t = \cos y$, $r = e^{x+y}$, 则 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$ 可视为由函数 $z = f(s, t, r)$ 及 $s = \sin x$, $t = \cos y$, $r = e^{x+y}$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \cos x f_1' + e^{x+y} f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dy} + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\ &= -\sin x f'_1 + \cos x \left(f''_{11} \cdot \frac{ds}{dx} + f''_{13} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{31} \cdot \frac{ds}{dx} + f''_{33} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= -\sin x f'_1 + \cos x (\cos x f''_{11} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} (\cos x f''_{31} + e^{x+y} f''_{33}) \\ &= e^{x+y} f'_3 - \sin x f'_1 + \cos^2 x f''_{11} + 2e^{x+y} \cos x f''_{13} + e^{2(x+y)} f''_{33} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\ &= \cos x \left(f''_{12} \cdot \frac{dt}{dy} + f''_{13} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{32} \cdot \frac{dt}{dy} + f''_{33} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &= \cos x (-\sin y f''_{12} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} (-\sin y f''_{32} + e^{x+y} f''_{33}) \\ &= e^{x+y} f'_3 - \cos x \sin y f''_{12} + e^{x+y} \cos x f''_{13} - e^{x+y} \sin y f''_{32} + e^{2(x+y)} f''_{33} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (-\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3) \\ &= -\cos y f'_2 - \sin y \left(f''_{22} \cdot \frac{dt}{dy} + f''_{23} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left(f''_{32} \cdot \frac{dt}{dy} + f''_{33} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &= -\cos y f'_2 - \sin y (-\sin y f''_{22} + e^{x+y} f''_{23}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} (-\sin y f''_{32} + e^{x+y} f''_{33}) \\ &= e^{x+y} f'_3 - \cos y f'_2 + \sin^2 y f''_{22} - 2e^{x+y} \sin y f''_{23} + e^{2(x+y)} f''_{33}. \end{aligned}$$

*13. 设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续, 而

$$x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}, y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2},$$

$$\text{证明} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$\text{证明} \quad \text{因为} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\text{所以} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{又因为} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

习题 9-5

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$, 则

$$F_x = e^x - y^2, F_y = \cos y - 2xy,$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy}.$$

2. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$, 则

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2},$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x + y}{x - y}.$$

3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$, 则

$$F_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, F_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, F_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F_x = \frac{1}{z}, \quad F_y = -\frac{y}{z} \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) = \frac{1}{y}, \quad F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x+z}{z^2},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证明 令 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$, 则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z) - 1, \quad F_y = 4\cos(x+2y-3z) - 2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z) \cdot (-3) + 3 = -3F_x,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_z} - \frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$

6. 设 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

证明 因为 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$

所以 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$

7. 设 $\phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

证明 令 $u = cx - az, v = cy - bz$, 则函数 $\phi(cx - az, cy - bz)$ 可视为由函数 $\phi(u, v)$ 和 $u = cx - az, v = cy - bz$ 复合而成, 所以

$$\phi_x = \phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = c\phi_u, \quad \phi_y = \phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = c\phi_v, \quad \phi_z = \phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a\phi_u - b\phi_v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\phi_x}{\phi_z} = \frac{c\phi_u}{a\phi_u + b\phi_v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\phi_y}{\phi_z} = \frac{c\phi_v}{a\phi_u + b\phi_v},$$

从而有 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{c\phi_u}{a\phi_u + b\phi_v} + b \frac{c\phi_v}{a\phi_u + b\phi_v} = c$.

*8. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则

$$F_x = -yz, \quad F_z = e^z - xy,$$

于是有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}$, 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{yz}{e^z - xy} \right) = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) - yz \left(e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)}{(e^z - xy)^2} = \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

*9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$, 则

$$F_x = -3yz, \quad F_y = -3xz, \quad F_z = 3z^2 - 3xy,$$

于是有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right) = \frac{\left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) (z^2 - xy) - yz \left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} \\ &= \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy} \right) (z^2 - xy) - yz \left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} = \frac{z(z^4 - 2xyz^3 - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3}. \end{aligned}$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数.

(1) 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

(2) 设 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求 $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$.

(3) 设 $\begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y). \end{cases}$ 其中 f, g 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$;

(4) 设 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 分别在两个方程两端同时对 x 求导, 得 $\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}, \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$

$$\text{整理, 得} \begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + 2x = 0, \\ 2y \frac{dy}{dx} + 3z \frac{dz}{dx} + x = 0. \end{cases}$$

所以当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ x & 3z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2y & x \end{vmatrix}}{D} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z + 1}.$$

(2) 分别在两个方程两端同时对 z 求导, 得 $\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z = 0. \end{cases}$

所以当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2z & 2y \end{vmatrix}}{D} = \frac{2z - 2y}{2(y - x)} = \frac{z - y}{y - x}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2z + 2x}{2(y - x)} = \frac{x - z}{y - x}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 分别在两个方程两端同时对 x

求偏导, 得 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \left(u + x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_2' \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g_1' \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) + 2g_2' yv \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$ 移项整理得

$$\begin{cases} (xf_1' - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f_2' \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + uf_1' = 0, \\ g_1' \frac{\partial u}{\partial x} + (2yvg_2' - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - g_1' = 0. \end{cases}$$

所以当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} xf_1' - 1 & f_2' \\ g_1' & 2yvg_2' - 1 \end{vmatrix} = (xf_1' - 1)(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1' \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\begin{vmatrix} uf_1' & f_2' \\ -g_1' & 2yvg_2' - 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-uf_1'(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1'}{(xf_1' - 1)(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1'}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\begin{vmatrix} xf_1' - 1 & uf_1' \\ g_1' & -g_1' \end{vmatrix}}{D} = \frac{g_1'(xf_1' + uf_1' - 1)}{(xf_1' - 1)(2yvg_2' - 1) - f_2'g_1'}. \end{aligned}$$

(4) 此方程组可以确定两个二元隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 在两个方程两端分别同时对 x, y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 1 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \sin v + u \cos v \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cos v + u \sin v \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = e^u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \sin v + u \cos v \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = e^u \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cos v + u \sin v \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

移项整理得

$$\begin{cases} (e^u + \sin v) \frac{\partial u}{\partial x} + u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0, \\ (e^u - \cos v) \frac{\partial u}{\partial x} + u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}, \quad \begin{cases} (e^u + \sin v) \frac{\partial u}{\partial y} + u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ (e^u - \cos v) \frac{\partial u}{\partial y} + u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0. \end{cases}$$

所以当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} e^u + \sin v & u \cos v \\ e^u - \cos v & u \sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & u \cos v \\ 0 & u \sin v \end{vmatrix}}{D} = \frac{-u \sin v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & u \cos v \\ -1 & u \sin v \end{vmatrix}}{D} = \frac{u \cos v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & -1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\cos v - e^u}{ue^u(\sin v - \cos v) + u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & 0 \\ e^u - \cos v & -1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{e^u + \sin v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}.$$

11. 设 $y = f(x, t)$, 而 $t = t(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的函数, 其中 f, F 都具有二阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明 构造方程组 $\begin{cases} y = f(x, t) \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$, 则它可以确定两个一元隐函数 $y = y(x), t = t(x)$.

分别在两个方程两端同时对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 0. \end{cases} \quad \text{整理得} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

所以当系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

习题 9-6

1. 设 $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{g}(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{u}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t) = \mathbf{v}$,

证明 $\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)] = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

证明

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} (f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t), f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t), f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} [f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)] \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t) \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

2. 下列各题中, $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ 是空间中质点 M 在时刻 t 的位置, 求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $t_0 = 1$;

(2) $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$;

(3) $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (2\ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$, $t_0 = 1$.

解 (1) 速度向量 $\mathbf{v}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=1} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})|_{t=1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 加速度 $\mathbf{a}_0 = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{t=1} = 2\mathbf{j}$, 速率

$$|\mathbf{v}_t| = |\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{5 + 4t^2}.$$

同理, (2) $\mathbf{v}_0 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_0 = -3\mathbf{j}$, $|\mathbf{v}_t| = \sqrt{20 + 5\cos^2 t}$.

(3) $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $|\mathbf{v}_t| = \sqrt{5t^2 + \frac{4}{(t+1)^2}}$.

3. 求曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + \left(4\sin \frac{t}{2}\right)\mathbf{k}$ 在与 $t_0 = \frac{\pi}{2}$ 相应点处的切线及法平面方程.

解 $t_0 = \frac{\pi}{2}$ 对应的点为 $\left((t - \sin t), (1 - \cos t), \left(4\sin \frac{t}{2}\right) \right) \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2} \right)$, 曲线在该点的切向

量为 $f'(t_0) = (1, 1, \sqrt{2})$, 于是所求切线方程为

$$\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + y - 1 + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0,$$

即

$$x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

4. 求曲线 $x = \frac{t}{1+t}$, $y = \frac{1+t}{t}$, $z = t^2$ 在对应于 $t_0 = 1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 对应于 $t_0 = 1$ 的点为 $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$, 该点处的切向量为

$$\mathbf{T} = (x'(1), y'(1), z'(1)) = \left(\frac{1}{(1+t)^2}, -\frac{1}{t^2}, 2t \right) \bigg|_{t=1} = \left(\frac{1}{4}, -1, 2 \right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2},$$

即

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}.$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \right) - (y - 2) + 2(z - 1) = 0,$$

即

$$2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

5. 求曲线 $y^2 = 2mx$, $z^2 = m - x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

解 将曲线方程两端对 x 求导得

$$2y \frac{dy}{dx} = 2m, 2z \frac{dz}{dx} = -1, \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}, \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量为 $\mathbf{T} = \left(1, \frac{m}{y_0}, -\frac{1}{2z_0} \right)$. 于是所求切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z - z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

所求法平面方程 $(x - x_0) + \frac{m}{y_0}(y - y_0) - \frac{1}{2z_0}(z - z_0) = 0$.

6. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解 曲线方程两端分别对 x 求导得

$$\begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = -2x + 3, \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2. \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \begin{vmatrix} -2x+3 & 2z \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{10x-4z-15}{-10y-6z}, \\ \frac{dz}{dx} &= \begin{vmatrix} 2y & -2x+3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{6x+4y-9}{-10y-6z}. \end{aligned}$$

故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}, \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}$. 于是在点 $(1, 1, 1)$ 处的切向量取为 $(16, 9, -1)$. 所求切线为

$$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}.$$

所求法平面为 $16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0$, 即 $16x + 9y - z - 24 = 0$.

7. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 由于 $x'=1, y'=2t, z'=3t^2$, 设所求点对应的参数为 a , 于是该点处的切向量可取为 $\mathbf{T} = (1, 2a, 3a^2)$. 已知平面的法向量为 $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$, 由切线与平面平行, 得

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 1 + 4a + 3a^2 = 0,$$

解得 $a = -1$ 或 $a = -\frac{1}{3}$. 故所求点为 $(-1, 1, -1)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

8. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$, 则法向量为

$$\mathbf{n}|_{(2,1,0)} = (F_x, F_y, F_z)|_{(2,1,0)} = (y, x, e^z - 1)|_{(2,1,0)} = (1, 2, 0).$$

于是所求切平面方程为 $(x-2) + 2(y-1) = 0$, 即 $x + 2y = 4$. 所求法线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{0}.$$

9. 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程.

解 方法同题 8. 所求切平面方程为

$$ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0,$$

即

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1.$$

所求法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$. 故法向量为 $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 4y, 2z)$. 所求切平面与已知平面平行, 故

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{-1} = \frac{2z}{2}, \text{ 即 } x = -2y, z = -4y.$$

代入椭球面方程得 $22y^2 = 1$, 故 $y = \pm\sqrt{\frac{1}{22}}$, $x = \mp\sqrt{\frac{2}{11}}$, $z = \mp 2\sqrt{\frac{2}{11}}$.

于是所求切平面方程为

$$\left(x \pm \sqrt{\frac{2}{11}}\right) - \left(y \mp \sqrt{\frac{1}{22}}\right) + 2\left(z \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right) = 0,$$

即
$$x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$. 故法向量为

$$\mathbf{n}|_{(-1, -2, 3)} = (F_x, F_y, F_z)|_{(-1, -2, 3)} = (6x, 2y, 2z)|_{(-1, -2, 3)} = (-6, -4, 6).$$

xOy 面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$, 则所求夹角的余弦即 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{n}_1$ 的夹角的余弦为

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{6}{\sqrt{36+16+36} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证明 设 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$, 则曲面在点 (x, y, z) 处的法向量为

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right),$$

于是曲面在任一点 $M(b, c, d)$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}(x-b) + \frac{1}{2\sqrt{c}}(y-c) + \frac{1}{2\sqrt{d}}(z-d) = 0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{y}{\sqrt{c}} + \frac{z}{\sqrt{d}} = \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = \sqrt{a},$$

所以截距之和为 $\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}) = (\sqrt{a})^2 = a$.

13. 设 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{v}(t)$ 是可导的向量值函数, 证明:

$$(1) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t);$$

$$(2) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t);$$

$$(3) \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$$

$$\begin{aligned}\text{证明 (1)} \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{u}(t + \Delta t) \pm \mathbf{v}(t + \Delta t)] - [\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \pm \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)] \cdot \mathbf{v}(t + \Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t) \cdot [\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)]}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}(t + \Delta t) + \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)]}{\Delta t} \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t).\end{aligned}$$

(3) 同(2), 略.

习题 9-7

1. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

解 由题意得, 方向 $\mathbf{l} = (1, \sqrt{3})$, $\mathbf{e}_l = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 又

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2x|_{(1,2)} = 2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 4,$$

故
$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1,2)} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z = \ln(x + y)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 沿着这条抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $y^2 = 4x$ 两端对 x 求导, 得 $2y \frac{dy}{dx} = 4$. 于是

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{2}{y} \right|_{(1,2)} = 1,$$

切线方向 $\mathbf{l} = (1, 1)$, $\mathbf{e}_l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 又

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{1}{x+y} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{1}{x+y} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{3}.$$

故
$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(1,2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在该点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 两端分别对 x 求导, 得 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$. 于是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, k = \frac{dy}{dx} \bigg|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{b}{a},$$

法线斜率为 $k' = -\frac{1}{k} = \frac{a}{b}$, 内法线方向 $l = (-b, -a)$, $e_l = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 又

$$\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{2x}{a^2} \bigg|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{2y}{b^2} \bigg|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

故 $\frac{\partial z}{\partial l} \bigg|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2+b^2)}.$

4. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz, \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy,$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(1,1,2)} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{(1,1,2)} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{(1,1,2)} = 11.$

又 $e_l = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right),$

故 $\frac{\partial u}{\partial l} \bigg|_{(1,1,2)} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5.$

5. 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 14)$ 的方向的方向导数.

解 由题意, 得方向 $l = (4, 3, 12)$, $e_l = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right).$

又 $\frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(5,1,2)} = yz \bigg|_{(5,1,2)} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{(5,1,2)} = xz \bigg|_{(5,1,2)} = 10, \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{(5,1,2)} = xy \bigg|_{(5,1,2)} = 5.$

故 $\frac{\partial u}{\partial l} \bigg|_{(5,1,2)} = 2 \cdot \frac{4}{13} + 10 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{98}{13}.$

6. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上点 $(1, 1, 1)$ 处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点处的切线方向. 因为 $x' = 1, y' = 2t, z' = 3t^2$, 所以曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切

线的方向向量可取为 $T = (1, 2, 3), e_T = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$

又 $\frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(1,1,1)} = 2x \bigg|_{(1,1,1)} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{(1,1,1)} = 2y \bigg|_{(1,1,1)} = 2, \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{(1,1,1)} = 2z \bigg|_{(1,1,1)} = 2.$

故

$$\left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{(1,1,1)} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \right) = \frac{6}{7} \sqrt{14}.$$

7. 求函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, 则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z$. 于是球面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的外法线方向向量可取为 $\mathbf{l} = (2x_0, 2y_0, 2z_0), \mathbf{e}_l = (x_0, y_0, z_0)$.

$$\text{又 } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = 1. \text{ 故}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = x_0 + y_0 + z_0.$$

8. 设 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求

$$\text{grad} f(0, 0, 0) \text{ 及 } \text{grad} f(1, 1, 1).$$

$$\text{解 } \text{grad} f(x, y, z) = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = (2x + y + 3)\mathbf{i} + (4y + x - 2)\mathbf{j} + (6z - 6)\mathbf{k}$$

$$\text{grad} f(0, 0, 0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \quad \text{grad} f(1, 1, 1) = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

9. 设函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 的各个偏导数都存在且连续, 证明:

$$(1) \nabla(cu) = c\nabla(u) \quad (\text{其中 } c \text{ 为常数}); \quad (2) \nabla(u \pm v) = \nabla(u) \pm \nabla(v);$$

$$(3) \nabla(uv) = v\nabla(u) + u\nabla(v); \quad (4) \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla(u) - u\nabla(v)}{v^2}.$$

$$\text{证明 } (1) \nabla(cu) = \left(c \frac{\partial u}{\partial x}, c \frac{\partial u}{\partial y}, c \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = c\nabla(u).$$

$$(2) \nabla(u \pm v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \pm \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \pm \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \nabla(u) \pm \nabla(v).$$

$$(3) \nabla(uv) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv), \frac{\partial}{\partial y}(uv), \frac{\partial}{\partial z}(uv) \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}v + u \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}v + u \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}v + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = v \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = v\nabla(u) + u\nabla(v).$$

$$(4) \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right) \right) = \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}v - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{\frac{\partial u}{\partial y}v - u \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}, \frac{\frac{\partial u}{\partial z}v - u \frac{\partial v}{\partial z}}{v^2} \right) \\ = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{u}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{v\nabla(u) - u\nabla(v)}{v^2}.$$

10. 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $P_0(1, -1, 2)$ 处变化最快的方向, 并求沿这个方向的方向导数.

解 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = y^2 \mathbf{z} \mathbf{i} + 2xyz \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k}$, $\nabla u|_{P_0} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

由方向导数与梯度的关系可知, $u = xy^2z$ 在点 $P_0(1, -1, 2)$ 处沿 $\mathbf{n} = \nabla u|_{P_0} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的方向增加最快, 其方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{P_0} = \left| \nabla u|_{P_0} \right| = \sqrt{21};$$

沿 $\mathbf{n}_1 = -\nabla u|_{P_0} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 方向减少最快, 其方向导数为 $\left. \frac{\partial u}{\partial n_1} \right|_{P_0} = -\left| \nabla u|_{P_0} \right| = -\sqrt{21}$.

习题 9-8

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是 ().

- A. 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点 B. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
C. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点 D. 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

解 令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $f(x, y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4)$. 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\rho \rightarrow 0$.

由于 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近的值主要取决于 xy 的值, 而 xy 在点 $(0, 0)$ 附近符号不定, 故点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点, 应选 A.

2. 求函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = 4 - 2x = 0 \\ f_y = -4 - 2y = 0 \end{cases}$$

求得驻点为 $(2, -2)$. 又

$$A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0, B = f_{xy}(2, -2) = 0, C = f_{yy}(2, -2) = -2, AC - B^2 = 4 > 0,$$

由判定极值的充分条件知: 在 $(2, -2)$ 处, 函数取得极大值 $f(2, -2) = 8$.

3. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = (6 - 2x)(4y - y^2) = 0 \\ f_y = (6x - x^2)(4 - 2y) = 0 \end{cases}$$

求得五组解:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 6, \\ y_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_5 = 6, \\ y_5 = 4. \end{cases}$$

又 $f_{xx}(x, y) = -2(4y - y^2)$, $f_{xy}(x, y) = 4(3 - x)(2 - y)$, $f_{yy}(x, y) = -2(6x - x^2)$.

由判定极值的充分条件知:

在 $(0,0)$ 处, $A = f_{xx}(0,0) = 0, B = f_{xy}(0,0) = 24, C = f_{yy}(0,0) = 0, AC - B^2 = -24^2 < 0$, 故 $f(0,0)$ 不是极值;

在 $(0,4)$ 处, $A = f_{xx}(0,4) = 0, B = f_{xy}(0,4) = -24, C = f_{yy}(0,4) = 0, AC - B^2 = -24^2 < 0$, 故 $f(0,4)$ 不是极值;

在 $(3,2)$ 处, $A = f_{xx}(3,2) = -8 < 0, B = f_{xy}(3,2) = 0, C = f_{yy}(3,2) = -18, AC - B^2 = 144 > 0$, 故函数在 $(3,2)$ 点取到极大值, 极大值为 $f(3,2) = 36$;

在 $(6,0)$ 处, $A = f_{xx}(6,0) = 0, B = f_{xy}(6,0) = -24, C = f_{yy}(6,0) = 0, AC - B^2 = -24^2 < 0$, 故 $f(6,0)$ 不是极值;

在 $(6,4)$ 处, $A = f_{xx}(6,4) = 0, B = f_{xy}(6,4) = 24, C = f_{yy}(6,4) = 0, AC - B^2 = -24^2 < 0$, 故 $f(6,4)$ 不是极值.

4. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ f_y(x, y) = e^{2x}(2 + 2y) = 0 \end{cases},$$

求得驻点为 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. 又

$$A = f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2e > 0, B = f_{xy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 0, C = f_{yy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 2e, AC - B^2 = 4e^2 > 0,$$

由判定极值的充分条件知, 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处, 函数取到极小值 $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}$.

5. 求函数 $z = xy$ 在适合附加条件 $x + y = 1$ 下的极大值.

解 由 $x + y = 1$ 得 $y = 1 - x$, 代入 $z = xy$ 得 $z = x(1 - x)$.

又 $\frac{dz}{dx} = 1 - 2x = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

由于 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{\frac{1}{2}} = -2 < 0$, 所以根据一元函数取得极值的充分条件知 $x = \frac{1}{2}$ 为极大值点, 极大值为

$$z = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两个直角边之长分别为 x, y , 则周长

$$S = x + y + l (0 < x, y < l).$$

则问题转化为求周长 S 在 $x^2 + y^2 = l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x, y) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2).$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0, \end{cases}$$

得 $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$, 代入 $x^2 + y^2 = l^2$, 得 $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2l}$, 于是 $x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}\right)$ 是唯一可能的极值点, 根据问题性质可知这种周长最大的三角形一定存在, 所以在斜边为 l 的一切直角三角形中, 周长最大的是等腰直角三角形.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.
解 设水池的长宽高分别为 x, y, z , 则水池的表面积为

$$S = xy + 2xz + 2yz (x, y, z > 0).$$

约束条件为 $xyz = k$. 作拉格朗日函数 $L(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - k)$. 解方程组

$$\begin{cases} L_x = y + 2z + \lambda yz = 0, \\ L_y = x + 2z + \lambda xz = 0, \\ L_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ xyz = k, \end{cases}$$

得 $x = y = \sqrt[3]{2k}, z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}, \lambda = -\sqrt[3]{\frac{32}{k}}$. $\left(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$ 是唯一可能的极值点, 所以表面积最小的水池的长和宽都应是 $\sqrt[3]{2k}$, 高为 $\frac{\sqrt[3]{2k}}{2}$.

8. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离的平方之和最小.

解 设所求点为 (x, y) , 则此点到三直线的距离分别是 $|x|, |y|, \frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$, 其平方和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0, \end{cases}$$

求得唯一可能的极值点 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$, 所以所求点为 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $p-x$. 假设矩形绕长为 $p-x$ 的边旋转, 则所成圆柱体的体积为 $V = \pi x^2(p-x)$. 由 $\frac{dV}{dx} = \pi x(2p-3x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{2p}{3}$. 由于驻点唯一, 所以矩形当边长为 $\frac{2p}{3}$ 与 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, (x, y, z) 是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则长方体的长、宽、高分别为 $2x$ 、 $2y$ 、 $2z$, 体积为 $V = 8xyz$.

令 $L(x, y, z) = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$, 解方程组

$$\begin{cases} L_x = 8yz + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 8xz + 2\lambda y = 0, \\ L_z = 8xy + 2\lambda z = 0, \end{cases}$$

得 $x = y = z = -\frac{\lambda}{4}$, 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 得 $\lambda = -\frac{4a}{\sqrt{3}}$, 故 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 是唯一可能的极值点, 所以当长方体的长、宽、高都是 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大.

11. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求该椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解 设椭圆上的点为 (x, y, z) , 则椭圆上的点到原点的距离平方为 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

x, y, z 满足 $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \end{cases} \quad (3)$$

式(1)减去式(2), 得 $(1 + \lambda)(x - y) = 0$, 故 $\lambda = -1$ 或 $x = y$.

由 $\lambda = -1$ 得 $\mu = 0, z = -\frac{1}{2}$, 不合题意, 故舍去.

将 $x = y$ 代入 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 1$ 得 $x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}$, 于是得到两个可能的极值点

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right), M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right).$$

由于 $2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{3})^2 = 9 \mp 5\sqrt{3}$, 故距离的最大值与最小值分别是

$$d_{\max} = \sqrt{9+5\sqrt{3}}, d_{\min} = \sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

12. 设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. 该圆板被加热, 以致在点 (x, y) 的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x.$$

求该圆板的最热点与最冷点.

解 解方程组

$$\begin{cases} T_x = 2x - 1 = 0, \\ T_y = 4y = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. $T_1 = T|_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)} = -\frac{1}{4}$.

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上, $T = 2 - (x^2 + x) = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$. 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 有边界上的最大值

$T_2 = \frac{9}{4}$, $x = 1$ 时, 有边界上的最小值 $T_3 = 0$.

比较知, 最热点在 $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $T_{\max} = \frac{9}{4}$, 最冷点在 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $T_{\min} = -\frac{1}{4}$.

13. 形状为椭圆 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器的点 (x, y, z) 的温度 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, & (1) \\ L_y = 4z + 2\lambda y = 0, & (2) \\ L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0, & (3) \end{cases}$$

由式(1)得 $x = 0$ 或 $\lambda = -2$. 将 $\lambda = -2$ 代入式(2)、式(3)得 $y = z = -\frac{4}{3}$. 再 $y = z = -\frac{4}{3}$ 将代入约束条件

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \quad (4)$$

得 $x = \pm\frac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点 $M_1\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right), M_2\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

若 $x = 0$, 由式(2)、式(3)、式(4)得 $\lambda = 0, y = 4, z = 0$; $\lambda = \sqrt{3}, y = -2, z = \sqrt{3}$; $\lambda = -\sqrt{3}, y = -2, z = -\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能的极值点:

$$M_3(0, 4, 0), M_4(0, -2, \sqrt{3}), M_5(0, -2, -\sqrt{3}).$$

比较 T 在上述五个可能极值点处的数值知: $T|_{M_1} = T|_{M_2} = \frac{1928}{3}$ 为最大, 因此探测器表面的最

热的点为 $M\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

*习题 9-9

1. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点 $(1, -2)$ 的泰勒公式.

解 $f(1, -2) = 5, f_x(1, -2) = (4x - y - 6)|_{(1, -2)} = 0, f_y(1, -2) = (-x - 2y - 3)|_{(1, -2)} = 0,$

$$f_{xx}(1, -2) = 4, f_{xy}(1, -2) = -1, f_{yy}(1, -2) = -2.$$

此函数的 3 阶及以上的偏导数均为 0, 故

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + f_x(1, -2)(x-1) + f_y(1, -2)(y+2) + \frac{1}{2!}[f_{xx}(1, -2)(x-1)^2 + \\ &\quad 2f_{xy}(1, -2)(x-1)(y+2) + f_{yy}(1, -2)(y+2)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5 + \frac{1}{2} [4(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2] \\
 &= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.
 \end{aligned}$$

2. 求函数 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ 在点 $(0, 0)$ 的三阶泰勒公式.

解 $f_x = f_{xx} = f_{xxx} = e^x \ln(1+y)$, $f_y = \frac{e^x}{1+y} = f_{xy}$, $f_{yy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}$, $f_{yyy} = \frac{2e^x}{(1+y)^3}$. 令

$$h = x - 0, k = y - 0, \text{ 则 } f(0, 0) = 0, \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(0, 0) = hf_x(0, 0) + kf_y(0, 0) = k,$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(0, 0) = h^2 f_{xx}(0, 0) + 2hkf_{xy}(0, 0) + k^2 f_{yy}(0, 0) = 2hk - k^2,$$

$$\begin{aligned}
 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(0, 0) &= h^3 f_{xxx}(0, 0) + 3h^2kf_{xxy}(0, 0) + 3hk^2f_{xyy}(0, 0) + k^3f_{yyy}(0, 0) \\
 &= 3h^2k - 3hk^2 + 2k^3,
 \end{aligned}$$

故 $f(x, y) = e^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3$, 其中

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{1}{4!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f(\theta h, \theta k) \right]_{h=x, k=y} \\
 &= \frac{e^{\theta x}}{24} \left[x^4 \ln(1+\theta y) + \frac{4x^3y}{1+\theta y} - \frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2} + \frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1+\theta y)^4} \right], (0 < \theta < 1).
 \end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x, y) = \sin x \sin y$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.

解

$$\begin{aligned}
 f_x &= \cos x \sin y, f_y = \sin x \cos y, f_{xx} = -\sin x \sin y, f_{xy} = \cos x \cos y, f_{yy} = -\sin x \sin y, \\
 f_{xxx} &= -\cos x \sin y, f_{xxy} = -\sin x \cos y, f_{xyy} = -\cos x \sin y, f_{yyy} = -\sin x \cos y.
 \end{aligned}$$

$$\text{于是 } f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = hf_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + kf_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k,$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = h^2 f_{xx}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + 2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k^2 f_{yy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}h^2 + hk - \frac{1}{2}k^2,$$

其中 $h = x - \frac{\pi}{4}, k = y - \frac{\pi}{4}$. 故

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] + R_2,$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } R_2 &= \frac{1}{3!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(\xi, \eta) \right]_{h=x-\frac{\pi}{4}, k=y-\frac{\pi}{4}} \\
 &= -\frac{1}{6} \left[\cos \xi \sin \eta \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + 3 \sin \xi \cos \eta \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 \left(y - \frac{\pi}{4} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$3 \cos \xi \sin \eta \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \sin \xi \cos \eta \left(y - \frac{\pi}{4} \right)^3 \Big],$$

$$\xi = \frac{\pi}{4} + \theta \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \eta = \frac{\pi}{4} + \theta \left(y - \frac{\pi}{4} \right), 0 < \theta < 1.$$

4. 利用函数 $f(x, y) = x^y$ 的三阶泰勒公式, 计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解 先求 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 1)$ 处的三阶泰勒公式. 令 $h = x - 1, k = y - 1$, 则

$$f(1, 1) = 1, f_x(1, 1) = yx^{y-1} \Big|_{(1,1)} = 1, f_y(1, 1) = x^y \ln x \Big|_{(1,1)} = 0, f_{xx}(1, 1) = y(y-1)x^{y-2} \Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{xy}(1, 1) = \left[x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \right] \Big|_{(1,1)} = 1, f_{yy}(1, 1) = x^y \ln^2 x \Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$f_{xxx}(1, 1) = y(y-1)(y-2)x^{y-3} \Big|_{(1,1)} = 0, f_{xxy}(1, 1) = \left[(2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x \right] \Big|_{(1,1)} = 1,$$

$$f_{yyy}(1, 1) = \left[2x^{y-1} \ln x + yx^{y-1} \ln^2 x \right] \Big|_{(1,1)} = 0, f_{yyy}(1, 1) = x^y \ln^3 x \Big|_{(1,1)} = 0.$$

$$\text{从而 } x^y = 1 + (x-1) + \frac{1}{2!} [2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!} [3(x-1)^2(y-1)] + R_3$$

$$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2} (x-1)^2 (y-1) + R_3$$

$$\text{于是 } 1.1^{1.02} \approx 1 + 0.1 + 0.1 \times 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.1^2 \times 0.02 = 1.1021.$$

5. 求函数 $f(x, y) = e^{x+y}$ 在点 $(0, 0)$ 的 n 阶泰勒公式.

解 $f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = e^{x+y} \Big|_{(0,0)} = 1, f_y(0, 0) = e^{x+y} \Big|_{(0,0)} = 1$. 用数学归纳法可证

$$f_{x^m y^{n-m}}^{(n)}(0, 0) = e^{x+y} \Big|_{(0,0)} = 1, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

令 $h = x, k = y$, 于是

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!} (x+y)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (x+y)^n + R_n,$$

$$\text{其中 } R_n = \frac{1}{(n+1)!} (x+y)^{n+1} e^{\theta(x+y)} \quad (0 < \theta < 1).$$

* 习题 9-10

1. 某种合金的含铅量百分比 (%) 为 p , 其溶解温度 ($^{\circ}\text{C}$) 为 θ , 由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

$p / \%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta / ^{\circ}\text{C}$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和, 即 $M = \sum_{i=1}^6 [\theta_i - (ap_i + b)]^2$. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -\sum_{i=1}^6 2p_i [\theta_i - (ap_i + b)] = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -\sum_{i=1}^6 2[\theta_i - (ap_i + b)] = 0 \end{cases}.$$

整理得

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 p_i^2 + b \sum_{i=1}^6 p_i = \sum_{i=1}^6 p_i \theta_i \\ a \sum_{i=1}^6 p_i + 6b = \sum_{i=1}^6 \theta_i \end{cases}.$$

计算得 $\sum_{i=1}^6 p_i^2 = 28365.28$, $\sum_{i=1}^6 p_i = 396.6$, $\sum_{i=1}^6 \theta_i p_i = 101176.3$, $\sum_{i=1}^6 \theta_i = 1458$.

代入方程组, 解得 $a = 2.234$, $b = 95.33$. 故经验公式为 $\theta = 2.234p + 95.33$.

2. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立 a 、 b 、 c 应满足的三元一次方程组.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和, 即 $M = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i^2 = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] x_i = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0 \end{cases}$$

整理, 得 a 、 b 、 c 应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

总 习 题 九

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内.

(1) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是 $f(x, y)$ 在该点连续的_____条件. $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件;

(2) $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

$z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的_____条件;

(3) $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 存在且连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件;

(4) 函数 $f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的_____条件.

解 (1) 充分, 必要. (2) 必要, 充分. (3) 充分. (4) 充分.

2. 下题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论.

设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0) = 3$, $f_y(0, 0) = -1$, 则有_____.

A. $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$

B. 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$

C. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$

D. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$

解 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在, 不一定可微分, 故 A 不对.

曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个法向量是 $(3, -1, -1)$, 而不是 $(3, -1, 1)$, 故 B 不对.

取 x 为参数, 则 $x = x, y = 0, z = f(x, 0)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个切向量是 $(1, 0, 3)$, 故 C 正确.

3. 求函数 $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ 的定义域, 并求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y)$.

解 函数的定义域为 $D = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\}$. 由于 $(\frac{1}{2}, 0) \in D$, $f(x, y)$ 为初等函数,

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\ln 3 - \ln 4}$.

*4. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

解 取两条趋于 $(0, 0)$ 的路径, $C_1: x = 0$ 和 $C_2: y^2 = x$, 沿着这两条路径分别求函数的极限有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_1}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_2}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y^2=x}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

由于函数沿着不同的路径趋于 $(0, 0)$ 时的极限不相等, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

5. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 求 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$.

解 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f_x(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

当 $x^2 + y^2 = 0$ 时,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

故

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数: (1) $z = \ln(x + y^2)$; (2) $z = x^y$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x + y^2} \right) = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x.$$

7. 求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{2.01 \times 1.03}{(2.01)^2 - (1.03)^2} - \frac{2}{2^2 - 1} = 0.03.$

又 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = \left. \frac{-(y^3 + x^2 y)}{(x^2 - y^2)^2} \right|_{(2,1)} = -\frac{5}{9}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = \left. \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 - y^2)^2} \right|_{(2,1)} = \frac{10}{9},$

$$\text{故 } dz \Big|_{\substack{x=2, \Delta x=0.01 \\ y=2, \Delta y=0.03}} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2,1)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,1)} \cdot \Delta y = 0.03.$$

*8. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但不

可微分.

证明 因为 $0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, 所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

又 $f(0, 0) = 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

$$\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}},$$

因为 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2} = \frac{1}{4} \neq 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 偏导数存在, 但不

可微分.

9. 设 $u = x^y$, 而 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 都是可微函数, 求 $\frac{du}{dt}$.

解 $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\varphi'(t) + x^y \ln x \psi'(t).$

10. 设 $z = f(u, v, w)$ 具有连续偏导数, 而 $u = \eta - \zeta$, $v = \zeta - \xi$, $w = \xi - \eta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, $\frac{\partial z}{\partial \zeta}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = -f_v + f_w,$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} = f_u - f_w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -f_u + f_v.$$

11. 设 $z = f(u, x, y)$, $u = xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x, \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (f_u \cdot e^y + f_x) = \frac{\partial}{\partial y} f_u \cdot e^y + f_u \cdot e^y + \frac{\partial}{\partial y} f_x \\
 &= \left(f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy} \right) \cdot e^y + f_u \cdot e^y + \left(f_{xu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy} \right) \\
 &= x e^{2y} f_{uu} + e^y f_{uy} + x e^y f_{xu} + f_{xy} + e^y f_u.
 \end{aligned}$$

12. 设 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = uv$. 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 分别在 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ 两端对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v$. 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-u} (v \cos v - u \sin v).$$

分别在 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ 两端对 y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v, \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v$. 从而

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} (u \cos v + v \sin v).$$

13. 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

解 $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta, \frac{dz}{d\theta} = b$.

点 $(a, 0, 0)$ 所对应的参数 $\theta = 0$, 故曲线在此点的切向量为 $\mathbf{T} = (0, a, b)$, 于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

法平面方程为

$$a(y-0) + b(z-0) = 0,$$

即

$$ay + bz = 0.$$

14. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 并写出该法线的方程.

解 设所求点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 曲面在该点处的一个法向量 $\mathbf{n} = (y_0, x_0, -1)$, 平面的法向量为 $(1, 3, 1)$. 由题意, $\mathbf{n}$ 垂直于平面, 故有

$$\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0 = -3, y_0 = -1, z_0 = x_0 y_0 = 3$. 于是所求点为 $(-3, -1, 3)$, 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\mathbf{e}_l = (\cos \theta, \sin \theta)$, 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 l 的方向导数, 并分别确定角 θ , 使该导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0.

解 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = (2x - y)|_{(1,1)} = 1, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = (2y - x)|_{(1,1)} = 1.$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} \cos \theta + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} \sin \theta = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

所以(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数最大, 其最大值为 $\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数最小, 其最大值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数为 0.

16. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处外法线的方向向量为 $\mathbf{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right)$,

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right).$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(2x_0 \frac{x_0}{a^2} + 2y_0 \frac{y_0}{b^2} + 2z_0 \frac{z_0}{c^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

17. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x, y, z)$, 它到 xOy 面上的距离的平方为 z^2 . 作拉格朗日函数

$$L = z^2 + \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1 \right) + \mu (x^2 + y^2 - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0, \\ L_\lambda = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1 = 0, \\ L_\mu = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

得 $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{35}{12}$. 于是, 得可能的极值点 $M_0\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12}\right)$, 即为距离最短的点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求该切平面的切点, 并求此最小体积.

解 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$.

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$. 于是, 切平面在三个坐标轴上的截距依次是 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$, 则切平面与

三个坐标平面围成的四面体的体积为 $V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$. 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的条件下, 求 V 的最小值, 即分母 xyz 的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0. \end{cases}$$

解得 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. 于是, 得到可能极值点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

故所求切点为 $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$, 四面体的体积最小为 $V_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} abc$.

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为 $q_1 = 24 - 0.2p_1, q_2 = 10 - 0.05p_2$, 总成本函数为 $C = 35 + 40(q_1 + q_2)$.

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 才能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

解 总收入函数为

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

总利润函数为 $L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1395$.

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = -0.1p_2 + 12 = 0, \end{cases}$$

解得 $p_1 = 80, p_2 = 120$. 故当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时, 厂家所获得总利润最大, 最大利润为

$$L|_{(80,120)} = 605.$$

20. 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的闭区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 小山的高度函数为 $h = f(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(1) 设 $M(x_0, y_0) \in D$, 问 $f(x, y)$ 在该点沿平面什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式;

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点. 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出(1)中 $g(x, y)$ 达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知, $h = f(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\text{grad}f(x_0, y_0) = (y_0 - 2x_0)\mathbf{i} + (x_0 - 2y_0)\mathbf{j}$$

方向的方向导数最大, 其最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x, y)$ 达到最大值的点, 只需求 $F(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ 达到最大值的点. 因此, 作拉格朗日函数

$$L = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 75).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(2x - y) = 0, & (1) \\ L_y = 10y - 8x + \lambda(2y - x) = 0, & (2) \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0, & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) 得 $(x + y)(2 + \lambda) = 0$, 解得 $y = -x$ 或 $\lambda = -2$.

若 $\lambda = -2$, 则由(1)得 $y = x$, 再由(3)得 $y = x = \pm 5\sqrt{3}$.

若 $y = -x$, 则由(3)得 $x = \pm 5, y = \mp 5$.

于是得到四个可能的极值点:

$$M_1(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), M_2(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}), M_3(5, -5), M_4(-5, 5).$$

由于 $F(M_1) = F(M_2) = 150, F(M_3) = F(M_4) = 450$, 故 $M_3(5, -5)$ 或 $M_4(-5, 5)$ 可作为攀岩的起点.

重 积 分

一、基本内容

1. 二重积分的概念与性质.
2. 二重积分的计算方法及应用.
3. 三重积分的概念及计算方法.

二、基本要求

1. 理解重积分的定义, 熟悉重积分的性质.
2. 掌握二重积分的计算方法, 包括直角坐标、极坐标; 掌握三重积分的计算方法, 包括直角坐标、柱面坐标、球面坐标.
3. 熟悉重积分在几何物理中的应用, 包括平面图形的面积、立体体积; 平面薄片和空间立体的质量、重心、转动惯量.

三、习题解答

习题 10-1

二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板 (不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D , 薄板上分布有面密度为 $\mu = \mu(x, y)$ 的电荷, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q .

解 对 D 进行剖分, 将其分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$, 其面积也记为 $\Delta\sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). 任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷为 $\Delta Q_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 所以该板上的全部电荷为

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D \mu(x, y) d\sigma,$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\sigma_i \text{ 的直径} \}$.

2. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$;

又 $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 如图 10-1 所示, 由二重积分的几何意义知, I_1 表示底为 D_1 、顶为曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积; I_2 表示底为 D_2 、顶为曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积. D_2 面积为 D_1 面积的四分之一. 由于位于 D_1 上方的曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称, 故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等积的部分, 其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2 . 所以 $I_1 = 4I_2$.

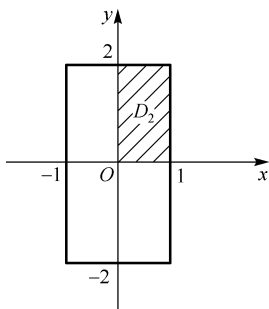


图 10-1

3. 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint_D d\sigma = \sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

(2) $\iint_D kf(x, y)d\sigma = k \iint_D f(x, y)d\sigma$ (其中 k 为常数);

(3) $\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma$. 其中 $D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 为两个无公共内

点的闭区域.

证明 (1) 由于被积函数 $f(x, y) \equiv 1$, 所以由二重积分定义得

$$\iint_D d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sigma.$$

(2) $\iint_D kf(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = k \iint_D f(x, y)d\sigma.$

(3) 因为函数 $f(x, y)$ 在闭区域上 D 可积, 所以无论怎样分割 D , 积分和的极限总是一样的. 因此在分割 D 时, 可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线. 这样 $f(x, y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和, 记为

$$\sum_{D_1 \cup D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{D_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i + \sum_{D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

4. 试确定积分区域 D , 使二重积分 $\iint_D (1 - 2x^2 - y^2) dx dy$ 达到最大值.

解 二重积分的几何意义是曲顶柱体的体积, 当被积函数小于零时所对应的体积为负值, 所以积分区域为 $\{D | 1 - 2x^2 - y^2 \geq 0\}$ 时二重积分 $\iint_D (1 - 2x^2 - y^2) dx dy$ 达到最大值.

5. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小.

- (1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 由 x 轴 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;
- (2) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 由圆周 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ 所围成;
- (3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 D 是三角形闭区域, 三顶点分别为 $(1,0), (1,1), (2,0)$;
- (4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上, $0 \leq x+y \leq 1$, 故有 $(x+y)^3 \leq (x+y)^2$. 所以

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

(2) 圆心 $(2,1)$ 到 $x+y=1$ 的距离为 $d = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 所以直线 $x+y=1$ 与圆相切, 故积分区域 D 内的点满足 $x+y \geq 1$, 故在 D 上有 $(x+y)^2 \leq (x+y)^3$, 从而

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

(3) $(1,1), (2,0)$ 两点连线方程为 $x+y=2$, 过点 $(1,0)$ 与 $x+y=2$ 平行的直线方程为 $x+y=1$, 所以积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y) | 1 \leq x+y \leq 2\}$ 内, 故知区域 D 上的点满足

$0 \leq \ln(x+y) \leq 1$, 从而有 $[\ln(x+y)]^2 \leq \ln(x+y)$. 因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \leq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

(4) 过点 $(3,0)$ 与 $x+y=k$ 平行的直线为 $x+y=3$, 所以积分区域 D 内的点满足 $x+y \geq 3$, 从而 $[\ln(x+y)]^2 \geq \ln(x+y)$. 因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

6. 利用二重积分的性质估计下列积分的值.

- (1) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;
- (2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$;
- (3) $I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;
- (4) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 从而 $0 \leq x+y \leq 2, 0 \leq xy \leq 1$, 所以 $0 \leq xy(x+y) \leq 2$. 又 D 的面积为 1, 因此

$$0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 2.$$

(2) 在积分区域 D 上, $0 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq \sin y \leq 1$, 从而 $0 \leq \sin x^2 \sin^2 y \leq 1$, 又 D 的面积为 π^2 , 因此

$$0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1 \leq x+y+1 \leq 4$, D 的面积为 2, 因此

$$2 \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq 8.$$

(4) 因为在积分区域 D 上有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 所以有

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9 \leq 25.$$

又 D 的面积为 4π , 所以

$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$

习题 10-2

二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$;

(2) $\iint_D (3x + 2y) d\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x + y = 2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(4) $\iint_D x \cos(x+y) d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ 和 (π, π) 的三角形闭区域.

解 (1) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-1}^1 dy$
 $= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + \frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \left[\frac{2y}{3} + \frac{2y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$

(2) D 可用不等式表示为 $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$ 或 $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq x \leq 2 - y$.

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 2y) d\sigma &= \int_0^2 dy \int_0^{2-y} (3x + 3y) dx = \int_0^2 \left[\frac{3x^2}{2} + 2yx \right]_0^{2-y} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{3}{2}(2-y)^2 + 2y(2-y) \right) dy = \left[\frac{-(2-y)^3}{2} + 2y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

(3) $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dy = \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{3}{2} x^2 y^2 + \frac{y^4}{4} \right]_0^1 dx$
 $= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^1 = 1.$

(4) D 可用不等式表示为 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq x$. 所以

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x+y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x+y) dy = \int_0^\pi x [\sin(x+y)]_0^x dx \\ &= \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx = \int_0^\pi x \sin 2x dx - \int_0^\pi x \sin x dx \\ &= \int_0^\pi \frac{-x}{2} d\cos 2x + \int_0^\pi x d\cos x \\ &= \frac{-x}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} dx + x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx = \frac{-3}{2} \pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分.

(1) $\iint_D x\sqrt{y} d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint_D e^{x+y} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$;

(4) $\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = 2$, $y = x$ 及 $y = 2x$ 所围成的闭区域.

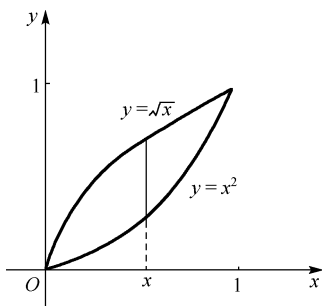


图 10-2

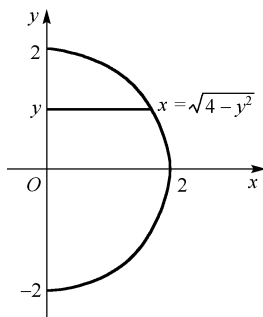


图 10-3

解 (1) 如图 10-2 所示, D 可用不等式表示为 $0 \leq y \leq 1$, $y^2 \leq x \leq \sqrt{y}$ 或 $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$. 由于先对 y 后对 x 的积分不好计算, 所以我们选用先对 x 后对 y 的积分次序, 故有

$$\iint_D x\sqrt{y} d\sigma = \int_0^1 \sqrt{y} dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x dx = \int_0^1 \sqrt{y} \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \sqrt{y} \left(\frac{y - y^4}{2} \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{9}{2}}) dy = \frac{6}{55}.$$

(2) 如图 10-3 所示, D 可用不等式表示为 $0 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ 或 $0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$, $-2 \leq y \leq 2$. 由于先对 y 后对 x 的积分不好计算, 所以我们选用先对 x 后对 y 的积分次序, 故有

$$\iint_D xy^2 d\sigma = \int_{-2}^2 y^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} y^2 (4 - y^2) dy = \frac{64}{15}.$$

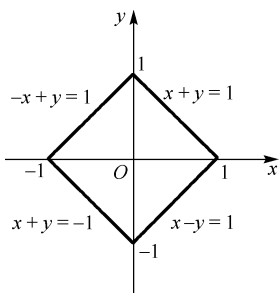


图 10-4

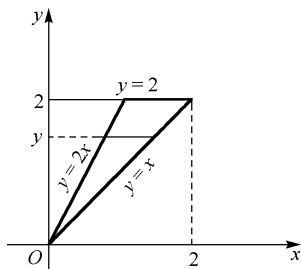


图 10-5

(3) 如图 10-4 所示, $D = D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 0, -x-1 \leq y \leq x+1\}$, $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq -x+1\}$. 或 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y-1 \leq x \leq 1-y\}$, $D_2 = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 0, -y-1 \leq x \leq y+1\}$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} d\sigma &= \iint_{D_1} e^{x+y} d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y} d\sigma \\ &= \int_0^1 e^y dy \int_{y-1}^{1-y} e^x dx + \int_{-1}^0 e^y dy \int_{-y-1}^{y+1} e^x dx \\ &= \int_0^1 (e - e^{2y-1}) dy + \int_{-1}^0 (e^{2y+1} - e^{-1}) dy \\ &= e - e^{-1}. \end{aligned}$$

(4) 如图 10-5 所示, D 可用不等式表示为 $0 \leq y \leq 2$, $\frac{y}{2} \leq x \leq y$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2 + y^2 - x) dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积, 即 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这两个二重积分等于两个单积分的乘积, 即 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$.

证明 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) f_2(y) dy$.

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x) f_2(y) dy$ 中, $f_1(x)$ 与积分变量 y 无关, 可作为常数提到积分号外, 因此上式右端等于 $\int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$. 由于积分上下限为常数, 故两个积分相互独立, 从而得到

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].$$

证毕.

4. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分 (分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

- (1) 由直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 所围成的闭区域;
- (2) 由 x 轴及半圆周 $x^2 + y^2 = r^2$ ($y \geq 0$) 所围成的闭区域;
- (3) 由直线 $y = x$, $x = 2$ 及双曲线 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 所围成的闭区域;
- (4) 环形闭区域 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

解 (1) 如图 10-6 所示, 直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 的交点为 $(0, 0)$ 和 $(4, 4)$, 积分区域 D 为 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{4x}\}$ 或 $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, y^2/4 \leq x \leq y\}$, 所以

$$I = \int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy \quad \text{或} \quad I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$$

(2) 将 D 用不等式表示为 $-r \leq x \leq r$, $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$, 或表示为 $0 \leq y \leq x$, $-\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}$, 于是可将其化为如下的先对 y 后对 x 的二次积分:

$$I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y) dy \quad \text{或} \quad I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} f(x, y) dx.$$

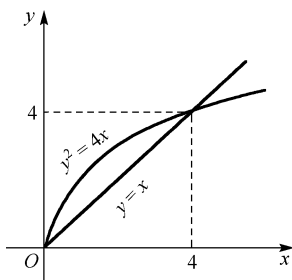


图 10-6

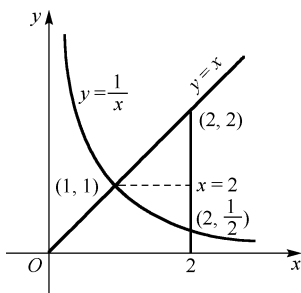


图 10-7

(3) 如图 10-7 所示, 三条边界曲线两两相交, 先求得 3 个交点坐标为 $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$ 和 $(2, 2)$. 积分区域 D 可表示为

$$\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\},$$

$$\text{或} \quad \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \frac{1}{y} \leq x \leq 2 \text{ 且 } 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\},$$

所以

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy;$$

或

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

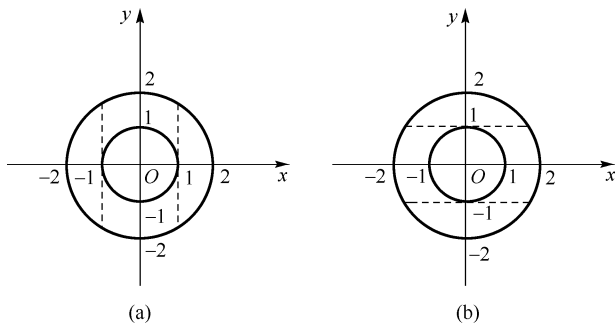


图 10-8

(4) 将 D 按图 10-8(a)和图 10-8(b)所示的两种不同方式划分为 4 块, 分别得

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \\ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy,$$

和

$$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y = x$, $y = a$ 及 $x = b$ ($b > a$) 所围成的闭区域, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

证明 等式两端的二次积分分别是先对 y 后对 x 和先对 x 后对 y 的二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序.

(1) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$

(2) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$

(3) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(4) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$

(5) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$

(6) $\int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy.$

解 (1)如图 10-9 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, D 可改写为 $\{(x, y) | x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$, 所以

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) 如图 10-10 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) | \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

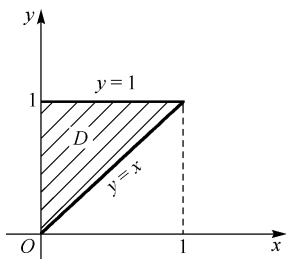


图 10-9

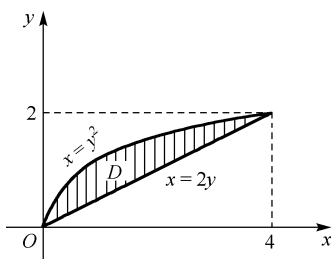


图 10-10

(3) 如图 10-11 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x, y) | -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

(4) 如图 10-12 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x, y) | 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 1 \leq x \leq 2\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) | 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

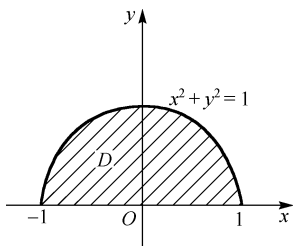


图 10-11

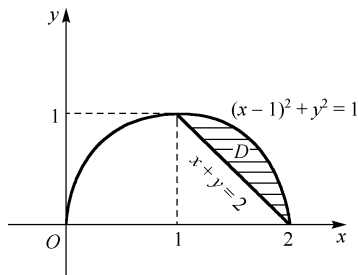


图 10-12

(5) 如图 10-13 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x, y) | 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$. 又 D 可表示为 $\{(x, y) | e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$, 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

(6) 如图 10-14 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, -\sin \frac{x}{2} \leq y \leq \sin x\}$, 又当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时 $y = \sin x$ 的反函数是 $x = \arcsin y$. 而当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $\pi - x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 于是由 $y = \sin x = \sin(\pi - x)$ 可得 $\pi - x = \arcsin y$, 从而得反函数 $x = \pi - \arcsin y$. 所以 D 可表示为 $D_1 \cup D_2$, 其中,

$$D_1 = \{(x, y) | \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y, 0 \leq y \leq 1\} \quad D_2 = \{(x, y) | -2\arcsin y \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 0\}.$$

因此

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$$

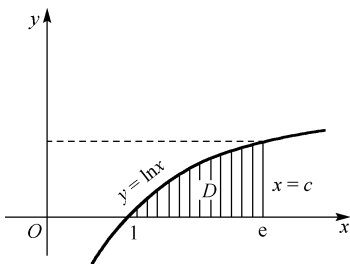


图 10-13

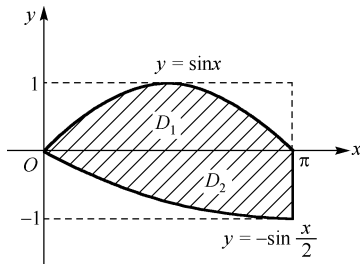


图 10-14

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x + y = 2$, $y = x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图 10-15 所示, 积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y\}$,

$$\begin{aligned} \text{所以质量} \quad M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. 计算由四个平面 $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积.

解 如图 10-16 所示, 此立体为一曲顶柱体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 顶是曲面 $z = 6 - 2x - 3y$. 所以体积为

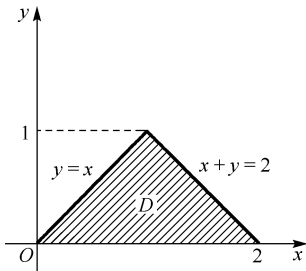


图 10-15

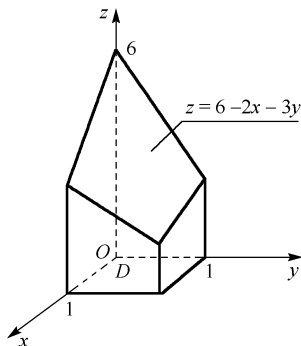


图 10-16

$$V = \iint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6-2x-3y) dy = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 如图 10-17 所示, 此曲顶柱体的底是 xOy 面上的闭区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$,

顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$, 所以体积为

$$V = \iint_D [6-(x^2+y^2)] dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 如图 10-18 所示, 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+y^2=2$, 所以该立体在 xOy 面上的

投影区域为

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

该立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6-2x^2-y^2) d\sigma - \iint_D (x^2+2y^2) d\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2) d\sigma = \iint_D (6-3\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6-3\rho^2) \rho d\rho = 6\pi. \end{aligned}$$

注: 求类似于第 8~10 题中这样的立体体积时, 并不需要画出立体的准确图形, 但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域, 并知道立体的底和顶的方程.

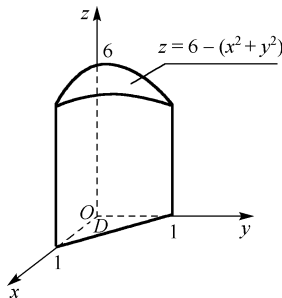


图 10-17

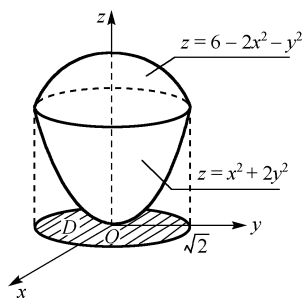


图 10-18

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

- (1) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0)$; (2) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$;
(3) $\{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$; (4) $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$.

解 (1) 如图 10-19 所示, 在极坐标系中, 最小的 ρ 在积点取为 $\rho=0$, 最大的 ρ 在圆周

$x^2 + y^2 = a^2$ 上取为 $\rho = a$, 所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(2) 如图 10-20 所示, 在极坐标系中易知 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta$. 所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

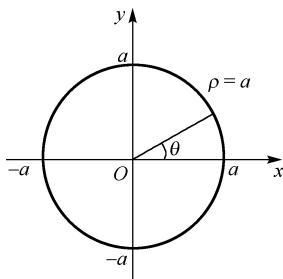


图 10-19

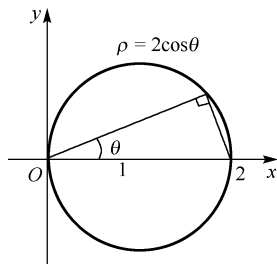


图 10-20

(3) 如图 10-21 所示, 在极坐标系中易知 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 最小的 ρ 在圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 上取为 $\rho = a$, 最大的 ρ 在圆周 $x^2 + y^2 = b^2$ 上取为 $\rho = b$, 所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(4) 如图 10-22 所示, 在极坐标系中易知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 最小的 ρ 在极点取为 $\rho = 0$, 最大的 ρ 在

直线 $x + y = 1$ 上取, 即 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1$, 所以最大的 ρ 为 $\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$, 所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

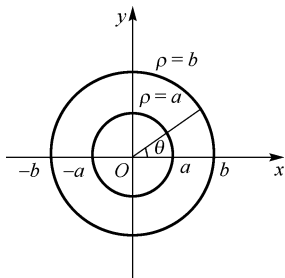


图 10-21

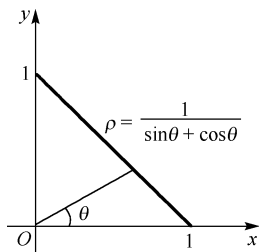


图 10-22

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分.

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy;$

(2) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy;$$

解 (1) 如图 10-23 所示, 由所给积分知, 积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 最小的 ρ 在积点取为 $\rho = 0$, 最大的 ρ 在直线 $y = 1$ 和 $x = 1$ 上取, 为两条直线, 所以用直线 $y = x$ 将积分区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分:

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \left| 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec \theta \right. \right\};$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \left| \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta \right. \right\}.$$

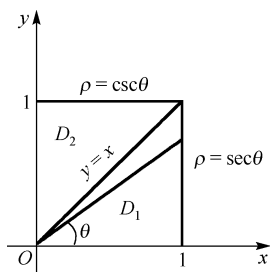


图 10-23

所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(2) 如图 10-24 所示, 在极坐标系中易知 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq \rho \leq 2 \sec \theta$,

所以原式等于

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2 \sec \theta} f(\rho) \rho d\rho.$$

(3) 如图 10-25 所示, 由所给积分知, 积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$, 最小的 ρ 在直线 $y = 1-x$ 上取为 $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$, 最大的 ρ 在圆周上取为 $\rho = 1$, 所以原式等于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(4) 如图 10-26 所示, 在极坐标系中易知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $\tan \theta \frac{1}{\cos \theta} \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$, 所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\tan \theta \sec \theta}^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

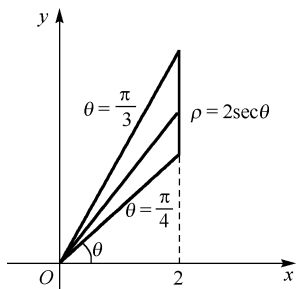


图 10-24

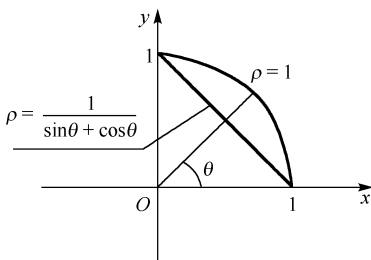


图 10-25

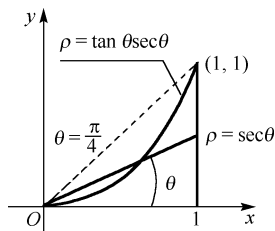


图 10-26

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值.

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy;$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx.$$

解 (1) 如图 10-27 所示, 在极坐标系中易知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta$.

所以原式等于

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

(2) 如图 10-28 所示, 在极坐标系中易知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos \theta}$. 所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec \theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta,$$

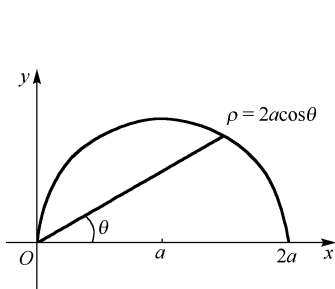


图 10-27

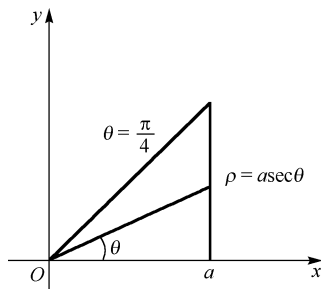


图 10-28

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d \tan \theta = [\sec \theta \tan \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \theta \cdot \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta \\ &= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d\theta. \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d\theta \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + [\ln(\sec \theta + \tan \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

所以原式等于 $\frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

(3) 如图 10-29 所示, 在极坐标系中易知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq \tan \theta \cdot \sec \theta$. 所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \theta \sec \theta d\theta = [\sec \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$

(4) 由所给积分知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leq y \leq a$. 在极坐标系中易知, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq a$. 所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{8} a^4.$$

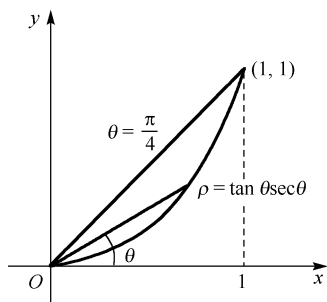


图 10-29

14. 利用极坐标计算下列各题.

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 0$, $y = x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中易知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$. 所以

$$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \iint_D e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{e^{\rho^2}}{2} \right]_0^2 = \pi(e^4 - 1).$$

(2) 在极坐标系中易知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 1$. 所以

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) d(1+\rho^2) = \frac{\pi}{4} \left[(1+\rho^2) \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho d\rho \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中易知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $\arctan \frac{y}{x} = \theta$, 所以

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma = \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3}{64} \pi^2.$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题.

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x = 2$, $y = x$ 及曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$ ($a > 0$) 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环闭区域 $\{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

解 (1) 如图 10-30 所示, 根据 D 的形状, 选用直角坐标比较合适.

$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x \right\}$, 所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \frac{9}{4}.$$

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点, 选用极坐标比较合适.

$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$, 所以原式等于

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho - \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho^2 + \frac{\pi}{8} \cdot \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}} d(1-\rho^4) \\ &= \frac{\pi}{4} \arcsin \rho^2 \Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} \sqrt{1-\rho^4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} (\pi - 2). \end{aligned}$$

(3) 如图 10-31 所示, 根据积分区域 D 的形状, 选用直角坐标比较合适. 又根据 D 的边界曲线情况, 适合采用先对 x 后对 y 的积分次序. 所以

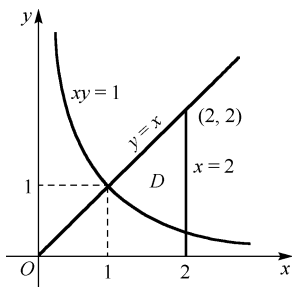


图 10-30

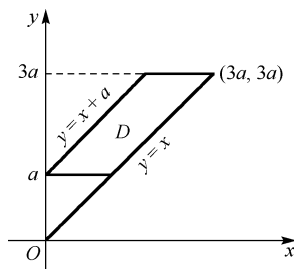


图 10-31

$$\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx = 14a^4.$$

(4) 根据积分区域 D 的形状, 选用极坐标比较合适. 积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a \leq \rho \leq b$. 所以

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi (b^3 - a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho = 2\theta$ 上的一段弧 $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$. 求该薄片的质量.

解 如图 10-32 所示, 由二重积分的几何意义知薄片的质量为

$$M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^3 d\rho = \frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0$, $y=kx(k>0)$, $z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 如图 10-33 所示, 由二重积分的几何意义知

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^a d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= -\frac{1}{2} a \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) = \frac{a}{3} R^3 = \frac{R^3}{3} \arctan k. \end{aligned}$$

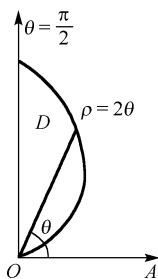


图 10-32

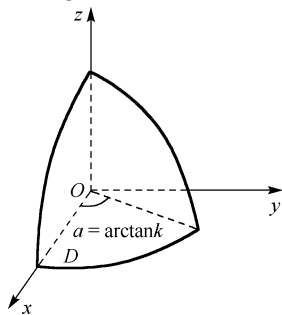


图 10-33

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 10-34 所示, 由于曲顶柱体关于 xOz 面对称, 所以选择 xOy 面上第一象限的半圆形区域为积分区域, 即积分区域

D 可用不等式表示为 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}$. 根据积分区域和被积函数的特点, 本题适合选用极坐标, 用解不等式的方法解出积分区域 D 的范围为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq a \cos \theta$.

所以体积

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho^3 d\rho \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{3}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

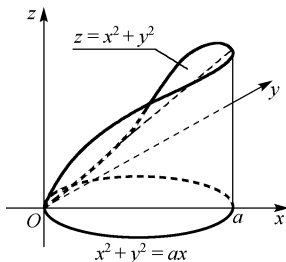


图 10-34

- *19. 作适当的变换, 计算下列二重积分.

(1) $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$, 其中 D 是平行四边形闭区域, 它的四个顶点是 $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ 和 $(0, \pi)$;

(2) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, 其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$, 直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy$, 其中 D 是由 x 轴 y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$, 其中 $D = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right. \right\}$.

解 (1) 如图 10-35 所示, 令 $\mu = x - y, v = x + y$, 则 $x = \frac{\mu + v}{2}, y = \frac{v - \mu}{2}$. 在此变换下, D 的边界 $x - y = -\pi, x + y = \pi, x + y = 3\pi, x - y = \pi$ 依次与 $\mu = -\pi, v = \pi, v = 3\pi, \mu = \pi$ 对应. 于是

$$D' = \{(\mu, v) | -\pi \leq \mu \leq \pi, \pi \leq v \leq 3\pi\},$$

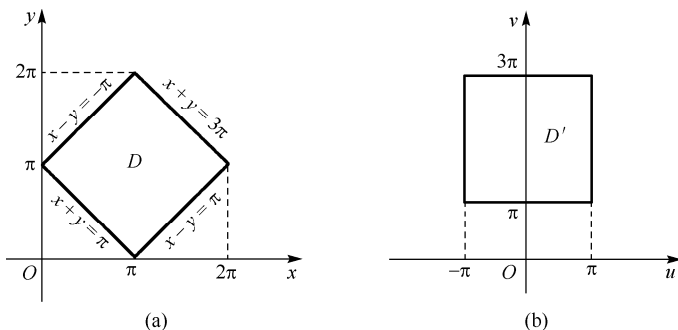


图 10-35

$$\text{又 } J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \text{ 所以}$$

$$\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy = \iint_{D'} \mu^2 \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mu^2 d\mu \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v dv = \frac{\pi^4}{3}.$$

(2) 如图 10-36 所示, 令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$.

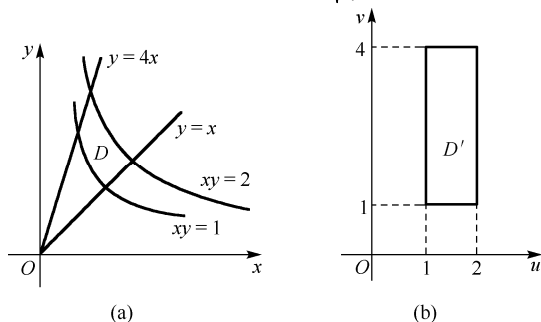


图 10-36

在该变换下, D 的边界 $xy=1, y=x, xy=2, y=4x$ 依次与 $u=1, v=1, u=2, v=4$ 对应. 所以 $D'=\{(u,v)|1\leq u\leq 2, 1\leq v\leq 4\}$.

$$\text{又 } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{2v}. \text{ 所以}$$

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^4 \frac{1}{v} dv = \frac{7}{3} \ln 2.$$

(3) 令 $\mu=x-y, v=y$, 则 $x=u-v, y=v$. 在该变换下, D 的边界 $y=0, x=0, x+y=1$ 依次与 $v=0, u=v, \mu=1$ 对应. 所以

$$D'=\{(\mu,v)|0\leq \mu\leq 1, 0\leq v\leq u\}.$$

$$\text{又 } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \text{ 所以}$$

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy = \iint_{D'} e^{\frac{v}{u}} du dv = \int_0^1 du \int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv = \frac{1}{2}(e-1).$$

(4) 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases}, (a>0, b>0, \rho\geq 0, 0\leq\theta\leq 2\pi)$. 在该变换下, 与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho,\theta)|0\leq\rho\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

$$\text{因此 } \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \iint_{D'} \rho^2 \cdot ab\rho d\rho d\theta = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} ab\pi.$$

***20.** 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积.

- (1) D 是由曲线 $xy=4, xy=8, xy^3=5, xy^3=15$ 所围成的第一象限部分的闭区域;
 (2) D 是由曲线 $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy, v=xy^3 (x\geq 0, y\geq 0)$, 则 $x=\sqrt{u^3/v}, y=\sqrt{u/v}$. 在该变换下, 与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(\mu,v)|4\leq\mu\leq 8, 5\leq v\leq 15\}$.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{u/v} & -\frac{1}{2}\sqrt{u^3/v^3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{v/u^3} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

所以所求面积为

$$A = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_4^8 du \int_5^{15} \frac{1}{v} dv = 2 \ln 3.$$

(2) 令 $u=\frac{y}{x^3}, v=\frac{x}{y^3} (x>0, y>0)$, 则 $x=u^{-\frac{3}{8}}v^{\frac{1}{8}}, y=u^{\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}$. 在该变换下, 与 D 对应的

uOv 平面上的闭区域为 $D' = \{(\mu, \nu) | 1 \leq \mu \leq 4, 1 \leq \nu \leq 4\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, \nu)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

所以所求面积为

$$A = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{8} \int_1^4 u^{-\frac{3}{2}} du \int_1^4 v^{-\frac{3}{2}} dv = \frac{1}{8}.$$

***21.** 设闭区域 D 由直线 $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ 所围成, 求证 $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{1}{2} \sin 1$.

证明 如图 10-37 所示, 令 $u = x-y$, $v = x+y$, 则 $x = \frac{u+v}{2}$,

$y = \frac{v-u}{2}$. 在该变换下, D 的边界 $x+y=1$, $x=0$, $y=0$

依次与 $v=1$, $u+v=0$, $v-u=0$ 对应.

于是 $D' = \{(\mu, \nu) | -v \leq \mu \leq v, 0 \leq v \leq 1\}$. 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

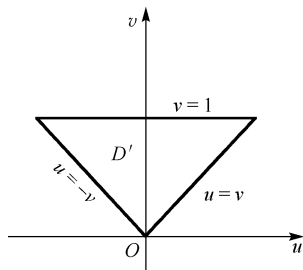


图 10-37

所以

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \iint_{D'} \cos \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v \cos \frac{u}{v} du = \int_0^1 \sin 1 dv = \frac{1}{2} \sin 1.$$

***22.** 选取适当的变换, 证明下列等式.

(1) $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$, 其中闭区域 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$;

(2) $\iint_D f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 且 $a^2 + b^2 \neq 0$.

证明 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1$, $x+y=1$, $x-y=-1$, $x-y=1$, 令 $u = x+y$,

$v = x-y$, 即 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$. 在该变换下, D 变为 uOv 平面上的闭区域

$$D' = \{(\mu, \nu) | -1 \leq \mu \leq 1, -1 \leq \nu \leq 1\}.$$

$$\text{又 } J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(u) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2} = ax+by, \text{ 即 } u = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

又 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$, 所以令 $v = \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 因此有 $u^2+v^2=1$, 故与 D 对应的闭区域为

$$D' = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

又由 u 、 v 的表达式可解得

$$x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以雅可比式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = -1,$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D f(ax+by+c) dx dy &= \iint_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) |-1| du dv \\ &= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du. \end{aligned}$$

习题 10-3

三重积分

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是

- (1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;
- (2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;
- (3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;
- (4) 由曲面 $cz=xy (c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1) 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2 - x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

提示: 曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 与 $z = 2 - x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2 + y^2 = 1$.

(4) 积分区域可表示为

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a \right\},$$

于是

$$I = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz = xy$, 下边界曲面为平面 $z = 0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x + y + z$, 计算该物体的质量.

解
$$M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy$$
$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \right]_0^1 dx = \int_0^1 (x + 1) dx = \frac{1}{2} (x + 1)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$ 、 $f_2(y)$ 、 $f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

证明
$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz \right) dy \right] dx$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left(f_1(x) f_2(y) \int_l^m f_3(z) dz \right) dy \right] dx = \int_a^b \left[\left(f_1(x) \int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \right] dx$$
$$= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) f_1(x) \right] dx = \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \int_a^b f_1(x) dx$$
$$= \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = xy$ 与平面 $y = x, x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{xy} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^5 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1 - x - y, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{提示:} \quad \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{-2(1+x+y)} - \frac{1}{8}y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right) \end{aligned}$$

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{8} x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xz dx dy dz &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{1}{2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0. \end{aligned}$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z=h (R>0, h>0)$ 所围成的闭区域.

解 当 $0 \leq z \leq h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于面 xOy 的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z :

$x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{h}z\right)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h}z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$, 于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解 (1) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2-\rho^2},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \rho(2-\rho^2-\rho^4) d\rho \\ &= \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) d\rho = \frac{7}{12} \pi. \end{aligned}$$

(2) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\theta = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

*10. 利用球面坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

解 (1) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \iiint_{\Omega} r^4 \cdot \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{5} \pi. \end{aligned}$$

(2) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 d\varphi \\ &= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{7}{6} \pi a^4. \end{aligned}$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

*(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = 5$ 所围成的闭区域;

*(4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0$ 所确定.

解 (1) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy dv &= \iiint_{\Omega} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

另解: 用直角坐标计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy dv &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^1 dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

* (2) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \varphi,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

(3) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{2} \rho \leq z \leq 5,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho\right) d\rho = 8\pi. \end{aligned}$$

* (4) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq A,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5). \end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积.

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

* (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 及 $x^2 + y^2 = z^2$ (含有 z 轴的部分);

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$;

(4) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 4z$.

解 (1) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho \leq z \leq 6 - \rho^2,$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

* (2) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi a^3.$$

(3) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \rho,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(4) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{1}{4}\rho^2 \leq z \leq \sqrt{5-\rho^2},$$

于是
$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^2 \rho \left(\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4} \right) d\rho = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

***13.** 求球体 $r \leq a$ 位于锥面 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域, 有

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积.

解 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和 $z = x^2 + y^2$ 消去 z , 解得 $x^2 + y^2 = 1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2 + y^2 \leq 1$, 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} [\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2 + y^2)] dx dy \quad (\text{用极坐标}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2) \rho d\rho \\ &= \frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi. \end{aligned}$$

注: 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2-z^2} dx dy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \\ &= \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2) dz + \pi \int_0^1 z dz \\ &= \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \pi + \frac{1}{2} \pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi. \end{aligned}$$

- *15. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与该点到球心的距离成正比, 求该球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq R,$$

于是
$$M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R kr \cdot r^2 dr = k\pi R^4.$$

习题 10-4

重积分的应用

1. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积.

解 位于柱面内的部分球面有两块, 其面积是相同的.

由曲面方程 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$

于是
$$\begin{aligned} A &= 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - a \sin \theta) d\theta = 2a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

2. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z^2 = 2x$ 两式消去 z 得 $x^2 + y^2 = 2x$, 于是所求曲面在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 2x$.

由曲面方程 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ 于是

$$A = \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} dx dy = \sqrt{2}\pi.$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积.

解 设 A_1 为曲面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 相应于区域 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ 上的面积. 则所求表面积为 $A = 4A_1$.

$$\begin{aligned} A &= 4 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 4 \iint_D \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2 + 0^2} dx dy \\ &= 4 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = 4R \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 8R \int_{-R}^R dx = 16R^2. \end{aligned}$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心.

(1) D 由 $y = \sqrt{2px}, x = x_0, y = 0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0 \right\}$;

(3) D 是介于两个圆 $\rho = a \cos \theta, \rho = b \cos \theta (0 < a < b)$ 之间的闭区域.

解 (1) 令密度为 $\mu = 1$.

因为区域 D 可表示为 $0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}$, 所以

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2px_0^3},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} x dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} x \sqrt{2px} dx = \frac{3}{5} x_0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} px dx = \frac{3}{8} y_0,$$

故所求质心为 $\left(\frac{3}{5} x_0, \frac{3}{8} y_0 \right)$.

(2) 令密度为 $\mu = 1$. 因为闭区域 D 对称于 y 轴, 所以 $\bar{x} = 0$.

$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \pi ab \quad (\text{椭圆的面积}),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4b}{3\pi},$$

所求质心为 $\left(0, \frac{4b}{3\pi} \right)$.

(3) 令密度为 $\mu = 1$. 由对称性可知 $\bar{y} = 0$.

$$A = \iint_D dx dy = \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (b^2 - a^2) \quad (\text{两圆面积的差}),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{2}{A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{a^2 + b^2 + ab}{2(a+b)},$$

所求质心是 $\left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{2(a+b)}, 0 \right)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y) = x^2 y$, 求该薄片的质心.

$$\text{解} \quad M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (x^4 - x^6) dx = \frac{1}{35},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^3 y dy = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{1}{2} (x^5 - x^7) dx = \frac{35}{48},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y^2 dy = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{1}{3} (x^5 - x^8) dx = \frac{35}{54},$$

质心坐标为 $\left(\frac{35}{48}, \frac{35}{54} \right)$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求该薄片的质心.

解 建立坐标系, 使薄片在第一象限, 且直角边在坐标轴上. 薄片上点 (x, y) 处的函数为 $\mu = x^2 + y^2$. 由对称性可知 $\bar{x} = \bar{y}$.

$$M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{6} a^4,$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{2}{5} a,$$

薄片的质心坐标为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心 (设密度 $\rho = 1$).

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;

*(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z = 0$;

(3) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

解 (1) 由对称性可知, 质心在 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \frac{1}{3} \pi \quad (\text{圆锥的体积}),$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 z dz = \frac{3}{4},$$

所求立体的质心为 $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

*(2) 由对称性可知, 质心在 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \frac{2}{3} \pi A^3 - \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi (A^3 - a^3) \quad (\text{两个半球体体积的差}),$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi d\theta = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^A r^3 dr = \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},$$

所求立体的质心为 $\left(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)}\right)$.

$$\begin{aligned} (3) \quad V &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{1}{6} a^4, \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dv = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{\frac{1}{15} a^5}{\frac{1}{6} a^4} = \frac{2}{5} a,$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5} a,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz = \frac{7}{30} a^2,$$

所以立体的质心为 $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2\right)$.

- *8. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$, 它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求该球体的质心.

解 球体密度为 $\rho = x^2 + y^2 + z^2$. 由对称性可知质心在 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

在球面坐标下 Ω 可表示为: $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi$, 于是

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \rho dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5, \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^5 dr \\ &= \frac{2\pi}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6} R^6 \sin \varphi \cos^7 \varphi d\varphi = \frac{\frac{8}{3} \pi R^6}{\frac{32}{15} \pi R^5} = \frac{5}{4} R, \end{aligned}$$

故球体的质心为 $\left(0, 0, \frac{5}{4}R\right)$.

9. 设均匀薄片 (面密度为常数 1) 所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量.

(1) $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, 求 I_y ;

(2) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成, 求 I_x 和 I_y ;

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, 求 I_x 和 I_y .

解 (1) 积分区域 D 可表示为

$$-a \leq x \leq a, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

于是
$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^3 b.$$

提示: $\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{x = a \sin t}{=} \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{8} a^4.$

(2) 积分区域 D 可表示为

$$0 \leq x \leq 2, -3\sqrt{x/2} \leq y \leq 3\sqrt{x/2},$$

于是
$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} y^2 dy = \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{72}{5},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} dy = \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^2 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{96}{7}.$$

$$(3) \quad I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = a \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{ab^3}{3},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{1}{3} a^3 \cdot b = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 取形心为原点, 取两旋转轴为坐标轴, 建立坐标系.

$$I_x = \iint_D y^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \mu b h^3,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{1}{12} \mu h b^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0, |x| = a, |y| = a$ 所围成. (1) 求物体的体积; (2) 求物体的质心; (3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 (1) 由对称可知

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = 4 \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} a^4. \end{aligned}$$

(2) 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a \left(ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{a^5}{5} \right) dx = \frac{7}{15} a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad I_z &= \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dv = 4\rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) dz \\ &= 4\rho \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy = 4\rho \frac{28}{45} a^6 = \frac{112}{45} \rho a^6. \end{aligned}$$

12. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\mu = 1$).

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} r^3 dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \int_0^h dz = \frac{1}{2} \pi h a^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的质量均匀的半圆环形薄片占有闭区域 $D = \{(x, y, 0) | R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > 0$) 处单位质量的质点的引力 F .

解 引力 $F = (F_x, F_y, F_z)$, 由对称性, $F_y = 0$, 而

$$\begin{aligned} F_x &= G \iint_D \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} d\sigma \\ &= G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \rho d\rho \\ &= 2G\mu \left[\ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right], \\ F_z &= -Ga \iint_D \frac{\mu d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = -Ga\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \pi Ga\mu \left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right]. \end{aligned}$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)$ ($a > h$) 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性可知, 沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消, 故 $F_x = F_y = 0$, 而

$$\begin{aligned} F_z &= - \iiint_{\Omega} G\rho \frac{a-z}{[x^2 + y^2 + (a-z)^2]^{3/2}} dv \\ &= -G\rho \int_0^h (a-z) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{[x^2 + y^2 + (a-z)^2]^{3/2}} \\ &= -G\rho \int_0^h (a-z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{[r^2 + (a-z)^2]^{3/2}} \\ &= 2\pi G\rho \int_0^h (z-a) \left[\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a-z)^2}} \right] dz \\ &= -2\pi G\rho [h + \sqrt{R^2 + (a-h)^2} - \sqrt{R^2 + a^2}]. \end{aligned}$$

习题 10-5

含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{1+0} \frac{dy}{1+0+y^2} = [\arctan y]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy = \int_{-1}^1 |y| dy = 2 \int_0^1 y dy = 1.$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x y^2 \cos(xy) dy = \int_0^x y^2 \cos(0) dy = \frac{8}{3}.$$

2. 求下列函数的导数.

$$(1) \phi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy; \quad (2) \phi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy;$$

$$(3) \phi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan \frac{y}{x} dy; \quad (4) \phi(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

解 (1) $\phi'(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} y^2 \cos x dy + (\cos^2 x \sin x - \cos^3 x)(\cos x)' - (\sin^2 x \sin x - \sin^3 x)(\sin x)'$

$$= \frac{1}{3} \cos x (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos x - \sin x) \sin x \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{3} \cos x (\cos x - \sin x) (1 + 2 \sin 2x).$$

$$(2) \phi'(x) = \int_0^x \frac{1}{1+xy} dy + \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{1}{x} [\ln(1+xy)]_0^x + \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{2}{x} \ln(1+x^2).$$

$$(3) \phi'(x) = \int_{x^2}^{x^3} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy + \arctan x^2 \cdot 3x^2 - \arctan x \cdot 2x$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \Big|_{x^2}^{x^3} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x.$$

$$(4) \phi'(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} (-y^2) dy + e^{-x^5} \cdot 2x - e^{-x^3} \cdot 1 = 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy.$$

3. 设 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$, 其中 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

解 $F'(x) = \int_0^x f(y)dy + 2xf(x);$

$$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

4. 应用对参数的微分法, 计算下列积分.

$$(1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} (|a| < 1); \quad (2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx (a > 0).$$

解 (1) 设 $\varphi(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+\alpha \cos x}{1-\alpha \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$, 则 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\ln \frac{1+\alpha \cos x}{1-\alpha \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{2}{1-\alpha^2 \cos^2 x},$$

故 $\varphi'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-\alpha^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d \tan x}{\sec^2 x - \alpha^2}$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \tan x}{(1-\alpha^2) + \tan^2 x} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\arctan \frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

于是 $I = \varphi(a) - \varphi(0) = \int_0^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} d\alpha = \pi \arcsin a$.

(2) 设 $\varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx$, 则 $\varphi(1) = 0$, $\varphi(a) = I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\ln(\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x)] = \frac{2\alpha \sin^2 x}{\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x},$$

故

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha \sin^2 x}{\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x} dx \quad \underline{\underline{\mu = \tan x}} \quad 2\alpha \int_0^{-\infty} \frac{\mu^2}{1 + \alpha^2 \mu^2} \cdot \frac{d\mu}{1 + \mu^2} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left[\int_0^{+\infty} \frac{d\mu}{1 + \mu^2} - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right] (\alpha \neq 1) \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\alpha} \right) = \frac{\pi}{\alpha + 1}; \end{aligned}$$

又当 $\alpha = 1$ 时, $\varphi'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$, 因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a > 0$, $\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1, a]$ (或 $[a, 1]$) 上连续. 于是

$$I = \varphi(a) - \varphi(1) = \int_1^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_1^a \frac{\pi}{\alpha + 1} d\alpha = \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分.

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (2) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b)$$

解 (1) 因为 $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{交换积分次序}) \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2 y^2)\sqrt{1-x^2}} \right] dy, \end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2 y^2)\sqrt{1-x^2}} \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t}$

$$\begin{aligned} \stackrel{\underline{\underline{\mu = \tan t}}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{d\mu}{1+(1+y^2)\mu^2} &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} [\arctan(\sqrt{1+y^2})\mu]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

因此 $\text{原式} = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2} [\ln(y + \sqrt{1+y^2})]_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$.

(2) 因为 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy \quad (\text{交换积分次序}) \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) x^y dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{由于} \quad \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) x^y dx &\stackrel{x=e^{-t}}{=} \int_{-\infty}^0 \sin t \cdot e^{-yt} (-e^{-t}) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-(y+1)t} dt \quad (\text{分部积分}) \\ &= \frac{1}{1+(y+1)^2} e^{-(y+1)t} [\cos t - (y+1)\sin t] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+(y+1)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因此} \quad \text{原式} &= \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy = [\arctan(y+1)]_a^b \\ &= \arctan(b+1) - \arctan(a+1).\end{aligned}$$

总 习 题 十

1. 填空.

(1) 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值是_____;

(2) 设闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy =$ _____.

解 (1) 交换积分次序并计算所得的二次积分, 得

$$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}).$$

(2) 用极坐标计算. $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$,

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_D \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2a^2} + \frac{1 - \cos 2\theta}{2b^2} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)\end{aligned}$$

2. 以下各题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论.

(1) 设有空间闭区域

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

则有_____.

- A. $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$; B. $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$;
 C. $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$; D. $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$.

(2) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy =$ _____.

- A. $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$; B. $2 \iint_{D_1} xy dx dy$;
 C. $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$; D. 0.

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) =$ _____.

- A. $2f(2)$ B. $f(2)$ C. $-f(2)$ D. 0

解 (1) C. 提示: $f(x, y, z) = x$ 是关于 x 的奇函数, 它在关于 yOz 平面对称的区域 Ω_1 上的三重积分为零, 而在 Ω_2 上的三重积分不为零, 所以 A 是错的. 类似地, B 和 D 也是错的.

$f(x, y, z) = z$ 是关于 x 和 y 的偶函数, 它关于 yOz 平面和 zOx 面都对称的区域 Ω_1 上的三重积分可以化为 Ω_1 在第一卦限部分 Ω_2 上的三重积分的四倍.

(2) A. 记 D 的三个顶点为 $A(a, a)$, $B(-a, a)$, $C(-a, -a)$. 连接 OB , 则 D 为 $\triangle COB$ 和 $\triangle BOA$ 之并. 由于 $\triangle COB$ 关于 x 轴对称, $\triangle AOB$ 关于 y 轴对称, 而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数, 从而有

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{\triangle AOB} xy dx dy + \iint_{\triangle COB} dx dy = 0 + 0 = 0,$$

又由于函数 $\cos x \sin y$ 关于 y 是奇函数, 关于 x 是偶函数, 从而有

$$\iint_D \cos x \sin y dx dy = \iint_{\triangle COB} \cos x \sin y dx dy + \iint_{\triangle AOB} \cos x \sin y dx dy = 0 + 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy,$$

因此应选 A.

(3) B. 解法一. 由于考虑 $F'(2)$, 故可设 $t > 1$. 对所给二重积分交换积分次序, 得

$$F(t) = \int_1^t f(x) dx \int_1^x dy = \int_1^t (x-1) f(x) dx,$$

于是, $F'(t) = (t-1)f(t)$, 从而有 $F'(2) = f(2)$. 故选 B.

解法二. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$, 则有

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t [G(t) - G(y)] dy = G(t) \int_1^t dy - \int_1^t G(y) dy = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y) dy.$$

求导得

$$F'(t) = G(t) + (t-1)f(t) - G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2) = f(2).$$

3. 计算下列二重积分.

(1) $\iint_D (1+x)\sin y d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0), (1,0), (1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$;

(3) $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆周 $x^2 + y^2 = Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解 (1) 积分区域可表示为 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x+1\}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (1+x)\sin y d\sigma &= \int_0^1 (1+x) dx \int_0^{x+1} \sin y dy = \int_0^1 (1+x)[1 - \cos(x+1)] dx \\ &= \frac{3}{2} + \cos 1 + \sin 1 - \cos 2 - 2 \sin 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \iint_D (x^2 - y^2) d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (x^2 - y^2) dy = \int_0^\pi \left(x^2 \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) dx \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

(3) 在极坐标下积分区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq R \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta = \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{9} (3\pi - 4) R^3. \end{aligned}$$

(4) 因为积分区域 D 关于 x 轴、 y 轴对称, 所以

$$\iint_D 3x d\sigma = \iint_D 6y d\sigma = 0.$$

$$\iint_D 9 d\sigma = 9 \iint_D d\sigma = 9\pi R^2.$$

$$\text{因为} \quad \iint_D y^2 d\sigma = \iint_D x^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma &= 9\pi R^2 + \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= 9\pi R^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi R^2 + \frac{\pi}{4} R^4. \end{aligned}$$

4. 交换下列二次积分的次序.

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

解 (1) 积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, -\sqrt{4-y} \leq x \leq \frac{1}{2}(y-4)\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 0, 2x+4 \leq y \leq -x^2+4\},$$

所以

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x, y) dy.$$

(2) 积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\} \cup \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 3-y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x \leq y \leq 3-x\},$$

所以

$$\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

(3) 积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\} \cup \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}\},$$

所以

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$5. \text{ 证明 } \int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

证明 积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\},$$

所以

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

6. 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$$

解 在极坐标下积分区域可表示为 $D = D_1 + D_2 + D_3$, 其中

$$D_1: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta,$$

$$D_2: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta,$$

$$D_3: \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta,$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \\ &\quad + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

7. 设 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$ 上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 求 } f(x, y).$$

解 设 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$, 则

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} A,$$

从而

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - \frac{8}{\pi} A \iint_D dx dy,$$

又 $\iint_D dx dy = D$ 的面积 $= \frac{\pi}{8}$, 故得

$$A = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - A,$$

因此

$$A = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

在极坐标中,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

因此

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9},$$

于是得

$$A = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}.$$

从而

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3}.$$

8. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^3, y = x^2$ 及平面 $y = 1, z = 0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega: 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1,$$

所以
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

9. 计算下列三重积分.

(1) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (z > 0)$ 的公共部分;

(2) $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由 xOy 面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域.

解 (1) 两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$, 在柱面坐标下积分区域可表示为

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}R, R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \leq z \leq R\sqrt{R^2 - \rho^2},$$

所以
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{R\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 \rho dz \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3] \rho d\rho = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 因为积分区域 Ω 关于 xOy 面对称, 而被积函数为关于 z 的奇函数, 所以

$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv = 0.$$

(3) 曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2 + z^2 = 2x$. 由曲面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x = 5$ 所围成的闭区域 Ω 在 yOz 面上的投影区域为

$$D_{yz}: y^2 + z^2 \leq (\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为

$$D_{yz}: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{10}, \frac{1}{2}\rho^2 \leq x \leq 5,$$

所以
$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} \rho d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^5 \rho^2 \cdot \rho dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 \left(5 - \frac{1}{2}\rho^2\right) d\rho = \frac{250}{3} \pi.$$

*10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, \quad G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

解 (1) 利用球面坐标,

$$\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

利用极坐标,

$$\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho = 2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho = 2\pi \int_0^t f(r^2) r dr.$$

于是

$$F(t) = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr},$$

求导得

$$F'(t) = \frac{2t f(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{\left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2},$$

所以在区间 $(0, +\infty)$ 内, $F'(t) > 0$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(2) 证明 因为 $f(x^2)$ 为偶函数, 故

$$\int_{-t}^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(r^2) dr.$$

所以

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr}{2 \int_0^t f(r^2) dr} = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr}.$$

要证明 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$, 即证

$$\frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr} > \frac{2 \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

只需证当 $t > 0$ 时, $H(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \cdot \int_0^t f(r^2) dr - \left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2 > 0$.

由于 $H(0) = 0$, 且

$$H'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0,$$

所以 $H(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 又 $H(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 故当 $t > 0$ 时,

$$H(t) > H(0) = 0.$$

因此当 $t > 0$ 时, 有

$$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t).$$

11. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面的方程可写为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$, 所割部分在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

于是

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

12. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设所求矩形另一边的长度为 H , 建立坐标系, 使半圆的直径在 x 轴上, 圆心在原点. 不妨设密度为 $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

由对称性及已知条件可知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 即

$$\iint_D y dx dy = 0,$$

从而

$$\int_{-R}^R dx \int_{-H}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy = 0,$$

即

$$\int_{-R}^R \frac{1}{2} [(R^3 - x^2) - H^2] dx = 0,$$

亦即

$$R^3 - \frac{1}{3} R^2 - RH^2 = 0,$$

从而

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

因此, 接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为 $\sqrt{\frac{2}{3}} R$.

13. 求由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片 (面密度为常数 μ) 对于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

解 抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成区域可表示为

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

所求转动惯量为

$$I = \iint_D \mu(y+1)^2 dx dy = \mu \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y+1)^2 dy = \frac{1}{3} \mu \int_{-1}^1 [8 - (x^2+1)^3] dx = \frac{368}{105} \mu.$$

14. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片, 占有平面闭域

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\},$$

过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P , $OP = a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 设 P 点的坐标为 $(0, 0, a)$. 薄片的面密度为 $\mu = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $F = (F_x, F_y, F_z)$.

由于薄片关于 y 轴对称, 所以引力在 x 轴上的分量 $F_x = 0$, 而

$$\begin{aligned} F_y &= G \iint_D \frac{m\mu y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} d\sigma = m\mu G \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho^2 \sin \theta}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= m\mu G \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho = 2m\mu G \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \frac{4GmM}{\pi R^2} \left(\ln \frac{R + \sqrt{a^2 + R^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right), \\ F_z &= -G \iint_D \frac{m\mu a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} d\sigma = -m\mu Ga \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= -\pi m\mu Ga \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} d\rho = -\frac{2GmM}{R^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

15. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega = \left\{ (x, y, z) | \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$ 的质心.

解 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性知质心位于 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 由于

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega z dv &= \int_0^b z dz \iint_{D_z} dx dy \quad (\text{其中 } D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2(1 - \frac{z^2}{b^2})\}) \\ &= \int_0^b \pi a^2 \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right) z dz \\ &= \pi a^2 \int_0^b \left(z - \frac{z^3}{b^2} \right) dz = \frac{\pi a^2 b^2}{4}, \\ V &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8}, \text{ 即质心为 } \left(0, 0, \frac{3b}{8} \right).$$

- *16. 一球形行星的半径为 R , 质量为 M , 其密度呈球对称分布, 并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零, 那么行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为 μ_0 , 则由题设, 在距球心 $r(0 \leq r \leq R)$ 处的密度为 $\mu(r) = \mu_0 - kr$.

由于 $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$, 故 $k = \frac{\mu_0}{R}$, 即

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

于是

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{r \leq R} \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \, dr \\ &= 4\pi\mu_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \, dr = \frac{\mu_0 \pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

因此得 $\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}$.

曲线积分与曲面积分

一、基本内容

1. 对弧长的曲线积分
 - (1) 对弧长的曲线积分的概念与性质;
 - (2) 对弧长的曲线积分的计算法.
2. 对坐标的曲线积分
 - (1) 对坐标的曲线积分的概念与性质;
 - (2) 对坐标的曲线积分的计算法;
 - (3) 两类曲线积分之间的联系.
3. 格林公式及其应用
 - (1) 格林公式;
 - (2) 平面上曲线积分与路径无关的条件;
 - (3) 二元函数的全微分求积;
 - * (4) 曲线积分的基本定理.
4. 对面积的曲面积分
 - (1) 对面积的曲面积分的概念与性质;
 - (2) 对面积的曲面积分的计算法.
5. 对坐标的曲面积分
 - (1) 对坐标的曲面积分的概念与性质;
 - (2) 对坐标的曲面积分的计算法;
 - (3) 两类曲面积分之间的联系.
6. 高斯公式, *通量与散度
 - (1) 高斯公式;
 - (2) 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件;
 - * (3) 通量与散度.
7. 斯托克斯公式, *环流量与旋度
 - (1) 斯托克斯公式;
 - * (2) 空间曲线积分与路径无关的条件;
 - * (3) 环流量与旋度.

二、基本要求

1. 正确理解两类曲线积分与两类曲面积分的概念和性质及几何意义和物理意义.
2. 熟练掌握两类曲线积分和两类曲面积分的算法, 了解两类曲线积分和两类曲面积分之间的关系.
3. 掌握格林公式及其应用, 能熟练应用平面曲线积分与路径无关的条件求解曲线积分, 掌握二元函数全微分方程的求解方法.
4. 掌握高斯公式及其应用, 了解斯托克斯公式和通量与散度、环流量与旋度的概念.
5. 能够用曲线积分和曲面积分求一些几何量与物理量(弧长、曲面面积、质量、重心、转动惯量、功及流量等).

三、习题解答

习题 11-1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L , 在点 (x, y) 处它的线密度为 $\mu(x, y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 该曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x 、 I_y ;

(2) 该曲线弧的质心坐标 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$.

解 (1) 应用元素法. 假设将曲线弧 L 分割成 n 段小的曲线弧, 任意取其中的一段, 其长度记为 ds , (x, y) 是曲线弧上的一点. 因为 ds 很小且 $\mu(x, y)$ 在 L 上连续, 所以此段弧的质量近似等于 $\mu(x, y)ds$, 质量可近似看做集中在点 (x, y) , 于是可得曲线弧 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量元素:

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) ds, \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) ds.$$

以这些元素为被积表达式, 在曲线弧 L 上积分, 便得

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds, \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds.$$

(2) 同(1), 可应用元素法得 ds 对 x 轴和 y 轴的静矩元素为

$$dM_x = y \mu(x, y) ds, \quad dM_y = x \mu(x, y) ds.$$

以这些元素为被积表达式, 在曲线弧 L 上积分, 便得 L 对 x 轴和 y 轴的静矩

$$M_x = \int_L y \mu(x, y) ds, \quad M_y = \int_L x \mu(x, y) ds.$$

又已知曲线弧 L 的质量 M 用积分可表示为

$$M = \int_L \mu(x, y) ds.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

性质 3 设在 L 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则 $\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds$.

特别地, 有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

证明 假设将曲线弧 L 任意分割成 n 段, 第 i 段小曲线弧的长度为 Δs_i , (ξ_i, η_i) 为第 i 段曲线弧上任意取定的一点. 按性质 3 的假设, 知

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

从而

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$, 对上式两端分别取极限, 由极限的保号性得

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

又 $f(x, y) \leq |f(x, y)|$, $-|f(x, y)| \leq f(x, y)$, 则由上面的结论可得

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds &\leq \int_L |f(x, y)| ds, \\ -\int_L |f(x, y)| ds &\leq \int_L f(x, y) ds, \end{aligned}$$

即有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分.

(1) $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(2) $\int_L (x+y) ds$, 其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段;

(3) $\oint_L x ds$, 其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

(6) $\int_{\Gamma} x^2 y z ds$, 其中 Γ 为折线 $ABCD$, 这里 A 、 B 、 C 、 D 依次为点 $(0,0,0)$ 、 $(0,0,2)$ 、 $(1,0,2)$ 、 $(1,3,2)$;

(7) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(8) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

解 (1) 代入公式转化为定积分求解.

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2 + y^2)^n ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^n \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^{2n+1} dt = a^{2n+1} \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) 由题意可得直线的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \end{cases} (0 \leq x \leq 1)$, 从而

$$\int_L (x + y) ds = \int_0^1 [x + (1 - x)] \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

(3) 设 $L_1: \begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases} (0 \leq x \leq 1)$, $L_2: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} (0 \leq x \leq 1)$, 由题意可知 L 由 L_1 和 L_2 组成, 因此

$$\begin{aligned}\oint_L x ds &= \int_{L_1} x ds + \int_{L_2} x ds = \int_0^1 x \sqrt{1 + 1} dx + \int_0^1 x \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} x dx + \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

(4) 设 $L_1: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} (0 \leq x \leq a)$, $L_2: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$, $L_3: \begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases} (0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}})$, 由题意知 L 由 L_1 、 L_2 和 L_3 共同组成, 因此

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds,$$

又

$$\begin{aligned}\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds &= \int_0^a e^x dx = e^x \Big|_0^a = e^a - 1, \\ \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a e^a dt = a e^a \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt = \frac{\pi}{4} a e^a, \\ \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{1 + 1} dx = e^a - 1,\end{aligned}$$

因此有

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = e^a - 1 + \frac{\pi}{4} a e^a + e^a - 1 = e^a \left(2 + \frac{\pi a}{4} \right) - 2.$$

(5) 弧长元素 $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt \\ &= \sqrt{3} e^t dt,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \cdot \sqrt{3} e^t dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^2 e^{-t} dt = -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(6) 由题意知 Γ 由 AB 、 BC 、 CD 三条直线段组成, 各直线段的参数方程如下:

$$AB: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} (0 \leq t \leq 2), \quad BC: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} (0 \leq t \leq 1), \quad CD: \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2 \end{cases} (0 \leq t \leq 3),$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} x^2 y z ds &= \int_{AB} x^2 y z ds + \int_{BC} x^2 y z ds + \int_{CD} x^2 y z ds \\ &= \int_0^2 0 dt + \int_0^1 0 dt + \int_0^3 2t dt = 9.\end{aligned}$$

(7) 弧长元素

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t} dt,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L y^2 ds &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} dt \\ &= \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{\frac{5}{2}} dt \stackrel{u=\frac{t}{2}}{=} 16 a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 u du \\ &= 32 a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du = 32 a^3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{15} a^3.\end{aligned}$$

(8) 弧长元素 $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = at dt$, 所以

$$\begin{aligned}\int_L (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} [a^2 (\cos t + t \sin t)^2 + a^2 (\sin t - t \cos t)^2] \cdot at dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^3 t (1 + t^2) dt = a^3 \int_0^{2\pi} (t + t^3) dt \\ &= a^3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2).\end{aligned}$$

4. 求半径为 a 、中心角为 2φ 的均匀圆弧 (线密度 $\mu=1$) 的质心.

解 如图 11-1 所示建立直角坐标系.

则曲线弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (-\varphi \leq t \leq \varphi)$. 由对称性

知 $\bar{y}=0$. 又

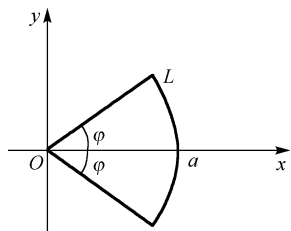


图 11-1

$$M_y = \int_L x \mu ds = \int_{-\varphi}^{\varphi} a \cos t \cdot a dt = 2a^2 \sin \varphi,$$

$$M = \int_L \mu ds = \int_L ds = 2\varphi a \quad (\text{即等于曲线弧的长度}),$$

因此

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2a^2 \sin \varphi}{2\varphi a} = \frac{a \sin \varphi}{\varphi},$$

所求圆弧的质心坐标为 $\left(\frac{a \sin \varphi}{\varphi}, 0\right)$.

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 它的线密度 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. 求:

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z ;

(2) 它的质心.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) dt \\ &= \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \end{aligned}$$

(2) 设弹簧的质心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2), \\ \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_L x \rho(x, y, z) ds = \frac{1}{M} \int_L x (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + k^2 t^2) \cdot \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt, \end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt = a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + k^2 \int_0^{2\pi} t^2 \cos t dt = 4\pi k^2,$$

所以

$$\bar{x} = \frac{a \sqrt{a^2 + k^2} \cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2)} = \frac{6ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

类似地, 可得到

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{M} \int_L y(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a\sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sin t dt \\ &= \frac{a\sqrt{a^2 + k^2} \cdot (-4\pi^2 k^2)}{M} = \frac{-6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_L z(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{k\sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} t(a^2 + k^2 t^2) dt \\ &= \frac{k\sqrt{a^2 + k^2} \cdot (2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 k^2)}{M} = \frac{3\pi k(a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}.\end{aligned}$$

习题 11-2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x = a$ 上的一段, 证明 $\int_L P(x, y) dx = 0$.

证明 不妨设 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases} (t: \alpha \rightarrow \beta)$, 即 L 是直线 $x = a$ 上参数 t 从 α 到 β 的一段.

由对坐标的曲线积分的求解公式, 可得

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(a, t) \cdot a' dt = \int_{\alpha}^{\beta} 0 dt = 0.$$

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到点 $(b, 0)$ 的一段直线, 证明 $\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx$.

证明 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} (x: a \rightarrow b)$, 由对坐标的曲线积分的求解公式, 可得

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

3. 计算对坐标的曲线积分.

- (1) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧;
- (2) $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界 (按逆时针方向绕行);
- (3) $\int_L y dx + x dy$, 其中 L 为圆周 $x = R \cos t, y = R \sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;
- (4) $\oint_L \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行);
- (5) $\int_{\Gamma} x^2 dx + z dy - y dz$, 其中 Γ 为曲线 $x = k\theta, y = a \cos \theta, z = a \sin \theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;
- (6) $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, 其中 Γ 是从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(2, 3, 4)$ 的一段直线;
- (7) $\oint_{\Gamma} dx - dy + y dz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里 A, B, C 依次为点 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$;

(8) $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

解 (1) L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} (x: 0 \rightarrow 2)$, 则

$$\int_L (x^2 - y^2)dx = \int_0^2 (x^2 - x^4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \bigg|_0^2 = -\frac{56}{15}.$$

(2) 设 $L_1: \begin{cases} x = a + a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (t: 0 \rightarrow \pi)$, $L_2: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} (x: 0 \rightarrow 2a)$, 由题意知 L 由 L_1 和 L_2 共同组成,

从而

$$\begin{aligned} \oint_L xy dx &= \int_{L_1} xy dx + \int_{L_2} xy dx \\ &= \int_0^\pi (a + a \cos t) \cdot a \sin t \cdot (-a \sin t) dt + \int_0^{2a} 0 dx \\ &= -a^3 \int_0^\pi (\sin^2 t + \sin^2 t \cos t) dt \\ &= -a^3 \left[\int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t d \sin t \right] \\ &= -a^3 \left[\int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt + \frac{1}{3} \sin^3 t \bigg|_0^\pi \right] \\ &= -a^3 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = -\frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_L y dx + x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R \sin t \cdot (-R \sin t) + R \cos t \cdot R \cos t] dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 0. \end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 则

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t + a \sin t) \cdot (-a \sin t) - (a \cos t - a \sin t) \cdot a \cos t}{a^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_\Gamma x^2 dx + z dy - y dz &= \int_0^\pi [k^2 \theta^2 \cdot k + a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta) - a \cos \theta \cdot a \cos \theta] d\theta \\ &= \int_0^\pi (k^3 \theta^2 - a^2) d\theta = \frac{1}{3} k^3 \pi^3 - a^2 \pi. \end{aligned}$$

(6) Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases} (t:0 \rightarrow 1)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xdx + ydy + (x+y-1)dz &= \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+t+1+2t-1)]dt \\ &= \int_0^1 (6+14t)dt = 13. \end{aligned}$$

(7) 由题意可得有向线段 AB 、 BC 、 CA 的参数方程为

$$AB: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} (t:0 \rightarrow 1), \quad BC: \begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} (t:0 \rightarrow 1), \quad CA: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} (t:0 \rightarrow 1).$$

又 Γ 由 AB 、 BC 、 CA 组成, 因此

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} dx - dy + ydz &= \int_{AB} dx - dy + ydz + \int_{BC} dx - dy + ydz + \int_{CA} dx - dy + ydz \\ &= \int_0^1 (-1-1)dt + \int_0^1 (1+1-t)dt + \int_0^1 1dt \\ &= -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(8) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases} (x:-1 \rightarrow 1)$, 则

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x^3) + (x^4 - 2x^3) \cdot 2x]dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^4 + x^2)dx = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

4. 计算 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$, 其中 L 是:

- (1) 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;
- (2) 从点 $(1,1)$ 到 $(4,2)$ 的直线段;
- (3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$, 然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;
- (4) 曲线 $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解 (1) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=y^2 \\ y=y \end{cases} (y:1 \rightarrow 2)$, 则

$$\begin{aligned} \int_L (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_1^2 [(y^2 + y) \cdot 2y + (y - y^2)]dy \\ &= \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y)dy = 11\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+t \end{cases} (t:0 \rightarrow 1)$, 则

$$\begin{aligned} \int_L (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_0^1 [3(1+3t+1+t) + (1+t-1-3t)]dt \\ &= \int_0^1 (6+10t)dt = 11. \end{aligned}$$

(3) L_1 是由 $(1,1)$ 到 $(1,2)$ 的有向线段, 其参数方程为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \end{cases} (t:0 \rightarrow 1)$, L_2 是由 $(1,2)$ 到 $(4,2)$

的有向线段, 其参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2 \end{cases} (t:0 \rightarrow 1)$, 则

$$\begin{aligned} \int_L (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_{L_1} (x+y)dx + (y-x)dy + \int_{L_2} (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_0^1 (1+t-1)dt + \int_0^1 3(3+3t)dt = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14. \end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=2t^2+t+1 \\ y=t^2+1 \end{cases} (t:0 \rightarrow 1)$, 则

$$\begin{aligned} \int_L (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_0^1 [(2t^2+t+1+t^2+1) \cdot (4x+1) + (t^2+1-2t^2-t-1) \cdot 2t]dt \\ &= \int_0^1 (10t^3+5t^2+9t+2)dt = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

5. 一力场由沿横轴正方向的恒力 $\mathbf{F}$ 构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 由题意可知, 常力 $\mathbf{F}=(|F|, 0)$, 路径 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases} (t:0 \rightarrow \frac{\pi}{2})$, 因此常力 $\mathbf{F}$ 所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L |F|dx + 0dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F| \cdot (-R\sin t)dt = -|F|R. \end{aligned}$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致, 求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所作的功.

解 重力 $\mathbf{F}=(0, 0, mg)$, 质点移动路径 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases} (t:0 \rightarrow 1)$, 则重力 $\mathbf{F}$ 所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L 0dx + 0dy + mgdz \\ &= \int_0^1 mg(z_2-z_1)dt = mg(z_2-z_1). \end{aligned}$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

- (1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
- (2) 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
- (3) 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$.

解 (1) 在曲线弧 L 上任意一点处切向量的方向余弦满足 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \left[\int_L P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta \right] ds \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_L [P(x, y) + Q(x, y)] ds.\end{aligned}$$

(2) 曲线弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} (x: 0 \rightarrow 1)$, 曲线弧上任一点处切向量的方向余弦满足

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_L \left[P(x, y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} + Q(x, y) \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \right] ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1+4x^2}} ds.\end{aligned}$$

(3) 曲线弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{2x-x^2} \end{cases} (x: 0 \rightarrow 1)$, L 上任意一点的切向量的方向余弦满足

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = \sqrt{2x-x^2}, \\ \cos \beta &= \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot \sqrt{2x-x^2} = 1-x,\end{aligned}$$

因此

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L [P(x, y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x, y)(1-x)] ds.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐标的曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 曲线 Γ 的切向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}},$$

$$\cos \beta = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}},$$

$$\cos \alpha = \frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} = \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}},$$

因此

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \frac{P + 2xQ + 3x^2R}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}} ds.$$

习题 11-3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性.

(1) $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

(2) $\oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(2,0)$ 、 $(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

解 (1) 设 $L_1: \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} (x: 0 \rightarrow 1)$, $L_2: \begin{cases} x = y^2 \\ y = y \end{cases} (y: 1 \rightarrow 0)$, L 由 L_1 和 L_2 组成, 因此

$$\begin{aligned} & \oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_{L_1} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy + \int_{L_2} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)dx + \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)dy \\ &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

又 $P = 2xy - x^2$, $Q = x + y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (1 - 2x) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

即 $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

(2) 设 $O(0,0)$ 、 $A(2,0)$ 、 $B(2,2)$ 、 $C(0,2)$, 由题意可知 L 由有向线段 OA 、 AB 、 BC 和 CO 共同组成, 它们的参数方程分别如下:

$$\begin{aligned} OA: & \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} (x: 0 \rightarrow 2), & AB: & \begin{cases} x = 2 \\ y = y \end{cases} (y: 0 \rightarrow 2), \\ BC: & \begin{cases} x = x \\ y = 2 \end{cases} (x: 2 \rightarrow 0), & CO: & \begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} (y: 2 \rightarrow 0). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{OA} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}, \\ \int_{AB} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_0^2 (y^2 - 4y)dy = \frac{8}{3} - 8, \\ \int_{BC} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_2^0 (x^2 - 8x)dx = 16 - \frac{8}{3}, \\ \int_{CO} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_2^0 y^2 dx = -\frac{8}{3},\end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \int_{OA} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy + \int_{AB} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &\quad + \int_{BC} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy + \int_{CO} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 16 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 8.\end{aligned}$$

又 $P = x^2 - xy^3$, $Q = y^2 - 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -3xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$, $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$, 从而

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy \\ &= \int_0^2 dy \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dx = \int_0^2 (-4y + 6y^2) dy = 8.\end{aligned}$$

$$\text{即 } \oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

2. 利用曲线积分, 求下面曲线所围成的图形的面积.

- (1) 星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$;
- (2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;
- (3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$.

解 (1) 星形线取正向的参数方程 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 因此

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \oint_L -ydx + xdy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-a \sin^3 t) \cdot (-3a \cos^2 t \sin t) + a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cdot \cos t] dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4} dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \pi a^2.\end{aligned}$$

(2) 椭圆取正向的参数方程 $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 因此

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-3 \sin t) \cdot (-4 \sin t) + 4 \cos t \cdot 3 \cos t] dt \\ &= 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi. \end{aligned}$$

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 取正向的参数方程 $\begin{cases} x = a + a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 因此

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-a \sin t (-a \sin t) + (a + a \cos t) a \cos t] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = \frac{a^2}{2} (t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2. \end{aligned}$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方向为逆时针方向.

解 在圆周 L 围成的闭区域内的点 $(0,0)$ 处, $P = \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$, $Q = \frac{-x}{2(x^2 + y^2)}$ 均无定义, 因此本题不能直接利用格林公式求解. 如图 11-2 所示, 构造辅助线 $l: \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 在 L 和 l 所围成的复连通区域 D 上应用格林公式, 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以

$$\oint_{L+l} \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)} &= \oint_l \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{2r^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = -\pi. \end{aligned}$$

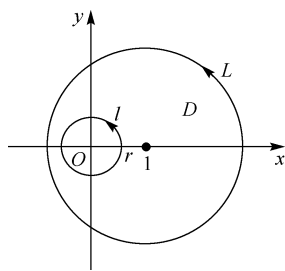


图 11-2

4. 确定闭曲线 C , 使得曲线积分 $\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(y + x - \frac{2}{3} x^3 \right) dy$ 达到最大值.

解 令 $P = x + \frac{y^3}{3}$, $Q = y + x - \frac{2}{3} x^3$, 在坐标平面上任取光滑闭曲线 C , 设其围成的闭区域为 D , 则由格林公式得

$$\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3 \right) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_D (1 - 2x^2 - y^2) dx dy$$

由二重积分几何意义知, 上述二重积分值恰好等于: 以 $f(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2$ 为曲顶, 以闭区域 D 为底的曲顶柱体体积值, 因此当闭曲线为椭圆曲线 $2x^2 + y^2 = 1$ 时, 曲顶柱体达到最大, 从而积分值达到最大.

5. 设 n 边形的 n 个顶点按逆时针方向依次为 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$. 试利用曲线积分证明此 n 边形的面积为

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

解 利用格林公式计算 n 边形的面积, 设 n 边形的边界曲线为 L , 方向取正方向, 则有

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{M_1 M_2} x dy - y dx + \int_{M_2 M_3} x dy - y dx + \dots + \int_{M_n M_1} x dy - y dx \right)$$

直线段 $M_1 M_2$ 的参数方程为

$$l: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

从而

$$\int_{M_1 M_2} x dy - y dx = \int_0^1 (x_1 y_2 - y_1 x_2) dt = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

同理可得

$$\int_{M_2 M_3} x dy - y dx = \int_0^1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) dt = x_2 y_3 - y_2 x_3;$$

$$\vdots$$

$$\int_{M_n M_1} x dy - y dx = \int_0^1 (x_n y_1 - y_n x_1) dt = x_n y_1 - y_n x_1.$$

于是 n 边形的面积

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{M_1 M_2} x dy - y dx + \int_{M_2 M_3} x dy - y dx + \dots + \int_{M_n M_1} x dy - y dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

6. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值.

- (1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$;
 (2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$;
 (3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$.

解 (1) 函数 $P = x + y$, $Q = x - y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故此曲线积分与路径无关. 设 $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$, 取有向折线 ABC , 则

$$\begin{aligned} \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_{ABC} (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= \int_{AB} (x+y)dx + (x-y)dy + \int_{BC} (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= \int_1^2 (x+1)dx + \int_1^3 (2-y)dy = \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(2) 函数 $P = 6xy^2 - y^3$, $Q = 6x^2y - 3xy^2$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故此曲线积分与路径无关. 设 $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,4)$, 取有向折线 ABC , 则

$$\begin{aligned} &\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy \\ &= \int_{ABC} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy \\ &= \int_{AB} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy + \int_{BC} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy \\ &= \int_1^3 (24x - 8)dx + \int_2^4 (54y - 9y^2)dy \\ &= 80 + 156 = 236. \end{aligned}$$

(3) 函数 $P = 2xy - y^4 + 3$, $Q = x^2 - 4xy^3$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故此曲线积分与路径无关. 设 $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$, 取有向折线 ABC , 则

$$\begin{aligned} &\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_{ABC} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_{AB} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy + \int_{BC} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_1^2 3dx + \int_0^1 (4 - 8y^3)dy = 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

7. 利用格林公式, 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界;

(2) $\oint_L (x^2y \cos x + 2xy \sin x - y^2e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$);

(3) $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) 设 D 是由 L 所围成的三角形闭区域, $P = 2x - y + 4$, $Q = 5y + 3x - 6$, 则由格林公式

$$\begin{aligned}\oint_L (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (3 + 1) dx dy = 4 \iint_D dx dy = 12.\end{aligned}$$

(2) 设 D 是由 L 所围成的闭区域, $P = x^2y \cos x + 2xy \sin x - y^2e^x$, $Q = x^2 \sin x - 2ye^x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin x + x^2 \cos x - 2ye^x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则由格林公式

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2y \cos x + 2xy \sin x - y^2e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy \\ = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.\end{aligned}$$

(3) 设 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ 、 $B(\frac{\pi}{2}, 1)$, D 是由 L 和有向折线 OAB 所围成的闭区域, $P = 2xy^3 - y^2 \cos x$, $Q = 1 - 2y \sin x + 3x^2y^2$, 则 P 、 Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

则由格林公式

$$\begin{aligned}\oint_{L+OAB} (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)dy \\ = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)dy \\ = \int_{OAB} (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)dy \\ = \int_{OA} (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{AB} (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3\pi^2}{4} y^2 \right) dy \\
& = \left(y - y^2 + \frac{\pi^2}{4} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

(4) 设 $A(1,0)$ 、 $B(1,1)$ ， D 是由 L 和有向折线 OAB 所围成的闭区域， $P = x^2 - y$ ， $Q = -(x + \sin^2 y)$ ，则 P 、 Q 在 D 内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

则由格林公式

$$\begin{aligned}
& \oint_{L+OAB} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\
& = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \int_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\
& = \int_{OAB} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\
& = \int_{OA} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy + \int_{AB} (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy \\
& = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 -(1 + \sin^2 y) dy \\
& = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \left(y + \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{7}{6} + \frac{\sin 2}{4}.
\end{aligned}$$

8. 验证下列 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的—个 $u(x,y)$ 。

- (1) $(x + 2y)dx + (2x + y)dy$;
- (2) $2xydx + x^2dy$;
- (3) $4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$;
- (4) $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$;
- (5) $(2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy$.

解 (1) 函数 $P = x + 2y$ ， $Q = 2x + y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分。取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ，则有

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x + 2y) dx + (2x + y) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x+2y)dx + (2x+y)dy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x+2y)dx + (2x+y)dy \\
&= \int_0^x xdx + \int_0^y (2x+y)dy \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

(2) 函数 $P = 2xy$, $Q = x^2$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2xydx + x^2dy \\
&= \int_0^x 0dx + \int_0^y x^2dy = x^2y.
\end{aligned}$$

(3) 函数 $P = 4\sin x \sin(3y) \cos x$, $Q = -3\cos(3y) \cos(2x)$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos(3y) \sin(2x) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} 4\sin x \sin(3y) \cos x dx - 3\cos(3y) \cos(2x) dy \\
&= \int_0^x 0dx + \int_0^y -3\cos(3y) \cos(2x) dy \\
&= -\sin(3y) \cos(2x).
\end{aligned}$$

(4) 函数 $P = 3x^2y + 8xy^2$, $Q = x^3 + 8x^2y + 12ye^y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy \\
&= \int_0^x 0dx + \int_0^y (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy \\
&= x^3y + 4x^2y^2 + 12(ye^y - e^y).
\end{aligned}$$

(5) 函数 $P = 2x \cos y + y^2 \cos x$, $Q = 2y \sin x - x^2 \sin y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos x - 2x \sin y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x \cos y + y^2 \cos x)dx + (2y \sin x - x^2 \sin y)dy \\
&= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y \sin x - x^2 \sin y) dy \\
&= y^2 \sin x + x^2 \cos y.
\end{aligned}$$

9. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X = x + y^2$, $Y = 2xy - 8$, 这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

解 变力在此场内移动时所作的功为

$$W = \int_L Xdx + Ydy = \int_L (x + y^2)dx + (2xy - 8)dy.$$

函数 $P = x + y^2$, $Q = 2xy - 8$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此此曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

*10. 判别下列方程中哪些是全微分方程. 对于全微分方程, 求出它的通解.

- (1) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$;
- (2) $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2dy = 0$ (a 为常数);
- (3) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;
- (4) $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0$;
- (5) $(x^2 - y)dx - xdy = 0$;
- (6) $y(x - 2y)dx - x^2dy = 0$;
- (7) $(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta = 0$;
- (8) $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.

解 判断 $Pdx + Qdy = 0$ 为全微分方程的充要条件是: 在某一单连通区域内, P 、 Q 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 并且若 $u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ 或 $du(x, y) = Pdx + Qdy$, 则 $u(x, y) = C$ 恰好是 $Pdx + Qdy = 0$ 的通解. 因此, 通解的求解方法主要有两种: 曲线积分法和凑微分法.

- (1) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy \\ &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (6x^2y + 4y^2)dy \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 \end{aligned}$$

因此所求通解为 $x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C$.

- (2) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x - 2y = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2dy = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2dy \\ &= \int_0^x a^2 dx + \int_0^y -(x + y)^2 dy \\ &= a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3, \end{aligned}$$

因此所求通解为 $a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 = C$.

(3) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端} &= e^y dx + (xe^y - 2y)dy \\ &= e^y dx + xe^y dy - 2ydy \\ &= d(xe^y) + d(-y^2) \\ &= d(xe^y - y^2)\end{aligned}$$

因此所求通解为 $xe^y - y^2 = C$.

(4) $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0$ 等价于

$$(x \cos y + \cos x)dy + (-y \sin x + \sin y)dx = 0.$$

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y - \sin x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端} &= (x \cos y + \cos x)dy + (-y \sin x + \sin y)dx \\ &= d(x \sin y + y \cos x)\end{aligned}$$

因此所求通解为 $x \sin y + y \cos x = C$.

(5) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(x^2 - y)dx - xdy = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端} &= (x^2 - y)dx - xdy \\ &= x^2 dx - ydx - xdy \\ &= d\left(\frac{1}{3}x^3\right) + d(-xy) \\ &= d\left(\frac{1}{3}x^3 - xy\right)\end{aligned}$$

因此所求通解为 $\frac{1}{3}x^3 - xy = C$.

(6) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \neq x - 4y = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $y(x - 2y)dx - x^2dy = 0$ 不是全微分方程.

(7) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial \rho} = 2e^{2\theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta}$, 所以 $(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端} &= (1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta \\ &= d\rho + e^{2\theta}d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta \\ &= d(\rho) + d(\rho e^{2\theta}) \\ &= d(\rho + \rho e^{2\theta})\end{aligned}$$

因此所求通解为 $\rho + \rho e^{2\theta} = C$.

(8) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = y \neq 2y = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ 不是全微分方程.

11. 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

解 要使 $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$ 为某个二元函数的梯度, 需满足 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

因为 $P = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda$, $Q = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - \lambda x^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = P = 2y(x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y,$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 可得

$$4x(x^4 + y^2)^\lambda(1 + \lambda) = 0.$$

因为 $x > 0$, $(x^4 + y^2)^\lambda > 0$, 所以要使上式成立, 必有 $\lambda = -1$. 在 xOy 的右半平面上, 取点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, 则

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} 2xy(x^4 + y^2)^{-1} dx - x^2(x^4 + y^2)^{-1} dy \\ &= \int_1^x 0 dx + \int_0^y -x^2(x^4 + y^2)^{-1} dy \\ &= -\int_0^y \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} d\frac{y}{x^2} \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

习题 11-4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ , 在点 (x, y, z) 处它的面密度为 $\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表示该曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 采用元素法求解. 假设将曲面分割为 n (n 是一个很大的数) 片, 任取其中一片曲面 dS (dS 同时表示此曲面的面积), (x, y, z) 是曲面上一点, 则此片曲面的质量可表示为 $\mu(x, y, z)dS$, 此曲面对于 x 轴的转动惯量元素为

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS,$$

以 dI_x 为积分元素, 在曲面 Σ 上进行积分, 可得曲面对于 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS,$$

其中 Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成.

解 将曲面 Σ_1 和 Σ_2 的边界线作为其中一条分割线, 将曲面 Σ 分割为 n 份 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$, 假设 Σ_1 恰好被分为 n_1 份, Σ_2 被分为 n_2 份, 则 $n = n_1 + n_2$. 取 λ 为所有 n 份曲面直径的最大值, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

$$\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

$$\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

因为

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

两侧分别取极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

从而有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 与二重积分有什么关系?

解 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时, Σ 可表示为 $z=0$, 且 Σ 在 xOy 面上的投影为 Σ 自身, 面积元素 $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = dx dy$, 从而由曲面积分的求解公式得

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(x, y, 0) dx dy.$$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 Σ 为抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分,

$f(x, y, z)$ 分别如下:

(1) $f(x, y, z) = 1$;

(2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$;

(3) $f(x, y, z) = 3z$.

解 由题意知曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 面积元素

$$dS = \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma} dS \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \quad (\text{可转化为极坐标求解}) \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \end{aligned}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS \\
 &= \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \quad (\text{可转化为极坐标求解}) \\
 &= \iint_D \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2} d\rho \quad \left(\text{令 } \rho = \frac{1}{2} \tan t \right) \\
 &= 2\pi \cdot \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \frac{1}{8} \tan^3 t \cdot \sec t \cdot \frac{1}{2} \sec^2 t dt \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \tan^3 t \sec^3 t dt \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \tan^2 t \sec^2 t d \sec t \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} (\sec^2 t - 1) \sec^2 t d \sec t \\
 &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} (\sec^4 t - \sec^2 t) d \sec t \\
 &= \frac{149\pi}{30}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Sigma} 3z dS \\
 &= 3 \iint_D (2-x^2-y^2) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \quad (\text{可转化为极坐标求解}) \\
 &= 3 \iint_D (2-\rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho \quad \left(\text{令 } \rho = \frac{1}{2} \tan t \right) \\
 &= 6\pi \cdot \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \left(2 - \frac{1}{4} \tan^2 t \right) \sqrt{1+\tan^2 t} \cdot \frac{1}{2} \tan t \cdot \frac{1}{2} \sec^2 t dt \\
 &= \frac{3\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} (8 - \tan^2 t) \tan t \sec^3 t dt \\
 &= 3\pi \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} \sec^2 t d \sec t - \frac{3\pi}{8} \int_0^{\arctan 2\sqrt{2}} (\sec^2 t - 1) \sec^2 t d \sec t \\
 &= 26\pi - \frac{149}{10} \pi = \frac{111}{10} \pi.
 \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截得的部分.

解 (1) 设 $\Sigma_1: z = 1$, $\Sigma_2: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 由题意可知积分曲面 Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 共同组成, 两曲面的交线为 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 \end{cases}$, 因此可得 Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= (1 + \sqrt{2}) \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (\text{可转化为极坐标求解}) \\ &= (1 + \sqrt{2}) \iint_{D_{xy}} \rho^3 d\rho d\theta = (1 + \sqrt{2}) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= (1 + \sqrt{2}) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

(2) 锥面 $\Sigma: z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, Σ 在 xOy 面上的投影 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 3$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{3x}{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}\right)^2 + \left(\frac{3y}{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot 2 dx dy \quad (\text{可转化为极坐标求解}) \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} \rho^3 d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \\ &= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{9}{4} = 9\pi. \end{aligned}$$

6. 计算下列对面积的曲面积分.

- (1) $\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分;
- (2) $\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS$, 其中 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 6$ 在第一卦限中的部分;
- (3) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分;

(4) $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1) 曲面 $\Sigma: z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 是由 x 轴、 y 轴和直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 围成的三角形区域.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS &= \iint_{D_{xy}} \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y \right) \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot D_{xy} \text{ 的面积} \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) = 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$

(2) 曲面 $\Sigma: z = 6 - 2x - 2y$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 是由 x 轴、 y 轴和直线 $x + y = 3$ 围成的三角形区域.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS &= \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 - x + 6 - 2x - 2y) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 - x + 6 - 2x - 2y) \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2} dx dy \\ &= 3 \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 + 6 - 3x - 2y) dx dy \\ &= 3 \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2xy + 6 - 2x^2 - 3x - 2y) dy \\ &= -\frac{27}{4}. \end{aligned}$$

(3) 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$. 由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 xOz 面对称, 所以

$$\iint_{\Sigma} x dS = \iint_{\Sigma} y dS = 0,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS &= \iint_{\Sigma} z dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&= a \iint_{D_{xy}} dx dy \\
&= a\pi(a^2 - h^2).
\end{aligned}$$

(4) 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2ax$, 由于积分曲面 Σ 关于 xOz 面对称, 而 xy 和 yz 是关于 y 的奇函数, 因此有

$$\iint_{\Sigma} xy dS = \iint_{\Sigma} yz dS = 0.$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS &= \iint_{\Sigma} zx dS \\
&= \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \\
&= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
&= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} \rho^3 \cos \theta d\rho d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^3 d\rho \\
&= 4\sqrt{2} a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta \\
&= 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta \\
&= 8\sqrt{2} a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4.
\end{aligned}$$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面密度为 $u = z$.

解 曲面 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2$. 此壳的质量

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.
\end{aligned}$$

令 $\rho^2 = t$ 即 $\rho = \sqrt{t}$, $d\rho = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+\rho^2} d\rho &= \int_0^2 t^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+t} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 t \sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 t d \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} t \right]_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int_0^2 (1+t)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{2}{15} (6\sqrt{3}+1), \end{aligned}$$

因此 $m = \frac{2}{15} (6\sqrt{3}+1)\pi$.

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 对于 z 轴的转动惯量.

解 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2$, 半球壳对于 z 轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 dS \\ &= \mu_0 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} dx dy \\ &= \mu_0 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \mu_0 \int_0^a \rho^3 \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho, \end{aligned}$$

令 $\rho = a \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^a \rho^3 \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3 t \cdot \frac{a}{a \cos t} \cdot a \cos t dt \\ &= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt \\ &= a^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} a^4, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I_z = 2\pi\mu_0 \int_0^a \rho^3 \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{4}{3}\pi a^4 \mu_0.$$

习题 11-5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz = \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz.$$

证明 将曲面 Σ 任意分割为 n 份 ΔS_i (ΔS_i 同时表示每片曲面的面积, $i = 1, 2, \dots, n$), ΔS_i 在 yOz 平面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$, 在每片曲面上任意取点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 所有小曲面直径的最大值用 λ 表示, 由对坐标的曲面积分的定义知

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\ &= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz. \end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ 与二重积分有什么关系?

解 曲面 Σ 可表示为 $z = 0$, 取哪一侧不确定. 假设曲面在 xOy 平面上的投影为 D_{xy} , 则由对坐标的曲面积分的求解公式得

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0) dx dy,$$

当曲面取上侧时, 公式取正号, 曲面取下侧时, 公式取负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分.

(1) $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧;

(2) $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3) $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$, 其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧;

(4) $\oint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx$, 其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) 曲面 $\Sigma: z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 取下侧. Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq R^2$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \quad (\text{令 } \rho = R \sin t) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5 \sin^5 t \cdot R \cos t \cdot R \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{4} R^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 t - \sin^7 t) dt \\ &= \frac{2}{105} \pi R^7. \end{aligned}$$

(2) 因为曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影为 0, 所以 $\iint_{\Sigma} z dx dy = 0$. 曲面 Σ 在 yOz 平面及 zOx 平面上的投影为

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \{(y, z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}, \\ D_{zx} &= \{(x, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}, \end{aligned}$$

又曲面取的是前侧, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx &= \iint_{\Sigma} x dy dz + \iint_{\Sigma} y dz dx \\ &= \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2} dy dz + \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 - x^2} dz dx \\ &= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy + \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy \\ &= 6 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy \quad (\text{可利用几何意义求解}) \\ &= 6 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

(3) 可利用两类曲面积分之间的关系求解. 曲面 $\Sigma: z = 1 - x + y$, 取上侧. 曲面上任意一点处单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} (-z'_x, -z'_y, 1) = \frac{\sqrt{3}}{3} (1, -1, 1).$$

由两类曲面积分之间的关系得

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dzdx + [f(x, y, z) + z] dxdy \\
&= \iint_{\Sigma} \{ [f(x, y, z) + x] \cos \alpha + [2f(x, y, z) + y] \cos \beta \\
&\quad + [f(x, y, z) + z] \cos \gamma \} dS \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \iint_{\Sigma} \{ [f(x, y, z) + x] - [2f(x, y, z) + y] + [f(x, y, z) + z] \} dS \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \Sigma \text{ 的面积} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(4) 由题可知, 在三个坐标平面 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 上的积分值均为零, 因此只需计算曲面 $\Sigma': x+y+z=1$ 上的积分. 由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性可知

$$\iint_{\Sigma'} xz dx dy = \iint_{\Sigma'} xy dy dz = \iint_{\Sigma'} yz dz dx,$$

又

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma'} xz dx dy &= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dx dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y) dy \\
&= \frac{1}{24},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx &= \iint_{\Sigma'} xz dx dy + \iint_{\Sigma'} xy dy dz + \iint_{\Sigma'} yz dz dx \\
&= 3 \iint_{\Sigma'} xz dx dy = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

化成对面积的曲面积分, 其中

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由曲面取上侧可知, 曲面上任意一点的单位法向量为

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (2\sqrt{3})^2}} \cdot (3, 2, 2\sqrt{3}) \\
 &= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5} \right),
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 &\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\
 &= \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \\
 &= \iint_{\Sigma} \left[\frac{3}{5} P(x, y, z) + \frac{2}{5} Q(x, y, z) + \frac{2\sqrt{3}}{5} R(x, y, z) \right] dS.
 \end{aligned}$$

(2) 由曲面取上侧可知, 曲面上任意一点的单位法向量为

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \cdot (2x, 2y, 1),
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 &\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\
 &= \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \\
 &= \iint_{\Sigma} \left[\frac{2xP(x, y, z) + 2yQ(x, y, z) + R(x, y, z)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \right] dS.
 \end{aligned}$$

习题 11-6

1. 利用高斯公式计算曲面积分.

(1) $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

*(2) $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧;

*(3) $\oiint_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy$, 其中 Σ 为上半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的表面的外侧;

(4) $\oiint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$, 其中 Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧;

(5) $\oiint_{\Sigma} 4xzdydz - y^2dzdx + yzdx dy$, 其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成

的立方体的全表面的外侧.

解 (1) 由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \iiint_{\Omega} 2(x+y+z) dxdydz \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz \\ &= 2 \int_0^a (a^2 x + a^3) dx = 3a^4.\end{aligned}$$

*(2) 由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \quad (\text{可利用球面坐标求解}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{12}{5} a^5 \pi.\end{aligned}$$

*(3) 由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dxdy &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2}{5} a^5 \pi.\end{aligned}$$

(4) 由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 81\pi.$$

(5) 有高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} 4xzdydz - y^2dzdx + yzdx dy &= \iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dxdydz \\ &= \iiint_{\Omega} (4z - y) dxdydz\end{aligned}$$

由被积函数和积分区域关于积分变量的对称性, 可得

$$\iiint_{\Omega} z dxdydz = \iiint_{\Omega} y dxdydz,$$

从而

$$\text{原式} = 3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z dz = \frac{3}{2}.$$

*2. 求下列向量 $\mathbf{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量.

- (1) $\mathbf{A} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的全表面, 流向外侧;
(2) $\mathbf{A} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的全表面, 流向外侧;
(3) $\mathbf{A} = (2x + 3z)\mathbf{i} - (xz + y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$, Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心、半径 $R = 3$ 的球面, 流向外侧.

解 (1) 由通量的定义知

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\&= \iint_{\Sigma} yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy \\&= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\&= 2 \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz = 0.\end{aligned}$$

(2) 由通量的定义知

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\&= \iint_{\Sigma} (2x - z) dy dz + x^2 y dz dx - xz^2 dx dy \\&= \iiint_{\Omega} (2 + x^2 - 2xz) dx dy dz \\&= \iiint_{\Omega} 2 dx dy dz + \iiint_{\Omega} (x^2 - 2xz) dx dy dz \\&= 2 \cdot a^3 + \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 - 2xz) dz \\&= 2a^3 - \frac{1}{6}a^5 = a^3 \left(2 - \frac{1}{6}a^2 \right).\end{aligned}$$

(3) 由通量的定义知

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\&= \iint_{\Sigma} (2x + 3z) dy dz - (xz + y) dz dx + (y^2 + 2z) dx dy \\&= \iiint_{\Omega} (2 - 1 + 2) dx dy dz \\&= 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 108\pi.\end{aligned}$$

*3. 求下列向量场 A 的散度.

(1) $A = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$;

(2) $A = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k}$;

(3) $A = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

解 (1) 设 $P = x^2 + yz$, $Q = y^2 + xz$, $R = z^2 + xy$, 则

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(x + y + z).$$

(2) 设 $P = e^{xy}$, $Q = \cos(xy)$, $R = \cos(xz^2)$, 则

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x \sin(xy) - 2xz \sin(xz^2).$$

(3) 设 $P = y^2$, $Q = xy$, $R = xz$, 则

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x.$$

4. 设 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \oiint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式称为格林第二公式.

证明 由格林第一公式知

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v dx dy dz = \oiint_{\Sigma} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

将公式中的 u 、 v 位置互换, 得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dx dy dz = \oiint_{\Sigma} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

上面两式相减可得

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \oiint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

*5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力 (即浮力) 的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证明 以液面作为 xOy 平面建立空间直角坐标系, z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ . 在物体表面 Σ 上取面积元素 dS , $M(x, y, z)$ 为 dS 上的一点 ($z \leq 0$), Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$, 则 dS 所受液体的压力在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分量分别为

$$\rho z \cos \alpha dS, \rho z \cos \beta dS, \rho z \cos \gamma dS.$$

Σ 所受液体的总压力在各坐标轴上的分量, 等于上列各个分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式

计算可得

$$F_x = \oiint_{\Sigma} \rho z \cos \alpha dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial x} dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0,$$

$$F_y = \oiint_{\Sigma} \rho z \cos \beta dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial y} dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0,$$

$$F_z = \oiint_{\Sigma} \rho z \cos \gamma dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} dv = \iiint_{\Omega} \rho dv = \rho V \quad (V \text{ 为 } \Omega \text{ 的体积}),$$

因此合力 $\mathbf{F} = \rho V \mathbf{k}$, 此力的方向铅直向上, 大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 11-7

1. 试对曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式.

证明 不妨设曲面 Σ 取上侧, 那么按右手规则, Σ 的边界曲线 Γ 从 z 轴正向看过去应取逆时针方向. 设曲线 Γ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 1 (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 则

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy + z^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos^2 t - \sin^3 t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) d \cos t \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & x^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} (x - y^2) dxdy = \iint_{D_{xy}} (1 - 2y) dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (1 - 2\rho \sin \theta) \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^2 \sin \theta) d\rho \\ &= \pi, \end{aligned}$$

即

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

*2. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 若从 x 轴的正向看去, 该圆周取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, ($a > 0, b > 0$), 若从 x 轴的正向看去, 该椭圆取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, 若从 z 轴的正向看去, 该圆周取逆时针方向;

(4) $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = 0$, 若从 z 轴的正向看去, 该圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取 Σ 为 $x + y + z = 0$ 被 Γ 所围成的部分, 并取上侧. 曲面 Σ 上任意一点处的单位法向量为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= -\sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = -\sqrt{3}\pi a^2.\end{aligned}$$

(2) 取 Σ 为 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 被 Γ 所围成的部分, 并取上侧. 曲面 Σ 上任意一点处的单位法向量为

$\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iint_{\Sigma} dS,\end{aligned}$$

积分 $\iint_{\Sigma} dS$ 恰好为曲面 Σ 的面积, 因此可以利用曲面积分进行求解, 在这里我们选用一种更方面的方法求解. 记曲面 Σ 的面积为 S_{Σ} , Σ 在 xOy 面上的投影区域的面积记为 S_D , 两者之间满足关系式 $S_{\Sigma} = \frac{S_D}{\cos \gamma}$, 而 $S_D = \pi a^2$, 所以

$$S_{\Sigma} = \frac{S_D}{\cos \gamma} = \frac{\pi a^2}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

所以, 原积分 $= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} dS = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \pi a \sqrt{a^2+b^2} = -2\pi a(a+b)$.

(3) 取 Σ 为 $z=2$ 被 Γ 所围成的部分, 并取上侧. 曲面 Σ 上任意一点处的单位法向量为 $\mathbf{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\lambda)=(0,0,1)$, 且 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\leq 4$, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} dS \\ &= -\iint_{\Sigma} (z+3) dS \\ &= -\iint_{D_{xy}} (2+3) dx dy \\ &= -20\pi.\end{aligned}$$

(4) 取 Σ 为 $z=0$ 被 Γ 所围成的部分, 并取上侧. 曲面 Σ 上任意一点处的单位法向量为 $\mathbf{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=(0,0,1)$, 且 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\leq 9$, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} dS = \pi \cdot 3^2 = 9\pi.\end{aligned}$$

*3. 求下列向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度.

(1) $\mathbf{A}=(2z-3y)\mathbf{i}+(3x-z)\mathbf{j}+(y-2x)\mathbf{k}$;

(2) $\mathbf{A}=(z+\sin y)\mathbf{i}-(z-x\cos y)\mathbf{j}$;

(3) $\mathbf{A}=x^2\sin y\mathbf{i}+y^2\sin(xz)\mathbf{j}+xy\sin(\cos z)\mathbf{k}$.

$$\text{解 (1) } \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

$$(2) \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

$$\begin{aligned}(3) \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix} \\ &= [x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)]\mathbf{i} - y\sin(\cos z)\mathbf{j} + [y^2z\cos(xz) - x^2\cos y]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

*4. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ 化为曲线积分, 并计算积分值, 其中 $\mathbf{A}$ 、 Σ 及 $\mathbf{n}$ 分

别如下:

(1) $\mathbf{A} = y^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧, $\mathbf{n}$ 是 Σ 的单位法向量;

(2) $\mathbf{A} = (y-z)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, Σ 为立方体 $\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, $\mathbf{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) 曲面 Σ 的正向边界曲线 Γ 是 xOy 平面上的圆周: $x^2 + y^2 = 1$, 且从 z 轴正向看, Γ 取逆时针方向. Γ 的参数方程为: $x = \cos t, y = \sin t, z = 0 (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xydy + xzdz \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos^2 t) d\cos t = 0. \end{aligned}$$

(2) 曲面 Σ 的正向边界曲线 Γ 是由 $x=0, y=0, x=2, y=2$ 所围成的正方形的边界曲线, 且从 z 轴正向看, Γ 取逆时针方向. 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \oint_{\Gamma} (y-z)dx + yzdy - xzdz \quad (\text{在} \Gamma \text{上} z \text{恒为} 0) \\ &= \oint_{\Gamma} ydx = \int_{x=0} ydx + \int_{y=0} ydx + \int_{x=2} ydx + \int_{y=2} ydx \\ &= \int_{y=2} ydx = \int_2^0 2dx = -4. \end{aligned}$$

*5. 求下列向量场 $\mathbf{A}$ 沿闭曲线 Γ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向) 的环流量.

(1) $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c 为常量), Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;

(2) $\mathbf{A} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$, 其中 Γ 为圆周 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

解 由两类曲线积分之间的关系, 环流量又可表示为

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

(1) 曲线 Γ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 0 (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 因此环流量

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \oint_{\Gamma} -ydx + xdy + cdz \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t] dt = 2\pi. \end{aligned}$$

(2) 曲线 Γ 的参数方程为 $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0 (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 因此环流量

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\
&= \oint_{\Gamma} (x-z) dx + (x^3 + yz) dy - 3xy^2 dz \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上 } z \text{ 恒为 } 0) \\
&= \oint_{\Gamma} x dx + x^3 dy \\
&= \int_0^{2\pi} [2 \cos t \cdot (-2 \sin t) + 8 \cos^3 t \cdot 2 \cos t] dt \\
&= -4 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \\
&= 0 + 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \quad (\text{由周期性和对称性}) \\
&= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 64 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi.
\end{aligned}$$

*6. 证明 $\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot } \mathbf{a} + \text{rot } \mathbf{b}$.

证明 设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, 其中 $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ 均为关于 x, y, z 的函数.

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \text{rot}[(a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}] \\
&= \left[\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial x} \right] \mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial y} \right] \mathbf{k} \\
&= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\
&= \text{rot } \mathbf{a} + \text{rot } \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

*7. 设 $u = u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\text{rot}(\text{grad } u)$.

$$\text{解 } \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\text{grad } u) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

由于 $u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 所以有 $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 从而

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0.$$

总习题十一

1. 填空.

(1) 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成第一类曲线积分是 _____, 其中 α 、 β 、 γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x, y, z) 处的 _____ 的方向角.

(2) 第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ 化成第一类曲面积分是 _____, 其中 α 、 β 、 γ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的 _____ 的方向角.

解 (1) 由两类曲线积分之间的关系知, 第一个空格填 $\int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$; 第二空格填“切向量”.

(2) 由两类曲面积分之间的关系知, 第一个空格填 $\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$; 第二空格填“法向量”.

2. 下题中给出了四个结论, 从中选择一个正确的结论.

设曲面 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$), 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则有 _____.

A. $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

B. $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

C. $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

D. $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

解 答案 C

分析: 对于答案 A, 因为被积函数 x 关于 x 为奇函数, 同时积分曲面 Σ 关于 yOz 平面对称, 因此有 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$. 而在 Σ_1 上 $x > 0$, 所以 $\iint_{\Sigma_1} x dS > 0$, 因此 $\iint_{\Sigma} x dS \neq 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$.

同理可得答案 B、D 也是错误的. 对于答案 C, 由于被积函数 z 关于 x 和 y 都是偶函数, 且积分曲面 Σ 关于 yOz 和 zOx 平面都是对称的, 因此有 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$. 而在曲面 Σ_1 上, x 、 y 、 z

都是对称的, 因此 $\iint_{\Sigma_1} z dS = \iint_{\Sigma_1} x dS$, 所以有 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ 成立.

3. 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(2) $\int_{\Gamma} z ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$);

(3) $\int_L (2a-y)dx + xdy$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

(4) $\int_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, 其中 Γ 是曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

(5) $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$, 其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ 沿逆时针方向;

(6) $\oint_{\Gamma} xyzdz$, 其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得的截痕, 从 z 轴的正向看去, 沿逆时针方向.

解 (1) 由题目可得曲线 L 的极坐标方程 $\rho = a \cos \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$, 因此 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos^2 \theta \\ y = a \cos \theta \sin \theta \end{cases} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right), \text{ 因此}$$

$$\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot \sqrt{(x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \theta d\theta = 2a^2.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{\Gamma} z ds &= \int_0^{t_0} t \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt \\ &= \int_0^{t_0} t \cdot \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{t_0} t \cdot \sqrt{2+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \sqrt{2+t^2} d(2+t^2) \\ &= \frac{1}{3} (2+t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3} \left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_L (2a-y)dx + xdy &= \int_0^{2\pi} [(2a-a+a \cos t) \cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t) \cdot a \sin t] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz &= \int_0^1 [(t^4-t^6) \cdot 1 + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\ &= \int_0^1 [3t^6 - 2t^4] dt = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

(5) 设点 $A(2a, 0)$, 添加有向直线段 $OA: y=0$ ($x: 0 \rightarrow 2a$), 则 OA 和 L 共同构成封闭的有向曲线, 其所围成的半圆形闭区域用 D 表示, 则由格林公式

$$\begin{aligned} \oint_{L+OA} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2) dx dy \\ &= \pi a^2, \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \pi a^2 - \int_{OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\ &= \pi a^2 - \int_0^{2a} 0 dx = \pi a^2.\end{aligned}$$

(6) 由题意可知曲线 Γ 的一般式方程 $\begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, 得 $x^2 + 2y^2 = 1$, 则可设曲线的参数方

程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{cases} (t: 0 \rightarrow 2\pi)$, 从而

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} xyz dz &= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi.\end{aligned}$$

4. 计算下列曲面积分.

- (1) $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是介于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$;
- (2) $\iint_{\Sigma} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$ 的外侧;
- (3) $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;
- (4) $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 的外侧.

解 (1) 将曲面 Σ 分割为两片 $\Sigma_1: x = \sqrt{R^2 - y^2}, \Sigma_2: x = -\sqrt{R^2 - y^2}$, 两片曲面在 yOz 平面上的投影都是 $D_{yz} = \{(y, z) | -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H\}$.

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 - y^2 + y^2 + z^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right)^2} dy dz \\ &= \iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 + z^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - y^2}} dy dz \\ &= R \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= R \left(\arcsin \frac{y}{R} \right) \Big|_{-R}^R \cdot \left(\frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \right) \Big|_0^H \\
 &= \pi \arctan \frac{H}{R},
 \end{aligned}$$

又被积函数关于 x 为偶函数, 曲面 Σ_1 、 Σ_2 关于 yOz 平面对称, 所以有

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2},$$

从而

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} + \iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(2) 添加曲面 $\Sigma_1: \{(x, y, z) | z = h, x^2 + y^2 \leq h^2\}$, 取上侧. Σ_1 在 xOy 面上的投影区域记为 D_{xy} . 曲面 Σ 和 Σ_1 组成一个封闭的有向曲面且取外侧, 所围成的空间闭区域记为 Ω , 由高斯公式

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\
 &= \iiint_{\Omega} 0 dxdydz = 0.
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 &\iint_{\Sigma} (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy \\
 &= 0 - \iint_{\Sigma_1} (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy \\
 &= - \iint_{\Sigma_1} (x^2 - y)dxdy = - \iint_{D_{xy}} (x^2 - y)dxdy,
 \end{aligned}$$

由对称性知

$$\iint_{D_{xy}} y dxdy = 0, \quad \iint_{D_{xy}} y^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} x^2 dxdy,$$

从而

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} (y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy &= -\frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dxdy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^3 d\rho \\
 &= -\frac{\pi h^4}{4}.
 \end{aligned}$$

(3) 添加曲面 $\Sigma_1: z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, 取下侧. Σ 和 Σ_1 共同组成一个封闭的有向曲面, 所围成的空间有界闭区域记为 Ω . 由高斯公式

$$\oint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy = \iiint_{\Omega} (1+1+1) dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 = 2\pi R^3,$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy &= 2\pi R^3 - \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy \\ &= 2\pi R^3 - \iint_{\Sigma_1} zdx dy \\ &= 2\pi R^3 - \iint_{D_{xy}} 0 dx dy = 2\pi R^3. \end{aligned}$$

(4) 将曲面 Σ 分割为两片有向曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 取上侧, $\Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0)$ 取下侧, 曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域用极坐标表示为 $D_{xy} = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} \rho^3 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1-\rho^2} d\rho d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \quad (\text{令 } \rho = \sin t) \\ &= 1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t) dt \\ &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

5. 证明 $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

证明 设 $P = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$, 则 P 和 Q 在单连通区域 G 内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 因此 } \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} \text{ 在 } G \text{ 内是某一个二元函数 } u(x, y) \text{ 的全微分.}$$

取点 $(x_0, y_0) = (1, 0)$, 则

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \int_1^x \frac{1}{x} dx + \int_0^y \frac{y dy}{x^2 + y^2} \\
 &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \ln x^2 \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).
 \end{aligned}$$

6. 设在半平面 $x > 0$ 内有力 $\mathbf{F} = -\frac{k}{\rho^3}(\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j})$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

解 在此力场中场力所作的功可表示为

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_L \frac{k}{\rho^3} (x dx + y dy) = -k \int_L \frac{x dx + y dy}{\rho^3}.$$

设 $P = -\frac{kx}{\rho^3}$ 、 $Q = -\frac{ky}{\rho^3}$, 则在单连通区域 $x > 0$ 内满足

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3kxy}{\rho^5} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以, 此曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与所取的路径无关.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

解 (1) 证明 设 $P = \frac{1 + y^2 f(xy)}{y}$ 、 $Q = \frac{x[y^2 f(xy) - 1]}{y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf'(xy) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

由题意知 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在上半平面上连续, 所以曲线积分与路径无关.

(2) 设 $A(a, b)$ 、 $B(c, b)$ 、 $C(c, d)$, 取路径为有向折线 ABC , 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{ABC} \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy \\
 &= \int_{ABC} \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy \\
 &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\
 &= \int_a^c \frac{1}{b} dx + \int_a^c bf(bx) dx + \int_b^d cf(cy) dy - \int_b^d \frac{c}{y^2} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c-a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t)dt + \int_{bc}^{cd} f(t)dt + \frac{c}{y} \Big|_b^d \\
&= \frac{c-a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t)dt \\
&= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t)dt
\end{aligned}$$

当 $ab = cd$ 时, $\int_{ab}^{cd} f(t)dt = 0$, 所以 $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

8. 求均匀曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的质心的坐标.

解 不妨设曲面的质心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由曲面关于坐标平面 yOz 和 xOz 对称知, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在 xOy 面上的投影 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 则曲面的面积

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = 2\pi a^2,
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy \\
&= a \iint_{D_{xy}} dxdy = a \cdot \pi a^2 = \pi a^3,
\end{aligned}$$

因此有

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{S} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2},$$

所以此曲面的质心坐标为 $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$.

9. 设 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u dxdy = - \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dxdy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

$$(2) \iint_D (u\Delta v - v\Delta u) dx dy = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 、 v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, 符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.

证明 (1) 如图 11-3 所示, $\boldsymbol{n}$ 是有向曲线 L 的外法线向量, $\boldsymbol{\tau}$ 是 L 的切向量. 设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 与 x 轴正向的夹角分别为 φ 和 α , 由图可知: $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos \varphi, \sin \varphi$; $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos \alpha, \sin \alpha$.

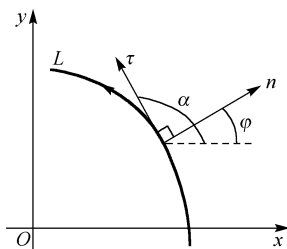


图 11-3

$$\begin{aligned} \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_L v(u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi) ds \\ &= \oint_L v(u_x \sin \alpha - u_y \cos \alpha) ds \quad (\cos \alpha ds = dx, \sin \alpha ds = dy) \\ &= \oint_L v u_x dy - v u_y dx \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial(v u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-v u_y)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \iint_D [(u_x v_x + v u_{xx}) + (u_y v_y + v u_{yy})] dx dy \\ &= \iint_D v(u_{xx} + u_{yy}) dx dy + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy \\ &= \iint_D v \Delta u dx dy + \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx dy \end{aligned}$$

即有

$$\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx dy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

(2) 在式(1)中交换 u 、 v 的位置得

$$\iint_D u \Delta v dx dy = - \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx dy + \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

式(1)减去式(2)得

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

***10.** 求向量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 由通量的定义知, 向量通过闭区域 Ω 的边界曲面流向外侧的通量可表示为

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
&= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\
&= 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \cdot 1 = 3.
\end{aligned}$$

11. 求力 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

解 平面 $x + y + z = 1$ 与三条坐标轴的交点分别记为 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$, 力 $\mathbf{F}$ 沿闭曲线 Γ 所作的功可表示为

$$\begin{aligned}
W &= \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \oint_{ACBA} y dx + z dy + x dz \\
&= \int_{AC} y dx + z dy + x dz + \int_{CB} y dx + z dy + x dz + \int_{BA} y dx + z dy + x dz
\end{aligned}$$

有向直线段 AC 、 CB 、 BA 的参数方程可分别表示如下:

$$AC: x = 1 - t, y = 0, z = t \quad (t: 0 \rightarrow 1),$$

$$CB: x = 0, y = t, z = 1 - t \quad (t: 0 \rightarrow 1),$$

$$BA: x = t, y = 1 - t, z = 0 \quad (t: 0 \rightarrow 1).$$

所以

$$\int_{AC} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{CB} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{BA} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{从而得 } W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

无穷级数

一、基本内容

1. 常数项级数的概念与性质

(1) 常数项级数的概念: (常数项) 无穷级数 (级数)、级数的一般项、无穷级数的收敛与发散;

(2) 收敛级数的基本性质:

- ① 级数的每一项同乘一个不为零的常数后, 它的收敛性不会改变;
- ② 两个收敛级数可以逐项相加或相减;
- ③ 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的收敛性;
- ④ 如果级数收敛, 则对该级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛, 且其和不变;

⑤ 级数收敛的必要条件: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则它的一般项 u_n 趋于零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;

* (3) 柯西收敛原理.

2. 常数项级数的审敛法

(1) 正项级数及其审敛法: 比较审敛法、比较审敛法的极限形式、比值审敛法 (达朗贝尔判别法)、*根值审敛法 (柯西判别法)、极限审敛法;

(2) 交错级数及其审敛法: 莱布尼茨定理;

(3) 绝对收敛与条件收敛级数绝对收敛与级数收敛有如下重要关系: 级数绝对收敛则级数必定收敛;

* (4) 绝对收敛的性质.

3. 幂级数

(1) 函数项级数的概念: (函数项) 无穷级数 (级数)、收敛点、发散点、收敛域、发散域、和函数、余项;

(2) 幂级数及其收敛性:

- ① 阿贝尔定理;
- ② 收敛半径及其求法.

(3) 幂级数的运算:

- ① 幂级数的加法、减法、乘法、除法运算;
- ② 幂级数的和函数的重要性质: 幂级数的和函数在其收敛域上连续; 幂级数的和函数在其收敛域上可积, 并由逐项积分公式, 逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收

敛半径; 幂级数的和函数在其收敛区间内可导, 且有逐项求导公式, 逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

4. 函数展开成幂级数
 - (1) 泰勒级数、泰勒展开式及泰勒展开式成立的条件;
 - (2) 麦克劳林级数、麦克劳林展开式.
5. 函数的幂级数展开式的应用
 - (1) 近似计算;
 - (2) 微分方程的幂级数解法;
 - (3) 欧拉公式.
- *6. 函数项级数的一致收敛性及一致收敛数的基本性质
 - (1) 函数项级数的一致收敛性:
 - ① 函数项级数的一致收敛性的定义;
 - ② 函数项级数的一致收敛性的判别方法: 魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 判别法.
 - (2) 一致收敛级数的基本性质.
7. 傅里叶级数
 - (1) 三角级数、三角级数系的正交性;
 - (2) 函数展开成傅里叶级数;
 - (3) 正弦级数和余弦级数;
8. 一般周期函数的傅里叶级数
 - (1) 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数;
 - * (2) 傅里叶级数的复数形式.

二、基本要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念.
2. 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
3. 掌握几种常见的级数, 如几何级数与 p -级数的收敛与发散的条件.
4. 熟悉正项级数的审敛法, 掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法, 会用根值审敛法.
5. 掌握交错级数的莱布尼茨定理.
6. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念, 以及绝对收敛与条件收敛的关系.
7. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念; 掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法; 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质.
8. 会求一些幂级数在收敛区间内的和函数, 并会由此求出某些常数项级数的和; 了解函数展开成泰勒级数的充分必要条件;
9. 掌握 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1-x), (1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式, 会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数; 了解幂级数在近似计算上的简单应用;
10. 了解傅里叶级数的概念和函数展开为傅里叶级数的狄利克雷定理, 会将定义在 $[-l, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数, 会将定义在 $[0, l]$ 上的函数展开为正弦级数和余弦级数, 会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

三、习题解答

习题 12-1

1. 写出下列级数的前五项.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

解 (1) $\frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \cdots = 1 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{5}{17} + \frac{3}{13} + \cdots;$

(2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{48} + \frac{105}{384} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots;$

(3) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots;$

(4) $1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \cdots.$

2. 根据级数收敛与发散的判定判定下列级数的收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad (2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

解 (1) $s_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, 级数发散.

(2) 部分和

$$s_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty),$$

所以级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

(3) $s_n = \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6}$, 注意到

$$\sin \frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left[\cos(2k-1) \frac{\pi}{12} - \cos(2k+1) \frac{\pi}{12} \right],$$

取 $k=1, 2, \cdots, n$, 并相加, 得

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12} \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \right) + \cdots + \left(\cos(2n-1) \frac{\pi}{12} - \cos(2n+1) \frac{\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left[\cos \frac{\pi}{12} - \cos(2n+1) \frac{\pi}{12} \right], \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\cos(2n+1)\frac{\pi}{12}$ 是振荡的, 其极限不存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 题设级数发散.

(4) 注意到 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1+n) - \ln n$, 所以

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(1+n) - \ln n] = \ln(1+n) - \ln 1 = \ln(1+n),$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, 级数发散.

3. 判定下列级数的收敛性.

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots; \quad (2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots; \quad (4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots.$$

解 (1) 此为等比(几何)级数, 公比 $q = -8/9$, 且 $|q| < 1$, 故此级数收敛于

$$\frac{-\frac{8}{9}}{1-q} = \frac{-\frac{8}{9}}{1+\frac{8}{9}} = -\frac{8}{17}.$$

(2) 级数的一般项 $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$, 由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 知题设级数发散.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = 1 \neq 0$, 不满足级数收敛的必要条件, 所以该级数发散.

(4) 此为几何级数, 公比 $q = 3/2 > 1$, 故该级数发散.

(5) 将此级数看成两个几何级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

这两个级数的公比:

$$q_1 = 1/2, q_2 = 1/3, |q_1| < 1, |q_2| < 1,$$

故这两个几何级数收敛, 从而原级数也收敛, 且其和

$$s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

*4. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}; \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right).$$

解 (1) 对于任何自然数 p , 因为

$$\begin{aligned}
 |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| &= \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1) \frac{1}{n+p} \right| \\
 &\leq \begin{cases} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) - \cdots - \frac{1}{n+p} & (p \text{ 为偶数}) \\ \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) & (p \text{ 为奇数}) \end{cases} \\
 &< \frac{1}{n+1}, \left(\text{令 } \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ 解得 } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \right)
 \end{aligned}$$

因为 $\forall \varepsilon > 0$, 并设 $\varepsilon < 1$, $\exists N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任何自然数 p , 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

由柯西审敛原理, 知所给级数收敛.

(2) 注意到每三项都有一个负项, 特别地, 取 $p = 3n$, 则

$$\begin{aligned}
 |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| &= |S_{n+p} - S_n| \\
 &= \left| \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \right| \\
 &> \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} \right| (n \text{ 项}) \\
 &> \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n} (n \text{ 项}) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

于是, 给定 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, $\exists p = 3n$, 使得

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| > \varepsilon_0,$$

由柯西审敛原理, 知此级数发散.

(3) 对于任何自然数 p , 因为

$$\begin{aligned}
 |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \\
 &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^p} \right) \\
 &= \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \\
 &< \frac{1}{2^n},
 \end{aligned}$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, $\exists N = \left\lceil \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil > 0$, 当 $n > N$ 时, 对于任何自然数 p , 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

所以题设级数收敛.

(4) 与第(2)题类似, 每三项中有一个负项, 特别地, 取 $p = 3n$, 则

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \left| \left(\frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+6} \right) + \left(\frac{1}{3n+7} + \frac{1}{3n+8} - \frac{1}{3n+9} \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{3n+3p+1} + \frac{1}{3n+3p+2} - \frac{1}{3n+3p+3} \right) \right| \\ &> \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+7} + \cdots + \frac{1}{3n+3p+1} \text{ (共 } n \text{ 项)} \\ &> \frac{n}{12n+1} \\ &> \frac{n}{13n} \\ &= \frac{1}{13} (n > 1), \end{aligned}$$

于是, 给定 $\varepsilon_0 = 1/13$, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 及 $n > 1$, $\exists p = 3n$, 使得 $|s_{n+p} - s_n| > \varepsilon_0$, 可见级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$ 发散, 从而题设级数也发散.

习题 12-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性.

- (1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots$; (2) $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$;
 (3) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+4)} + \cdots$; (4) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots$;
 (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0)$.

解 (1) 级数的通项 $u_n = \frac{1}{2n-1}$, 与调和级数比较. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n-1} / \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以题设级数也发散.

(2) 因 $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$, 由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散性和比较法, 知题设级数也发散.

(3) 通项 $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)}$, 与 p -级数 (取 $p=2$) 比较.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)(n+4)} \bigg/ \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+4)} = 1$, 故由 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性, 知题设级数也收敛.

(4) 通项 $u_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$, 与几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 比较, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{2^n} \bigg/ \frac{\pi}{2^n} \right) = 1,$$

故由几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\pi \cdot \frac{1}{2^n} \right)$ 收敛, 知题设级数也收敛.

(5) 需要讨论参数 a 不同的取值情况.

当 $a \leq 1$ 时, 通项

$$u_n = \frac{1}{1+a^n} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 故级数发散. 当 $a > 1$, $\frac{1}{a} < 1$ 时,

$$u_n = \frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a} \right)^n,$$

由几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^n$ ($0 < \frac{1}{a} < 1$) 收敛, 知题设级数也收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性.

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \cdots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \bigg/ \frac{3^n}{n \cdot 2^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \right) = \frac{3}{2} > 1,$

由比值法知, 该级数发散.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \bigg/ \frac{n^2}{3^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} < 1, \text{ 所以该级数收敛.}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

所以该级数收敛.

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \bigg/ \left(n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \bigg/ \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \right] = 1 \cdot \frac{1}{2} < 1,$$

所以该级数收敛.

*3. 用根植审敛法判定下列级数的收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数.}$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, 所以该级数收敛.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 所以该级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2-\frac{1}{n}}$
 $= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{n}{3n-1} \right) \right] = e^{2 \cdot \ln \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 < 1,$

所以该级数收敛.

(4) 需讨论参数 a, b 的不同情况, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a},$$

所以当 $b < a$, 即 $b/a < 1$ 时, 级数收敛; 当 $b > a$, 即 $b/a > 1$ 时, 级数发散; 当 $b = a$, 即 $b/a = 1$ 时, 用此法不能确定级数的收敛性.

4. 判定下列级数的收敛性.

(1) $\frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$; (2) $\frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots$; (6) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots (a > 0, b > 0)$.

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4} < 1$, 所以该级数收敛.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \right] = 0 \cdot 1^4 = 0 < 1$, 所以该级数收敛.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 > 0$, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 知题设级数也发散.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/3^n)}{\pi/3^n} = \pi \cdot 1 = \pi$, 由几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ ($0 < \frac{2}{3} < 1$) 收敛, 知

题设级数也收敛.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1 \neq 0$, 所以题设级数发散.

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{na+b} / \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{na+b} = \frac{1}{a} > 0$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散性, 知题设级数也发散.

5. 判定下列级数是否收敛. 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n} + \cdots$;

(4) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) 此级数的绝对值级数是发散的 p -级数 ($p=1/2 < 1$); 但它自身又是莱布尼兹型的交错级数 (即满足莱布尼兹审敛定理两个条件的交错级数), 事实上,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

所以题设交错级数收敛, 且为条件收敛.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3^n} / \frac{n}{3^{n-1}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} < 1$, 所以绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

(3) 变题设级数为 $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}$, 显然, 此级数的绝对值级数是收敛的几何级数 (公比 $q: 0 < q=1/2 < 1$), 故此级数绝对收敛, 乘以 $1/3$ 仍绝对收敛, 故原级数绝对收敛.

(4) 先考察绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$, 因为 $\frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{1+n}$, 由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$

发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$ 也发散; 而原级数是莱布尼兹型级数, 事实上,

$$u_n = \frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{\ln(2+n)} = u_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1+n)} = 0,$$

所以原级数收敛, 且为条件收敛.

(5) 先考察绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$, 因为

$$|u_n| = \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{(2^n)^n}{n!} = \frac{[(1+1)^n]^n}{n!} > \frac{(1+n)^n}{n!} > \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n}{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1} > 1,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 故原级数发散.

习题 12-3

1. 求下列幂级数的收敛区间.

- (1) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$; (2) $1 - x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \cdots$;
 (3) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} + \cdots$; (4) $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot 3^n} + \cdots$;
 (5) $\frac{2}{2}x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n^2 + 1}x^n + \cdots$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;
 (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

分析: 求出收敛半径 R , 从而可得收敛区间 $(-R, R)$.

解 (1) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$, 所以收敛半径 $R = 1/1 = 1$, 于是幂级的收敛区间为 $(-1, 1)$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \right| / \left| \frac{1}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1$, 所以 $R = 1/1 = 1$. 所以收敛区间为 $(-1, 1)$.

(3) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n \cdot n!} \right| / \left| \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} [2(n+1)] = +\infty$, 故收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

(4) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 3^n} \right| / \left| \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \cdot \frac{n+1}{n} \right) = 3$. 故幂级数的收敛区间是 $(-3, 3)$.

(5) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{n^2 + 1} \right| / \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

所以幂级数的收敛区间是 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| / \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = x^2$, 所以当 $x^2 < 1$, 即 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 绝对值级数发散, 知原级数也发散; 所以幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$.

(7) 分析: 这也是缺项的幂级数, 可用上题的方法解之; 这里我们换一种方法, 用换元法解之.

令 $y = x^2$, 则原幂级数成为不缺项的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} y^{n-1}$, 设其各项系数为 b_n , 因为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2^n} / \frac{2n+1}{2^{n+1}} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2,$$

所以 $-2 < y < 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 2$, 即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. 故原幂级数的收敛区间是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(8) 令 $y = x - 5$, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} y^n$, 因为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1,$$

所以 $-1 < y < 1 \Rightarrow -1 < x - 5 < 1$, 即 $4 < x < 6$. 所以幂级数的收敛区间是 $(4, 6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(3) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3}.$$

分析: 观察通项系数与幂指数的联系, 并与已知和函数的几何级数求和公式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1) \quad (*)$$

相比较, 不难确定是先逐项求导还是先逐项积分.

解 (1) 先逐项积分便于利用上述求和公式(*). 因为

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

(2) 先逐项求导便于利用已知求和公式. 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4} \quad (|x| < 1),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} &= \int_0^x \frac{x^4}{1-x^4} dx = \int_0^x \frac{x - (1-x^4) + 1}{1-x^4} dx \\ &= \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan x - x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

(3) 与上题类似, 应先逐项求导. 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\text{所以原式} = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$(4) \text{ 由于 } \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} - \frac{2x^4}{1-x} \quad (|x| < 1), \text{ 逐项积分得}$$

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (n+4)x^{n+3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+4} = \frac{x^5}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} = \left(\frac{x^5}{1-x} \right)' = \frac{5x^4 - 4x^5}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1),$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3} &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+3} \\ &= \frac{5x^4 - 4x^5}{(1-x)^2} - \frac{2x^4}{1-x} = \frac{3x^4 - 2x^5}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^2} - x^2 - 2x^3 \quad (|x| < 1).\end{aligned}$$

习题 12-4

1. 求函数 $f(x) = \cos x$ 的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于该函数.

解 $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), (n=1, 2, \cdots)$, 从而 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0 + \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x-x_0) + \frac{\cos(x_0 + \pi)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots.$$

$$\text{又因 } |R_n(x)| = \left| \frac{\cos\left[x_0 + \theta(x-x_0) + \frac{n+1}{2}\pi\right]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, (0 < \theta < 1),$$

而 $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项, 所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$,

$$\text{所以 } \cos x = \cos x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间.

$$(1) \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$(2) \ln(a+x) (a > 0);$$

$$(3) a^x;$$

$$(4) \sin^2 x;$$

$$(5) (1+x)\ln(1+x);$$

$$(6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } (1) \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \ln(a+x) &= \ln \left[a \cdot \left(1 + \frac{x}{a} \right) \right] = \ln a + \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right) \\ &= \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}} \quad \left(-1 < \frac{x}{a} \leq 1, \text{ 即 } -a < x \leq a \right).\end{aligned}$$

$$(3) a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \quad (-\infty < x \ln a < +\infty, \text{ 即 } -\infty < x < +\infty).$$

$$(4) \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} (x \in \mathbb{R}).$$

$$(5) (1+x)\ln(1+x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] x^{n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n n + (-1)^{n-1} (n+1)}{n(n+1)} x^{n+1} \right] \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} (-1 < x \leq 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\alpha = -\frac{1}{2} \right) \\ &= x \left[1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} x^4 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^{2n} + \cdots \right] \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n+1} + \cdots \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1} (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

注: 当 $x = \pm 1$ 时, 上列级数也收敛.

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 幂级数, 并求展开式成立的区间.

$$(1) \sqrt{x^3}; \quad (2) \lg x.$$

解 (1) 由二项式级数展开式, 有

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3} &= [1 + (x-1)]^{\frac{3}{2}} \left(\alpha = \frac{3}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{3}{2} (x-1) + \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right)}{2!} (x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{3}{2} - n + 1 \right) (x-1)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{3}{2} (x-1) + \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2!} (x-1)^2 + \cdots + \frac{3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdots (-2n+5)}{2^n \cdot 2!} (x-1)^n \\ &= 1 + \frac{3}{2} (x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+2} \cdot 2!} (x-1)^{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot (2n)!}{2^{n+2} \cdot 2^n \cdot n!(n+2)!} (x-1)^{n+2} \\
 &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{3}{(n+1)(n+2)2^n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},
 \end{aligned}$$

其中, $-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

注: 二项式级数的公共收敛域为 $(-1, 1)$; 当 $(1+x)^\alpha$ 中的 α 取不同数值时, 其收敛区间的各情形比较复杂, 各不相同. 可以证明 (证略).

当 $\alpha > 0$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$; 当 $\alpha \leq -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$; 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$.

本题的 $\alpha = \frac{3}{2} > 0$, 实际收敛域为 $[0, 2]$.

(2) 由对数换底公式和对数级数展开式,

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln[1 + (x-1)] = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n},$$

其中, $-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \cos x &= \cos \left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \right] = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \right],
 \end{aligned}$$

其中, $-\infty < x + \frac{\pi}{3} < +\infty \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

$$\text{解} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{3 + (x-3)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-3}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^n,$$

其中, $-1 < \frac{x-3}{3} < 1 \Rightarrow 0 < x < 6$.

6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展形成 $(x+4)$ 的幂级数.

$$\text{解} \quad \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{-3+(x+4)} - \frac{1}{-2+(x+4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n;$$

其中, $-1 < \frac{x+4}{2} < 1$ 且 $-1 < \frac{x+4}{3} < 1$, 即 $-6 < x < -2$ 且 $-7 < x < -1$,

由 $(-6, -2) \cap (-7, -1) = (-6, -2)$, 故上述幂级数的收敛区间为 $(-6, -2)$.

习题 12-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值.

- (1) $\ln 3$ (误差不超过 0.0001); (2) $\sqrt{e}$ (误差不超过 0.001);
 (3) $\sqrt[3]{522}$ (误差不超过 0.00001); (4) $\cos 2^\circ$ (误差不超过 0.0001).

解 (1) 把公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1),$$

中的 x 换成 $-x$, 得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad (-1 \leq x < 1),$$

两式相减, 得

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1).$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 3$, 得 $x = \frac{1}{2}$. 把 $x = \frac{1}{2}$ 代入最后一个展开式, 得

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} + \cdots \right).$$

如果取前 n 项作为 $\ln 3$ 的近似值, 则截断误差为

$$\begin{aligned} |r_n| &= 2 \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{2^{2n+5}} + \cdots \right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \left(1 + \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+3}} + \frac{2n+1}{2n+5} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+5}} + \cdots \right) \\ &< 2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots \right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

当 $n=5$ 时,

$$|r_5| < \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 2^8} \approx 0.00012,$$

不符合题意. 当 $n=6$ 时,

$$|r_6| < \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 2^{10}} \approx 0.00003,$$

符合题意, 于是取

$$\begin{aligned} \ln 3 &\approx 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^8} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{10}}. \end{aligned}$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} &\approx 0.08333, \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} = 0.01250, \quad \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} \approx 0.00223, \\ \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^8} &\approx 0.00043, \quad \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{10}} \approx 0.00009. \end{aligned}$$

因此得

$$\ln 3 \approx 1.09858 \approx 1.0986.$$

(2) 由公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

如果取前 n 项作为 $\sqrt{e}$ 的近似值, 则截断误差为

$$\begin{aligned} |r_n| &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \left[1 + \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{n!}{(n+2)!} \cdot \frac{2^n}{2^{n+2}} + \cdots \right] \\ &< \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \left[1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2(n+1)}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2(n+1)}{2n+1}. \end{aligned}$$

当 $n=5$ 时,

$$|r_5| < \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{12}{11} < 0.0003.$$

符合题意, 于是取

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4}.$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = 0.125, \quad \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} \approx 0.0208, \quad \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \approx 0.0026,$$

因此得

$$\sqrt{e} \approx 1.6484 \approx 1.648.$$

$$(3) \sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{512+10} = 2 \left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}}, \text{ 由公式}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

$$\text{令 } x = \frac{10}{2^9}, \quad m = \frac{1}{9}, \text{ 得}$$

$$\left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}} = 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} + \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} - 1 \right)}{2!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{9} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^n + \cdots.$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt[9]{522} &= 2 \left(1 + \frac{10}{2^9} \right)^{\frac{1}{9}} \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} - 1 \right)}{2!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^2 + \cdots + 2 \cdot \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{9} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^n + \cdots \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - 2 \cdot \frac{1 \cdot 8}{9^2 \cdot 2!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 8 \cdots (9n-10)}{9^n \cdot n!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^n + \cdots. \end{aligned}$$

上式等号右端从第二项开始为一交错级数, 如果取前三项作为 $\sqrt[9]{522}$ 的近似值, 则截断误差为

$$|r_3| \leq 2 \cdot \frac{1 \cdot 8 \cdot 17}{9^3 \cdot 3!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^3 < 4.64 \times 10^{-7},$$

符合题意, 于是取

$$\sqrt[9]{522} \approx 2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - 2 \cdot \frac{1 \cdot 8}{9^2 \cdot 2!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^2,$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取六位小数:

$$2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} \approx 0.004340, \quad 2 \cdot \frac{1 \cdot 8}{9^2 \cdot 2!} \cdot \left(\frac{10}{2^9} \right)^2 \approx 0.000038,$$

因此得

$$\sqrt[9]{522} \approx 2.004302 \approx 2.00430.$$

$$(4) \cos 2^\circ = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{180} \right) = \cos \frac{\pi}{90}, \text{ 由公式}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

令 $x = \frac{\pi}{90}$, 得

$$\cos 2^\circ = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^{2n} + \cdots.$$

上式等号右端为一交错级数, 如果取前两项作为 $\cos 2^\circ$ 的近似值, 则截断误差为

$$|r_3| \leq \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < 6.2 \times 10^{-8},$$

符合题意, 于是取

$$\cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^2,$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数, 因此得

$$\cos 2^\circ \approx 1 - 0.00061 = 0.99939 \approx 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值.

(1) $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$ (误差不超过 0.0001); (2) $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$ (误差不超过 0.001).

解 (1) 由公式

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = 1 - x^4 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_0^{0.5} [1 - x^4 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots] dx \\ &= \int_0^{0.5} 1 dx - \int_0^{0.5} x^4 dx + \int_0^{0.5} x^8 dx - \cdots + (-1)^n \int_0^{0.5} x^{4n} dx + \cdots \\ &= 0.5 - \frac{1}{5} \cdot 0.5^5 + \frac{1}{9} \cdot 0.5^9 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{4n+1} \cdot 0.5^{4n+1} + \cdots. \end{aligned}$$

上式等号右端为一交错级数, 如果取前三项作为 $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$ 的近似值, 则截断误差为

$$|r_3| \leq \frac{1}{13} \cdot 0.5^{13} < 9.4 \times 10^{-6},$$

符合题意, 于是取

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx 0.5 - \frac{1}{5} \cdot 0.5^5 + \frac{1}{9} \cdot 0.5^9,$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数, 因此得

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx 0.5 - 0.00625 + 0.00022 = 0.49397 \approx 0.4940.$$

(2) 由公式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^x [1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n \cdot x^{2n}+\cdots] dx \\ &= \int_0^x 1 dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \cdots + (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx + \cdots,\end{aligned}$$

即

$$\arctan x = x - \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^5 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

因而

$$\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{5} \cdot x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n} + \cdots,$$

逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{0.5} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{5} \cdot x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n} + \cdots \right] dx \\ &= \int_0^{0.5} 1 dx - \int_0^{0.5} \frac{1}{3} \cdot x^2 dx + \int_0^{0.5} \frac{1}{5} \cdot x^4 dx - \cdots + \int_0^{0.5} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot x^{2n} dx + \cdots \\ &= 0.5 - \frac{1}{3^2} \cdot 0.5^3 + \frac{1}{5^2} \cdot 0.5^5 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot 0.5^{2n+1} + \cdots.\end{aligned}$$

上式等号右端为一交错级数, 如果取前三项作为 $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的近似值, 则截断误差为

$$|r_2| \leq \frac{1}{7^2} \cdot 0.5^7 < 1.6 \times 10^{-4},$$

符合题意, 于是取

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \approx 0.5 - \frac{1}{3^2} \cdot 0.5^3 + \frac{1}{5^2} \cdot 0.5^5.$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数, 因此得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \approx 0.5 - 0.0139 + 0.0013 = 0.4874 \approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解.

$$(1) \quad y' - xy - x = 1; \quad (2) \quad y'' + xy' + y = 0; \quad (3) \quad (1-x)y' = x^2 - y.$$

解 (1) 设方程的解为

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

则

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots,$$

代入方程, 得

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots) - x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) - x = 1,$$

即

$$a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \cdots = 1.$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$a_1 = 1, \quad 2a_2 - a_0 - 1 = 0, \quad 3a_3 - a_1 = 0, \quad \cdots, \quad (n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0, \quad \cdots.$$

于是有

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{3 \cdot 5}, \quad \cdots,$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}a_{2n-3} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}, \quad \cdots;$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0 + 1), \quad a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{2 \cdot 4}(a_0 + 1), \quad a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}(a_0 + 1), \quad \cdots,$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2n}a_{2n-2} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}(a_0 + 1), \quad \cdots.$$

因而

$$\begin{aligned} & a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots \\ &= -1 + (a_0 + 1) + \frac{1}{2}(a_0 + 1)x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}(a_0 + 1)x^4 + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}(a_0 + 1)x^{2n} + \cdots \\ &= -1 + (a_0 + 1) \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n + \cdots \right] \\ &= -1 + (a_0 + 1)e^{\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty, \quad a_0 \text{ 为任意常数}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}x^{2n-1} + \cdots \\ &= x + \frac{1}{3!!}x^3 + \frac{1}{5!!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots) \\ &= -1 + (a_0 + 1)e^{\frac{x^2}{2}} + \left[x + \frac{1}{3!!}x^3 + \frac{1}{5!!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1} + \cdots \right] \\ &= Ce^{\frac{x^2}{2}} + \left[-1 + x + \frac{1}{3!!}x^3 + \frac{1}{5!!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1} + \cdots \right], \\ & \quad (-\infty < x < +\infty, \quad C \text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

(2) 设方程的解为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

则

$$\begin{aligned}y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots, \\y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots,\end{aligned}$$

代入方程, 得

$$\begin{aligned}&(2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots) \\&+ x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots) \\&+ (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) = 0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(2a_2 + a_0) + (3 \cdot 2a_3 + 2a_1)x + (4 \cdot 3a_4 + 3a_2)x^2 + \cdots \\&+ [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n]x^n + \cdots = 0.\end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{aligned}2a_2 + a_0 &= 0, \quad 3 \cdot 2a_3 + 2a_1 = 0, \quad 4 \cdot 3a_4 + 3a_2 = 0, \quad \cdots, \\(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n &= 0, \quad \cdots.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}a_3 &= -\frac{1}{3}a_1, \quad a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{3 \cdot 5}a_1, \quad \cdots, \\a_{2n-1} &= -\frac{1}{2n-1}a_{2n-3} = \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}a_1, \quad \cdots; \\a_2 &= -\frac{1}{2}a_0, \quad a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{2 \cdot 4}a_0, \quad a_6 = -\frac{1}{6}a_4 = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0, \quad \cdots, \\a_{2n} &= -\frac{1}{2n}a_{2n-2} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}a_0, \quad \cdots.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots \\&= a_0 - \frac{1}{2}a_0x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4}a_0x^4 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}a_0x^{2n} + \cdots \\&= a_0 \left[1 + \left(-\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^n + \cdots \right] \\&= a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (-\infty < x < +\infty, \quad a_0 \text{ 为任意常数}); \\&a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots \\&= a_1x - \frac{1}{3}a_1x^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}a_1x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}a_1x^{2n-1} + \cdots \\&= a_1 \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}x^{2n-1} + \cdots \right]\end{aligned}$$

$$= a_1 \left[x - \frac{1}{3!!} x^3 + \frac{1}{5!!} x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!!} x^{2n-1} + \cdots \right],$$

($-\infty < x < +\infty$, a_1 为任意常数) .

所以

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots) + (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} + \cdots) \\ &= a_0 e^{\frac{x^2}{2}} + a_1 \left[x - \frac{1}{3!!} x^3 + \frac{1}{5!!} x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!!} x^{2n-1} + \cdots \right], \\ & \quad (-\infty < x < +\infty, a_0, a_1 \text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

(3) 设方程的解为

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

则

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots,$$

代入方程, 得

$$(1-x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots) = x^2 - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots),$$

即

$$\begin{aligned} & a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - 2a_2)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - na_n]x^n + \cdots \\ &= -a_0 - a_1 x - (a_2 - 1)x^2 - \cdots - a_n x^n - \cdots. \end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0, \quad 2a_2 - a_1 = -a_1, \quad 3a_3 - 2a_2 = -(a_2 - 1), \\ 4a_4 - 3a_3 &= -a_3, \quad \cdots, \quad (n+1)a_{n+1} - na_n = -a_n, \quad \cdots. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}(a_2 + 1) = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{2}{4}a_3 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}, \quad \cdots, \\ a_{n+1} &= \frac{n-1}{n+1}a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+1)} \quad (n \geqslant 3), \quad \cdots. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= a_0 - a_0 x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}x^n + \cdots \\ &= a_0(1-x) + 2 \left[\frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{1}{4 \cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}x^n + \cdots \right], \\ & \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1, a_0 \text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解.

$$(1) y' = y^2 + x^3, \quad y|_{x=0} = \frac{1}{2}; \quad (2) (1-x)y' + y = 1+x, \quad y|_{x=0} = 0.$$

解 (1) 设方程的解为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

由 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 得, $a_0 = \frac{1}{2}$. 逐项求导得

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

代入方程, 得

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)^2 + x^3,$$

即

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ &= a_0a_0 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 \\ & \quad + (a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 + 1)x^3 + \cdots + (a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_na_0)x^n + \cdots. \end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0a_0, \quad 2a_2 = a_0a_1 + a_1a_0, \quad 3a_3 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0, \\ 4a_4 &= a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 + 1, \quad \cdots, \quad (n+1)a_{n+1} = a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_na_0, \quad \cdots. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}(a_0a_1 + a_1a_0) = \frac{1}{8}, \quad a_3 = \frac{1}{3}(a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0) = \frac{1}{16}, \\ a_4 &= \frac{1}{4}(a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{32} + \frac{1}{4} = \frac{9}{32}, \quad \cdots. \end{aligned}$$

所以所求解的幂级数展开式的开始几项为

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots. \end{aligned}$$

(2) 设方程的解为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

由 $y|_{x=0} = 0$ 得, $a_0 = 0$. 逐项求导得

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

代入方程, 得

$$\begin{aligned} & (1-x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots) \\ & + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) = 1+x, \end{aligned}$$

即

$$(a_1 + a_0) + 2a_2x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n]x^n + \cdots = 1+x.$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$a_1 + a_0 = 1, \quad 2a_2 = 1, \quad 3a_3 - a_2 = 0, \quad \cdots, \quad (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0, \quad \cdots.$$

于是有

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \cdots,$$
$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \quad (n \geq 2), \quad \cdots.$$

所以

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$= x + \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} x^n + \cdots.$$

5. 验证函数 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足微分方程 $y'' + y' + y = e^x$, 并利

用此结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 将

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots,$$
$$y' = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$
$$y'' = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots,$$

代入方程 $y'' + y' + y = e^x$ 的左边, 得

$$y'' + y' + y = \left[x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots \right]$$
$$+ \left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots \right] + \left[1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots \right]$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x,$$

与右边相等. 又当 $x=0$ 时, $y=1$, $y'=0$, 所以 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 为微分方程 $y'' + y' + y = e^x$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$ 的特解. 这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程, 且 e^x 是 $e^{\lambda x} P_m(x)$ 型, 其中 $\lambda=1$, $P_m(x)=1$. 与此方程对应的齐次方程为

$$y'' + y' + y = 0,$$

其特征方程为

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

其根 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 为一对共轭复根, 于是与所给方程对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

由于 $\lambda = 1$ 不是特征方程的根, 所以应设特解为

$$y^* = ae^x,$$

把它代入所给方程, 得

$$3ae^x = e^x,$$

解得 $a = \frac{1}{3}$, 因此求得一个特解为

$$y^* = \frac{1}{3}e^x,$$

从而所给方程的通解为

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x.$$

将条件 $y|_{x=0} = 1$ 代入通解, 得 $C_2 = \frac{2}{3}$, 从而

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x,$$

将上式对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} y' = C_1 & \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \\ & + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{1}{3}e^x, \end{aligned}$$

再把条件 $y'|_{x=0} = 0$ 代入上式, 得 $C_1 = 0$, 从而所求特解为

$$y = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

6. 利用欧拉公式将函数 $e^x \cos x$ 的展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

及

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right),$$

得

$$\begin{aligned} e^x \cos x + i e^x \sin x &= e^x (\cos x + i \sin x) = e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x} = e^{\sqrt{2}x \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 1 + \sqrt{2}x \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \left[\sqrt{2}x \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left[\sqrt{2}x \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^n + \cdots \\ &= 1 + \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x) + \frac{1}{2!} \left[\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot (\sqrt{2}x)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left[\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot (\sqrt{2}x)^n + \cdots \\ &= \left[1 + \cos \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2}x) + \frac{1}{2!} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x)^n + \cdots\right] \\ &\quad + i \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2}x) + \frac{1}{2!} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x)^n + \cdots\right]. \end{aligned}$$

比较上式两端复数的实部, 得

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= 1 + \cos \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2}x) + \frac{1}{2!} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2}x)^n + \cdots \\ &= 1 + \cos \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2}) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\sqrt{2})^n \cdot x^n + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

* 习题 12-6

1. 已知函数序列 $s_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 0.

- (1) 问 $N(\varepsilon, x)$ 取多大, 能使当 $n > N$ 时, $s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε ;
- (2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

解 (1) 因为 $|s_n(x) - 0| = \left|\sin \frac{x}{n}\right| \leq \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n}$, 对于正数 ε , 欲使 $|s_n(x) - 0| < \varepsilon$ 成立, 只要 $\frac{|x|}{n} < \varepsilon$ 成立即可, 即 $n > \frac{|x|}{\varepsilon}$. 取正整数 $N = \left[\frac{|x|}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, $|s_n(x) - 0| < \varepsilon$, 即 $s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε .

(2) 设 x 为有限区间 $[a, b]$ 上任意一点, 取 $M = \max\{|a|, |b|\}$, 则 $|x| \leq M$,

$$|s_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n},$$

对于任意给定的正数 ε , 欲使 $|s_n(x) - 0| < \varepsilon$ 成立, 只要 $\frac{M}{n} < \varepsilon$ 成立即可, 即 $n > \frac{M}{\varepsilon}$. 取正整数 $N = \left[\frac{M}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, $|s_n(x) - 0| < \varepsilon$ 成立, 即 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

2. 已知级数 $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\varepsilon, x)$ 取多大, 能使当 $n > N$ 时, 级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε ;

(3) 分别讨论级数在区间 $[0, 1]$, $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ 上的一致收敛性.

解 (1) 级数为等比级数, 公比为 $\frac{1}{1+x^2}$,

当 $x \neq 0$ 时, $\left| \frac{1}{1+x^2} \right| < 1$, 级数的和为

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2;$$

当 $x = 0$ 时, 级数的和为 $s(0) = 0$. 所以

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(2) $r_n = r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \cdots$ 为等比级数, 公比为 $\frac{1}{1+x^2}$.

当 $x \neq 0$ 时, $\left| \frac{1}{1+x^2} \right| < 1$, 级数的和为

$$r_n(x) = \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}};$$

当 $x = 0$ 时, 级数的和为 $r_n(0) = 0$. 所以

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x = 0$ 时, $|r_n(0)| = 0$, 对于正数 ε , 及任意正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|r_n(0)| < \varepsilon$;

当 $x \neq 0$ 时, $|r_n(x)| = \left| \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \right| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$, 对于正数 ε , 欲使 $|r_n(x)| < \varepsilon$ 成立, 即

$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \varepsilon$, 故 $(1+x^2)^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$, 因此 $(n-1)\ln(1+x^2) > -\ln \varepsilon$, 所以 $n > 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)}$, 取正

整数 $N = \left[1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, $|r_n(x)| < \varepsilon$, 即级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε .

(3) 因为级数的各项 $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在区间 $[0,1]$ 上都连续, 若级数在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}, \text{ 由定理1知, } s(x) \text{ 在区间 } [0,1] \text{ 上也连续.}$$

然而 $s(x)$ 在 $x=0$ 点不连续, 所以级数在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛.

在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上,

$$|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

对于正数 ε , 欲使 $|r_n(x)| < \varepsilon$ 成立, 即 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \varepsilon$. 即 $(n-1)\ln\frac{4}{5} < \ln\varepsilon$, 即 $n > 1 - \frac{\ln\varepsilon}{\ln 5 - \ln 4}$, 取

$$N = \left\lceil 1 - \frac{\ln\varepsilon}{\ln 5 - \ln 4} \right\rceil + 1, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } |r_n(x)| < \varepsilon, \text{ 所以级数在区间 } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ 上一致收敛.}$$

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad 0 < x < 1.$$

解 (1) 级数为交错级数, 且满足莱布尼茨定理, 级数收敛.

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &\leq \left| (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \right| = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \\ &= \frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}} < \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

设 x 为 $(-\infty, +\infty)$ 上任意一点, 对于任意给定的正数 ε , 欲使 $|r_n(x)| < \varepsilon$ 成立, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 成立即

可, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取正整数 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 当 $n > N$ 时, $|r_n(x)| < \varepsilon$ 成立, 即级数在所给区间上一致收敛.

(2) 当 $0 < x < 1$ 时, 级数的部分和为

$$s_n(x) = (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \cdots + (1-x)x^n = 1 - x^{n+1},$$

和函数为

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{n+1}) = 1.$$

于是

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = |1 - (1 - x^{n+1})| = x^{n+1}.$$

对于任意给定的正数 ε , 取 $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$), 则 x_n 在 $(0,1)$ 内, 且

$$|r_n(x)| = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{n+1} = \frac{1}{2},$$

所以, 只要取 $\varepsilon < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 在 $(0,1)$ 内, 总存在这样的点 x_n , 使得 $|r_n(x_n)| > \varepsilon$, 因此所给级数在所给区间上不一致收敛.

4. 利用维尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}, \quad |x| < 10;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

解 (1) 对于 $(-\infty, +\infty)$ 上任意一点 x ,

$$|u_n| = \left| \frac{\cos(nx)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数, 收敛, 由维尔斯特拉斯判别法, 原级数在所给区间上一致收敛.

(2) 对于 $(-\infty, +\infty)$ 上任意一点 x ,

$$|u_n| = \left| \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 是 $p = \frac{4}{3} > 1$ 的 p 级数, 收敛, 由维尔斯特拉斯判别法, 原级数在所给区间上一致收敛.

(3) 对于 $0 \leq x < +\infty$ 上任意一点 x ,

$$|u_n(x)| = x^2 e^{-nx} = \frac{x^2}{e^{nx}} = \frac{x^2}{1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \dots} < \frac{x^2}{\frac{1}{2!}(nx)^2} = \frac{2}{n^2},$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是 $p = 2 > 1$ 的 p 级数, 收敛, 所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 由维尔斯特拉斯判别法, 原级数在所给区间上一致收敛.

(4) 对于 $(-10, 10)$ 上任意一点 x ,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{e^{-nx}}{n!} \right| = \frac{e^{-nx}}{n!} = \frac{(e^{-x})^n}{n!} \leq \frac{(e^{10})^n}{n!},$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{10})^n}{n!} = e^{e^{10}} - 1$, 收敛, 由维尔斯特拉斯判别法, 原级数在所给区间上一致收敛.

(5) 对于 $0 \leq x < +\infty$ 上任意一点 x ,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + x^2} \leq \frac{1 - e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是 $p=2>1$ 的 p 级数, 收敛, 由维尔斯特拉斯判别法, 原级数在所给区间上一致收敛.

习题 12-7

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

(1) $f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leq x < \pi);$

(2) $f(x) = e^{2x} \quad (-\pi \leq x < \pi);$

(3) $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0; \\ ax, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \quad (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0).$

解 (1) 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 $f(x)$. 函数 $f(x)$ 为偶函数, 计算傅里叶系数如下:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{3}{n} x^2 \sin(nx) + \frac{6}{n^2} x \cos(nx) - \frac{6}{n^3} \sin(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= (-1)^n \frac{12}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots);$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

(2) 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{-2\pi} + e^{2\pi}}{2}.$$

计算傅里叶系数如下:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2\pi} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}),$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi(4+n^2)} e^{2x} [n \sin(nx) + 2 \cos(nx)] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= (-1)^n \frac{2(e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(4+n^2)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots) . \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi(4+n^2)} e^{2x} [2 \sin(nx) - n \cos(nx)] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{n(e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(4+n^2)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots) .
\end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
&= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4+n^2} [2 \cos(nx) - n \sin(nx)] \right\}, \\
&\quad (x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) .
\end{aligned}$$

(3) 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-b\pi + a\pi}{2} = \frac{(a-b)\pi}{2} .$$

计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx , \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 b x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a x dx = \frac{(a-b)\pi}{2} , \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 b x \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a x \cos(nx) dx \\
&= \frac{b}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \cos(nx) + \frac{1}{n} x \sin(nx) \right] \Big|_{-\pi}^0 + \frac{a}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \cos(nx) + \frac{1}{n} x \sin(nx) \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{(b-a) [1 - (-1)^n]}{n^2 \pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots) ; \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bx \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ax \sin(nx) dx \\
&= \frac{b}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 + \frac{a}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{(b+a)}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
&= \frac{(a-b)\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(b-a)[1-(-1)^n]}{n^2\pi} \cos(nx) + (-1)^{n-1} \frac{a+b}{n} \sin(nx) \right\}, \\
&\quad (x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

$$(1) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi); \quad (2) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 (1) 将函数 $f(x)$ 作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(-\pi, \pi)$ 上收敛于 $f(x)$; 当 $x = \pm\pi$ 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{3}}{2} = 0.$$

若不记 $x = (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots); \\
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{x}{3} \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{3}{1+3n} \sin\left(\frac{1+3n}{3}x\right) + \frac{3}{1-3n} \sin\left(\frac{1-3n}{3}x\right) \right]_0^{\pi} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{18\sqrt{3}n}{(9n^2-1)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
&= \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{9n^2-1} \sin(nx) \quad (-\pi < x < \pi).
\end{aligned}$$

(2) 将函数 $f(x)$ 作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(-\pi, \pi)$ 上收敛于 $f(x)$; 当 $x = \pm\pi$ 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}.$$

计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 e^x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot dx = 1 + \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 e^x \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi(1+n^2)} e^x [\cos(nx) + n \sin(nx)] \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{(1+n^2)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \cdots); \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 e^x \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi(1+n^2)} e^x [\sin(nx) - n \cos(nx)] \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{(1+n^2)\pi} + \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos(nx) + \left[\frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1 + n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin(nx) \right\}, \\ &\quad (-\pi < x < \pi). \end{aligned}$$

3. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开成傅里叶级数.

解 将函数 $f(x)$ 作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数, 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} \sin \left(\frac{2n+1}{2} x \right) + \frac{1}{2n-1} \sin \left(\frac{2n-1}{2} x \right) \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= (-1)^{n-1} \frac{4}{(4n^2-1)\pi} \quad (n=1, 2, 3, \cdots); \\
 b_n &= 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
 &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2-1} \cos(nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi).
 \end{aligned}$$

4. 设 $f(x)$ 的周期为 2π 周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}; \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

若不记 $x = (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$), 函数 $f(x)$ 是奇函数, 计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 a_n &= 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots); \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{1}{n} x \cos(nx) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2n} \cos(nx) \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1} \pi}{2n} \right] \quad (n=1, 2, 3, \cdots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2n} \right] \sin(nx) \\ &\quad (x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{aligned}$$

5. 将函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数.

解 将函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(0, \pi]$ 上, 收敛于 $f(x)$; 当 $x=0$ 时, 收敛于

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0.$$

若不记 $x=2n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$), 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2n} \cos(nx) - \frac{1}{2n^2} \sin(nx) + \frac{1}{2n} x \cos(nx) \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \quad (0 < x \leq \pi).$$

6. 将函数 $f(x) = 2x^2$ ($0 \leq x \leq \pi$) 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, \pi)$ 上, 收敛于 $f(x)$; 当 $x=\pi$ 时, 收敛于

$$\frac{-2\pi^2 + 2\pi^2}{2} = 0.$$

若不记 $x=(2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$), 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \sin(nx) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x^2 \cos(nx) + \frac{2}{n^2} x \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) \right] \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

于是, 函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \sin(nx) \quad (0 \leq x < \pi).$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin(nx) + \frac{2}{n^2} x \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= (-1)^n \frac{8}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{2\pi^2}{3} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos(nx) \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 证明:

- (1) 如果 $f(x-\pi) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0 = 0$, $a_{2k} = 0$, $b_{2k} = 0$, $(k=1, 2, 3, \cdots)$;
- (2) 如果 $f(x-\pi) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1} = 0$, $b_{2k+1} = 0$, $(k=1, 2, 3, \cdots)$.

证明 (1) 因为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

令 $u = x - \pi$, 即 $x = u + \pi$, 又 $f(x - \pi) = -f(x)$, 则

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} -f(x - \pi) dx = - \int_{-\pi}^0 f(u) du = - \int_{-\pi}^0 f(x) dx,$$

所以 $a_0 = 0$.

因为

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(2kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2kx) dx, \end{aligned}$$

令 $u = x - \pi$, 即 $x = u + \pi$, 又 $f(x - \pi) = -f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x) \cos(2kx) dx &= \int_0^{\pi} -f(x-\pi) \cos(2kx) dx \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(u) \cos(2k\pi + 2ku) du \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(u) \cos(2ku) du \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(2kx) dx,
\end{aligned}$$

所以 $a_{2k} = 0$.

因为

$$\begin{aligned}
b_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(2kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2kx) dx,
\end{aligned}$$

令 $u = x - \pi$, 即 $x = u + \pi$, 又 $f(x - \pi) = -f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x) \sin(2kx) dx &= \int_0^{\pi} -f(x - \pi) \sin(2kx) dx \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(u) \sin(2k\pi + 2ku) du \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(u) \sin(2ku) du \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(x) \sin(2kx) dx,
\end{aligned}$$

所以 $b_{2k} = 0$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos[(2k+1)x] dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos[(2k+1)x] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos[(2k+1)x] dx,
\end{aligned}$$

令 $u = x - \pi$, 即 $x = u + \pi$, 又 $f(x - \pi) = f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x) \cos[(2k+1)x] dx &= \int_0^{\pi} f(x - \pi) \cos[(2k+1)x] dx \\
&= \int_{-\pi}^0 f(u) \cos[(2k+1)\pi + (2k+1)u] du \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(u) \cos[(2k+1)u] du \\
&= -\int_{-\pi}^0 f(x) \cos[(2k+1)x] dx,
\end{aligned}$$

所以 $a_{2k+1} = 0$.

因为

$$\begin{aligned}
 b_{2k+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin[(2k+1)x] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin[(2k+1)x] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin[(2k+1)x] dx,
 \end{aligned}$$

令 $u = x - \pi$, 即 $x = u + \pi$, 又 $f(x - \pi) = f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) \sin[(2k+1)x] dx &= \int_0^{\pi} f(x - \pi) \sin[(2k+1)x] dx \\
 &= \int_{-\pi}^0 f(u) \sin[(2k+1)\pi + (2k+1)u] du \\
 &= - \int_{-\pi}^0 f(u) \sin[(2k+1)u] du \\
 &= - \int_{-\pi}^0 f(x) \sin[(2k+1)x] dx,
 \end{aligned}$$

所以 $b_{2k+1} = 0$.

习题 12-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数 (下面给出函数在一个周期内的表达式).

(1) $f(x) = 1 - x^2 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -3 \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < 3. \end{cases}$

解 (1) 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于 $f(x)$.

函数 $f(x)$ 为偶函数, $l = \frac{1}{2}$, 计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) dx = \frac{11}{6}, \\
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2) \cos(2n\pi x) dx \\
 &= 4 \left[\frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi x) - \frac{1}{2n\pi} x^2 \sin(2n\pi x) - \frac{2}{(2n\pi)^2} x \cos(2n\pi x) + \frac{2}{(2n\pi)^3} \sin(2n\pi x) \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= 4 \left[-\frac{2}{(2n\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(n\pi) \right] = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \\
 b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\
 &= \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(2n\pi x) \quad (-\infty < x < +\infty).
 \end{aligned}$$

(2) 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq 2k, x \neq 2k + \frac{1}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = 2k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 收敛于

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2};$$

当 $x = 2k + \frac{1}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 收敛于

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}^+\right) + f\left(\frac{1}{2}^-\right)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

$l=1$, 计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dx = -\frac{1}{2}, \\
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-1}^1 f(x) \cos(2n\pi x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \cos(n\pi x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) \cdot \cos(n\pi x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n\pi} x \sin(n\pi x) \right]_{-1}^0 + \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots); \\
 b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-1}^1 f(x) \sin(2n\pi x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 x \sin(n\pi x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \sin(n\pi x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) \cdot \sin(n\pi x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi x) - \frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x) \right]_{-1}^0 - \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left(1 - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\
 &= -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} + \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} \right] \cos(n\pi x) + \frac{1 - 2 \cos \frac{n\pi}{2}}{n\pi} \sin(n\pi x) \right\}, \\
 &\quad \left(x \neq 2k, x \neq 2k + \frac{1}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).
 \end{aligned}$$

(3) 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq 3(2k+1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = 3(2k+1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(-3^+) + f(3^-)}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

$l=3$, 计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^0 (2x+1) dx + \frac{1}{3} \int_0^3 1 dx = -1, \\
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{1}{3} \int_0^3 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2 \cdot 3^2}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{3} + \frac{2 \cdot 3}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{3} + \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right]_{-3}^0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \\
 &= 6 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \\
 b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \frac{1}{3} \int_0^3 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2 \cdot 3^2}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x}{3} - \frac{2 \cdot 3}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \right]_{-3}^0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[1 - (-1)^n \right] \frac{6}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\}, \\
 &\quad (x \neq 3(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}; \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2) f(x) = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2).$$

解 (1) 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 $2l$ 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, l]$ 上, 收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \left[\frac{2l}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \right]_0^{\frac{l}{2}} + \left[-\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} - \frac{2l}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \right]_{\frac{l}{2}}^l \\ &= \frac{4l \sin \frac{n\pi}{2}}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{4l}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数.

法一 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 $2l$ 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, l]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \\ &= \frac{1}{l} \cdot x^2 \Big|_0^{\frac{l}{2}} + \frac{2}{l} \cdot \left(lx - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{l}{2}}^l = \frac{l}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \left[\frac{2l}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_0^{\frac{l}{2}} + \left[\frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{2l}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{l} - \frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_{\frac{l}{2}}^l \end{aligned}$$

$$= -\frac{2l[1+(-1)^n]}{(n\pi)^2} + \frac{4l\cos\frac{n\pi}{2}}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0, & n=2m-1; \\ \frac{4l}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^m-1}{(2m)^2}, & n=2m. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2m-1; \\ 0, & n=2m=2\cdot 2k; \\ -\frac{2l}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k-1)^2}, & n=2m=2(2k-1). \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots; m=1,2,3,\cdots; k=1,2,3,\cdots).$$

于是, 函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

法二 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 l 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, l]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) dx = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x dx = \frac{2}{l} \cdot x^2 \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{2n\pi x}{l} dx$$

$$= \left[\frac{l}{(n\pi)^2} \cos \frac{2n\pi x}{l} + \frac{2}{n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{l} \right] \Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{l[(-1)^n - 1]}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0, & n=2k; \\ -\frac{2l}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1. \end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\cdots; k=1,2,3,\cdots).$$

于是, 函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

(2) 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 4 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, 2)$ 上, 收敛于 $f(x)$, 当 $x=2$ 时, 收敛于

$$\frac{-4+4}{2} = 0.$$

若不记 $x=2(2k+1)$ ($n=0,1,2,\cdots$), 延拓后的函数是奇函数, $l=2$, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\
 &= \left[-\frac{2}{n\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2 \cdot 2^2}{(n\pi)^2} x \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{2 \cdot 2^3}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\
 &= \frac{8}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3} \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3} \right\} \sin \frac{n\pi x}{2} \quad (0 \leq x < 2).$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 4 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, 2]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, $l=2$, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{2}{n\pi} x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{2 \cdot 2^2}{(n\pi)^2} x \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2 \cdot 2^3}{(n\pi)^3} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\
 &= \frac{16 \cdot (-1)^n}{\pi^2 n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \quad (0 \leq x \leq 2).$$

***3.** 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = e^{-x}$, 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq 2k+1$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = 2k+1$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(-1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \operatorname{ch} 1.$$

$l=1$, 计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \Big|_{-1}^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \operatorname{sh} 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-in\pi x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+in\pi} e^{-(1+in\pi)x} \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{1+in\pi} - e^{-(1+in\pi)}}{1+in\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e(-1)^n - e^{-1}(-1)^n}{1+in\pi} = (-1)^n \operatorname{sh} 1 \frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).
 \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式的复数形式为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} = \operatorname{sh} 1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2} e^{in\pi x} \quad (x \neq 2k+1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*4. 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数, 已知它的傅里叶级数的复数形式为 (参阅本节例题)

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i \frac{2n\pi t}{T}} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式 (即三角形式).

解 法一
$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i \frac{2n\pi t}{T}} \\
 &= \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i \frac{2n\pi t}{T}} + \frac{1}{-n} \sin \frac{-n\pi\tau}{T} e^{i \frac{-2n\pi t}{T}} \right) \\
 &= \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \left[\left(\cos \frac{2n\pi\tau t}{T} + i \sin \frac{2n\pi\tau t}{T} \right) + \left(\cos \frac{-2n\pi\tau t}{T} + i \sin \frac{-2n\pi\tau t}{T} \right) \right] \\
 &= \frac{h\tau}{T} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad (-\infty < t < +\infty).
 \end{aligned}$$

法二 由 $u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i \frac{2n\pi t}{T}} = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi t}{T}}$ 知

$$c_0 = \frac{h\tau}{T}, \quad c_n = \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, \quad c_{-n} = \frac{h}{-n\pi} \sin \frac{-n\pi\tau}{T} = c_n,$$

因为

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n},$$

所以

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 2c_0 = \frac{2h\tau}{T}, \\
 a_n &= c_n + c_{-n} = 2c_n = \frac{2h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, \\
 b_n &= \frac{1}{-i}(c_n - c_{-n}) = 0.
 \end{aligned}$$

因而

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

$$= \frac{h\tau}{T} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

总习题十二

1. 填空.

- (1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的_____条件, 不是它收敛的_____条件;
- (2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的_____条件;
- (3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定_____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____.

分析 若假言判断“若 A 则 B ”为真, 则称条件 A 是 B 的充分条件;

若假言判断“若 $\bar{A}$ 则 $\bar{B}$ ” (即若非 A 则非 B) 为真, 则称条件 A 是 B 的必要条件;

若假言判断“若 A 则 B ”和若“ $\bar{A}$ 则 $\bar{B}$ ”同时为真, 则称条件 A 是 B 的充要条件.

解 (1) 必要, 充分; (2) 充要; (3) 收敛, 发散.

2. 下题中给出了四个结果, 从中选出一个正确的结果.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $|x|$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数为 ().

- A. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \cdots \right];$
- B. $\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2^2} \sin 2x + \frac{1}{4^2} \sin 4x + \frac{1}{6^2} \sin 6x + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \sin 2nx + \cdots \right];$
- C. $\frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \cdots \right];$
- D. $\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{4^2} \cos 4x + \frac{1}{6^2} \cos 6x + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \cos 2nx + \cdots \right].$

分析: 因为 $f(x)$ 是偶函数, 有 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$), B 错; $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$, C 和 D 错.

解 A.

3. 判定下列级数的收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a > 0, s > 0).$$

分析: 所给级数均为正项级数.

解 (1) 令 $u_n = \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$, $v_n = \frac{1}{n}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 根据正项级数的比较审敛法的极限形式可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$ 发散.

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \right)$$

(2) 令 $u_n = \frac{(n!)^2}{2n^2} = \frac{[(n-1)!]^2}{2}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 根据级数收敛的必要条件可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$ 发散.

$$(3) \text{ 令 } u_n = \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}, \quad v_n = \frac{n}{2^n}, \quad \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1, \text{ 根据正项级数}$$

数的比值审敛法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛; 又因为 $u_n \leq v_n$, 根据正项级数的比较审敛法可知, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

$$(4) \text{ 令 } u_n = \frac{1}{\ln^{10} n}, \quad v_n = \frac{1}{n}, \quad \text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n}.$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10(\ln x)^9 \cdot \frac{1}{x}}{1} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} = \dots = 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^{10} x} = +\infty$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 根据正项级数的比较

审敛法的极限形式可知, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}$ 发散.

$$(5) \text{ 令 } u_n = \frac{a^n}{n^s}, \quad \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = a, \text{ 根据正项级数的比值审敛}$$

法可知, 当 $a < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 收敛, 当 $a > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 发散.

当 $a=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 为 p 级数, 当 $s>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 收敛, 当 $s \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ 发散.

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 也收敛.

证明 由收敛级数的性质知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u_n + v_n)^2}{u_n + v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 根据正项级数的比较审敛法的

极限形式可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 请说明理由.

证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

因为由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ 可得, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$, 即

$$v_n > \frac{1}{2} u_n > 0, \quad v_n < \frac{3}{2} u_n,$$

由正项级数的比较判别法得, 正项级数 $\sum_{n=N+1}^{\infty} v_n$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不是正项级数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能发散.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为交错级数, 满足莱布尼茨定理的条件, 收敛.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = 1.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数, 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

6. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 (1) 当 $p \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \neq 0$, 级数发散;

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 为 p 级数, $0 < p \leq 1$, 级数发散; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 为交错级

数, 满足莱布尼茨定理的条件, 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 条件收敛;

当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 为 p 级数, $p > 1$, 级数收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 绝对收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+1}}, \text{ 因为 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+1}} \text{ 是公比为 } \frac{1}{\pi} \text{ 的等比级数, 收敛, 由正项级数的}$$

比较判别法得, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}} \right|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$ 绝对收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \ln \frac{n+1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), \text{ 因为}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \ln e = 1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数, 发散, 由正项级数的比较审敛法的极限形式得, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \ln \frac{n+1}{n} \right|$ 发散.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 为交错级数, 满足莱布尼茨定理的条件, 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 条件收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}, \text{ 因为}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)+1]!}{(n+1)^{(n+1)+1}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

由正项级数的比值审敛法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \ln \frac{n+1}{n} \right|$ 收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 绝对收敛.

7. 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k^2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} \right].$$

解 (1) 法一 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 为正项级数, 因为

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n^2}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n^2}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n^2 + 2n}\right]^{\frac{n^2}{n^2 + 2n}}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\&= \frac{1}{3} \cdot e^{-1} \cdot e^2 \cdot 1 = \frac{e}{3} < 1,\end{aligned}$$

由正项级数的比值审敛法得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛, 所以其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界, 其中

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}. \text{ 因而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_n = 0.$$

法二 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 为正项级数, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1,$$

由正项级数的根值审敛法得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛, 所以其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界, 其中

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}. \text{ 因而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_n = 0.$$

(2) 因为

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} \cdot 2^{\frac{3}{27}} \cdots 2^{\frac{n}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}} = 2^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

讨论幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, 收敛域为 $(-1, 1)$, 令 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

令 $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 收敛域为 $(-1, 1)$, 逐项积分得

$$\int_0^x s_1(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x nx^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

所以

$$s_1(x) = \left[\int_0^x s_1(x) dx \right]' = \left[\frac{x}{1-x} \right]' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1, 1).$$

于是 $s(x) = xs_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, 因而 $s\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$. 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}} = 2^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}} = 2^{s\left(\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}.$$

8. 求下列幂级数的收敛区间.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}.$$

解 (1) 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n + 5^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} = 5,$$

所以幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{5}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

(2) 法一 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2 + 2n} \right]^{\frac{2n}{n^2 + 2n}}}{\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2 + 2n}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{\frac{2n}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{e^0}{e} \cdot e^2 \cdot 1 = e,
\end{aligned}$$

所以幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{e}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

法二 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |x| = e|x|,$$

由正项级数的根值审敛法, 得当 $e|x| < 1$, 即 $|x| < \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n \right|$ 收敛, 所以幂级数绝对

收敛; 当 $e|x| > 1$, 即 $|x| > \frac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n \right|$ 发散, 所以幂级数发散.

因而幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{e}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

(3) 令 $t = x + 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n$.

讨论幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$, 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1,$$

所以幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$. 即 $|t| < 1$, 或 $|x+1| < 1$, 所以 $-2 < x < 0$.

因而原幂级数的收敛区间为 $(-2, 0)$.

(4) 令 $t = x^2$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} t^n$.

讨论幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} t^n$, 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2},$$

所以幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 2$, 收敛区间为 $(-2, 2)$, 即 $|t| < 2$, 或 $|x^2| < 2$, 所以 $|x| < \sqrt{2}$.

因而原幂级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

9. 求下列幂级数的和函数.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}; \quad *(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n; \quad *(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

解 (1) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} x^{[2(n+1)-1]}}{\frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \cdot |x|^2 = \frac{1}{2} \cdot |x|^2,$$

由正项级数的比值审敛法可知, 当 $\frac{1}{2} \cdot |x|^2 < 1$, 即 $|x| < \sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} \right|$ 收敛, 所以幂级数绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} \cdot |x|^2 > 1$, 即 $|x| > \sqrt{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} \right|$ 发散, 所以幂级数发散. 因而幂级数的收敛半径为 $R = \sqrt{2}$, 收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$, 则 $s(0) = \frac{1}{2}$, 逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x s(x) dx &= \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^x \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)} dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2}, \end{aligned}$$

所以

$$s(x) = \left(\frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}).$$

*(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1} x^{2(n+1)-1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot |x|^2 = |x|^2,$$

由正项级数的比值审敛法可知, 当 $|x|^2 < 1$, 即 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right|$ 收敛, 所以幂级数绝对收敛; 当 $|x|^2 > 1$, 即 $|x| > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right|$ 发散, 所以幂级数发散. 当 $x = \pm 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 是收敛的交错级数, 因此幂级数的收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$.

设幂级数的和函数为 $s(x)$, 则

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1},$$

逐项求导, 得

$$\begin{aligned} s'(x) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx,$$

故 $s(x) - s(0) = \arctan x - \arctan 0$, 又 $s(0) = 0$, 因而 $s(x) = \arctan x \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

(3) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(x-1)^{(n+1)}}{n(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot |x-1| = |x-1|,$$

由正项级数的比值审敛法可知, 当 $|x-1| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |n(x-1)^n|$ 收敛, 所以幂级数绝对收敛; 当

$|x-1| > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |n(x-1)^n|$ 发散, 所以幂级数发散. 因而幂级数的收敛域为 $(0, 2)$.

设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$, 令 $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$, 逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \int_1^x s_1(x) dx &= \int_1^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_1^x n(x-1)^{n-1} dx \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n = \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x}, \end{aligned}$$

所以 $s_1(x) = \left(\frac{x-1}{2-x} \right)' = \frac{1}{(2-x)^2}$, 因而 $s(x) = (x-1)s_1(x) = \frac{x-1}{(2-x)^2} \quad (0 < x < 2)$.

* (4) 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)[(n+1)+1]}}{\frac{1}{n(n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

所以幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$, 又当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛, 故幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, 则 $xs(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 令 $s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 逐项求导, 得

$$s_1'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$s_1''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

积分得 $\int_0^x s_1''(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx$, 故 $s_1'(x) - s_1'(0) = -\ln(1-x) + \ln(1-0)$, 又 $s_1'(0) = 0$, 所以 $s_1'(x) = -\ln(1-x)$.

再积分得

$$\begin{aligned} \int_0^x s_1'(x) dx &= \int_0^x -\ln(1-x) dx \\ &= -\int_0^x \ln(1-x) dx = -x \ln(1-x) \Big|_0^x + \int_0^x x \cdot \frac{-1}{1-x} dx \\ &= -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x), \end{aligned}$$

故 $s_1(x) - s_1(0) = -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x)$, 又 $s_1(0) = 0$, 所以

$$s_1(x) = -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) = x + (1-x) \ln(1-x),$$

因而, 当 $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$ 时,

$$s(x) = \frac{1}{x} s_1(x) = 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x).$$

当 $x = 0$ 时, $s(0) = 0$. 当 $x = 1$ 时,

$$s(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

所以

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1); \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

10. 求下列数项级数的和.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$$

解 (1) 因为

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty),$$

由幂级数的性质, 得

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n,$$

逐项求导, 得

$$(xe^x)' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} x^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1},$$

即

$$(1+x)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e.$$

(2) 因为

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

由幂级数的性质, 得

$$x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+2},$$

逐项求导, 得

$$\begin{aligned} (x \sin x)' &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+2} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+2} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

即

$$\sin x + x \cos x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1).$$

11. 将下列函数展开成 x 的幂级数.

$$(1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) \frac{1}{(2-x)^2}.$$

解 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1), \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x^2)^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1) \\
&= 1 + (-1)^1 \frac{1}{2}x^2 + (-1)^2 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + (-1)^3 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots, \\
&\quad (-1 \leq x \leq 1),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \right] dx \\
&= \int_0^x 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^x (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} dx \right] \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} x^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).
\end{aligned}$$

(2) 令 $f(x) = \frac{1}{2-x}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$, 由

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \quad (-2 < x < 2),$$

得

$$f'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} x^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1},$$

即

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} \quad (-2 < x < 2).$$

12. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 由收敛定理得, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 当 $x \neq n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{0 + e^\pi}{2} = \frac{e^\pi}{2};$$

当 $x = 2n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 收敛于

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

计算傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} e^x \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi}, \\a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx,\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx &= \int_0^{\pi} \cos(nx) de^x = e^x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x d \cos(nx) \\&= e^{\pi} \cos(n\pi) - 1 + n \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx = e^{\pi} \cos(n\pi) - 1 + n \int_0^{\pi} \sin(nx) de^x \\&= e^{\pi} \cos(n\pi) - 1 + e^x \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - n^2 \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx \\&= e^{\pi} \cos(n\pi) - 1 - n^2 \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx, \\ \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx &= \frac{e^{\pi} \cos(n\pi) - 1}{1 + n^2} = \frac{e^{\pi} \cos(-1)^n - 1}{1 + n^2}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{\pi} \cos(-1)^n - 1}{1 + n^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots); \\b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx,\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx &= \int_0^{\pi} \sin(nx) de^x = e^x \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x d \sin(nx) \\&= -n \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = -n \int_0^{\pi} \cos(nx) de^x \\&= -n e^x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - n^2 \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx \\&= -n e^{\pi} \cos(n\pi) + n - n^2 \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx, \\ \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx &= \frac{e^{\pi} \cos(n\pi) - 1}{1 + n^2} = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \\b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n e^{\pi} (-1)^{n+1} + n}{1 + n^2} = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{e^{\pi} (-1)^{n+1} + 1}{1 + n^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots).\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\&= \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cdot e^{\pi} - 1}{1 + n^2} \cos(nx) + n \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot e^{\pi} + 1}{1 + n^2} \sin(nx) \right], \\&\quad (x \neq n\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).\end{aligned}$$

13. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & h < x \leq \pi. \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(0, h) \cup (h, \pi]$ 上, 收敛于 $f(x)$; 当 $x = 0$ 时, 收敛于

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0;$$

当 $x = h$ 时, 收敛于

$$\frac{f(h^+) + f(h^-)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

若不记 $x = 2n\pi$, $x = 2n\pi \pm h$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h 1 \cdot \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi} 0 \cdot \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^h = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos(nh)}{n}, \end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(nh)}{n} \sin(nx), \quad x \in (0, h) \cup (h, \pi].$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0, h) \cup (h, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$; 当 $x = h$ 时, 收敛于

$$\frac{f(h^+) + f(h^-)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

若不记 $x = 2n\pi \pm h$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h 1 dx + \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi} 0 dx = \frac{2}{\pi} h, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h 1 \cdot \cos(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi} 0 \cdot \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^h = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(nh)}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n} \cos(nx) \quad x \in [0, h) \cup (h, \pi].$$

第 二 篇

历年考研部分试题及解答

第一部分 向量代数与空间解析几何

一、重点内容提示

“向量代数”主要是向量的表示法与向量的代数运算(加法、减法、数量积、向量积、混合积),关心的问题是向量的大小与方向,而不是线性相关性.

“空间解析几何”主要是空间曲面与空间曲线的方程,重点是平面、直线的方程及常见曲面的方程,考研试题中此方面的题目并不多,但在有关曲面的切平面与曲线的切线以及其他几何应用的问题中,经常要用到向量代数与空间解析几何的基本知识.

历年的试题题型有:① 向量的运算;② 求平面及直线方程;③ 平面、直线间的位置关系;④ 距离公式;⑤ 求旋转面方程;⑥ 综合题.

二、考研部分试题及答案

1. (1995 年数一 3 分) 设有直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L

A. 平行于 π . B. 在 π 上. C. 垂直于 π . D. 与 π 斜交.

解 直线的方向向量为 $\boldsymbol{l} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -28\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k} = -7(4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$,

而平面的法向量 $\boldsymbol{n} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{l} // \boldsymbol{n} \Rightarrow L \perp \pi$. 所以答案为 C.

2. (1998 年数一 3 分) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\frac{x-a_1}{a_1-a_2} = \frac{y-b_1}{b_1-b_2} = \frac{z-c_1}{c_1-c_2}$ 与直

线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

A. 相交于一点. B. 重合. C. 平行但不重合. D. 异面.

解 由题意知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$,

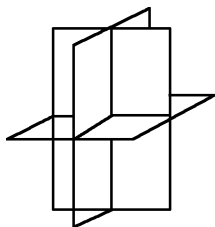
所以 $\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3} = \frac{b_1-b_2}{b_2-b_3} = \frac{c_1-c_2}{c_2-c_3}$ 不成立, 所以两直线不平行.

又因为 $\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0$,

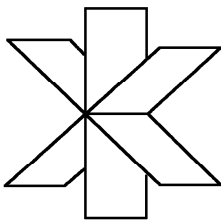
所以 $(a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2), (a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3), (a_3-a_1, b_3-b_1, c_3-c_1)$ 共面.

所以两直线相交. 答案为 A.

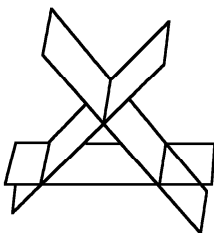
3. (2002 数一 3 分) 设有三个不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i (i=1,2,3)$, 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为 ().



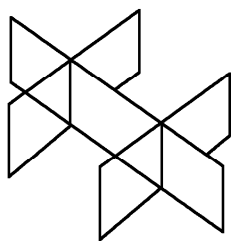
A.



B.



C.



D.

解 由于线性方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 且小于未知数的个数 3, 故线性方程组有无穷多个解, 因此三个平面不可能没有公共交点, 也不可能仅交于一点, 这样就排除了 C、D 和 A. 又由于系数矩阵的秩为 2, 故必有两个平面的法向量线性无关, 即不共线, 因此三平面必交于一线. 故应选 B.

4. (1993 数一、二 3 分) 设有线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的夹角为
- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

解 L_1 与 L_2 的方向向量 $t_1 = \{1, -2, 1\}, t_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{-1, -1, 2\}$,

$$\cos \theta = \frac{|t_1 \cdot t_2|}{|t_1||t_2|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

故选 C.

5. (1995 年数一 3 分) 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) = (a \times b) \cdot c + (a \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot c + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot a$
 $= 2(a \times b) \cdot c = 4$

6. (1996 年数一 3 分) 设一平面经过原点及 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 由题意设所求平面方程为 $Ax + By + Cz = 0$, 由于过 $(6, -3, 2)$, 所以 $6A - 3B + 2C = 0$, 再由平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直得 $4A - B + 2C = 0 \Rightarrow A = B, C = -\frac{3}{2}A$, 所以答案为 $2x + 2y - 3z = 0$.

7. (2006 年数一 4 分) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}$.

8. (1990 数一、二 3 分) 过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 $-1(x-1) + 3(y-2) + (z+1) = 0$.

9. (1991 数一、二 3 分) 已知两直线的方程是 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是 _____.

解 设所求平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 因为 $(1, 2, 3)$ 在平面 $A + 2B + 3C + D = 0$ 上, 且 $(A, B, C) \perp (1, 0, -1), (A, B, C) \perp (2, 1, 1)$,

所以 $A - C = 0 \Rightarrow A = C; 2A + B + C = 0 \Rightarrow B = -3A \Rightarrow D = 2A$,

$Ax - 3Ay + Az + 2A = 0 \Rightarrow x - 3y + z + 2 = 0$.

10. (1987 数一、二 3 分) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为 _____.

解 $n = \{0, 1, 1\} \times \{1, 2, 1\} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{-1, 1, -1\}$, 所求平面方程为 $x - y + z = 0$.

11. (1998 年数一 5 分) 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解 由 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x-1=y \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$, 过 L 的平面束方程为

$$x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0$$

与 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 垂直的平面方程的条件 $\lambda = -2$, 所求直线 L_0 为 $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ (L_0

还可以用其他方法求, 读者不妨一试).

求旋转曲面 S ; 把 L_0 表示成 $\begin{cases} x=2y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = \sqrt{(2y)^2 + \left[\frac{1}{2}(1-y)\right]^2} \cos \theta \\ y = y \\ z = \sqrt{(2y)^2 + \left[\frac{1}{2}(1-y)\right]^2} \sin \theta \end{cases}$,

消去 θ 得 $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$.

第二部分 多元函数微分学

一、重点内容提示

多元函数微分学包括有若干基本概念及其联系;多元函数的复合函数求导法;隐函数求导法及其应用;全微分的求法;梯度向量与方向导数的计算方法;多元函数微分学的几何应用(求空间曲线的切线、法平面与空间曲面的切平面、法线);极值判断与最值问题;等等.在历年考试中多元函数微分学的内容也是比较重要的.历年试题的题型大致可归纳为:

1. 多元(主要二元)函数微分学中的若干基本概念及其联系;
2. 多元(主要二元和三元)初等函数的偏导数或全微分;
3. 复合函数求导法:① 求带抽象函数记号的复合函数的一、二阶偏导数或全微分;② 求隐函数的导数、偏导数或全微分;③ 变量替换下方程的变形.
4. 求二元或三元函数的梯度或方向导数;
5. 多元函数微分学的几何应用;
6. 多元函数的极值、最值问题.

二、考研部分试题及答案

1. (1997年数一3分) 二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 在点 $(0,0)$ 处

- A. 连续, 偏导数存在. B. 连续, 偏导数不存在.
C. 不连续, 偏导数存在. D. 不连续, 偏导数不存在.

解 由定义 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 即偏导数存在. $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{k}{1+k^2}$, k 不同极限不同,

所以不连续. 答案为 C.

2. (1997年数一3分) 考虑二元函数的下面4条性质:

- ① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续
③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有

- A. ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ① B. ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ① C. ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ① D. ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④

答案 A.

3. (2012年数一4分) 如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是?

- A. 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

B. 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

C. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

D. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

答案 B.

解 由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 可知如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则必有 $f(0,0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0$,

这样, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 就可以写成 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

也即极限 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 存在, 可知 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$,

即 $f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$.

由可微的定义可知, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. 故选 B.

4. (2013 年数一 4 分) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

A. $x - y + z = -2$ B. $x + y + z = 0$ C. $x - 2y + z = -3$ D. $x - y - z = 0$

答案 A.

解 法向量 $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x - y \sin(xy) + 1, -x \sin(xy) + z, y)$, $\mathbf{n}|_{(0,1,-1)} = (1, -1, 1)$,

切平面的方程为 $1(x-0) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0$, 即 $x - y + z + 2 = 0$.

5. (2005 年数一 4 分) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内方程

- A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.
 B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z), z = z(x,y)$.
 C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z), z = z(x,y)$.
 D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z), y = y(x,z)$.

解 $F(x,y,z) = xy - z \ln y + e^{xz} - 1, F(0,1,1) = 1$,

又因为 $F_x(0,1,1) = 2 \neq 0, F_y(0,1,1) = -1 \neq 0, F_z(0,1,1) = 0$, 所以答案为 D.

6. (2010 年数一 4 分) 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$,

则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

A. x B. z C. $-x$ D. $-z$

解 法一, 直接法. 方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 两端分别对 x, y 求偏导有

$$F'_1 \left(-\frac{y}{x^2} \right) + F'_2 \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0, \quad F'_1 \frac{1}{x} + F'_2 \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1}{F'_2} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, 故答案为 B.

法二, 公式法. 记 $G(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G'_x}{G'_z} = \frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2 \frac{1}{x}} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2},$$

同理 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1}{F'_2} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

7. (2008 年数一 4 分) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于

- A. i B. $-i$ C. j D. $-j$

解 易求 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)} = 1, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)} = 0$, 故答案为 A.

8. (2003 年数一 4 分) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$,

- A. 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
B. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.
C. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
D. 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

解 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 \Rightarrow f(0, 0) = 0$;

令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4)$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow \rho \rightarrow 0$);
所以 $f(x, y)$ 的符号主要由 xy 决定, 而 xy 在 $(0, 0)$ 附近符号不定, 故点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点, 答案应选 A.

9. (2006 年数一 12 分) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列正确的是

- A. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ B. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
C. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ D. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

解 令 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, 则 (x_0, y_0) 满足

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 & (1) \\ F'_y = f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 & (2)' \end{cases}$$

若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 由式(1)知 $\lambda = 0$ 或 $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, 当 $\lambda = 0$ 时, 由式(2)知 $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 当 $\lambda \neq 0$ 时, 由 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ 和式(2)知 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 故 A 与 B 不对.

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 由式(1)知 $\lambda \neq 0$, 再由式(2)及 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ 知 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 故选 D.

10. (1998 年数一 3 分) 设 $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$, f, φ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} f'(xy)x + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y) = f'(xy) + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''(xy)y + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).$$

11. (2007 年数一 4 分) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f(x^y, y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y x^{y-1} + \frac{\partial f}{\partial v} y^x \ln y.$

12. (2009 年数一 4 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{12} x + f''_{22} xy + f'_2.$

13. (2005 年数一 4 分) 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$, 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\{1, 2, 3\}} = \text{_____}.$$

解 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3},$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\{1, 2, 3\}} &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1, 2, 3)} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1, 2, 3)} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1, 2, 3)} \cos \gamma \\ &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

14. (2012 年数一 4 分) $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2, 1, 1)}$ _____.

解 $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right) \Big|_{(2, 1, 1)} = \left\{ y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y} \right\} \Big|_{(2, 1, 1)} = \{1, 1, 1\}.$

15. (2000 年数一 5 分) 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数. g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 y + f'_2 \frac{1}{y} + g' \frac{-y}{x^2},$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left[f''_{11} x + f''_{12} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right] y + f'_1 + \left[f''_{21} x + f''_{22} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right] \frac{1}{y} \\ &\quad + f'_2 \left(-\frac{1}{y^2} \right) + g'' \frac{1}{x} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + g' \frac{-1}{x^2} \\ &= f''_{11} xy - f''_{22} \frac{x}{y^3} + f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 - \frac{y}{x^3} g'' - \frac{1}{x^2} g'. \end{aligned}$$

16. (2001 年数一 6 分) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1, 1)} = 2,$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1, 1)} = 3, \varphi(x) = f\left[x, f(x, x)\right]. \text{ 求 } \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \Big|_{x=1}.$$

解 $\varphi'(x) = f'_1[x, f(x, x)] + f'_2[x, f(x, x)] \frac{d}{dx} f(x, x)$

$$= f_1'[x, f(x, x)] + f_2'[x, f(x, x)][f_1'(x, x) + f_2'(x, x)],$$

$$\varphi'(1) = f_1'(1, 1) + f_2'(1, 1)[f_1'(1, 1) + f_2'(1, 1)] = 2 + 3(2 + 3) = 17,$$

$$\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1} = 3\varphi^2(x)\varphi'(x) \Big|_{x=1} = 3 \times 17 = 51.$$

17. (2010 年数一 4 分) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z, \text{ 求 } f(u).$$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x} \sin^2 y + f'(u)e^x \sin y,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} \cos^2 y - f'(u)e^x \sin y,$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}$, 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$ 得 $f''(u) - f(u) = 0 \Rightarrow f(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$.

18. (1996 年数一 6 分) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a , 其中 $z = z(x, y)$ 有二阶连续的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \quad (3)$$

式(1)、(2)、(3)代入 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得

$$(10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

$$6+a-a^2=0 \Rightarrow a=3, a=-2 \text{ (舍去)} \text{ 所以当 } a=3 \text{ 时结论成立.}$$

19. (2007 年数一 11 分) 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

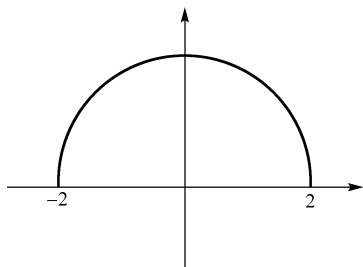
解 (1) 求 D 内的驻点及相应的函数值, 易求驻点为 $M_1(\sqrt{2}, 1), M_2(-\sqrt{2}, 1), f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$.

(2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大值与最小值.

边界由两部分组成:

$L_1: y=0, -2 \leq x \leq 2$, 在 L_1 上 $f(x, y) = x^2$, 最大值 $= 4$, 最小值 $= 0$.

$L_2: y^2 = 4 - x^2 (-2 \leq x \leq 2)$, 在 L_2 上 $h(x) = f(x, y) = 8 - 5x^2 + x^4$, 驻点 $x=0, x^2 = \frac{5}{2}$,



$$h(0)=8, h\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{7}{4} \quad h(\pm 2)=4,$$

边界最大值 8, 最小值 0, 所以 $\max f(x)=8, \min f(x)=0$.

20. (2008 年数一 11 分) 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$, 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解 设所求点为 (x, y, z) , 即求 $f=|z|$ 等价 $f=z^2$ 在条件 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ 下的最值点.

令 $F=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$, 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=2\lambda x+\mu=0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z-4\lambda z+3\mu=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=2\lambda y+\mu=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2z^2=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}=x+y+3z-5=0 \end{cases} \Rightarrow (1,1,1), (-5,-5,5),$$

由题意知 $(1,1,1), (-5,-5,5)$ 分别是最近和最远的点.

21. (2004 年数一 12 分) 设 $z=z(x, y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x, y)$ 的极值点和极值.

解 方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别求导得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, -6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\text{求出 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ z=y \end{cases} \text{ 代入原方程有}$$

$$9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0 \Rightarrow y=\pm 3.$$

得驻点 $(9,3), (-9,-3)$ 。函数值为 3, -3, 再求驻点的二阶导数.

对 $2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, -6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 两端分别对 x, y 求导知, 在驻

$$\text{点}(9,3)\text{处}, A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3};$$

$$AC-B^2=\frac{1}{36}>0, A>0, \text{ 故 } (9,3) \text{ 是极小值点, 极小值为 } z(9,3)=3.$$

同理点 $(-9,-3)$ 是 $z=z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

22. (2009 年数一 9 分) 求二元函数 $f(x, y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解 先求驻点. 由
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2+y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$$
 得唯一驻点 $(x, y) = (0, e^{-1})$,

$$\text{再由 } A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(2+y^2), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + \frac{1}{y};$$

可知在 $(x, y) = (0, e^{-1})$ 处 $A > 0, B = 0, C > 0 \Rightarrow AC - B^2 > 0$,

故 $f(x, y)$ 在 $(x, y) = (0, e^{-1})$ 取极小值 $f(0, e^{-1}) = -e^{-1}$.

23. (2012 年数一 10 分) 求 $f(x, y) = xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解 先求函数的驻点. 令

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = (1-x^2)e^{\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f'_y(x, y) = -xye^{\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases},$$

解得驻点为 $(1, 0), (-1, 0)$. 又

$$f''_{xx} = x(x^2 - 3)e^{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f''_{xy} = -y(1-x^2)e^{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f''_{yy} = -x(1-y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

对点 $(1, 0)$, 有 $A_1 = f''_{xx}(1, 0) = -2e^{\frac{1}{2}}, B_1 = f''_{xy}(1, 0) = 0, C_1 = f''_{yy}(1, 0) = -e^{\frac{1}{2}}$,

所以 $A_1 C_1 - B_1^2 > 0, A_1 < 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(1, 0)$ 处取得极大值 $f(1, 0) = e^{\frac{1}{2}}$.

对点 $(-1, 0)$, 有 $A_2 = f''_{xx}(-1, 0) = 2e^{\frac{1}{2}}, B_2 = f''_{xy}(-1, 0) = 0, C_2 = f''_{yy}(-1, 0) = e^{\frac{1}{2}}$,

所以 $A_2 C_2 - B_2^2 > 0, A_2 > 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(-1, 0)$ 处取得极小值 $f(-1, 0) = -e^{\frac{1}{2}}$.

24. (2012 年数一 10 分) 求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

解: 先求驻点. 令

$$\begin{cases} f'_x = \left(x^2 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} = 0 \\ f'_y = \left(1 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

为了判断这两个驻点是否为极值点, 求二阶导数

$$\begin{cases} f''_{xx} = \left(2x + 2x^2 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} \\ f''_{xy} = \left(x^2 + 1 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} \\ f''_{yy} = \left(2 + y + \frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} \end{cases}$$

在点 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 处, $A = f_{xx}\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = -e^{-\frac{5}{3}}, B = f_{xy}\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}}, C = f_{yy}\left(-1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}},$

因为 $A < 0, AC - B^2 < 0$, 所以 $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

类似地, 在点 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 处, $A = f_{xx}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{1}{3}}, B = f_{xy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}, C = f_{yy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}},$

因为 $A > 0, AC - B^2 = 2e^{-\frac{2}{3}} > 0$, 所以 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 是极小值点, 极小值为

$$f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}} = -e^{-\frac{1}{3}}.$$

第三部分 多元函数积分学

一、重点内容提示

多元函数积分学包括各类积分的概念、计算与应用; 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式及其应用; 平面曲线积分与路径无关及二元函数求积等. 在历年数一考试中, 多元函数积分学占有重要地位, 也是与数三、数二的主要区别. 题型大体归为如下几种:

1. 重积分的概念与积分值的比较;
2. 利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性化简多元函数的积分;
3. 交换积分次序与累次积分的转换;
4. 选用适当方法计算二重积分;
5. 选用适当方法计算三重积分;
6. 求曲线积分与格林公式、斯托克斯公式;
7. 求曲面积分与高斯公式;
8. 计算向量场的散度与旋度;
9. 曲线积分与路径无关及二元函数全微分求积;
10. 多元函数积分学应用及综合题.

二、考研部分试题及答案

1. (2009 年数一 4 分) 如图, 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域

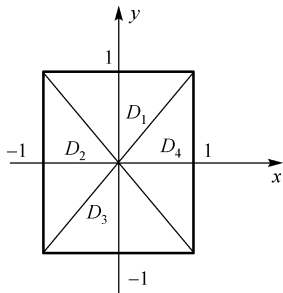
$D_k (k=1, 2, 3, 4)$, 问 $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

A. I_1

B. I_2

C. I_3

D. I_4



解 由对称性 $I_2 = I_4 = 0$, 由 $I_1 > 0, I_3 < 0$ 知答案为 A.

2. (2005 年数三 4 分) $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$,

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

- A. $I_3 > I_2 > I_1$ B. $I_1 > I_2 > I_3$ C. $I_2 > I_1 > I_3$ D. $I_3 > I_1 > I_2$

解 在 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上有

$$(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \cos(x^2 + y^2)^2 \geq \cos x^2 + y^2 \geq \cos \sqrt{x^2 + y^2},$$

并且不全相等, 所以答案为 A.

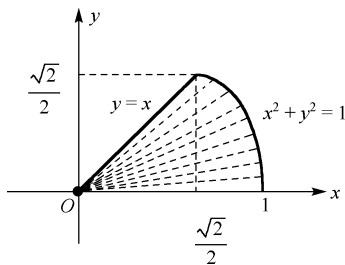
3. (2006 年数一 4 分) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

- A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

解 $D: 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$, 如图所示.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

故答案为 C.



4. (2007 年数一 4 分) 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 且过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 如图所示. 则下列积分小于零的是

- A. $\int_{\Gamma} f(x, y) dx$ B. $\int_{\Gamma} f(x, y) dy$
C. $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ D. $\int_{\Gamma} f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$

解 A. $\int_{\Gamma} f(x, y) dx = \int_{\Gamma} 1 dx = x_N - x_M > 0,$

$$B. \int_{\Gamma} f(x, y) dy = \int_{\Gamma} 1 dy = y_N - y_M < 0,$$

$$C. \int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\Gamma} 1 ds = \Gamma \text{ 的长度 } > 0,$$

$$D. \int_{\Gamma} f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = 0.$$

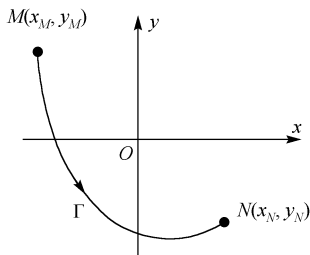
故答案为 B.

5. (2000 年数一 3 分) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 是 S 在第一卦限中的部分, 则有

- A. $\iint_S x ds = 4 \iint_{S_1} x ds$ B. $\iint_S y ds = 4 \iint_{S_1} x ds$
C. $\iint_S z ds = 4 \iint_{S_1} x ds$ D. $\iint_S xyz ds = 4 \iint_{S_1} xyz ds$

解 由对称性有 $\iint_S z ds = 4 \iint_{S_1} z ds$, 所以答案为 C.

6. (1988 年数一 3 分) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 (z \geq 0)$, 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 (z \geq 0, y \geq 0, x \geq 0)$, 则正确的是



$$A. \iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$$

$$B. \iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$$

$$C. \iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$$

$$D. \iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$$

答案 C.

7. (2012 年数一 4 分) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由曲面积分的计算公式可知 $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_D y^2 \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy$, 其中

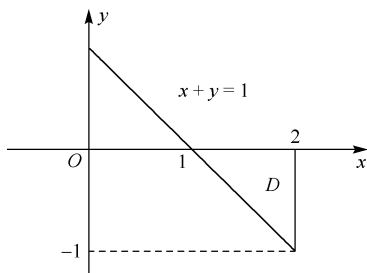
$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

$$\text{故原式} = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \sqrt{3} \int_0^1 y^2 (1-y) dy = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

8. (2001 年数一 3 分) 交换二次积分次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 如图所示.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx &= - \int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx \\ &= - \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= - \int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x, y) dy \\ &= \int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy. \end{aligned}$$



9. (2009 年数一 4 分) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解} \quad \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 r^2 \sin \varphi = \frac{4}{15} \pi.$$

10. (1998 年数一 3 分) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解} \quad \oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \oint_L 12 ds = 12a.$$

11. (2004 年数一 4 分) 设 L 为正向圆周在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解} \quad \text{由格林公式易求} \int_L x dy - 2y dx = \frac{3}{2} \pi.$$

12. (10 年数一 4 分) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x| (x \in [-1, 1])$, 起点为 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解} \quad I = \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy = \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx + \int_0^1 [x(1-x)x^2(-1)] dx = 0.$$

也可用格林公式求解.

13. (2010 年数一 4 分) 设曲面 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$, 如图所示, 则 $\oiint_{\Sigma} (x+|y|)ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\oiint_{\Sigma} (x+|y|)ds = \oiint_{\Sigma} |y|ds = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (|x|+|y|+|z|)ds = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} ds = \frac{8}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

14. (2005 年数一 4 分) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\iiint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由高斯公式有 $I = \iiint_{\Omega} 3dv = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin\varphi d\varphi = (2-\sqrt{2})\pi R^3$.

15. (2006 年数一 4 分) 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧, 则

$\iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\Sigma_1: z=1$ ($x^2+y^2 \leq 1$) 取上侧, 如图所示.

$\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0+0+0=0$,

$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = \iiint_{\Omega} 6dv = 2\pi$.

所以 $I = 2\pi - 0 = 2\pi$.

16. (1995 年数一 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求

$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy$.

解 法 1: 交换积分次序有

$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y)dx$

即 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dx = I$,

$2I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dx$

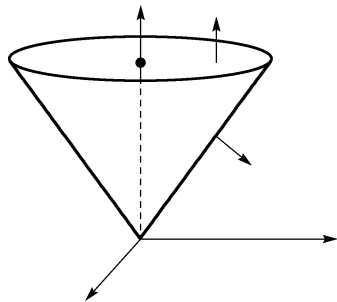
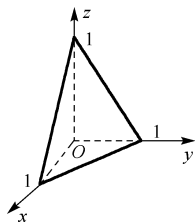
$= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(y)dy = A^2$,

$I = \frac{1}{2}A^2$.

法 2: 分步积分法

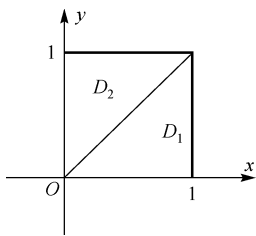
$I = \int_0^1 \left[f(x) \int_x^1 f(y)dy \right] dx = - \int_0^1 \int_x^1 f(y)dy d \left[\int_x^1 f(y)dy \right]$

$= -\frac{1}{2} \left[\int_x^1 f(y)dy \right]^2 \bigg|_0^1 = \frac{1}{2}A^2$.



17. (2002 年数一 7 分) 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 如图所示.



$$\text{解 } \max\{x^2, y^2\} = \begin{cases} x^2, & x \geq y \\ y^2, & x \leq y \end{cases} \quad (x, y) \in D, \quad D = D_1 \cup D_2,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy \\ &= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy \quad (D \text{ 关于 } y=x \text{ 对称}) \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy \quad \text{选择积分次序} = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e - 1. \end{aligned}$$

18. (2005 年数一 11 分) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

$$\text{解 } \text{在 } D \text{ 上: } xy[1 + x^2 + y^2] = \begin{cases} xy & x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0 \\ 2xy & 1 \leq x^2 + y^2 < \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$D_1: x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0$; $D_2: 1 \leq x^2 + y^2 < \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0$, 因为 $D = D_1 \cup D_2$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 2xy dx dy = 2 \iint_D xy dx dy - \iint_{D_1} xy dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 \cos \theta \sin \theta r dr - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta r dr = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

19. (2006 年数一 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$.

$$\text{解 } \text{由对称性 } \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 0,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1 + r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \ln(1 + r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

20. (1997 年数一 5 分) 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z = 8$ 所围成的区域.

$$\text{解 } z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4, \frac{1}{2}r^2 \leq z \leq 8,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^8 r^2 r dz = \frac{1024}{3} \pi.$$

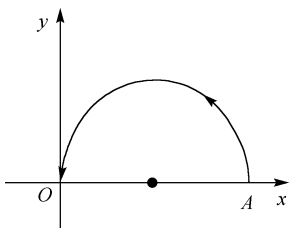
21. (1999 年数一 5 分) 求 $I = \int_L [e^x \sin y - b(x+y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 为正的常数,

L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

解 添加辅助线 $L_1: \overline{OA}: y = 0 (x \in [0, 2a])$, 如图所示.

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_0^{2a} -bxdx = -2a^2b,$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{L_1} P dx + Q dy = \frac{\pi}{2} (b-a)a^2 + 2a^2b.$$



22. (2003 年数一 10 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$, L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx = \oint_L xe^{-\sin y} dy - ye^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx \geq 2\pi^2.$$

证明 (1) 左边曲线积分 $= \int_0^\pi \pi e^{\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx,$

右边曲线积分 $= \int_0^\pi \pi e^{-\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx,$

所以(1)式成立.

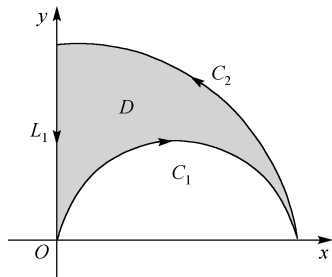
$$(2) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geq \pi \int_0^\pi 2 dx = 2\pi^2.$$

23. (2012 年数一 10 分) 已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

解 设圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 为圆 C_1 , 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 为圆 C_2 , 补线利用格林公式即可. 设所补直线 L_1 为 $x = 0 (0 \leq y \leq 2)$, 并设 L 及 L_1 所围的平面区域为 D , 如图所示.

用格林公式计算得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{L+L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_D (3x^2 + 1 - 3x^2) dx dy - \int_0^2 -2y dy \\ &= S_D - 4 = \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$



24. (2003 年数一 10 分) 计算曲线积分 $\oint_C (z-y) dx + (x-z) dy + (x-y) dz$, 其中 C 是曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}, \text{从 } z \text{ 轴正向往 } z \text{ 轴负向看 } C \text{ 的方向是顺时针的.}$$

解 法 1 设 $x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t + \sin t$, 由 C 的方向知, C 在 xOy 平面上的投影曲线相应地也是顺时针的, 于是 t 从 2π 到 0 代入积分知结果为 -2π .

法 2 用斯托克斯公式来计算. 设 S 为平面 $x - y + z = 2$ 上 C 所围成部分. 由 C 的定向, 按右手规则 S 取下侧,

$$\text{原积分} = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \\ z-x & x-z & x-y \end{vmatrix} = \iint_S 2 \, dx \, dy = -2 \iint_{D_{xy}} dx \, dy = -2\pi.$$

其中 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$.

25. (2001 年数一 7 分) 计算 $I = \oint_L (y^2 - x^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$, 其中 L 是平面

$x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针.

解 设 S 为平面 $x + y + z = 2$ 上 L 所围部分, 由 L 的定向, 按右手法则 S 取上侧, S 的单位法

向量 $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$, 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - x^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} ds \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z) ds = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (6 + x - y) ds = -2 \iint_{D_{xy}} (6 + x - y) dx \, dy \\ &= -12 \iint_D dx \, dy = -24. \end{aligned}$$

注意 $\iint_D (x - y) dx \, dy = 0$.

26. (1998 年数一 7 分) 求 $I = \iint_{\Sigma} \frac{ax \, dy \, dz + (z + a)^2 \, dx \, dy - 2y(z + a) \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中曲面 Σ 为

$z = -\sqrt{a - x^2 - y^2}$ 的上侧, a 为大于 0 的常数.

解 $I = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} ax \, dy \, dz + (z + a)^2 \, dx \, dy - 2y(z + a) \, dx \, dy$,

添加 $\Sigma_1: z = 0$ 下侧, 则

$$I = \frac{1}{a} \left(\iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) ax \, dy \, dz + (z + a)^2 \, dx \, dy - 2y(z + a) \, dx \, dy,$$

$$I = \frac{1}{a} \left\{ \iiint_{\Omega} -a \, dv - \left[- \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} a^2 \, dx \, dy \right] \right\} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

27. (2000 年数一 7 分) 设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S , 都有

$$\oiint_S xf(x) \, dy \, dz - xyf(x) \, dz \, dx - e^{2x} z \, dx \, dy = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 求 $f(x)$.

解 由高斯公式有 $\iiint_{\Omega} [xf'(x) + (1-x)f(x) - e^{2x}] \, dV = 0$,

由 Ω 的任意性知 $xf'(x) + (1-x)f(x) - e^{2x} = 0$, 即 $f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x} (x > 0)$,

解微分方程得 $f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x + c)$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 得 $c = -1$,

验证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x}(e^x - 1) = 1$, 所以 $f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$.

28. (2004 年数一 12 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 是曲面

$z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

解 添加辅助面 $\Sigma_1: z = 0, (x^2 + y^2 \leq 1)$ 取下侧.

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dv \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (r^2 + z) dz = 12\pi \int_0^1 \left[r^3(1-r^2) + \frac{1}{2}r(1-r^2)^2 \right] dr = 2\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy \\ &= \iint_{\Sigma_1} -3 dxdy = -\iint_D -3 dxdy = 3\pi, \end{aligned}$$

所以 $I = J - J_1 = 2\pi - 3\pi = -\pi$.

29. (2009 年数一 10 分) 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydxdy + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面

$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

解 作以原点为心, $\varepsilon > 0$ 为半径的小球面 Σ_{ε} , 取内侧, ε 充分小使 Σ_{ε} 位于 Σ 所围成的椭球内, 记 Σ 与 Σ_{ε} 所围成的区域为 Ω_{ε} , 由高斯公式得

$$\iiint_{\Omega_{\varepsilon}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint_{\Sigma_{\varepsilon}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$0 = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \oiint_{\Sigma_{\varepsilon}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

$$I = - \oiint_{\Sigma_{\varepsilon}} \frac{xdydz + ydxdy + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\varepsilon^3} \oiint_{\Sigma_1} xdydz + ydxdy + zdxdy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega} 3dv = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi.$$

30. (2002 年数一 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy.$$

(1) 证明: 曲线积分 I 与路径无关; (2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

解 (1) 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf'(xy) = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分 I 与路径无关.

(2) 取 $L: xy = ab = cd = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{x}{k} \left[1 + \frac{k^2}{x^2} f(k) \right] dx + \frac{x^3}{k^2} \left[\frac{k^2}{x^2} f(k) - 1 \right] \left(-\frac{k}{x^2} \right) dx \\ &= \int_a^c \left(\frac{x}{k} + \frac{k}{x} f(k) - \frac{k}{x} f(k) + \frac{x}{k} \right) dx = \int_a^c \frac{2x}{k} dx \\ &= \frac{x^2}{k} \Big|_a^c = \frac{c^2 - a^2}{k} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

31. (2005 年数一 12 分) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

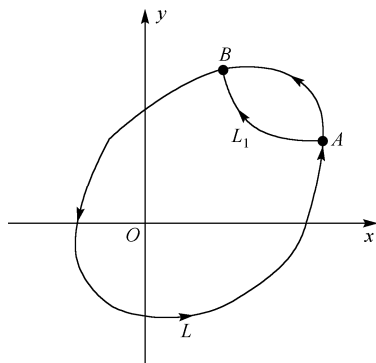
(1) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

解 (1) 证明 在 $x > 0$ 内任取两点 A, B , 以 A 为起点, B 为终点任作两条分段光滑曲线 L_1, L_2 , 记 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}, Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, 只要证明 $\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$, 以 B 为起点作另一分段光滑曲线 L 绕过原点与 A 连接, 如图所示.

由题意有

$$\begin{aligned} \int_{L \cup L_1} Pdx + Qdy &= \int_{L \cup L_2} Pdx + Qdy \\ \Rightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy &= \int_{L_2} Pdx + Qdy \\ \Rightarrow \int_L Pdx + Qdy &\text{ 在右半平面与路径无关} \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$.

(2) $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} ((x, y) \in \pi_{\text{右}}),$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y^5 - 4x^2y}{(2x^2 + y^4)^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4y^3\varphi(y)}{(2x^2 + y^4)^2},$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \varphi'(y) + 2y = 0$ 和 $\varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5$,

由 $\varphi'(y) = -2y$, 得 $\varphi(y) = -y^2 + c$, 代入第二式得

$$\varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = -2y^5 + 4y^5 - 4cy^3 = 2y^5,$$

因此 $c = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

32. (2013 年数一 10 分) 设直线 L 过 $A(1, 0, 0)$ 和 $B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω . (1) 求曲面 Σ 的方程; (2) 求 Ω 的重心坐标.

解 (1) $\overline{AB} = \{-1, 1, 1\}$,

$$L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$$

$\forall M(x, y, z) \in \Sigma$, 对应于 L 上的点 $M_0(x_0, y_0, z)$, 则 $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$,

由 $\begin{cases} x_0 = 1-z \\ y_0 = z \end{cases}$ 得 $\Sigma: x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2$, 即 $\Sigma: x^2 + y^2 = 2z^2 - 2z + 1$.

(2) 显然 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv},$$

$$\iiint_{\Omega} dv = \int_0^2 dz \iint_{2z^2-2z+1} dx dy = \pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) dz = \pi \left(\frac{16}{3} - 4 + 2 \right) = \frac{10}{3} \pi,$$

$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_0^2 z dz \iint_{2z^2-2z+1} dx dy = \pi \int_0^2 (2z^3 - 2z^2 + z) dz = \pi \left(8 - \frac{16}{3} + 2 \right) = \frac{14}{3} \pi.$$

所以 $\bar{z} = \frac{7}{5}$, 所以重心坐标为 $\left(0, 0, \frac{7}{5} \right)$.

第四部分 无穷级数

一、重点内容提示

无穷级数部分包括若干基本概念, 判别级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛)的各种方法, 幂级数的收敛性与和函数的性质, 幂级数收敛域的求法, 求幂级数的和函数与求函数的幂级数展开式的方法, 还有傅里叶级数和它的函数等. 历年试题大致可归纳为如下几类:

1. 级数收敛性的判别;
2. 幂级数收敛性的判别;
3. 求幂级数的收敛域与和函数;
4. 数值级数求和;
5. 求函数的幂级数展开式;
6. 傅里叶级数.

若级数分为数值级数、幂级数与傅里叶级数, 则幂级数部分考得最多.

二、考研部分试题及答案

1. (1998 年数一 5 分) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 是否

收敛? 并说明理由.

解 因为 $\{a_n\}$ 单调下降有下界 0, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ 存在. 若 $a = 0$, 由莱布尼兹法则, 交错级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛矛盾, 于是 $a > 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{a + 1} < 1$, 所以原级数收敛.

2. (2003 年数一 3 分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

解 易知答案为 D.

3. (2002 年数一 3 分) 设 $u_n \neq 0 (n=1, 2, 3, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$

A. 发散

B. 绝对收敛

C. 条件收敛

D. 收敛性根据所给条件不能判断

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$ 且 $\exists N, n > N, \frac{1}{u_n} > 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 为交错级数, 但是 $\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 不能保证单调.

$$\begin{aligned} \text{考察部分和 } S_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{u_k} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{u_{k+1}} \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k} + \sum_{l=2}^{n+1} (-1)^l \frac{1}{u_l} = \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{u_1} \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以原级数收敛.

再考察取绝对值后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$, 注意 $\frac{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{u_n} + \frac{n+1}{u_{n+1}} \frac{n}{n+1} \rightarrow 2$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 发散, 故答案为 C.

4. (2004 年数一 4 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

B. 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n = 0$.

D. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \lambda$.

解 在 B 中由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \lambda \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$, 由比较法极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

答案 应选 B. 举例说明 A, C, D 不对:

对于 A, $a_n = \frac{1}{n \ln n}$; 对于 C, $a_n = \frac{1}{n^{3/2}}$; 对于 D, $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

5. (2006 年数一 4 分) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

A. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 由级数收敛性质知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 所以选 D.

6. (2009 年数一 4 分) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

- A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛
 B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散
 C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛
 D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 有界, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0 \Rightarrow \{b_n\}$ 有界,

所以 $0 \leq a_n^2 b_n^2 \leq M |b_n|$ 比较法 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 故 C 对.

对 A, B, D 下面举反例说明原因:

对 A, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; 对 B, $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n}$; 对 D, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. (2009 年数一 4 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 _____.

解 令 $t = x-1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n t^n)'$, 逐项求导后的幂级数与原幂级数

有相同的收敛半径, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径为 3, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n t^n)'$ 的收敛半径也为 3, 从而

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n t^n)'$ 的收敛半径为 3, 收敛区间为 $(-3, 3)$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $-3 < x-1 < 3 \Rightarrow (-2, 4)$.

8. (2008 年数一 4 分) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 _____.

解 因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=2$ 收敛, 所以 $R \geq 2$. 又因为

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=-4$ 发散, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=-2$ 发散, 所以 $R \leq 2$, 于是 $R=2$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的

收敛区间是 $(-2, 2)$, 收敛域为 $(-2, 2]$, 由 $-2 < t = x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 < x \leq 5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛

域是 $(1, 5]$.

9. (1995 年数一 3 分) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n + 2^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{(-3)^n + 2^n} x^{2n-1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3 \left[1 + \left(\frac{-2}{3} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3} |x|^2,$$

于是当 $\frac{1}{3}|x|^2 < 1$ 时, 即 $|x| < \sqrt{3}$ 时幂级数收敛, 当 $|x| > \sqrt{3}$ 时幂级数发散, 所以幂级数的收敛半径 $R = \sqrt{3}$.

10. (2003 年数一 4 分) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 则 $a_2 =$ _____.

解 这是傅里叶系数的问题. 已知 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 是以 2π 为周期的偶函数,

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x^2 d(\sin 2x) = 1.$$

11. (1999 年数一 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $-\frac{3}{4}$

解 $S(x)$ 可视为 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期为 2 的周期延拓后的函数的傅里叶级数的和, 由于 $S(x)$ 以 2 为周期, 又是偶函数, 所以

$$S\left(-\frac{5}{2}\right) = S\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right),$$

由收敛定理知

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2} + 0\right) + f\left(\frac{1}{2} - 0\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} (2-2x) + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} x \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

因此 $S\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}$, 故选 C.

12. (2013 年数一 4 分) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n = 1, 2, \dots$),

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S\left(-\frac{9}{4}\right)$ 等于

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. $-\frac{3}{4}$

答案 C.

解 根据题意, 将函数在 $[-1, 1]$ 展开成傅里叶级数 (只含有正弦, 不含余弦), 因此将函数进行奇延拓:

$$f(x) = \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right|, & x \in (0, 1) \\ -\left| x + \frac{1}{2} \right|, & x \in (-1, 0) \end{cases},$$

它的傅里叶级数为 $S(x)$, 它是以 2 为周期的, 则当 $x \in (-1, 1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时,

$$S(x) = f(x), S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

13. (2000 年数一 6 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3},$$

于是收敛半径 $R = 3$, 收敛区间为 $(-3, 3)$.

当 $x = 3$ 时是正向级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n}$, 由 $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n}$,

即 $x = 3$ 时原级数发散.

当 $x = -3$ 时是变号级数, 用分解法来研究其敛散性:

$$\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n [3^n + (-2)^n - (-2)^n]}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{3^n} \frac{1}{n}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ 收敛, 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} \text{ 收敛.}$$

$$\text{由 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ 收敛, 所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} \text{ 收敛. 即 } x = -3 \text{ 时幂级数收敛.}$$

14. (2002 年数一 7 分) (1) 验证 $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足 $y'' + y' + y = e^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 (1) 这是缺项的幂级数, 令 $t = x^3$, 则

$$\text{原级数} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(3n)!},$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(3(n+1))!}}{\frac{1}{(3n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0 \Rightarrow t \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty) \text{ 时原级数收敛.}$$

在收敛区域内对幂级数可以逐项求导任意次. 这里要求求导两次:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$y'' + y' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!},$$

由级数的线性性质

$$\begin{aligned} y'' + y' + y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right] &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots = e^x. \end{aligned}$$

(2) $y'' + y' + y = e^x$ 特征方程为 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 相应齐次方程的通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

设非齐次方程的一个特解为 $y^* = Ae^x$, 代入 $y'' + y' + y = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{3}$,

所以 $y'' + y' + y = e^x$ 的通解为 $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{1}{3}e^x$.

由 $y(0)=1, y'(0)=1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = y(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$.

15. (2005 年数一 12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

解 易求 $R=1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

下面求和函数:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2} \quad (|x| < 1),$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n},$$

$$f_2'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, f_2''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{2}{1+x^2} \quad (|x| < 1).$$

由 $f_2'(0)=0, f_2(0)=0$ 积分两次得

$$f_2'(x) = \int_0^x f_2''(t) dt = 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan x,$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_0^x f_2'(t) dt = 2 \int_0^x \arctan t dt = 2x \arctan x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad (|x| < 1), \end{aligned}$$

故 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \quad (|x| < 1)$.

16. (2007 年数一 10 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

(1) 证明 $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n, n=1, 2, 3, \dots$; (2) 求 $y(x)$ 的表达式.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \\ y'' - 2xy' - 4y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n \\ &= 2a_2 - 4a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+2) a_n] x^n = 0, \end{aligned}$$

$$\text{由 } y(0) = a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0, (n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+2) a_n = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\Rightarrow a_0 = 0, a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

$$(2) \text{ 由 } a_2 = 0 \text{ 及 } a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, \quad a_2 = a_4 = a_6 = \dots a_{2n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{由初值 } y'(0) = a_1 = 1 \text{ 及 } a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\Rightarrow a_3 = 1, a_5 = \frac{2}{4} a_3 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{1}{3} a_5 = \frac{1}{3!}, a_9 = \frac{1}{4!},$$

$$\text{归纳得 } a_{2n+1} = \frac{1}{n!} \Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x e^{x^2}.$$

17. (2010 年数一 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} = x s_1(x), s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, \\ s_1'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x| < 1), \end{aligned}$$

又 $s_1(0) = 0$, 于是

$$s_1(x) = \int_0^x s_1'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x,$$

$$\text{因此 } s(x) = x \arctan x, \text{ 即 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \arctan x \quad x \in [-1, 1].$$

18. (1996 年数一 7 分) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

$$\text{解} \quad \text{设 } A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n^2-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n-1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \stackrel{\text{记}}{=} A_1 - A_2,$$

$$\text{由 } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\text{于是 } A_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{4} \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ln 2,$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \ln 2 - \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } A = A_1 - A_2 = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

19. (2001 年数一 8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \text{ 的和.}$$

$$\text{解 } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1,$$

$$\arctan x = \int_0^x (\arctan t)' dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{x} \arctan x &= (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 1], x \neq 0 \end{aligned}$$

上式右端当 $x=0$ 时取值为 1, 于是

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 1],$$

$$\text{上式中令 } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

20. (2003 年数一 12 分) 求函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

$$\text{解 } f'(x) = \frac{-2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

由 $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 两边积分得

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} dt = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

因为 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 连续, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1} \bigg|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛,

所以 $f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

令 $x = \frac{1}{2}$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

21. (2006 年数一 12 分) 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\frac{1}{2+x-x^2} = \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right)$
 $= \frac{1}{3} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (|x| < 1),$
 $f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1} \quad (|x| < 1).$

22. (2008 年数一 11 分) 将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解 $f(x)$ 可视为 $[-\pi, \pi]$ 上的偶函数, $f(x) = 1 - x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x^2 d(\sin nx) = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{4}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} x d(\cos nx) = -\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

$$b_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots),$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 连续, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$ 满足展开定理的条件,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 - \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx (x \in [-\pi, \pi]),$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } 1 = 1 - \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

23. (1995 年数一 6 分) 将函数 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 将 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期为 4 的周期延拓, 于是得 $f(x)$ 的傅里叶系数

$$b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi}{2} x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d\left(\sin \frac{n\pi}{2} x\right) = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x-1) dx = 0,$$

由于 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 分段单调连续且 $f(-1) = f(1)$,

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)}{2} \pi x, x \in [0, 2].$$

24. (2012 年数一 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

$$\text{解 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3}{2(n+1) + 1} \cdot x^{2n+2}}{\frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} \cdot x^{2n}} \right| = x^2,$$

$|x| < 1$, 级数收敛; $|x| > 1$, 级数发散. 所以 $R = 1$.

易知当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 发散, 可知 $x \in (-1, 1)$ 为幂级数的收敛域.

下面再计算幂级数的和函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2n+1},$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} &= \left\{ \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) t^{2n} \right] dt \right\}' \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^x t^{2n} dt \right\}' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2n+1} \text{ 则 } xS_1(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

根据逐项求导定理可知

$$[xS_1(x)]' = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}, \text{ 故 } xS_1(x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \text{ 故当 } x \neq 0 \text{ 时, 有}$$

$$S_1(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \text{ 而当 } x = 0 \text{ 时, 有 } S_1(0) = 2.$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), & -1 < x < 1 \text{ 或 } 0 < x < 1 \\ 3, & x = 0 \end{cases}.$$

25. (2013 年数一 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$. $S(x)$ 是幂

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明 $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

(1) 证明 由题意得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n,$$

$\because a_n = (n+1)(n+2)a_{n+2} (n=0,1,2,\cdots), \therefore S''(x) = S(x)$, 即 $S''(x) - S(x) = 0$.

(2) 解 $S''(x) - S(x) = 0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程, 其特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 从而 $\lambda = \pm 1$, 于是 $s(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$, 由 $S(0) = a_0 = 3, S'(0) = a_1 = 1$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 2,$$

所以 $S(x) = e^{-x} + 2e^x$.

第 三 篇

《高等数学（下册）》期末考试

试卷选编及参考答案

高等数学(下)期末考试试卷(一)

试 题

一、填空题(每小题4分,共32分)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若 $u = e^{xy}$, 则 $du = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当 p $\underline{\hspace{1cm}}$ 时, 级数收敛.

4. 设 $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 改换积分次序再计算二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin y}{1-y} dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 将 $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$ 转化为极坐标形式下的二次积分为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

7. 曲面 $x^2 + 3y^2 + z^2 = 11$, 在点 $(2, 1, 2)$ 的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

8. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算(每小题5分,共20分)

1. 设 $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, 求 $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}.$

2. 求曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \\ z=4\sin \frac{t}{2} \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切平面与法线方程.

3. 设 $z = e^u \sin v, u = xy, v = x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}.$

4. 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线的方程.

三、计算重积分(每小题6分,共12分)

1. 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 为抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.

2. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域.

四、计算曲线积分与曲面积分（每小题 8 分，共 16 分）

1. 计算曲线积分 $\oint_L (4x - y + 2)dx + (6y + 3x - 5)dy$ ，其中 L 是三顶点分别为 $(0,0)$ ， $(2,0)$ ， $(2,2)$ 的三角形正向边界.

2. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (2x + 3y + z)dS$ ，其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限中的部分.

五、求解下列级数问题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 判断下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

参 考 答 案

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 4

2. $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

3. $p > 1$

4. 0

5. $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin y}{1-y} dx = 1 - \cos 1$

6. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

7. $2(x-2) + 3(y-1) + 2(z-2) = 0$

8. $y^2 + z^2 = 5x$

二、计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. 两端关于 z 求导数得

$$\begin{cases} x_z + 2y_z + 1 = 0 \\ xx_z + yy_z + z = 0 \end{cases}, \quad x_z = \frac{y-2z}{2x-y}, y_z = \frac{z-x}{2x-y}.$$

$$2. \begin{cases} x_t = 1 - \cos t \\ y_t = \sin t \\ z_t = 2 \cos \frac{t}{2} \end{cases}$$

故在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为 $T = (1, 1, \sqrt{2})$ ，法平面方程为 $\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + (y-1) + \sqrt{2}(z-2\sqrt{2}) = 0$.

3. $z_x = z_u u_x + z_v v_x = e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v = e^{xy} (y \sin(x+y) + \cos(x+y))$.

4. $s = n_1 \times n_2 = -(4i + 3j + k)$, 所以直线方程为 $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$

三、计算重积分 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 解

$$\begin{aligned}\iint_D xy d\sigma &= \int_{-1}^2 \left[\int_{y^2}^{y+2} xy dx \right] dy \\ &= \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y^5] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^2 = 5\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

2. 解

$$\begin{aligned}\text{柱面法 } \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho (16 - \rho^4) d\rho = \pi \left[8\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^2 \\ &= \frac{64\pi}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{截面法 } \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^4 z dz \iint_{D_z} 1 d\sigma = \int_0^4 z \pi z dz = \frac{\pi}{3} [z^3]_0^4 = \frac{64\pi}{3}.$$

四、计算曲线积分与曲面积分 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 解 令 $P = 4x - y + 2$, $Q = 6y + 3x - 5$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$,

由格林公式有 $\oint_L (4x - y + 2)dx + (6y + 3x - 5)dy = \iint_D 4 dx dy = 8$.

2. 解

$\Sigma: z = 1 - x - y$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}$, D_{xy} 为 Σ 在 xOy 面上的投影区域, 即由直线 $x = 0$, $y = 0$ 及 $x + y = 1$ 所围成的闭区域. 因此

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (2x + 3y + z) dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} (1 + x + 2y) dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + x + 2y) dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2 - 2x) dx = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

五、求解下列级数问题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. 解

(1) 利用比值判别法

$$\because \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)!]} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

根据比值审敛法, 级数收敛.

(2) 级数为交错级数

令 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $u_n > u_{n+1}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 根据莱布尼兹定理, 级数收敛.

2. 解

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 所以 $R = 1$,

当 $x = \pm 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pm 1)^{n-1} n \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n$ 发散,

所以级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

(2) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = s(x)$, $x \in (-1, 1)$.

因为 $(x^n)' = nx^{n-1}$, 由逐项积分公式有

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x},$$

将等式同时求导得 $s(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$.

高等数学(下)期末考试试卷(二)

试 题

一、填空题(每小题4分,共32分)

1. 函数 $z = x^2 + 2xy$ 的全微分 $dz =$ _____.
2. 由函数取得极值的条件判断 $z = f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在 $(1, 0)$ 点取得_____值.
3. p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当 p _____时级数发散.
4. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$, $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 化为极坐标积分为_____.
5. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - 3)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n =$ _____.
6. 曲线 $x = t, y = 2t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 2, 1)$ 的切线方程为_____.
7. 交换积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx =$ _____.
8. 求两平面 $x - y - 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角_____.

二、计算题(每小题8分,共56分)

1. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 + 2$ 在点 $(1, 1, 4)$ 的切平面及法线方程.
2. $z = \arctan(xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
3. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
4. 计算二重积分 $\iint_D x\sqrt{y} d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y = \sqrt{x}, y = x^2$ 所围成的闭区域.
5. 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.
6. 求 $\int_L (2x - y + 4) dx$, 其中 L 为抛物线 $x = y^2$ 上从起点 $O(0, 0)$ 到终点 $A(1, 1)$ 的有向曲线.
7. 利用高斯公式计算 $\iiint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z - 1) dx dy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 夹在 $z = 0, z = 1$ 之间部分的外侧.

三、求解下列级数问题（每小题 6 分，共 12 分）

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

参 考 答 案

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. $2(x+y)dx + 2xdy$

2. 极小

3. $p \leq 1$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$

5. 3

6. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3}$

7. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$

8. $\frac{\pi}{3}$

二、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

1. 解

$z = x^2 + y^2 + 2$ 在点 (x, y, z) 处的法向量为 $(2x, 2y, -1)$ ，故在点 $(1, 1, 4)$ 的法向量为 $(2, 2, -1)$.

故切平面方程为 $2(x-1) + 2(y-1) - (z-4) = 0$ ，法线方程为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

2. 解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1-(xy)^2}{[1+(xy)^2]^2}.$$

3. 解

两端同时求 x 的导数得 $e^z z_x - y(z + xz_x) = 0$ ，化简得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zy}{e^z - xy}$.

两端同时求 y 的导数得 $e^z z_y - x(z + yz_y) = 0$ ，化简得 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{zx}{e^z - xy}$.

4. 解

积分区域 D 可表示为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iint_D x\sqrt{y} d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y} dy = \frac{6}{55}.$$

5. 解

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} dx dy \int_{x^2 + y^2}^2 (x^2 + y^2) dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^2 r^2 dz \quad (5 \text{ 分}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2r^3 - r^5) dr = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

6. 解

$$\int_L (2x - y + 4) dx = \int_0^1 (2x - \sqrt{x} + 4) dx = \frac{13}{3}.$$

7. 解

加平面 $\Sigma': z=1$, 取上侧, 由高斯公式

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma'} dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy &= \iiint_{\Omega} (1+2+3) dv = 6 \iiint_{\Omega} dv = 6 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = 2\pi, \\ \iint_{\Sigma'} dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy &= \iint_{\Sigma'} 3(z-1) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3(1-1) dx dy = 0,\end{aligned}$$

$$\text{原式} = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

三、求解下列级数问题 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 解

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1, \text{ 所以级数收敛.}$$

2. 解

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} x^2 = x^2 \text{ 知收敛半径为 } 1, \text{ 当则 } |x|=1 \text{ 时, 级数为交错级数, 且满}$$

足莱布尼兹定理的条件, 级数收敛, 所以收敛域为 $[-1, 1]$.

$$\text{令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 求导得 } s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ 所以}$$

$$\int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx, \quad s(x) - s(0) = \arctan x, \text{ 而 } s(0) = 0, \text{ 故 } s(x) = \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

$$\text{可知 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = s(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

参 考 文 献

- [1] 同济大学数学系编. 高等数学习题全解指南(下册). 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [2] 常桂娟等. 高等数学学习指导与习题解答(下册). 北京: 科学出版社, 2014.