高等院校数学课程改革创新系列教材

高等数学（经管数学）（下册）

主　编：孔德斌　韩兆君　刘　婧
副主编：张成学　李高尚　王松坤

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本教材是在建设应用型本科、加强技术技能型人才培养的总体思路下，按照“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，结合多数本专科院校学生基础和教学特点进行编写而成的。

本教材紧紧围绕应用型教学的要求，简化理论论证，增强数学语言的形象生动性，突出经济数学和应用数学特色，便于学生理解、掌握和运用。

内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、级数、常微分方程与差分方程，各节后均配有相应的习题，书末附有参考答案。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类.下册/孔德斌，韩兆君，刘婧主编.--北京：电子工业出版社，2016.6

ISBN 978-7-121-29111-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孔… ②韩… ③刘… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 137443 号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：贺志洪　　　　特约编辑：张晓雪　徐　堃
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：9.25　　字数：236.8 千字
版　　次：2016 年 6 月第 1 版
印　　次：2016 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册　　定　　价：21.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换，若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　言

高等数学是普通高等院校本、专科各专业普遍开设的一门公共基础课，不但是培养学生的思维能力的重要方法，也是学生学习专业课的重要前提，更在培养应用型人才方面起着重要作用。在不断适应国家和社会发展要求的办学过程中，很多高校都将培养高素质的应用型、技能型人才作为学校的办学定位，为适应这一发展要求，经管类专业对基础课程尤其是数学类课程提出了新的要求，在坚持理论完整的情况下，还要保证其应用性、实用性。而目前的多数同类教材理论性过强，应用性较少，基于此种原因，我们组织了多位一线教师，根据多年对不同专业学生讲授该课程所积累的经验，针对应用型人才的培养目标和学生的学习特点编写了本教材。

本教材根据数学与统计学教学指导委员会关于“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，参考各经管类专业对该课程知识点的需求情况编写而成。编写时，我们以教育部的教学大纲为准绳，以专业要求为目标，侧重于必要的理论、全面的知识及在经济中的应用。通过本教材的学习使学生系统地获得微积分、无穷级数和常微分方程的基本知识、基本理论和基本方法，培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力及创新能力，为学习后继课程和专业课程奠定必要的数学基础。更重要的是使学生能运用所掌握的高等数学特有的思维方式和处理问题的思想方法去分析、解决现实世界中的各种实际问题。

本教材叙述深入浅出、结构严谨、知识系统、难度适中、经管应用突出，可读性强，便于教与学，充分体现了经济数学、应用数学的特点，在内容设计方面淡化数学在纯理论方面的教学，增强数学在经济和管理方面的应用教学；在一些数学概念上采用描述性叙述，淡化理论证明，降低概念理解的难度，同时增加部分应用型的例题、习题，使经管类学生能更好地应用数学知识理解专业知识，体现经济数学的应用性。

本教材适合作为普通高等院校经济管理类相关本科专业或对知识面要求较高的专科专业的公共基础课程教材使用，也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书，还可供成教学院或申请升本的专科学校选用。

本教材具有以下特点：

(1) 在满足教学基本要求前提下，紧紧围绕应用型教学的要求，简化理论推导，增强数学语言的形象生动性。

(2) 突出经济数学特色，学术术语多采用经济类语言，改变现有经管类教材中多采用工科体系语言叙述的形式。

(3) 突出应用数学特色，注重应用与理论的统一，增加了数学在经济中应用的例子，培养学生解决实际问题的能力。

(4) 突出基本教学与教学辅导相结合的特色。例题解答详细，使学生能理解解题思路，尽量减少学习障碍，每节均配有适量习题，可以帮助学生巩固所学的有关理论和方法。

全书由烟台南山学院孔德斌统稿定稿。全书在编写过程中得到了渤海大学吕志远教授、山西广播电视大学大同分校王捷副教授的热心指导,提出了具体的意见和建议,我们在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免存在错误或不尽如人意之处,敬请专家和读者不吝批评、赐教。

编　者

2015 年 12 月

目　　录

第 1 章　空间解析几何

平面解析几何的知识对学生学习一元函数微积分是十分重要的. 现若想讨论多元函数微积分,空间解析几何的基础知识就必不可少. 本章在建立空间直角坐标系的基础上,先介绍空间中的点与坐标,然后主要讨论空间中的平面与曲面及其对应的方程.

1.1　空间直角坐标系

1.1.1　空间直角坐标系

过空间中的一个定点 O 作三条两两垂直的数轴 Ox,Oy,Oz,它们具有相同的单位长度,即构成了空间直角坐标系,如图 1-1 所示. 常称 O 为坐标原点,分别称三个轴为 x 轴(或横轴),y 轴(或纵轴),z 轴(或竖轴),统称为坐标轴. 它们的正方向符合右手法则,即以右手的握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正身,如图 1-2 所示.

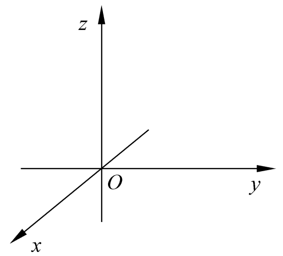

图　1-1

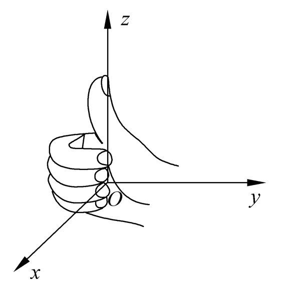

图　1-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标平面,简称坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面记为 xOy 面,x 轴及 z 轴所确定的坐标面记为 xOz 面,y 轴及 z 轴所确定的坐标面记为 yOz 面.

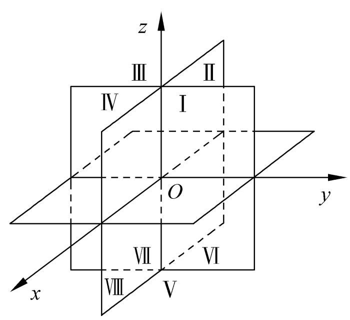

图　1-3

这三个平面将空间划分成 8 个部分,称为空间直角坐标系的 8 个卦限. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限,其他为第二、第三、第四卦限,在 xoy 面的上方,从 z 轴的正方向往下看,按逆时针方向确定. 第五至第八卦限分别在第一至第四卦限的下方,如图 1-3 所示,这 8 个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示.

1.1.2 空间中的点坐标

建立了空间直角坐标系后，如同平面直角坐标系，就可建立空间中的点与三元有序数组的一一对应关系.

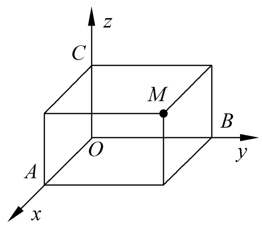

图 1-4

设 M 为空间中的任一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A、B、C 三点，如图 1-4 所示. 若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x_0，y_0，z_0，于是点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x_0, y_0, z_0). 反之，任给一有序数组 (x_0, y_0, z_0)，可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标 x_0，y_0，z_0 为的点 A、B、C，并过 A、B、C 分别作与坐标轴垂直的平面，则它们相交于唯一的点 M. 这样就建立了空间中的点 M 与有序数组 (x_0, y_0, z_0) 之间的一一对应关系. 点 M 在该空间直角坐标系中的坐标，x_0，y_0，z_0 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

坐标轴、坐标面上的点，以及 8 个卦限内部的点，其坐标各有一些数值特征，具体如下

坐标轴：x 轴 $(x_0, 0, 0)$，y 轴 $(0, y_0, 0)$，z 轴 $(0, 0, z_0)$.

坐标面：xOy 面 $(x_0, y_0, 0)$，xOz 面 $(x_0, 0, z_0)$，yOz 面 $(0, y_0, z_0)$.

8 个卦限：Ⅰ(+,+,+)，Ⅱ(−,+,+)，Ⅲ(−,−,+)，Ⅳ(+,−,+)，
Ⅴ(+,+,−)，Ⅵ(−,+,−)，Ⅶ(−,−,−)，Ⅷ(+,−,−).

1.1.3 空间中两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间任意两点，为了求它们之间的距离 $|M_1M_2|$，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 1-5 所示.

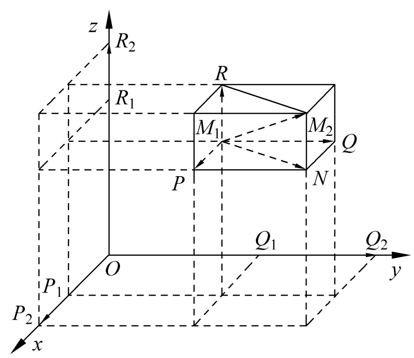

图 1-5

由勾股定理得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, \quad |PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

上式称为空间两点 M_1,M_2 间的距离公式. 特殊地,空间任一点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1.1.1　求 $P_1(1,2,3)$,$P_2(-2,0,1)$ 两点间的距离.

解　$|P_1P_2| = \sqrt{(-2-1)^2+(0-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{17}$.

例 1.1.2　在 xOy 面上求一点 M,使它到 $A(1,-1,5)$,$B(3,4,4)$ 和 $C(4,6,1)$ 各点的距离相等.

解　根据点的特征设 M 的坐标为 $(x,y,0)$,由题意知

$$|MA| = |MB| = |MC|$$

即

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(0-5)^2} &= \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(0-4)^2}\\ &= \sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2+(0-1)^2},\end{aligned}$$

化简可得

$$\begin{cases}4x+10y=14\\ 2x+4y=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=16\\ y=-5\end{cases}$$

所以,所求的 M 点的坐标为 $M(16,-5,0)$.

例 1.1.3　试判定以 $A(3,0,8)$,$B(9,-2,5)$,$C(1,3,2)$ 为顶点的三角形的几何特征.

解　由空间两点间的距离公式,有

$$|AB|^2 = (3-9)^2+(0+2)^2+(8-5)^2 = 49$$
$$|AC|^2 = (3-1)^2+(0-3)^2+(8-2)^2 = 49$$
$$|BC|^2 = (9-1)^2+(-2-3)^2+(5-2)^2 = 98$$

由 $|AB|^2=|AC|^2$,知 $|AB|=|AC|$,因而 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又由于 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$,知 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习题 1-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的位置.

$A(1,2,3)$,$B(0,-1,4)$,$C(-4,-1,-3)$,$D(0,0,2)$,

$E(7,-4,-8)$,$F(6,-5,0)$,$G(0,-3,0)$,$H(-2,3,-5)$.

2. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

3. 在 y 轴上求一点 M,使其到两点 $P(2,0,-1)$,$Q(1,-1,3)$ 的距离相等.

4. 在 yOz 面上求一点,使该点与点 $A(3,0,4)$ 和 $B(3,4,0)$ 的距离相等,且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.

5. 试证明以 $A(-3,2,-7)$,$B(2,2,-3)$,$C(-3,6,-2)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

6. 已知三角形的三个顶点为 $A(1,2,3)$,$B(7,10,3)$,$C(-1,3,1)$,证明$\angle A$ 为钝角.

1.2 曲面及其方程

同平面解析几何一样,空间中的线和面也可以看做是满足一定条件的点的集合.为了便于识记,本节只介绍空间直角坐标系中最简单的曲面——平面和一些常见的曲面.

1.2.1 平面及其方程

在平面直角坐标系中,我们知道 $x=a$,$y=b$ 分别表示垂直于 x 轴与 y 轴的两条直线.现在空间直角坐标系中,我们也不难推出 $x=a$,$y=b$,$z=c$ 分别表示垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面.

可见,在平面方程中,x,y,z 三个量的最高次数只能取一次.在此,我们直接给出空间平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

是一个三元一次方程.其中从原点 O 到由 x,y,z 的系数组成的点 $P(A,B,C)$的向量$\overrightarrow{OP}$,称为该平面的法向量(即垂直于该平面的非零向量),记为$\overrightarrow{OP}=\{A,B,C\}$.

根据平面的一般方程中系数 A,B,C,D 是等于零,可知其方程所表示的平面有如下特点:

当 $D=0$ 时,即 $Ax+By+Cz=0$,表示一个过坐标原点的平面;

当 $A=0$ 时,即 $By+Cz+D=0$,法向量$\{0,B,C\}$垂直于 x 轴,表示一个平行与 x 轴的平面,也与 yOz 坐标面垂直;

当 $A=D=0$ 时,即 $By+Cz=0$,表示一个过 x 轴的平面,与 yOz 坐标的垂直;

当 $A=B=0$ 时,即 $Cz+D=0$,法向量$\{0,B,C\}$同时垂直于 x 轴和 y 轴,表示一个垂直与 z 轴的平面,也与 xOy 坐标面平行.

同样可以讨论其他系数为零的情况,这里不再一一叙述.特殊地,若已知某平面过点 $M(x_0,y_0,z_0)$,则 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ 成立,与一般式相减可得过点 $M(x_0,y_0,z_0)$的平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

其中 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$,同时也称上式为过点 $M(x_0,y_0,z_0)$的平面的点法式方程,法向量为$\{A,B,C\}$.

例 1.2.1 求过点 $M_0(1,-2,3)$,且以$\{2,-3,4\}$为法向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程,所求平面的方程为

$$2(x-1)-3(y+2)+4(z-3)=0$$

即

$$2x-3y+4z-20=0.$$

例 1.2.2 求平行于 y 轴,且过点 $M_1(1,-5,1)$和 $M_2(3,2,-2)$的平面方程.

解 根据平面平行于 y 轴,可设平面方程为 $Ax+Cz+D=0$.又由平面过点 $M_1(1,-5,1)$和 $M_2(3,2,-2)$,从而有

$$\begin{cases}A+C+D=0\\3A-2C+D=0\end{cases}$$

解之得，$A=\frac{3}{2}C$，$D=\frac{5}{2}C$. 代入方程，整理得所求平面方程为

$$3x+2z-5=0$$

例 1.2.3　设平面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$，求此平面的方程.

解　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 因为三点 P,Q,R 都在平面上，代入方程得

$$\begin{cases} Aa+D=0 \\ Bb+D=0 \\ Cc+D=0 \end{cases}$$

解之得，$A=-\frac{D}{a}$，$B=-\frac{D}{b}$，$C=-\frac{D}{c}$.

代入方程，整理得所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

由于 a,b,c 为平面在三个坐标轴上的截距，故上述方程也称为平面的截距式方程.

1.2.2　曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

与平面解析几何中曲线方程的定义相仿，可以定义空间曲面的方程.

定义 1.2.1　如果曲面 S(如图 1-6 所示)与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$；

那么，方程 $F(x,y,z)=0$ 就称为曲面 S 的方程，而曲面 S 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

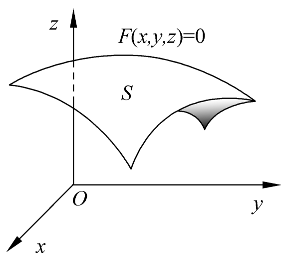

图　1-6

在空间解析几何中，任何曲面都可以看做点的几何轨迹. 因此，在研究曲面时，在曲面与方程之间存在下面两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

(2) 已知坐标 x、y 和 z 间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

例 1.2.4　建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 是球面上的任一点，那么 M 到定点 M_0 的长度 $|M_0M|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,\quad 或(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程.而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程.所以

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

就是球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

特殊地,球心在原点 $O(0,0,0)$、半径为 R 的球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例 1.2.5 求到点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 距离相等的点的轨迹方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点,则有 $|AM|=|BM|$,即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

等式两边平方,然后化简得

$$2x-6y+2z-7=0$$

这就是点的轨迹方程,由前面的讨论知它是一个平面,称为线段 AB 的垂直平分面.

例 1.2.6 断定方程 $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ 表示怎样的曲面?

解 通过配方,原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=16$$

与例 1.2.4 比较,可知这是一个球面方程,球心在点 $(1,-3,2)$,半径为 $R=4$.

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面,这条定直线称为旋转曲面的轴,曲线称为旋转曲面的母线.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C,它的方程为 $f(y,z)=0$,把这曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面,如图 1-7 所示.

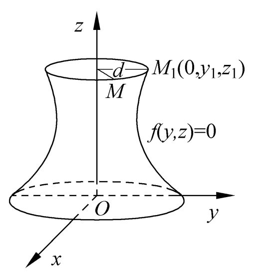

图 1-7

为了求出它的方程,在该旋转曲面上任取一点 $M(x,y,z)$,它是曲线 C 上点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转而得到的,则有 M_1 点坐标满足方程 $f(y,z)=0$,即 $f(y_1,z_1)=0$,这时 $z=z_1$ 保持不变,且点 M 到 z 轴的距离与点 M_1 到 z 轴的距离相等,$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$,即 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.将

$$\begin{cases} z_1=z \\ y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

代入方程 $f(y_1,z_1)=0$,从而得该旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

由此可知，在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

另外，将 xoy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 中的 x 改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，便得到该圆绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$，它表示球心在原点、半径为 R 的球面.

例 1.2.7　求直线 $\begin{cases} z=ay \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解　因为要求要绕 z 轴旋转，z 保持不变，将方程中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得所求的旋转曲面的方程

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2}\quad 或\quad z^2=a^2(x^2+y^2)$$

它所表示的曲面称为圆锥面，如图 1-8 所示.

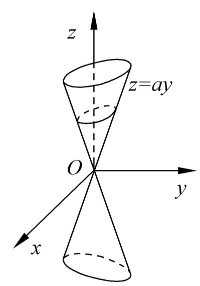

图　1-8

3. 柱面

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所生成的曲面称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线.

现在来建立以 xOy 坐标面上的曲线 C：$F(x,y)=0$ 为准线，平行于 z 轴的直线 L 为母线的柱面方程(见图 1-9).

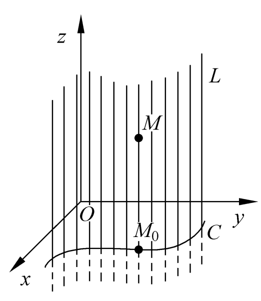

图　1-9

设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点，过 M 点作平行于 z 轴的直线交 xOy 坐标面于点 $M_0(x,y,0)$，由柱面定义可知 M_0 必在准线 C 上，所以点 M_0 的坐标满足曲线 C 的方程 F

$(x,y)=0$. 由于方程 $F(x,y)=0$ 不含 z,所以点 $M(x,y,z)$ 也满足方程 $F(x,y)=0$. 而过不在柱面上的点作平行于 z 轴的直线与 xOy 坐标面的交点必不在曲线 C 上,也就是说不在柱面上的点的坐标不满足方程 $F(x,y)=0$,所以不含变量 z 的方程

$$F(x,y)=0$$

在空间直角坐标系中,表示以 xOy 坐标面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面.

同理可知,只含 x、z 而缺 y 的方程 $F(x,z)=0$,表示母线平行于 y 轴的柱面,其准线是 xOz 坐标面上的曲线 C:$F(x,z)=0$.

类似地,只含 y、z 而缺 x 的方程 $G(y,z)=0$,表示母线平行于 x 轴的柱面,其准线是 yOz 坐标面上的曲线 C:$G(y,z)=0$.

例如,方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴,其准线为 xoy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 的柱面,如图 1-10 所示,称为圆柱面.

方程 $x^2=2pz$ $(p>0)$ 表示母线平行于 y 轴,准线是 xoz 坐标面上的抛物线 $x^2=2pz$ 的柱面,如图 1-11 所示,称为抛物柱面.

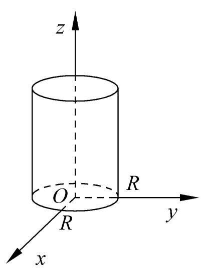

图 1-10

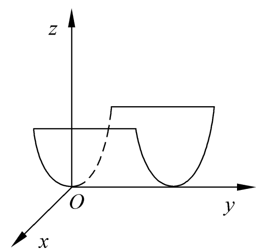

图 1-11

同理,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面,如图 1-12 所示.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的双曲柱面,如图 1-13 所示.

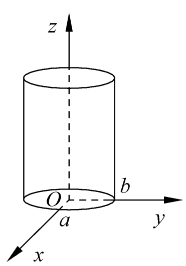

图 1-12

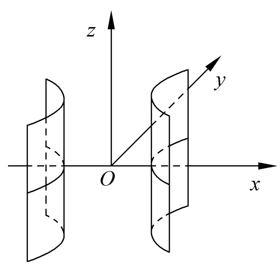

图 1-13

4. 其他常见的二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似,我们把三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面. 把平面称为一次曲面. 为了研究方程所表示的曲面的形状,通常采用截痕法,也就是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截,考察它们的截痕(即交线)的形状,进而

了解曲面的全貌.

(1) 椭球面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$所表示的曲面称为椭球面,如图 1-14 所示,$a,b,c$ 称为椭球面的三个半轴.

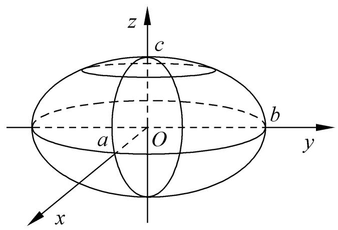

图　1-14

椭球面与三个坐标面的截痕分别是三个椭圆:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

同样方法,用平面 $x=x_1(|x_1|<a)$,$y=y_1(|y_1|<b)$,$z=z_1(|z_1|<c)$分别去截椭球面,可知截痕均为椭圆,且椭圆截面的大小随着远离原点越来越小.

椭球面有以下两种特殊情况:

① 当 $a=b$ 时,此时方程为$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,称为旋转椭球面.可以看成由 xOz 坐标面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.用 $z=z_1(|z_1|<c)$去截旋转椭球面时,得到的截痕是圆.

② 当 $a=b=c$ 时,方程变成$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$,这是球面方程,亦可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(2) 抛物面

由方程$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$($p$ 与 q 同号)所示的曲面称为椭圆抛物面,如图 1-15 所示.

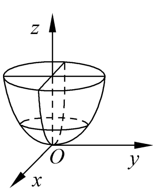

图　1-15

用平面 $z=z_1$ 去截曲面,可知截痕为椭圆$\frac{x^2}{2pz_1}+\frac{y^2}{2qz_1}=1$.且当 z_1 与 p、q 同号时,$|z_1|$越大,椭圆越大;当 $z_1=0$ 时,截痕缩为一点;当 z_1 与 p、q 异号时,没有截痕.

如果 $p=q$,则方程变为$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$,这种抛物面可以看做是由 xoz 坐标面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面,称为旋转抛物面.

由方程$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$($p$ 与 q 同号)所示的曲面称为双曲抛物面,也称为马鞍面.用平面 $x=x_1$,$y=y_1$ 去截曲面,所得截痕为抛物线,用平面 $z=z_1$ 去截曲面所得截痕为双曲线,它的形状如图 1-16 所示.

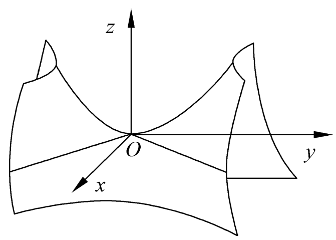

图 1-16

(3) 单叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为单叶双曲面,如图 1-17 所示,中心轴在 z 轴上.

容易看出,用平面 $z=z_1$ 去截曲面所得的截痕为椭圆,且$|z_1|$越大,椭圆越大.用平面 $x=x_1$,$y=y_1$ 去截曲面,所得截痕均为双曲线.

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面也是单叶双曲面,只不过中心轴分别在 y 轴和 z 轴.

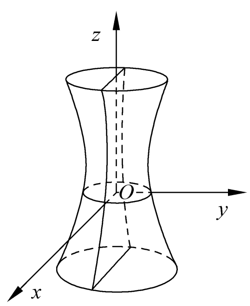

图 1-17

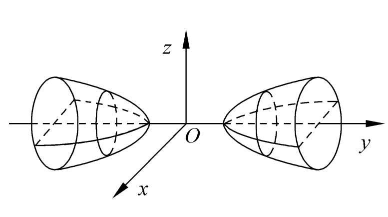

图 1-18

（4）双叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$所表示的曲面称为双叶双曲面，如图 1-18 所示，中心轴在 y 轴上.

容易看出，用平面 $x=x_1$，$z=z_1$ 去截曲面所得的截痕均为双曲线，且$|z_1|$越大，椭圆越大. 用平面 $y=y_1$（$|y_1|>b$）去截曲面，所得截痕为椭圆.

类似地，由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$和$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$所表示的曲面也是双叶双曲面，只不过中心轴分别在 z 轴和 x 轴.

习题 1-2

1. 指出下列各平面的特殊位置

（1）$x=0$；　（2）$2y-1=0$；　（3）$3x-2y-5=0$；

（4）$x-\sqrt{3}y=0$；　（5）$y+3z=0$；　（6）$x-6z=0$.

2. 求过 z 轴和点 $M(-3,1,-2)$的平面方程.

3. 求过三点 $M_1(2,0,-1)$，$M_2(-1,-1,1)$，$M_3(-3,-2,1)$的平面方程.

4. 求过点 $M(3,0,-1)$，且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

5. 求过原点和点 $M(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的平面方程.

6. 建立以点$(2,4,-4)$为球心且通过坐标原点的球面方程.

7. 将 xOz 坐标面上的抛物线$z^2=5x$绕x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

8. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

第 2 章　多元函数的微分及其应用

在工程技术和经济管理的许多实际问题中，往往牵涉到多方面的因素，遇到依赖于多个自变量的函数，这种函数统称为多元函数. 本章将在一元函数微分学的基础上，介绍多元函数微分学的相关内容，重点讨论二元函数的偏导数、全微分及其简单应用.

2.1　多元函数的基本概念

我们已经学习的一元函数是建立在实数集 R 上的，为了将一元函数微分推广到多元函数，首先要将有关概念推广到平面和空间上来.

2.1.1　点集和邻域

由平面解析几何知道，平面上的点与有序二元实数组(x,y)之间建立了一一对应关系. 平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记作

$$E = \{(x,y) \mid (x,y)\text{ 具有性质 } P\}$$

例如，我们用 R^2 表示平面上所有点的集合，即 $R^2=\{(x,y)|x\in R, y\in R\}$.

现在我们引入 R^2 中邻域的概念.

为了给出平面中邻域的概念，我们首先定义平面中任意两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离为

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

定义 2.1.1　设 $P_0(x_0,y_0)$是 xOy 面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$距离小于 δ 的点 $P(x,y)$的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

也就是

$$U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

邻域的几何意义是：$U(P_0,\delta)$表示 xOy 面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为中心，δ 为半径的圆的内部(不包含圆周)的点 $P(x,y)$的全体.

点 P_0 的去心 δ 邻域，记为$\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$$

或

$$\mathring{U}(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid 0 < \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta\}$$

如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$表示点 P_0 的某个邻域，$\mathring{U}(P_0)$表示点 P_0 的去心邻域.

由一条或几条光滑曲线所围成的平面点集称为区域. 围成区域的曲线称为区域的边

界，包括边界在内的区域称为闭区域，否则称为开区域.

例如，在平面上，平面点集

$$\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$$

为一长方形域或开长方形域；

点集

$$\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$$

为以 $P_0(x_0,y_0)$为圆心、r 为半径的圆域或开圆域.

类似地，我们还可以定义三维空间 $R^3=\{(x,y,z)\mid x\in R,y\in R,z\in R\}$，$R^3$ 中的元素与空间中的点一一对应. 一般地，称 $R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$为 n 维空间，并且可以将平面中距离和邻域的定义，推广到 n 维空间中. 这里不作一一介绍.

2.1.2　多元函数的概念

在很多自然现象及其实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，进而形成了多元函数. 多元函数是一元函数的推广，因此它保留着一元函数的许多性质. 但也由于变量由一个增加到多个，产生了某些新的内容。对于多元函数，我们着重讨论二元函数，下面先给出二元函数的定义.

定义 2.1.2　设 D 为 R^2 中的非空子集，如果对于任意一点 $P(x,y)\in D$，按照某一对应法则 f，都有唯一确定的实数值 z 与之对应，则称 z 为变量 x，y 的二元函数，记为

$$z=f(x,y)\quad 或\quad z=f(P)$$

其中 x，y 称为自变量，z 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，$\{f(x,y)\mid(x,y)\in D\}$称为函数的值域，记为 R_f.

同理，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$以及 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

一般地，求二元函数的定义域，就是要找使函数有意义的自变量所确定的范围，这与一元函数的定义域求法类似.

例 2.1.1　试确定下列函数的定义域.

(1) $z=\dfrac{1}{x+y}$　　(2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$　　(3) $z=\ln xy$

解　(1) 要使函数有意义，则需要满足分母 $x+y\neq 0$，即定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$$

(2) 要使函数有意义，则需要满足 $4-x^2-y^2\geqslant 0$，即定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$$

(3) 要使函数有意义，则需要满足 $xy>0$，即定义域为

$$D=\{(x,y)\mid xy>0\}$$

2.1.3　多元函数的极限

与一元函数极限概念类似，二元函数的极限也是反映函数值随自变量变化的趋势.

定义 2.1.3　设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义(点 P_0 可以除

外),点 $P(x,y)$是点 P_0 邻域内不同于 P_0 的任意一点,如果 $P(x,y)$以任意方式无限趋近于 $P_0(x_0,y_0)$,相应的函数值 $f(x,y)$也无限接近于一个常数 A,则称 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时,函数 $z=f(x,y)$以 A 为极限,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限叫做二重极限.

注意:二重极限的存在,是指点 $P(x,y)$以任意方式无限趋近于 $P_0(x_0,y_0)$时,总有 $f(x,y)\to A$.当 $P(x,y)$沿着某些特殊路线趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,即使都有 $f(x,y)\to A$,也不能断定极限存在.但是,如果 $P(x,y)$沿某些不同路线趋于 $P_0(x_0,y_0)$时,$f(x,y)$趋于不同的数,则二重极限必不存在.

例 2.1.2 证明二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,当$(x,y)\to(0,0)$时 $f(x,y)$的极限不存在.

解 当(x,y)沿着 x 轴趋近$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

当(x,y)沿着 y 轴趋近$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

虽然点(x,y)以上述两种特殊方式即沿 x 轴和 y 轴趋近$(0,0)$时,函数的极限存在且相等,但是当$(x,y)\to(0,0)$时 $f(x,y)$的极限并不存在,因为当点(x,y)沿 $y=kx$ 趋于点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

明显,当点(x,y)沿 $y=kx$ 趋于点$(0,0)$时,$f(x,y)$的极限随着 k 的变化而不同,故极限不存在.

例 2.1.3 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$不存在.

证明 取 $y=kx^3$,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}$$

极限值随着 k 的不同而变化,故极限不存在.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上去.

关于多元函数的极限计算,有与一元函数类似的运算法则.例如,一元函数极限的四则运算法则、夹逼定理、重要极限、无穷小替换等基本法则,对于二元函数的极限都是成立的.

例 2.1.4 求$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$.

解　由极限运算法则,有

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot x$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{x\to 2}x=2$$

例 2.1.5　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为

$$0\leqslant\left|y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|y|$$

当 $y\to 0$ 时,$|y|\to 0$,所以由夹逼定理,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\sin\frac{1}{x}=0$$

2.1.4　多元函数的连续性

与一元函数的连续类似,不难说明多元函数的连续性.

定义 2.1.4　设二元函数 $z=f(x,y)$的定义域为区域 D,且点 $P_0(x_0,y_0)\in D$,如果对任意$(x,y)\in D$,有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$连续或点 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$的连续点,否则称点 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$的间断点.

如果函数 $f(x,y)$在区域 D 内的每一点都连续,那么就称 $f(x,y)$在 D 上连续,或者称函数 $f(x,y)$是 D 上的连续函数.

与一元连续函数的运算性质类似,二元连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)还是连续函数,二元连续函数的复合函数还是连续函数.

与一元初等函数类似,一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.如果需要求函数 $f(x,y)$在一点(x_0,y_0)处的极限,而(x_0,y_0)在函数 $f(x,y)$的定义区域内,则极限值就是函数在点(x_0,y_0)的函数值.

例 2.1.6　讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在平面上的连续性.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$是初等函数,故在其定义域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$内连续.由例 2.1.2 知,函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$在$(0,0)$处极限不存在,所以 $f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

例 2.1.7　求$\lim\limits_{(x,y)\to(-2,3)}\dfrac{2x+y-1}{x^2y}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{2x+y-1}{x^2y}$是初等函数,它的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$$

又由于点$(-2,3)\in D$,因此

$$\lim_{(x,y)\to(-2,3)}\frac{2x+y-1}{x^2y}=f(-2,3)=-\frac{1}{6}$$

例 2.1.8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{5xy}$

解 将分子有理化得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{5xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(\sqrt{xy+1}-1\right)\left(1+\sqrt{xy+1}\right)}{5xy\left(1+\sqrt{xy+1}\right)}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{5\left(1+\sqrt{xy+1}\right)}$$

函数$\dfrac{1}{5\left(1+\sqrt{xy+1}\right)}$是初等函数,点$(0,0)$是它定义域内的点,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{5xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{5\left(1+\sqrt{xy+1}\right)}$$
$$=f(0,0)=\frac{1}{10}$$

与闭区间上一元函数的性质相似,在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 1(有界性定理) 如果函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上有界.

性质 2(最值定理) 如果函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上一定能取得最大值和最小值.

性质 3(介值定理) 如果函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,M 与 m 分别是 $f(x,y)$在 D 上的最大值和最小值,则对于介于 M 与 m 之间的任意常数C,在 D 中至少存在一点(ξ,η),使 $f(\xi,\eta)=C$.

性质 4(零点存在定理) 如果函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,且在 D 中两点(x_1,y_1),(x_2,y_2)取值异号,则在 D 中至少存在一点(ξ,η),使 $f(\xi,\eta)=0$.

习题 2-1

1. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$,求 $f(1,2)$,$f(x,2x)$,$f(y,-x)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\dfrac{y}{x}$; (2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

(3) $z=\ln(y^2-2x+1)$; (4) $z=\arcsin(x^2+y^2)$;

(5) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}$ $(R>r)$.

3. 证明二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,当$(x,y)\to(0,0)$时,极限不存在.

4. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的连续性.

5. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2-2y}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\dfrac{1}{y}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2e^{x^2+y^2}}$.

2.2 偏导数

对一元函数 $f(x)$，讨论了它关于自变量 x 的导数，也就是 $f(x)$ 关于 x 的变化率. 对于多元函数同样需要讨论它的变化率，但由于多元函数的自变量不止一个，常常需要考虑各个方向的变化率. 在这一节中，我们首先研究其中一个自变量变化，而其余自变量不变的情形.

2.2.1 偏导数的定义及其计算

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定（即看做常量），这时它就是 x 的一元函数，对 x 的导数就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对于 x 的偏导数，即有如下定义.

定义 2.2.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ f_x(x_0,y_0)$$

类似地，如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ f_y(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x（或 y）的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x、y 的函数，称为对 x（或 y）的偏导函数，简称为偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x,f_x \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y,f_y.$$

由偏导数的定义可知,求多元函数的偏导实际上还是求一元函数的导数问题,只须求偏导时将自变量中的被求偏导数者看成变量,其余的看成常量,此时用一元函数的求导公式和运算法则计算.

偏导数的概念可以推广到二元以上函数,这里不作介绍.

例 2.2.1 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点(1,2)处的偏导数.

解 把 y 看成常量,对 x 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$$

把 x 看成常量,对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$$

将(1,2)代入上面的结果,就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times1+3\times2=8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\times1+2\times2=7$$

例 2.2.2 求 $z=1+\ln(x^2+y^2)$在点(1,4)处的偏导数.

解 把 y 看成常量,对 x 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

把 x 看成常量,对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

将(1,4)代入上面的结果,就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=4}}=\frac{2\times1}{1^2+4^2}=\frac{2}{17},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=4}}=\frac{2\times4}{1^2+4^2}=\frac{8}{17}$$

例 2.2.3 求 $z=x^2\sin2y$ 的偏导数.

解 把 y 看成常量,对 x 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin2y$$

把 x 看成常量,对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos2y$$

例 2.2.4 求 $z=xe^{\frac{y}{x}}$,证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

证明 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\ \frac{1}{x}=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$$

代入整理，得到

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)+y\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=z$$

在以前的学习中知道，一元函数在某点有导数，那么该导数就是函数所表示的曲线在对应点的切线的斜率. 由此可以推出，二元函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 的偏导数有下述几何意义：

$z=f(x,y)$ 的图形是空间中的一张曲面，设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$，截此曲面得一曲线，此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$，则导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\big|_{x=x_0}$，即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，就是这曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率(见图 2-1). 同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义就是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

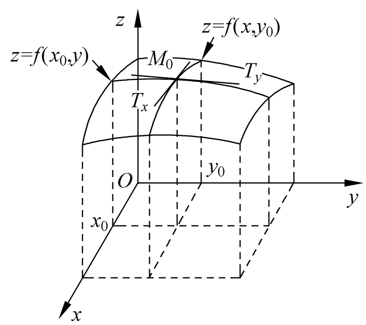

图　2-1

我们已经知道，如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续. 但对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续. 这是因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$，但不能保证点 P 按任意方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$.

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处对 x 的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

同理，在点(0,0)处对 y 的偏导数为

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

可得，$f(x,y)$ 在(0,0)处的两个偏导数都存在. 但是

当 (x,y) 沿着直线 $y=kx$ 趋于(0,0)时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2} = 0$$

当(x,y)沿着抛物线 $y=x^2$ 趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

所以，函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$在$(0,0)$处极限不存在，所以 $f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

当然，由函数 $f(x,y)$在某点处连续也不能保证它在这点的偏导数存在.

例如，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点$(0,0)$处连续，但在点$(0,0)$处的两个偏导数

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{不存在；}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}\text{不存在}$$

可见，二元函数与一元函数不同，其连续性与可导性之间没有必然的联系.

2.2.2　高阶偏导数

设二元函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y)$$

那么在 D 内 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$都是 x、y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同，有下列 4 个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

其中第二、第三两个偏导数称为混合偏导数. 同样可得三阶、四阶、…，以及 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 2.2.5　求 $z=2x^3y-3xy^2+1$ 的二阶偏导数.

解　先求一阶偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y-3y^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3-6xy$$

再求二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y-3y^2) = 12xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y-3y^2) = 6x^2-6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 - 6xy) = 6x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - 6xy) = -6x$$

例 2.2.6　求 $z=e^{xy}$ 的二阶偏导数.

解　先求一阶偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

再求二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 ye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

从上面例子可以看到，两个混合偏导数相等，即$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$，也就是说混合偏导数与自变量求导的次序无关. 这不是偶然的，事实上，在一定的条件下，这两个混合偏导数是相等的，对此有下面的定理：

定理 2.2.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$均在区域 D 上连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

证明略。

本定理表明，在二阶混合偏导数连续的条件下，二阶混合偏导数与先对 x 还是先对 y 求导的顺序无关. 这个结论对高阶混合偏导数也成立.

对于二元以上的函数，也可以类似地定义高阶偏导数.

习题 2-2

1. 求下列函数的偏导数.

(1) $z=x^2y$；　　(2) $z=y\cos x$；

(3) $z=e^{x+y}$；　　(4) $z=\ln(x+y^2)$；

(5) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(6) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；

(7) $z=(1+xy)^y$；　　(8) $z=\sin xy+\cos^2 xy$；

(9) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(10) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. 求函数 $z=x^3y-xy^3$ 在点(1,2)处的偏导数.

3. 设函数 $z=e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f_x(\pi,0)$，$f_y\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 设函数 $z=\ln(x^2+xy+y^2)$,求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 已知 $xyz=1$,求证$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1$.

6. 求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

(2) $z=\sin(ax+by)$;

(3) $z=y^x$;

(4) $z=e^{xy}\cos y$;

(5) $z=\arcsin(xy)$;

(6) $z=x\ln(x+y)$;

(7) $z=\sqrt{y^2+2xy}$.

7. 设函数 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,证明$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

8. 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

2.3 全　微　分

上节所讲的偏导数,是在只有一个自变量变化时函数相对于该自变量的变化率.但在实际问题中,有时需要讨论当自变量都发生变化时,相应的函数改变量与它的所有自变量的改变量之间的依赖关系.这就需要讨论多元函数全微分的概念.下面以二元函数为例进行讨论.

2.3.1 全微分的定义及计算

定义 2.3.1 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义,当自变量 x 在 x_0 处取得改变量 Δx,而自变量 $y=y_0$ 保持不变,函数相应的改变量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$关于 x 的偏增量.

类似地,函数 $z=f(x,y)$关于 y 的偏增量为

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

当自变量 x,y 分别在 x_0,y_0 取得改变量 $\Delta x,\Delta y$ 时,函数 $z=f(x,y)$相应的改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$的全增量.

在一元函数 $y=f(x)$中,y 对 x 的微分 dy 是自变量改变量 Δx 的线性函数.与一元函数的情形一样,我们希望用自变量的增量 Δx、Δy 的线性函数来近似地代替函数的全增量 Δz.

定义 2.3.2 设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义,如果函数在点(x,y)的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy，而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记做 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称该函数在 D 内可微分.

与一元函数类似，二元函数 $z=f(x,y)$ 在某点可微分与连续之间也有一定的联系.

定理 2.3.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则函数在该点一定连续。

证　因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，即

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\end{aligned}$$

所以，当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，有 $\Delta z\to 0$，即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x,y)+\Delta z] = f(x,y)$$

故函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续.

定理 2.3.2(可微的必要条件)　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，即有

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy，而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，因为 Δx、Δy 是任意改变量，当 $\Delta y=0$ 时也应成立，这时，

$$\rho = |\Delta x|,\quad \Delta z = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

将等式两边同除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$ 取极限，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right) = A\end{aligned}$$

所以，偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且 $A=\frac{\partial z}{\partial x}$.

同理，可得 $B=\frac{\partial z}{\partial y}$. 因此，有 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. 证毕.

值得注意的是，二元函数偏导数的存在性只是可微的必要条件，但不是充分条件. 例如，函数

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处虽然有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$，但对于

$$\Delta z - [f_x(0,0)\cdot\Delta x + f_y(0,0)\cdot\Delta y] = \frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

如果考虑点 $P'(\Delta x,\Delta y)$沿着直线 $y=x$ 趋于(0,0),则

$$\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}$$

它不能随 $\rho\to0$ 而趋于 0,这表示 $\rho\to0$ 时,

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]$$

并不是较 ρ 高阶的无穷小,因此函数在点(0,0)处的全微分并不存在,即函数在点(0,0)处是不可微的.

可见,对于二元函数而言,偏导数存在是可微的必要条件而不是充分条件,这与一元函数是不同的.如何保证二元函数可微,这就需要我们把条件再加强一些.下面给出二元函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微分的充分条件.

定理 2.3.3(**可微的充分条件**) 如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的某一邻域内有连续的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$,则函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微分.

证 因为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\end{aligned}$$

由于$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$的某一邻域内存在,由拉格朗日中值定理得

$$\Delta z=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$.

又由于$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续,所以有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)=f_x(x,y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}f_y(x,y+\theta_2\Delta y)=f_y(x,y)$$

因而

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

其中当 $\Delta x\to0,\Delta y\to0$ 时,$\alpha\to0,\beta\to0$.

再由

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\rho}&=\frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\&\leqslant\frac{|\alpha||\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+\frac{|\beta||\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant|\alpha|+|\beta|\end{aligned}$$

可知,当 $\Delta x\to0,\Delta y\to0$ 时,$\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ 是 ρ 的高阶无穷小量.于是,函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微分.

习惯上,将自变量 x,y 的增量 $\Delta x,\Delta y$ 分别记为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$,并分别称为自变量 x,y 的微分.这样,函数 $z=f(x,y)$的全微分就可以写为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

以上关于二元函数全微分的定义及可微条件，可以类似地推广到三元和三元以上多元函数. 例如，若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，则它的全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例 2.3.1　求函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2,-1)$ 处，当 $\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$ 时的全增量和全微分.

解　由定义知，全增量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=(2+0.02)^2(-1-0.01)^2-2^2\times(-1)^2=0.1624\end{aligned}$$

函数 $z=x^2y^2$ 的两个偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y$$

且它们都连续，又

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,-1)}=4,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,-1)}=-8$$

所以函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2,-1)$ 处的全微分为

$$\mathrm{d}z=4\times0.02+(-8)\times(-0.01)=0.16$$

例 2.3.2　求函数 $z=x^3y-xy^3$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$$

且它们都连续，又

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=-11,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=-5$$

所以

$$\mathrm{d}z=-2\mathrm{d}x-11\mathrm{d}y$$

例 2.3.3　求函数 $z=\sin(x+y)+\mathrm{e}^{xy}$ 的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x+y)+y\mathrm{e}^{xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x+y)+x\mathrm{e}^{xy}$$

且它们都连续，所以

$$\mathrm{d}z=(\cos(x+y)+y\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x+(\cos(x+y)+x\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}y$$

例 2.3.4　求函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

且它们都连续,所以

$$dz=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)$$

2.3.2 全微分在近似计算中的应用

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,则函数的全增量与全微分之差是一个比 ρ 高阶的无穷小,因此当 $|\Delta x|$,$|\Delta y|$ 都比较小时,全增量可以近似地用全微分代替,即

$$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

又因为

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

所以有

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

例 2.3.5 利用全微分的近似计算 $(0.98)^{2.03}$ 的值.

解 设函数 $z=f(x,y)=x^y$,取 $x=1,y=2,\Delta x=-0.02,\Delta y=0.03$,又因为

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

由公式

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

可得

$$\begin{aligned}f(0.98,2.03)&\approx f(1,2)+f_x(1,2)(-0.02)+f_y(1,2)\times 0.03\\&=1+2\times(-0.02)+0\times 0.03=0.96\end{aligned}$$

所以 $(0.98)^{2.03}\approx 0.96$.

习题 2-3

1. 求下列函数的全微分.

(1) $z=x^3-y^3+3xy$; (2) $z=y\sin(x+y)$;

(3) $z=xy^x$; (4) $z=\sqrt{1+\dfrac{x}{y}}$;

(5) $z=\arctan(xy)$; (6) $z=x\ln(xy)$;

(7) $u=\cos(xyz)$; (8) $u=e^{xy+z}$;

(9) $u=\ln(3x-2y+z)$; (10) $u=e^{x^2+y^2+z^2}$.

2. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$,当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=0.2$ 时的全增量和全微分.

3. 求函数 $z=e^{xy}$,当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

4. 求函数 $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(0,1)$ 处的全微分.

5. 已知函数 $z=\ln(x^2+y^2+1)$，求其在 $x=1,y=2$ 时的全微分.

6. 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但在此点不可微.

7. 利用全微分的近似计算$(1.98)^{1.05}$的值.

2.4　多元复合函数的求导法则

现在要将一元函数微分学中复合函数的求导法则推广到多元复合函数的情形，以二元函数为例说明，分成以下三种情形进行讨论.

2.4.1　复合函数的中间变量均为一元函数的情形

定理 2.4.1　如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

证明　当 t 取得增量 Δt 时，u、v 及 z 相应地也取得增量 Δu、Δv 及 Δz. 由 $z=f(u,v)$、$u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 的可微性，有

$$\begin{aligned}\Delta z&=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Delta t+o(\Delta t)\right]+\frac{\partial z}{\partial v}\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Delta t+o(\Delta t)\right]+o(\rho)\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\Delta t+\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)o(\Delta t)+o(\rho)\end{aligned}$$

等式两边同除以 Δt，可得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t\to 0$，上式两边取极限，即得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

注：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}\cdot\dfrac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\Delta t}=0\cdot\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}=0.$

推广：设 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，$w=\omega(t)$，则 $z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 对 t 的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

上述$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$称为全导数.

例 2.4.1 设 $z=u^2v+uv^2$，$u=\mathrm{e}^t$，$v=\sin t$，求全导数$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 本题是中间变量是一元函数的情形，应用全导数公式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=(2uv+v^2)\cdot\mathrm{e}^t+(u^2+2uv)\cdot\cos t\\&=(2\mathrm{e}^t\sin t+\sin^2 t)\cdot\mathrm{e}^t+(\mathrm{e}^{2t}+2\mathrm{e}^t\sin t)\cdot\cos t\end{aligned}$$

2.4.2 复合函数的中间变量均为多元函数的情形

定理 2.4.2 如果函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$都在点(x,y)具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$在对应点具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

以上两式统称为求复(u,v)合函数偏导数的链式法则.

推广：如果函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=\omega(x,y)$都在点(x,y)具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

例 2.4.2 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，$u=x^2+y^2$，$v=xy$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 应用链式法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}&=\mathrm{e}^u\sin v\cdot 2x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot y\\&=\mathrm{e}^{x^2+y^2}[2x\sin(xy)+y\cos(xy)]\\\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}&=\mathrm{e}^u\sin v\cdot 2y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot x\\&=\mathrm{e}^{x^2+y^2}[2y\sin(xy)+x\cos(xy)]\end{aligned}$$

2.4.3 复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形

定理 2.4.3 如果函数 $u=\varphi(x,y)$在点(x,y)具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $v=\psi(y)$在点 y 可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

例 2.4.3　设 $z=e^u+v, u=x-y, v=y^3$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解　本题是中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形，应用公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=e^u\cdot 1=e^{x-y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}=e^u\cdot(-1)+1\cdot 3y^2=-e^{x-y}+3y^2$$

2.4.4　复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量的情形

定理 2.4.4　如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $z=f(u,x,y)$ 在对应点 (x,y) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

值得注意的是，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 中的 y 看做不变而对 x 的偏导数；而 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 则是把复合函数 $z=f(u,x,y)$ 中的 u 及 y 看做不变而对 x 的偏导数；$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的区别与上述相同.

例 2.4.4　设 $z=f(u,x,y)=u^2\cdot\ln(xy)$，其中 $u=\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解　本题是中间变量本身又是复合函数的自变量的情形，应用公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=2u\cdot\ln(xy)\cdot\frac{1}{y}+u^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{y^2}(2\ln xy+1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}=2u\cdot\ln(xy)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+u^2\cdot\frac{1}{y}=\frac{x^2}{y^3}(-2\ln xy+1)$$

例 2.4.5　设 $z=f(2x-y, y\sin x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　令 $u=2x-y, v=y\sin x$，则 $z=f(u,v)$. 我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}2+\frac{\partial f}{\partial v}y\cos x=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\&=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\\&=2\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\\&=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\cos x\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

为表达方便,也可以记 $f_1'=\frac{\partial f}{\partial u}, f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}, f_{11}''=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, f_{12}''=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}, f_{21}''=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}, f_{22}''=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$,所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+y\cos x\sin x\cdot f_{22}''+\cos x\cdot f_2'$$

习题 2-4

1. 设 $z=u^2+uv+v^2, u=t^2, v=t$,求全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

2. 设 $z=\frac{y}{x}, x=\mathrm{e}^t, y=1-\mathrm{e}^{2t}$,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

3. 设 $z=\arcsin(x-y), x=3t, y=4t^3$,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

4. 设 $z=\arctan(xy), y=\mathrm{e}^x$,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

5. 设 $z=\frac{u}{v}, u=1+x^2y, v=\sin x$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $z=uv+\sin t, u=\mathrm{e}^t, v=\cos t$,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

7. 设 $z=u^2v-uv^2, u=x\cos y, v=x\sin y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. 设 $z=\frac{u^2}{v}, u=x-2y, v=2x+y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

9. 设 $z=x^2\ln y, x=\frac{u}{v}, y=3u-2v$,求$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$.

10. 设 $z=\ln(u^2+v), u=\mathrm{e}^{x+y^2}, v=x^2+y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

11. 设 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$,其中 f 具有一阶连续的偏导数,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

12. 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续的偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2.5 隐函数的求导公式

一元函数微分学中,已经研究了一元隐函数的求导方法. 与一元隐函数类似,多元隐函数也是由方程来确定的函数. 例如,由方程 $F(x,y,z)=0$ 可确定出 z 是 x,y 的二元函数. 现在根据多元复合函数的求导法则得到隐函数的一般求导公式.

隐函数求导法则Ⅰ 设函数 $F(x,y)$具有连续的偏导数且$\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$,由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的具有连续导数的隐函数 $y=f(x)$,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

现仅就公式作如下推导.

将 $y=f(x)$ 代入方程 $F(x,y)=0$，得恒等式 $F[x,f(x)]=0$，方程两端分别对 x 求导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

当 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x}{F_y}$$

例 2.5.1　已知 $\sin y+xy^2\mathrm{e}^x=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　令 $F(x,y)=\sin y+xy^2\mathrm{e}^x$，则

$$F_x=y^2\mathrm{e}^x+xy^2\mathrm{e}^x,$$
$$F_y=\cos y+2xy\mathrm{e}^x$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y^2\mathrm{e}^x+xy^2\mathrm{e}^x}{\cos y+2xy\mathrm{e}^x}$$

例 2.5.2　已知 $xy+\ln xy=1$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　令 $F(x,y)=xy+\ln xy-1$，则

$$F_x=y+\frac{1}{x},$$

$$F_y=x+\frac{1}{y},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y}{x}$$

隐函数求导法则Ⅱ　设函数 $F(x,y,z)$ 具有连续的偏导数且 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$，由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续导数的隐函数 $z=f(x,y)$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

与隐函数求导法则Ⅰ类似，仅就公式作如下推导.

将 $z=f(x,y)$ 代入方程 $F(x,y,z)=0$，得恒等式 $F[x,y,f(x,y)]=0$，方程两端分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

因为$\dfrac{\partial F}{\partial z}$连续且$\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$时,可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例 2.5.3 求由方程 $e^z=xyz$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数.

解 令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$,分别对 x、y 和 z 求偏导数得

$$F_x=-yz,\quad F_y=-xz,\quad F_z=e^z-xy$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy}$$

例 2.5.4 设 $z=f(x,y)$是由方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 所确定的,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$,分别对 x、y 和 z 求偏导数得

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z-4$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{x}{2-z}\right)'_x=\frac{2-z-x\left(-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(2-z)^2}=\frac{x^2+(2-z)^2}{(2-z)^3}$$

例 2.5.5 设 $z=f(xz,z-y)$,且 $f(u,v)$具有连续的一阶偏导数,求 dz.

解 令 $F(x,y,z)=f(xz,z-y)-z$,分别对 x、y 和 z 求偏导数得

$$F_x=f_u z,\quad F_y=-f_v,\quad F_z=f_u x+f_v-1$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{f_u z}{f_u x+f_v-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{f_v}{f_u x+f_v-1}$$

从而

$$dz=-\frac{f_u z}{f_u x+f_v-1}dx+\frac{f_v}{f_u x+f_v-1}dy$$

习题 2-5

1. 设 $x\sin y+ye^x=0$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

2. 设 $y-xe^y+2x=0$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

3. 设 $xy^2=\cos y+ye^x$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

4. 设 $xy=\ln(x+y)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

5. 求由方程 $e^{xy}-4z+e^z=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数.

6. 求由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数.

7. 求由方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数.

8. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数.

9. 求由方程 $xy+z\ln y+e^{xz}=1$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数.

10. 求由方程 $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$所确定的函数 $z=f(x,y)$的一阶、二阶偏导数.

2.6　多元函数的极值及其求法

我们可以利用导数求得某些一元函数的极值，从而进一步求得一些实际问题中的最大值和最小值. 在多元函数中也有类似的问题，本节着重讨论二元函数的情形.

2.6.1　多元函数的极值

类似于一元函数，先给出二元函数极值的定义.

定义 2.6.1　设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，对于该邻域内异于点(x_0,y_0)的(x,y)，都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\quad(\text{或 } f(x,y)>f(x_0,y_0))$$

则称函数在点(x_0,y_0)有极大(小)值 $f(x_0,y_0)$，或称(x_0,y_0)为函数 $f(x,y)$的极大(小)值点.

极大值和极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点.

例 2.6.1　设函数 $f(x,y)=2x^2+3y^2$，$g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$h(x,y)=xy$，讨论原点(0,0)是不是它们的极值点.

解　因为在点(0,0)附近任意其他点(x,y)都有 $f(x,y)=2x^2+3y^2>f(0,0)=0$，由定义可知，原点(0,0)是 $f(x,y)$的极小值点；

点(0,0)附近任意其他点(x,y)都有 $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}<g(0,0)=1$，由定义可知，原点是 $g(x,y)$的极(0,0)大值点；

在点(0,0)的任何邻域内，对于 $h(x,y)=xy$，当 x、y 同号时，$h(x,y)>0$；当 x、y 异号时，$h(x,y)<0$；又 $h(0,0)=0$，因此 $h(0,0)$既不是极大值，也不是极小值.

以上关于二元函数的极值概念，可推广到 n 元函数.

与一元函数的极值类似，先给出二元函数取得极值的必要条件.

定理 2.6.1(必要条件)　设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$$

证明略.

使 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x_0,y_0) 称为函数的驻点. 由定理可知, 具有偏导数的函数的极值点必定是驻点, 但函数的驻点不一定是极值点. 例如, 点 $(0,0)$ 是函数 $z=xy$ 的驻点, 但不是极值点.

下面给出判定极值的充分条件.

定理 2.6.2(**充分条件**) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续, 有一阶及二阶连续偏导数, $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$, 令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C$, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下:

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时, 具有极值, 且当 $A<0$ 时有极大值, 当 $A>0$ 时有极小值;

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时, 没有极值;

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时, 可能有极值, 也可能没有极值, 还需另作讨论.

证明略.

综上所述, 把函数 $z=f(x,y)$ 极值的求法归纳如下:

(1) 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$, 求出所有驻点;

(2) 求 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数;

(3) 对于每一个驻点 (x_0,y_0), 求出二阶偏导数的值 A, B, C, 确定 $AC-B^2$ 的符号, 判定每一个驻点是否是极值点, 最后求得极值.

例 2.6.2 求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

解 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$,

先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-3y=0 \\ f_y(x,y)=3y^2-3x=0 \end{cases}$$

求得驻点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$,

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x,\quad f_{xy}(x,y)=-3,\quad f_{yy}(x,y)=6y$$

在点 $(0,0)$ 处,

$$A=f_{xx}(0,0)=0,\quad B=f_{xy}(0,0)=-3,\quad C=f_{yy}(0,0)=0$$

因此

$$AC-B^2=-9<0$$

所以, 点 $(0,0)$ 不是函数的极值点;

在点 $(1,1)$ 处,

$$A=f_{xx}(1,1)=6,\quad B=f_{xy}(1,1)=-3,\quad C=f_{yy}(1,1)=6$$

因此

$$AC-B^2=27>0$$

所以, 点 $(1,1)$ 是函数的极值点, 又因为 $A=6>0$, 所以 $(1,1)$ 是极小值点, 且极小值为 $f(1,1)=-1$.

2.6.2　条件极值　拉格朗日乘数法

在讨论极值问题过程中，如果自变量在定义域内任意取值，未受任何条件限制，通常称为无条件极值. 如果对自变量的取值附加一定的约束条件，则称为条件极值. 条件极值问题的约束条件有等式和不等式两类，这里仅讨论约束条件为等式的情形.

下面以二元函数为例，求函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，同时介绍求此类条件极值的常用方法——拉格朗日乘数法. 一般步骤如下：

(1) 构造辅助函数(称为拉格朗日函数)

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

其中 λ 为待定常数，称为拉格朗日乘数. 将原条件极值问题化成了求三元函数 $L(x,y,\lambda)$ 的无条件极值问题.

(2) 求三元函数 $L(x,y,\lambda)$ 对 x、y 和 λ 的偏导数，并令它们都为零，即得方程组

$$\begin{cases}L_x(x,y,\lambda)=0\\L_y(x,y,\lambda)=0\\L_\lambda(x,y,\lambda)=0\end{cases}$$

得出可能的极值点 (x_0,y_0) 和乘数 λ.

(3) 判别求出的点 (x_0,y_0) 是否为极值点，一般可由具体问题的实际意义来判定.

例 2.6.3　用拉格朗日乘数法求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

解　设长方体的三棱长为 x,y 和 z，则问题是在条件

$$\varphi(x,y)=2xy+2yz+2xz-a^2=0$$

下，求函数 $V=xyz$ 的最大值.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$$

求其对 x,y,z 和 λ 的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases}yz+2\lambda(y+z)=0\\xz+2\lambda(x+z)=0\\xy+2\lambda(y+x)=0\\2xy+2yz+2xz-a^2=0\end{cases}$$

解得 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$.

这是唯一可能的极值点，因为由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得，也就是说，表面积为 a^2 的长方体中，以棱长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积最大.

例 2.6.4　某公司为促销一种新产品，计划在电视台和报纸上做广告，设报纸和电视上的广告费用分别为 x 百万元和 y 百万元，根据统计资料，销售收入 R 百万元与 x,y 之间有下面关系

$$R(x,y)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-1.5)$$

该公司决定投入 150 万元做广告，应该怎样分配两种方式的广告费用，可获最大利润(即

求相应的最优广告策略)?

解 根据题意可知这是一个条件极值问题:求在约束条件 $x+y=1.5$ 下利润函数的最大值.

构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned}L(x,y,\lambda)&=R(x,y)-(x+y)+\lambda(x+y-1.5)\\&=15+13x+31y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-1.5)\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases}L_x(x,y,\lambda)=-4x-8y+13+\lambda=0\\L_y(x,y,\lambda)=-20y-8x+31+\lambda=0\\L_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-1.5=0\end{cases}$$

得驻点(0,1.5).由于驻点唯一,根据问题的实际意义可知(0,1.5)是极大值点,也是最大值点,即将150万元的广告费用都用于电视广告,可获得最大利润.

2.6.3 函数的最大值和最小值

在一元函数中我们讨论了闭区间上连续函数的最大值和最小值,与之类似,若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取得最大值和最小值.这里不详细介绍,下面着重讨论实际问题中的最值问题.

对于实际问题中的最大值或最小值,往往根据问题本身能够判定它在其定义域内一定有最大值和最小值,如果函数在其定义域内有唯一的驻点,则该点的函数值就是所求的最值.下面我们给出一般步骤:

(1) 根据实际问题建立函数关系式,确定其定义域;

(2) 求出驻点;

(3) 结合问题的实际意义判定并求出最大值或最小值.

例 2.6.5 用钢板做一个容积为 8m^3 的长方体有盖容器,若不计钢板的厚度,问长、宽、高分别为多少时,才能使用料最省?

解 设长、宽分别为 x,y,则此时高为$\dfrac{8}{xy}$,于是所用材料的面积为

$$S=2\left(xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}\right),\quad(x>0,y>0)$$

解方程组

$$\begin{cases}S_x=2\left(y-\dfrac{8}{x^2}\right)\\S_y=2\left(x-\dfrac{8}{y^2}\right)\end{cases}$$

得驻点(2,2).由于驻点唯一,根据问题的实际意义,可知在该驻点处面积可取最小值.此时高为2m,故当长、宽、高都为2m时,可使用料最省.

习题 2-6

1. 求函数 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

2. 求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极值.

3. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

4. 若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点$(1,-1)$处取得极值,求常数 a 的值.

5. 求函数 $z=xy$ 在条件 $x+y=1$ 下的极值.

6. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在条件$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 下的极值.

7. 要造一个容积为定值 a 的长方体无盖水池,应如何选择水池的尺度,方可使它的表面积最小.

8. 某工厂生产甲、乙两种型号的机床,其产量分别为 x 台和 y 台,成本函数为

$$C(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

(1) 若这两种机床的售价分别为 4 万元和 5 万元,这两种机床产量分别为多少时利润最大?

(2) 若市场调查分析,两种机床共需要 8 台,求如何安排生产,总成本最小?最小成本是多少?

9. 某企业生产两种产品,产量分别为 q_1 件和 q_2 件,总成本函数为

$$C(q_1,q_2) = 5q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2 + 80$$

若两种产品共生产 39 件,问每种产品生产多少时,可使总成本最小?

第3章　重　积　分

在一元函数积分学中，我们认识到定积分是某种确定形式的和的极限，把这种形式的和的极限推广到多元函数中，就得到了重积分的概念.本章将重点介绍二重积分的概念、性质、计算和应用，并对三重积分作简要叙述.

3.1　二 重 积 分

3.1.1　二重积分的概念

与定积分概念讨论类似，先看两个引例.

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体，如图3-1所示，它的底是 xOy 面上的闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)$，这里 $f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续.这种立体称为曲顶柱体.现在来讨论它的体积.

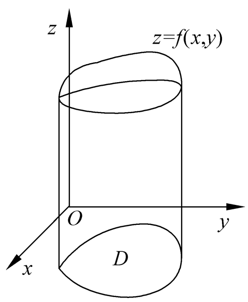

图　3-1

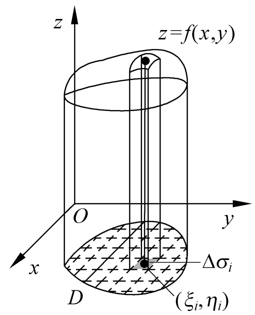

图　3-2

平顶柱体的高是不变的，它的体积可以用公式

$$\text{体积} = \text{底面积} \times \text{积高}$$

来计算.关于曲顶柱体，当点 (x,y) 在闭区域 D 上变动时，高 $f(x,y)$ 是个变量，因此它的体积不能直接用上式来算.我们利用第1章中求曲边梯形面积的方法来计算曲顶柱体的体积 V.

(1) 分割

用一组平面曲线网把 D 分成 n 个闭小区域：

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

分别以这些小闭区域的边界曲线为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面把原来的曲顶柱体分成 n 个细曲顶柱体，如图3-2所示.为了方便，$\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小闭区域，

也代表的它的面积.

（2）近似

在每个 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$中任取一点$(\xi_i,\eta_i)$，以 $f(\xi_i,\eta_i)$为高，$\Delta\sigma_i$ 为底的平顶柱体的体积近似代替第 i 个细曲顶柱体的体积 ΔV_i，即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

（3）求和

将 n 个细平顶柱体加起来，得到的和作为曲顶柱体体积的近似值，即

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

（4）取极限

记所有小区域直径（指区域上任意两点间距离的最大者）中的最大值为 λ，当 $\lambda\to 0$ 时，分割加密，上面和式就可以无限接近曲顶柱体的体积 V，即

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，它在点(x,y)处的面密度为 $\rho(x,y)$，这里 $\rho(x,y)>0$ 且在 D 上连续. 下面计算该薄片的质量 M.

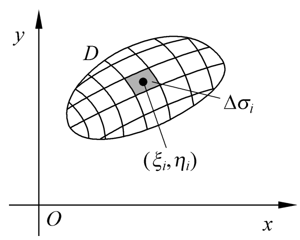

图　3-3

用一组平面曲线网把 D 分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 个小块薄片，也代表的它的面积，如图 3-3 所示.

把各小块近似地看做均匀薄片，在 $\Delta\sigma_i$ 中任取一点(ξ_i,η_i)，得每个小块薄片的质量近似值

$$\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

将各小块质量近似值求和作为平面薄片质量的近似值

$$M \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

将分割加细，取极限，得到平面薄片的质量

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 λ 是各个小区域直径中的最大值.

3. 二重积分的定义

上面两个问题的实际意义虽然不同,但所求量都归结为同一形式的和的极限.在科学领域中,有许多物理量或几何量都可归结为这一形式的和的极限.因此,数学家将这类和式的极限抽象出下述二重积分的定义.

定义 3.1.1 设 $f(x,y)$是有界闭区域 D 上的有界函数.将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

其中,$\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域,也表示它的面积.在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点(ξ_i,η_i),并作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时,这和式的极限总存在,则称此极限为函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上的二重积分,记做$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

式中,$f(x,y)$称为被积函数,$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式,$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素,x,y 称为积分变量,D 称为积分区域,$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为积分和.

由二重积分的定义可知,前面的两个例子可表示如下.

- 曲顶柱体的体积 V 是函数 f (x,y)在区域 D 上的二重积分

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

- 平面薄片的质量 M 是它的面密度 ρ(x,y)在薄片所占闭区域 D 上的二重积分

$$M=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

在二重积分的定义中对闭区域 D 的划分是任意的,如果在直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网来划分 D,那么除了包含边界点的一些小闭区域外,其余的小闭区域都是矩形闭区域.设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_i 和 Δy_i,则 $\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$,因此在直角坐标系中,有时也把面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 记做 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,而把二重积分记做

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中,$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

二重积分的存在性:当 $f(x,y)$在闭区域 D 上连续时,极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 是存在的,也就是说函数 $f(x,y)$在 D 上的二重积分必定存在.后面我们总假定所涉及二重积分的被积函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上连续.

二重积分的几何意义:

(1) 在闭区域 D 上,当函数 $f(x,y)\geqslant 0$ 时,以 D 为底,$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体

位于 xOy 坐标面的上方，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示该曲顶柱体的体积.

(2) 当 $f(x,y)\leqslant 0$ 时，曲顶柱体位于 xOy 坐标面的下方，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值是负的，它的绝对值表示该曲顶柱体的体积.

(3) 当 $f(x,y)$ 在 D 的某部分为正，而在其他部分为负时，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示在各部分区域上的曲顶柱体体积的代数和(xOy 坐标面上方的曲顶柱体体积之和减去 xOy 坐标面下方的曲顶柱体体积).

3.1.2 二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可知，二重积分与定积分有类似的性质，叙述如下.

性质 1 函数和(或差)的二重积分等于各函数二重积分的和(或差)，即

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 2 被积函数中的常数因子可以提到积分号的前面，即

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 3 若有界闭区域 D 由两个闭区域 D_1,D_2 合并而成(D_1,D_2 除了边界以外无交点)，$f(x,y)$ 是区域 D 上可积函数，则 $f(x,y)$ 在 D_1 与 D_2 上可积，并且 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分等于 $f(x,y)$ 在这两个区域 D_1 与 D_2 上的二重积分的和，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这个性质叫做二重积分对于积分区域的可加性.

性质 4 如果在有界闭区域 D 上 $f(x,y)\equiv 1$，D 面积记为 σ，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\sigma$$

性质 5 设函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 都在有界闭区域 D 上可积，且有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

特殊地，由于 $-|f(x,y)|\leqslant f(x,y)\leqslant|f(x,y)|$，则有

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

性质 6 (估值定理)设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的可积函数，在 D 上的最大值、最小值分别是 M 和 m，σ 为 D 的面积，则有

$$m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\sigma$$

性质 7 (二重积分的中值定理)设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

证明 由于 $f(x,y)$是有界闭区域 D 上的连续函数,所以有最大值 M 和最小值 m.所以

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$$

若 $\sigma=0$,结论显然成立,当 $\sigma\neq 0$ 时,

$$m \leqslant \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M$$

由于数值$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$在函数的最大值和最小值之间,由有界闭区域上连续函数的介值定理得,至少存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

即
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma.$$

例 3.1.1 设 D 是圆环域:$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,试估计$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$的值.

解 在 D 上,$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,而 D 的面积$\sigma=4\pi-\pi=3\pi$.由性质 6(估值定理),得

$$3\pi \leqslant \iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma \leqslant 12\pi$$

习题 3-1

1. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小

(1) $\iint_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$与$\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

(2) $\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$与$\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 D 是由圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成;

(3) $\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$与$\iint_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

2. 根据二重积分的性质,估计下列积分的值

(1) $I=\iint_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(2) $I=\iint_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

3.2 二重积分的计算

很显然，用其定义来计算二重积分是非常复杂的，这一节我们来讨论如何进行二重积分的计算，采用的方法是把二重积分化为两次定积分来计算.

3.2.1 利用直角坐标计算二重积分

根据二重积分的几何意义，当被积函数 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于 xOy 坐标面上的曲顶柱体的体积. 下面利用求“平行截面面积已知的立体的体积”的方法来计算这曲顶柱体的体积，从而推出二重积分的计算公式.

1. 积分区域 *X*-型区域

设积分区域 D 是 xOy 坐标面上的一个有界闭区域，如果 D 可用不等式组：

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)$$

来表示，如图 3-4 所示，则称 D 为 X-型区域. 其特点是：过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界一般最多交于两点.

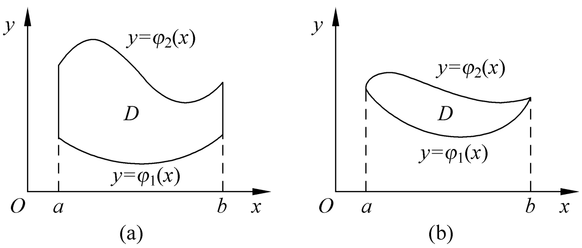

图 3-4

在区间$[a,b]$上任意取一点 x，过点$(x,0,0)$作平行于 yOz 坐标面的平面，如图 3-5 所示. 此平面截曲顶柱体得一曲边梯形，其面积 $A(x)$可用定积分计算如下（积分时把 x 看做常数）：

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

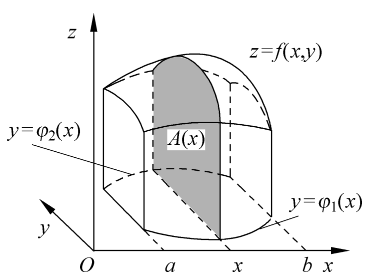

图 3-5

于是,得曲顶柱体的体积 V 为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

因此

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

上式右端的积分实际上是积分了两次,称为先对 y 后对 x 的二次积分(或叫累次积分).就是说,先把 x 看做常数,把 $f(x,y)$只看做 y 的函数,并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$到 $\varphi_2(x)$的定积分.然后,把算得的结果(是 x 的函数)再对 x 计算在区间$[a,b]$上的定积分.该二次积分也常记做 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$,即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 积分区域 *Y*-型区域

如果积分区域 D 可用不等式组:

$$c\leqslant y\leqslant d,\quad \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$$

来表示,如图 3-6 所示,则称 D 为 Y-型区域.其特点是:过 D 内部且平行于x 轴的直线与 D 的边界一般最多交于两点.

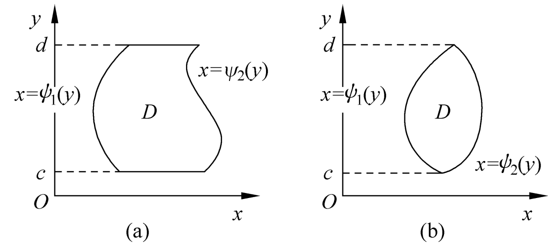

图 3-6

类似于 X-型区域上二重积分的讨论,可得 Y-型区域上二重积分的计算公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

上式右端的积分也积分了两次,称为先对 x 后对 y 的二次积分(或叫累次积分).

例 3.2.1 计算$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $y=1$,$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解 解法 1 画出区域 D,如图 3-7 所示.把 D 看成 X-型区域:

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,1\leqslant y\leqslant x\}$$

于是

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{9}{8}$$

解法 2 如图 3-8 所示,把 D 看成 Y-型区域:

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant 2\}$$

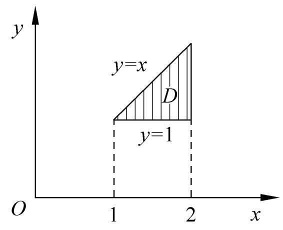

图　3-7

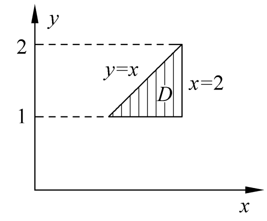

图　3-8

于是

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\frac{y^3}{2}\right]\mathrm{d}y=\left[y^2-\frac{y^4}{8}\right]_1^2=\frac{9}{8}$$

在例 3.2.1 的计算中,可以看出积分次序的改变对其计算过程没什么影响.但在一些情况下,采用不同的积分次序,会对计算过程带来不同的难易影响.因此,在二重积分化为二次积分计算时,选择恰当的积分次序,确定积分的上、下限,十分重要.在这里我们给出其计算步骤:

(1) 画出积分区域;

(2) 最好选择积分区域的上下(或左右)边界线各只由一个解析式组成(即只由一条曲线或直线构成)的情况,确定积分次序,给出表示 X-型区域或 Y - 型区域的不等式组;

(3) 根据公式,按积分次序将二重积分化为二次积分进行计算.

例 3.2.2　计算 $\iint_D(x+y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=2x$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解　画出区域 D,如图 3-9 所示.考虑边界各只有一条直线构成的情况,把积分区域看成 Y-型区域,可表示为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\}$$

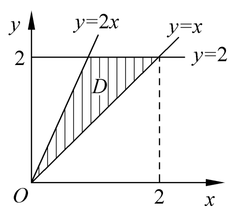

图　3-9

于是

$$\iint_D(x+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\left[\frac{1}{2}y^3+\frac{3}{8}y^2\right]\mathrm{d}y=\left[\frac{y^4}{8}+\frac{y^3}{8}\right]_0^2=3$$

若将积分区域看成 X-型区域,则该区域必须分割,则 $D=D_1+D_2$,其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 2x\},\quad D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2\}$$

这样,由积分区域的可加性得下面的计算式

$$\iint_D (x+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{2x}(x+y^2)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 (x+y^2)\mathrm{d}y$$

由例 3.2.2 我们知道,若被积函数对 x,y 的原函数都易求时,积分次序由积分区域决定,尽量不分割;若积分区域表示为 X-型或 Y-型区域时,都不必分割,则积分次序就由被积函数决定,从原函数好求的开始.

例 3.2.3 计算$\iint\limits_D xy\cos xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$0\leqslant y\leqslant 2$ 所确定的长方形区域.

解 由于两个积分变量都介于两个常数之间,故积分次序由被积函数决定.选择先对 y 积分,采用凑微分法即可求出原函数,于是

$$\iint_D xy\cos xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2 xy\cos xy^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xy^2\Big|_0^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 4x\mathrm{d}x = 0$$

例 3.2.4 计算$\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是直线 $y=x$ 与抛物线 $x=y^2$ 所围成的区域.

解 画出区域 D,如图 3-10 所示.显然,该积分区域视为 X-型或 Y-型区域都不必分割,因对 y 的原函数不易求,故选择先对 x 后对 y 的积分次序.把积分区域看成 Y-型区域,可表示为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, y^2\leqslant x\leqslant y\}$$

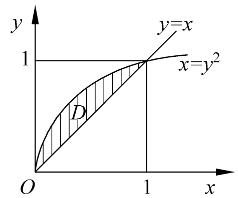

图 3-10

于是

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1\sin y\mathrm{d}y - \int_0^1 y\sin y\mathrm{d}y\\ &= -\cos y\Big|_0^1 + \int_0^1 y\mathrm{d}\cos y = (1-\cos 1) + y\cos y\Big|_0^1 + \int_0^1\cos y\mathrm{d}y\\ &= 1-\cos 1+\cos 1-\sin 1 = 1-\sin 1\end{aligned}$$

例 3.2.5 交换二次积分 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$ 的积分次序,并求其值.

解 由二次积分可知,与它对应的积分区域是 X-型区域,如图 3-11 所示,

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 1\}$$

交换积分次序后的 Y-型区域可表示为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\}$$

于是

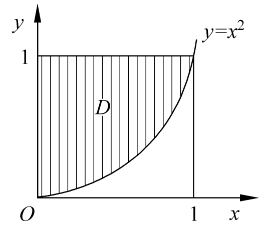

图　3-11

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$$

3. 积分区域为混合型区域

如果积分区域 D 如图 3-12 所示，存在穿过 D 内部且平行于 x 轴和 y 轴的直线与 D 的边界相交多于两点，即积分区域 D 既不是 X-型区域又不是 Y-型区域. 对于这种情况，我们可以把 D 分成几个部分，使得每个部分是 X-型区域或者 Y-型区域. 例如在图 3-12 中把 D 分成三个部分，$D=D_1+D_2+D_3$，其中 D_2，D_3 是 X-型区域，D_1 既是 X-型又是 Y-型区域. 计算该区域上的二重积分就得利用积分区域的可加性，求三个二次积分的和.

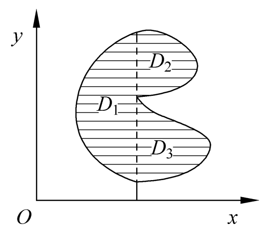

图　3-12

例 3.2.6　计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$x=2y$ 和 $x+y=3$ 所围成的三角形区域.

解　积分区域如图 3-13 所示，因为该区域 D 的上边界和右边界都是由两条直线构成的，所以必须分割. 直线 $x=2y$ 与 $x+y=3$ 的交点(1,2)作 y 轴的平行线将 D 分为 D_1，D_2 两个区域，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x\},\quad D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x\}$$

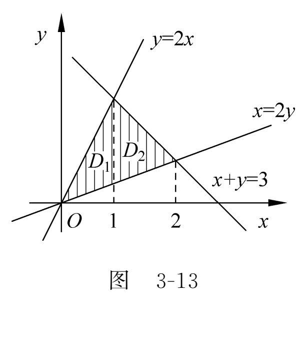

图　3-13

于是

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(3 - x - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{4}x^2 \Big|_0^1 + \left(3x - \frac{3}{4}x^2\right)_1^2 = \frac{3}{2}$$

3.2.2 利用极坐标计算二重积分

上面我们用直角坐标计算二重积分,但是,有些二重积分的积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程表示更加方便,且被积函数用极坐标变量 ρ,θ 表示比较简单.这时,我们就可以考虑用极坐标来计算二重积$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

在直角坐标系中以原点为极点、以 x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,假定从极点 O 出发的直线与区域 D 的边界点至多交于两点.我们用以极点为圆心,半径为 ρ 的一簇同心圆和从极点出发与极轴夹角为 θ 的一簇射线,θ(常数),如图 3-14 所示,将区域 D 分成 n 个小闭区域 σ_i,$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$分别为它们的面积,$\lambda$ 是所有小区域中直径的最大值,在每个小区域 σ_i 中任意取一点(x_i,y_i).我们知道,由二重积分的定义有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta\sigma$$

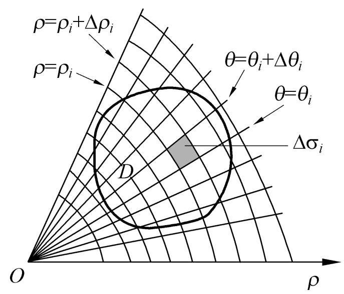

图 3-14

下面我们研究如何转化为极坐标形式.任意一个小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 可以如下计算:

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

$$= \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta\rho_i)}{2}\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \overline{\rho_i} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

其中,$\overline{\rho_i}$表示小闭区域 σ_i 边界所在的两个相邻圆弧 $\rho=\rho_i$ 和 $\rho=\rho_i+\Delta\rho_i$ 的半径的平均值,在小闭区域 σ_i 上取 $\rho=\overline{\rho_i}$上的一点$(\overline{\rho_i},\overline{\theta_i})$,我们令该点的直角坐标为$(x_i,y_i)$.于是,我们有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\overline{\rho_i}\cos\overline{\theta_i},\overline{\rho_i}\sin\overline{\theta_i})\,\overline{\rho_i} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

这就是二重积分的变量从直角坐标换成极坐标的变换公式. 其中 $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ 称为极坐标系下的面积元素.

极坐标系下的二重积分同样可以化为二次积分来计算.

- 极点 O 在区域 D 的外部,如图 3-15 所示,积分区域 D 可以表示为

$$D=\{(\rho,\theta)\mid \rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$$

则此时化二次积分为

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

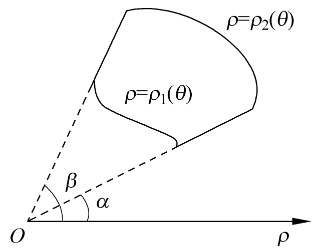

图　3-15

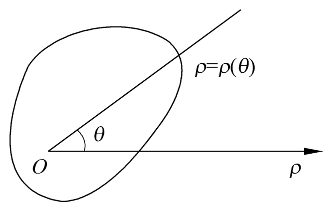

图　3-16

- 极点 O 在区域 D 的内部,如图 3-16 所示,积分区域 D 可以表示为

$$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

则此时化二次积分为

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

- 极点 O 在区域 D 的边界上,如图 3-17 所示,积分区域 D 可以表示为

$$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$$

则此时化二次积分为

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

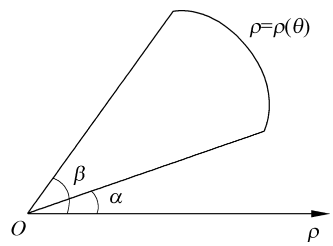

图　3-17

例 3.2.7　求二重积分 $\iint_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,其中区域 D 是由 $x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 所

围成的.

解　在极坐标系下,积分区域 D(图 3-18)可用表示为:

$$0\leqslant\rho\leqslant1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

于是

$$\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\rho^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$$

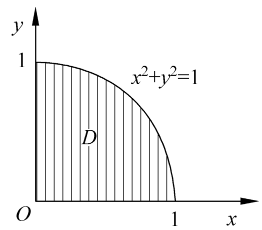

图　3-18

例 3.2.8　计算$\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D 是由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及 x 轴所围成的区域.

解　在极坐标系下,积分区域 D(图 3-19)可表示为:

$$0\leqslant\rho\leqslant2\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

于是

$$\iint_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{4-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

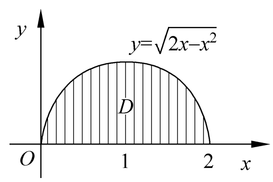

图　3-19

例 3.2.9　计算二重积分$\iint\limits_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中区域 D 为圆 $x^2+y^2=a^2(a>0)$的内部.

解　用极坐标计算,积分区域可以表示为:$0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\rho\leqslant a$,所以,

$$\iint_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=-\pi\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big|_0^a=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2})$$

利用$\iint\limits_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2})$可以来计算广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

设 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant0,y\geqslant0\}$,$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2R^2,x\geqslant0,y\geqslant0\}$,

$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant y\leqslant R\}$，显然有 $D_1\subset S\subset D_2$. 由于 $e^{-x^2-y^2}>0$，则

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant \iint_{S} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

又因为

$$I=\iint_{S} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^R e^{-x^2}\,dx\int_0^R e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2;$$

$$I_1=\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2});$$

$$I_2=\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

所以上面的不等式可写成

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})<\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2<\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

当 $R\to+\infty$ 时，$I_1\to\dfrac{\pi}{4}$，$I_2\to\dfrac{\pi}{4}$. 故当 $R\to+\infty$ 时，$I\to\dfrac{\pi}{4}$，即 $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2=\dfrac{\pi}{4}$，故所求的广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

习题 3-2

1. 计算下列二重积分

(1) $\iint_D (x^2+y^2)\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$；

(2) $\iint_D \dfrac{y}{x^2}\,d\sigma$，其中 D 是正方形闭区域：$1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1$；

(3) $\iint_D (6-2x-3y)\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ 与 x 轴、y 轴所围成的三角形闭区域；

(4) $\iint_D x\cos(x+y)\,d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$ $(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

2. 画出积分区域，并计算下列二重积分

(1) $\iint_D x\sqrt{y}\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围成；

(2) $\iint_D y\,dx\,dy$，其中积分区域 D 是由曲线 $x^2+y^2=1$ 与 x 轴所围成；

(3) $\iint_D xy\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由曲线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围成；

(4) $\iint_D \dfrac{x^2}{y^2}\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 所围成.

3. 将二重积分 $I=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 分别化为不同积分次序的二次积分，其中积分区域

D 是：

(1) 由直线 $y=x$ 和曲线 $y=x^2$ 所围成的区域；

(2) 由曲线 $y=\ln x$、直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的区域；

(3) 由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=4-x^2$ 所围成.

4. 改变下列二次积分的次序

(1) $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　(3) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

5. 交换下列二次积分的积分次序，并求其值

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$.

6. 画出积分区域，把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标式的二次积分，其中积分区域 D 是：

(1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}(a>0)$；　(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$；

(3) $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$，其中 $0<a<b$.

7. 把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值

(1) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$；　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

8. 利用极坐标计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $x^2+y^2=2y$ 与 y 轴所围成的第一象限内的闭区域；

(2) $\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x,y=0,x^2+y^2=1$ 在第一象限内所围成的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4,x^2+y^2=1$ 及直线 $y=x,y=0$ 在第一象限内所围成的闭区域.

9. 选用适当的坐标计算下列各题

(1) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是单位圆域：$x^2+y^2\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=2,y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由半圆周 $x^2+y^2=y$ 及直线 $x=0$ 所围成的在第一象限内

的闭区域；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a(a>0)$所围成的闭区域.

3.3　二重积分的应用

在定积分及其应用中介绍过元素法，这种方法也可推广到二重积分的应用中. 如果所要计算的某个量 U 对于闭区域 D 具有可加性(就是说，当闭区域 D 分成许多小闭区域时，所求量 U 相应地分成许多部分量，且 U 等于部分量之和)，并且在闭区域 D 中任取一个直径很小的闭区域 $\mathrm{d}\sigma$ 时，相应的部分量可近似地表示为 $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的形式，其中点(x,y)在 $\mathrm{d}\sigma$ 内，那么 $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为所求量 U 的元素，记为 $\mathrm{d}U$，以它为被积表达式，在闭区域 D 上所得积分就是所求量 U 的积分表达式，即

$$U=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

3.3.1　立体体积

设空间立体 V 由下式表示：

$$V=\{z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D\}$$

则由二重积分的几何意义，立体 V 的体积(也用 V 表示)

$$V=\iint\limits_D [z_2(x,y)-z_1(x,y)]\mathrm{d}\sigma$$

其中被积函数为该立体的顶面表达式 $z=z_2(x,y)$减去底面表达式 $z=z_1(x,y)$. 特别地，当 $z_1(x,y)=0$ 时，就是曲顶柱体的体积公式.

例 3.3.1　求由平面 $x+y=4$，$x=0$，$y=0$ 所围成的柱面与平面 $z=0$ 及曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积.

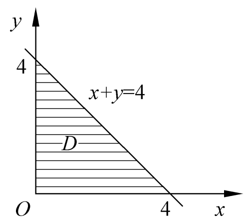

图　3-20

解　这是一个曲顶柱体，它的顶面是曲面：$z=x^2+y^2$，底面 D 的平面如图 3-20 所示，可表示为

$$D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 4-x,0\leqslant x\leqslant 4\}$$

所以，该曲顶柱体的体积

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^4\mathrm{d}x\int_0^{4-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^4\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{4-x}\mathrm{d}x=\int_0^4\left[x^2(4-x)+\frac{1}{3}(4-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^4\left[\frac{4}{3}x^3-8x^2+16x-\frac{64}{3}\right]\mathrm{d}x=\frac{128}{3}$$

例 3.3.2　计算圆柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$所围的空间区域被球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所截的部分的立体的体积(见图 3-21).

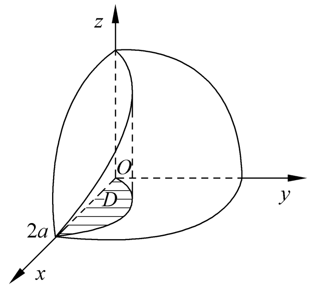

图　3-21

解　根据对称性,只要计算出该立体在第一卦限的体积,就可以得出总体积.该立体在第一卦限的部分可以看成是以 xOy 坐标面上的半圆区域 D 为底,以曲面 $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ 为顶的曲顶柱体.则其体积为

$$V_1=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

区域 D 如图 3-22 所示,在极坐标系下可以表示为:$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant\rho\leqslant2a\cos\theta$,有

$$V_1=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

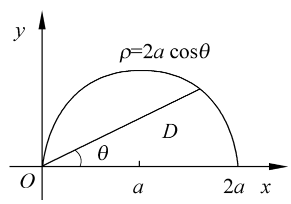

图　3-22

所以,所求的空间立体的体积为 $V=4V_1=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

3.3.2　平面图形的面积

当平面图形 D 的边界是用极坐标方程表示的简单闭曲线时,根据二重积分的性质,

用公式 $S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma$ 计算 D 的面积往往比较方便.

例 3.3.3　求心脏线 $\rho=(1-\cos\theta)a$ 所围成的图形的面积.

解　如图 3-23 所示，由对称性知所求面积 D 为上半部分图形面积 D_1 的两倍. 在极坐标系下 D_1 可表示为：$0\leqslant\rho\leqslant(1-\cos\theta)a$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以

$$D=2D_1=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{(1-\cos\theta)a}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2a^2\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi\theta^2$$

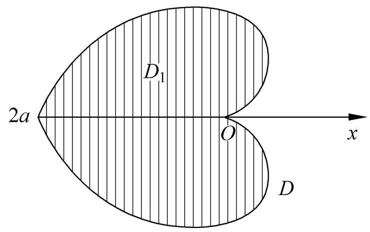

图　3-23

3.3.3　曲面的面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$. 现求曲面的面积 A.

在区域 D 内任取一点 $P(x,y)$，并在区域 D 内取一包含点 $P(x,y)$ 的小闭区域 $\mathrm{d}\sigma$，其面积也记为 $\mathrm{d}\sigma$. 在曲面 S 上点 $M(x,y,f(x,y))$ 处做曲面 S 的切平面 T，再作以小区域 $\mathrm{d}\sigma$ 的边界曲线为准线、母线平行于 z 轴的柱面. 将含于柱面内的小块切平面的面积作为含于柱面内的小块曲面面积的近似值，记为 $\mathrm{d}A$. 又设切平面 T 的法向量与 z 轴所成的角为 γ，则可得到曲面 S 的面积元素

$$\mathrm{d}A=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\cos\gamma}=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

于是曲面 S 的面积为

$$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

或

$$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 3.3.4　求半径为 R 的球的表面积.

解　设半径为 R 的球的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 可知所求球面的面积 A 为上半球面面积的 2 倍，且上半球面方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，球面向 xOy 坐标面的投影区域为：$x^2+y^2\leqslant R^2$. 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

因为 z 对 x 和对 y 的偏导数在 $D: x^2+y^2\leqslant R^2$ 上无界，所以上半球面面积不能直接求出. 因此先求在区域 $D_1: x^2+y^2\leqslant a^2(a<R)$ 上的部分球面面积，然后取极限.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$=2\pi R(R-\sqrt{R^2-a^2}).$$

于是上半球面面积为 $\lim\limits_{a\to R}2\pi R(R-\sqrt{R^2-a^2})=2\pi R^2$.

整个球面面积为 $A=2A_1=4\pi R^2$.

例 3.3.5 求由曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体的表面积.

解 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=az\\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$，得两曲面的交线为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=a\end{cases}$. 在 xOy 坐标面上的投影域为 $D: x^2+y^2\leqslant a^2$，由 $z=\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$ 得到 $z_x=\dfrac{2x}{a}$，$z_y=\dfrac{2y}{a}$，于是

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}$$

由 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，得到 $z_x=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，于是 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$，故

$$S=\iint\limits_D\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$$

* 3.3.4 质心

设有一平面薄片，占有 xOy 坐标面上的闭区域 D，在点 $P(x,y)$ 处的面密度为 $\rho(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续. 现在要求该薄片的质心坐标.

在闭区域 D 上任取一点 $P(x,y)$，及包含点 $P(x,y)$ 的一直径很小的闭区域 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记为 $\mathrm{d}\sigma$)，则平面薄片对 x 轴和对 y 轴的力矩(仅考虑大小)元素分别为

$$\mathrm{d}M_x=y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad \mathrm{d}M_y=x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

平面薄片对 x 轴和对 y 轴的力矩分别为

$$M_x=\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

设平面薄片的质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$，平面薄片的质量为 M，则有

$$\bar{x}\cdot M=M_y,\quad \bar{y}\cdot M=M_x$$

于是

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

将 $P(x,y)$点处的面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 看成是包含点 P 的直径得小的闭区域. 如果平面薄片是均匀的,即面密度是常数,则上式中的 $\mu(x,y)$可以提到积分号外并从分子、分母中约去,得平面薄片的质心公式为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}$$

这时平面薄片的质心坐标与密度无关,完全由闭区域 D 的形状所决定. 故把上面确定的点$(\bar{x},\bar{y})$也称为平面图形 D 的形心.

例 3.3.6　求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的形心.

解　薄片的形状如图 3-24 所示. 因为闭区域 D 对称于 y 轴,所以质心 $C(\bar{x},\bar{y})$必位于 y 轴上,于是$\bar{x}=0$. 因为

$$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho=7\pi$$

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$$

所以$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\dfrac{7\pi}{3\pi}=\dfrac{7}{3}$,所求形心是 $C\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$.

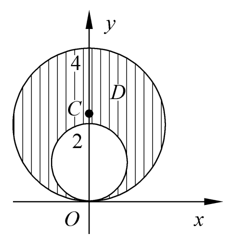

图　3-24

*3.3.5　转动惯量

设有一平面薄片,占有 xOy 面上的闭区域 D,在点 $P(x,y)$处的面密度为 $\rho(x,y)$,假定 $\rho(x,y)$在 D 上连续. 现在要求该薄片对于 x 轴的转动惯量、y 轴的转动惯量和原点的转动惯量.

在闭区域 D 上任取一点 $P(x,y)$,及包含点 $P(x,y)$的一直径很小的闭区域 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记为 $\mathrm{d}\sigma$),则平面薄片对于 x 轴的转动惯量、y 轴的转动惯量和原点的转动惯量的元素分别为

$$\mathrm{d}I_x = y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad \mathrm{d}I_y = x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad \mathrm{d}I_o = (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

整片平面薄片对于 x 轴的转动惯量，y 轴的转动惯量和原点的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_o = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

例 3.3.7 求半径为 a 的均匀半圆薄片(面密度为常量 μ)对于其直径边的转动惯量.

解 取坐标系如图 3-25 所示，则薄片所占闭区域 D 可表示为

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2, y \geqslant 0\}$$

由公式得所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \mu y^2 \mathrm{d}\sigma = \mu\iint_D \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \mu\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, \mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho = \mu\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\mu a^4\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}Ma^2 \end{aligned}$$

其中 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$ 为半圆薄片的质量.

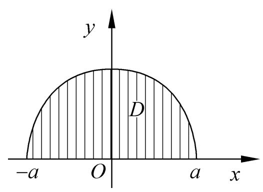

图 3-25

习题 3-3

1. 设平面 $x=1, x=-1, y=1, y=-1$ 围成的柱面被坐标面 $z=0$ 和平面 $x+y+z=3$ 所截，求截下部分立体的体积.

2. 求由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 所围成的立体体积.

3. 求双扭线 $\rho^2=2a^2\cos2\theta$ 所围成图形的面积.

4. 求圆柱面 $x^2+y^2=16$ 在第一卦限中被平面 $x=0, x=y, y=3$ 所截部分的面积.

5. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

6. 设平面薄片 D 是由 $x+y=2, y=x$ 和 x 轴所围成的区域，它的面密度 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

7. 有一圆心在原点、半径为 1 的半圆形薄片，它在点(x,y)处的面密度等于该点到圆心的距离，求此薄片的质心.

8. 由曲线 $\rho=a\sin2\theta$ 在第一象限内所围成的一均匀薄片，面密度为常量 μ，求其关于原点的转动惯量.

9. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 ρ)对于直线 $x=-1$ 的转动惯量.

3.4　三 重 积 分

3.4.1　三重积分的概念与性质

定义 3.4.1　设 $f(x,y,z)$是空间 R^3 中的一个有界闭区域 Ω 上的有界函数. 将 Ω 任意分割成 n 个可求体积的小闭区域 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，其体积分别是 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$，直径分别是 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，记 $\lambda = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$. 在每个小区域中任意取一点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i (i=1,2,\cdots,n)$，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$. 若当 $\lambda \to 0$ 时，这个和式的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在闭区域 Ω 上的三重积分，记为$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$$

并称函数 $f(x,y,z)$在区域 Ω 上可积. 其中 $f(x,y,z)$称为被积函数，$f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}V$ 称为体积元素，x,y,z 称为积分变量，Ω 称为积分区域.

在直角坐标系中，如果用平行于坐标面的平面来划分 Ω，则 $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. 因此，体积元素也可记为 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，三重积分记做

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

当函数 $f(x,y,z)$在闭区域 Ω 上连续时，极限$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$ 必定存在，因此 $f(x,y,z)$在 Ω 上的三重积分必定存在，以后总假定 $f(x,y,z)$在空间闭区域 Ω 上是连续的.

根据定义和极限的性质，三重积分有着与二重积分类似的性质，简列如下.

性质 1　$\iiint\limits_{\Omega}[c_1 f(x,y,z) \pm c_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}V = c_1 \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V \pm c_2 \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}V$；

性质 2　$\iiint\limits_{\Omega_1+\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}V$；

性质 3　$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V = V$，其中 V 为闭区域 Ω 的体积.

3.4.2　三重积分的计算

在被积函数连续的条件下，计算三重积分的基本方法是将三重积分化为三次积分来计算. 本节将分别讨论在不同的坐标下将三重积分化为三次积分的方法.

1. 利用直角坐标系计算三重积分

设函数 $f(x,y,z)$在空间有界闭区域 Ω 上连续，平行于 z 轴的任何直线与有界闭区域 Ω 的边界曲面 S 的交点不多于两个. 把闭区域 Ω 投影到 xOy 坐标面上，得一平面闭区

域 D_{xy}，如图 3-26 所示. 则积分区域 Ω 可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$$

其中 D_{xy} 为 Ω 在 xOy 平面上的投影，且 $D_{xy}=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$，$y_1(x)$、$y_2(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数.

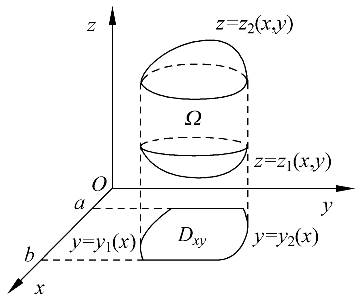

图 3-26

我们先对 z 做积分，暂时将 x,y 看成是常数，把函数 $f(x,y,z)$ 看做是 z 的函数，将它在区间 $[z_1(x,y),z_2(x,y)]$ 上积分，得到

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

显然，这个结果是 x,y 的函数，再把这个结果在平面区域 D_{xy} 上做二重积分

$$\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式也记为：

$$\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

再利用二重积分的计算公式便可以得到所要的结果，即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

这个公式也将三重积分化为了三次积分(先对 z、次对 y、最后对 x). 类似二重积分，我们这时可以把这样的有界闭区域 Ω 称为 Z—型区域.

如果积分区域是其他的情形，可以用类似二重积分那样分几种情况计算.

例 3.4.1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由三个坐标面和平面 $x+y+z=1$ 所围的立体区域.

解 积分区域如图 3-27 所示，可以用不等式表示为

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1-x,\quad 0\leqslant z\leqslant 1-x-y$$

所以积分可以化为

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}V&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}x(1-x)^2\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{24}\end{aligned}$$

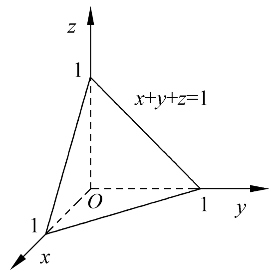

图　3-27

现在我们讨论一种特别情形，设有界闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c_1\leqslant z\leqslant c_2\}$，其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截空间闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域，如图 3-28 所示. 不难得到，若函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，则有

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

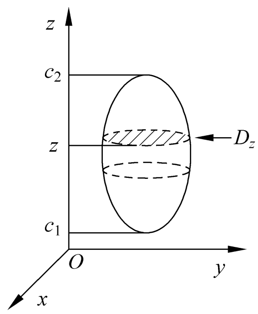

图　3-28

例 3.4.2　计算三重积分 $\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.

解　积分区域 Ω 如图 3-29 所示，可表示为

$$\left\{(x,y,z)\ \middle|\ -c\leqslant z\leqslant c,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

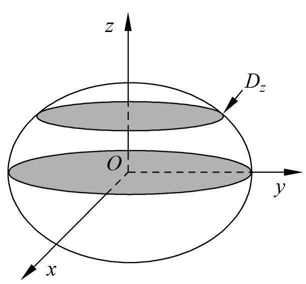

图　3-29

由积分公式得

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $D_z = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1-\dfrac{z^2}{c^2}\right\}$,所以

$$\iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\sqrt{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} \cdot \sqrt{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi ab\int_{-c}^{c} z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

2. 利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)$ 为空间中任意一点,可知它必在以 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为半径、以 z 轴为对称轴的圆柱面上,可得这个圆柱面的参数方程为:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, -\infty < z < +\infty) \\ z = z \end{cases}$$

因此,空间中任意一点 M,被三元有序数组 (ρ,θ,z) 所确定. 也就是说,该点在坐标面 xOy 上的投影点 M' 的极坐标为 (ρ,θ). 这样的三元数组 (ρ,θ,z) 就称为点 M 的柱面坐标(如图 3-30 所示). 这里三个变量 ρ,θ,z 的变化范围是

$$0 \leqslant \rho \leqslant +\infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

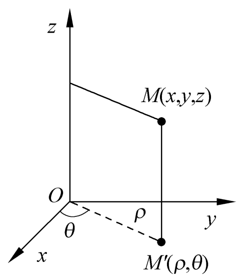

图 3-30

空间中的点 M 的直角坐标与柱面坐标之间的关系为:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

平面极坐标系中面积元素为 $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$,经计算可得空间柱面坐标系中的体积元素 $\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. 再利用两种坐标系之间的关系,可以得到

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

例 3.4.3 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由椭圆抛物面 $z=4(x^2+y^2)$ 和

平面 $z=4$ 所围成的有界区域.

解　如图 3-31 所示，积分区域 Ω 在坐标面 xOy 上的投影是一个圆心在原点的单位圆，所以在柱面坐标下 $\Omega=\{(\rho,\theta,z)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 4r^2\leqslant z\leqslant 4\}$. 于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V &= \iiint_{\Omega}\rho^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{4r^2}^4\mathrm{d}z\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4\rho^3-4\rho^5)\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

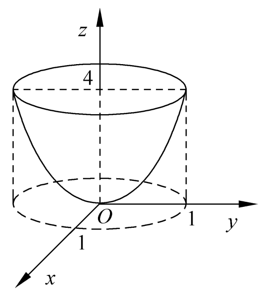

图　3-31

3. 利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)$ 为空间中任一点，在 xOy 坐标面上的投影为 M'，则点 M 也可用这样三个有序数 ρ,φ,θ 来确定. 其中 ρ 为原点 O 与点 M 之间的距离，φ 为 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正方向的夹角，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 的夹角. 这样的三个数叫做点 M 的球面坐标，如图 3-32 所示，三个变量 ρ,φ,θ 的变化范围是

$$0\leqslant\rho\leqslant+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

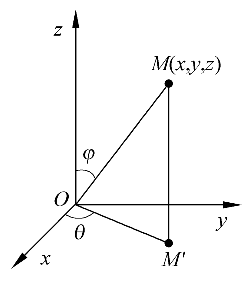

图　3-32

点 M 的球面坐标与点 M 的直角坐标 (x,y,z) 之间的关系为

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

我们知道，二重积分可以用极坐标来计算，对于三重积分同样可以用球面坐标计算. 类似极坐标变换，我们从几何直观的意义来得到计算公式.

球面坐标系下的体积元素为 $\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$，再由直角坐标系与球面坐标之间的关系，可以得到

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

例 3.4.4 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由半球面 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,y\geqslant 0$ 所围成的空间闭区域.

解 在球面坐标下，积分区域可以表示为

$$\Omega=\{(\rho,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$$

所以

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V&=\iiint_{\Omega}\rho^2\sin^2\varphi\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^a\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{\pi}{5}a^5\left[\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi}=\frac{4}{15}\pi a^5\end{aligned}$$

习题 3-4

1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $x=1,x=2,z=0,y=x,z=y$ 所围成的闭区域.

2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}x^2\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由三个坐标面和平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由锥面 $z^2=\frac{1}{R^2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}xy\mathrm{d}V$，其中 Ω 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=1,z=0,x=0,y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}V$，其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

6. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 所围成的闭区域.

7. 利用球面坐标求半径为 a 的球的体积.

8. 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体体积.

第4章 级　　数

无穷级数是研究无限个离散量之和的数学模型,它在表示函数、研究函数的性质、计算函数值以及求解微分方程等方面都有着重要的应用,因此无穷级数是高等数学的重要组成部分.本章中,首先讨论常数项级数,介绍无穷级数的概念和基本性质,并给出级数敛散性的判定方法,然后讨论特殊的函数项级数——幂级数,最后讨论如何将函数展开成幂级数的方法.

4.1　常数项级数的概念与性质

4.1.1　常数项级数的概念

对给定一数列$\{u_n\}$,即

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$$

将数列中的各项依次用加号连接起来,所得和式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

称为常数项无穷级数(或无穷级数),简称为级数,记做$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

其中第n项u_n称为级数的一般项或通项.

对于有限个数求和,我们已经非常熟悉,它总是有意义的,而无穷级数是无限多个数相加,这无限多个数的和存在吗?若存在,该如何求解这无限多项的和?结合极限的思想,我们从有限项的和出发,观察其变化趋势,由此确定无穷多项的和.

定义 4.1.1　给定数列$\{u_n\}$,称

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$n$项部分和,简称部分和.(注意:这是有限项的和,总是有意义的!)

当n依次取1,2,3,…时,部分和S_n构成一个新的数列

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$$

将数列$\{S_n\}$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列.

我们知道,给定一数列$\{u_n\}$,就确定唯一的部分和数列$\{S_n\}$,其中$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$;反之,给定数列$\{S_n\}$,相应的有以$\{S_n\}$为部分和数列的级数$\{u_n\}$,其中$u_1=S_1$,$u_n=S_n-S_{n-1}$($n\geqslant$

2).由此根据级数部分和数列的敛散性,引入级数$\{u_n\}$收敛和发散的概念.

定义 4.1.2　设级数$\{u_n\}$的部分和数列$\{S_n\}$,

若部分和数列的极限存在,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的,且称$S$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和,并记$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$.

若部分和数列的极限不存在,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

从定义可以知道,级数收敛的充分必要条件是其部分和数列的极限存在.

当级数收敛时,其和S与部分和S_n的差

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

称为级数的余项.

用部分和S_n作为S的近似值所产生的误差,就是余项的绝对值$|r_n|$.显然,有

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0$$

例 4.1.1　设$a\neq0$,讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的敛散性.

解　先求部分和S_n:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}aq^k=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q\neq1\\ na, & q=1\end{cases}$$

当$|q|<1$时,因为$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}$$

此时级数收敛,收敛于$\dfrac{a}{1-q}$;

当$|q|>1$时,因为$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\infty$$

此时级数发散;

当$q=1$时,其前n项之和为$S_n=na$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,所以级数发散;

当$q=-1$时,级数成为:

$$a-a+a-a+\cdots+a-a+\cdots$$

当n为偶数时,$S_n=0$;当n为奇数时,$S_n=a$.所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,级数发散.

综上所述,当$|q|<1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛,其和$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\dfrac{a}{1-q}$;

当 $|q|\geqslant 1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

例 4.1.2　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$ 收敛，并求其和.

证明　级数的通项

$$u_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

因此其前 n 项之和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

于是
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2},$$

所以级数收敛，其和为 $\dfrac{1}{2}$.

例 4.1.3　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ 的收敛性.

解　其前 n 项之和是

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

于是
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \infty,$$

所以级数发散.

例 4.1.4　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解　级数的前 n 项之和为

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

于是极限
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$$

不存在，所以级数发散.

4.1.2　常数项级数的基本性质

性质 4.1.1（级数收敛的必要条件）　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证明　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛于 S，其前 n 项之和为 S_n，则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0.$$

因此，根据性质 4.1.1 可知，若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$必定发散. 这是判断级数发散的一个方法.

例 4.1.5 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$的收敛性.

解 其一般项$u_n=\dfrac{n}{n+1}$，当$n\to\infty$时其极限为 1，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$发散.

注意：性质 4.1.1 给出了级数收敛的必要条件，但不是充分条件，就是说若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，并不能推出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛.

例如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，虽然$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$，但在前面例 4.1.4 中已经证明它是发散的.

例 4.1.6 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，称为调和级数，证明调和级数发散.

证明 调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$的前$n$项之和

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\int_1^2 1\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1)\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，故调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

性质 4.1.2 设两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，其和分别是$s$与$\sigma$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且和为$s\pm\sigma$.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别为$s_n$和$\sigma_n$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的部分和

$$\tau_n=\sum_{i=1}^{n}(u_i\pm v_i)=\sum_{i=1}^{n}u_i\pm\sum_{i=1}^{n}v_i=s_n\pm\sigma_n$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}(s_n\pm\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}s_n\pm\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s\pm\sigma.$$

由性质 4.1.2 可得结论，收敛的级数相加或相减后仍收敛.

思考：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的敛散性如何?若

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的敛散性又如何？

性质 4.1.3　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 s，k 为任一常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且和为 ks.

证明请读者自己完成.

下面证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n (k \neq 0)$ 也发散.

利用反证法. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，因为 $k \neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}(ku_n)$. 由性质 4.1.3，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，与已知矛盾，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 必定发散.

因此，对任一常数 $k\neq 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 敛散性相同.

性质 4.1.4　在级数中，去掉、增加或改变级数的有限多项，不改变级数的敛散性.

证明　我们先证明在级数前面增加有限多项时，敛散性不变.

设原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

其前 n 项和为

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

在前面增加 k 项，得新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_k + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

若记

$$c = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

其前 $n+k$ 项和为

$$\sigma_{n+k} = v_1 + v_2 + \cdots + v_k + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = c + s_n$$

由此可知，数列 $\{s_n\}$ 与 $\{\sigma_{n+k}\}$ 有相同的敛散性. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ 有相同的敛散性，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ 同敛散.

类似可以证明在级数前面去掉有限多项，级数的敛散性不变.

在级数中去掉、增加或改变有限多项，可以看成是先在前面去掉几项，再在前面增加几项，故其敛散性不变.

性质 4.1.5　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，在不改变级数中各项位置的前提下，对其项任意加括号后所得的新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \tag{4-1}$$

仍收敛，且和不变.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$n$项部分和为$s_n$，新级数(4-1)的前$k$项部分和为$\sigma_k$，则有

$$\sigma_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1} = s_{n_1}$$
$$\sigma_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2}$$
$$\cdots$$
$$\sigma_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k}$$
$$\cdots$$

显然易见，$\{\sigma_k\}$是$\{s_n\}$的子数列$\{s_{n_k}\}$.

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=\lim\limits_{k\to\infty}s_{n_k}=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$.

因此，收敛级数加括号后得到的级数仍收敛，且和不变.

要注意的是，性质 4.1.5 中的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定是指收敛级数.但如果加括号后所得的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，并不能判定原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. 例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0$$

但是去括号后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

是发散级数.

由性质 4.1.5 可得结论：任给一级数，如果加括号后所得到的级数发散，则原级数必定发散.

例 4.1.7 证明级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$$

发散.

证明 加括号后所得级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\cdots$$
$$=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{2}{n-1}+\frac{2}{n}+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散，所以原级数发散.

习题 4-1

1. 写出下列级数的前四项.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times\cdots\times n}$.

2. 写出下列级数的一般项.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$；　　(2) $x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{7}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

4. 判定下列级数的敛散性,并求出收敛级数的和.

(1) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$；　　(2) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{5n}+\cdots$；

(3) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{(-1)^n+3}{3^n}+\cdots$；　　(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$；

(5) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

4.2　常数项级数的审敛法

判定级数的敛散性,可利用敛散性的定义,先求部分和 S_n,再求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,但绝大多数情况下,部分和 S_n 及其极限的求解十分困难,甚至不能求解. 因此,我们希望从级数的一般项来判定级数的敛散性.

4.2.1　正项级数及其审敛法

定义 4.2.1　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若级数的每项都是非负实数,即

$$u_n \geqslant 0,\quad n=1,2,3,\cdots$$

则称此级数是正项级数; 若级数的每项都是非负实数,即

$$u_n \leqslant 0,\quad n=1,2,3,\cdots$$

则称此级数是负项级数.

不难看出, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是负项级数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 是正项级数,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ 具有相同的敛散性. 由此,负项级数的敛散性可利用相应的正项级数判定.

为讨论正项级数的审敛法,应先讨论其部分和数列的特点.

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，其部分和$S_n$.显然，

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots$$

即正项级数的部分和数列$\{S_n\}$是一个单调递增数列.

由数列极限的存在准则知道,单调有界数列必有极限.因此,若数列$\{S_n\}$有上界,则部分和数列$\{S_n\}$必收敛.反之,若数列$\{S_n\}$收敛,则$\{S_n\}$必有上界.故可有下述定理.

定理 4.2.1 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

应该说，定理 4.2.1 解决了前面提到的在判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$敛散性中的难点问题，即前$n$项和$S_n$及其极限的求解.利用定理 4.2.1，将正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性的判定转化为前$n$项和$S_n$是否有上界的判定，对此我们可以借助适当的放大或缩小的方法来解决.

根据定理 4.2.1,我们来讨论判定正项级数敛散性的常用判定方法.

定理 4.2.2(比较审敛法) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，且$u_n \leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，

(1) 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(2) 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和分别为$S_n$和$\sigma_n$，由于$u_n \leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,所以$S_n \leqslant \sigma_n$.因此：

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则部分和$\sigma_n$有上界,即存在$M>0$,使得$\sigma_n \leqslant M$,故$S_n \leqslant M$,由定理 4.2.1 可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则部分和$S_n$无上界,故$\sigma_n$也无上界,由定理 4.2.1 可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

我们知道,级数的敛散性完全由某个数N之后的项所决定，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$有相同的敛散性，由此可得下面推论.

推论 4.2.1 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，且存在$k>0$和自然数$N$,当$n>N$时，总有

$$u_n \leqslant kv_n(n = 1,2,\cdots)$$

(1) 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(2) 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

例 4.2.1　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2^n}$ 的敛散性.

解　因为

$$\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

已知等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 收敛,所以由比较审敛法可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2^n}$ 收敛.

例 4.2.2　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}(p>0)$ 的敛散性(称此级数为 p 级数).

解　当 $0<p\leqslant 1$ 时,总有

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

且已知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由比较审敛法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p>1$ 时,因为对于 $n-1\leqslant x\leqslant n$ 总有

$$\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$$

所以

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right],\quad(n=2,3,\cdots)$$

从而部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\leqslant 1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1},\quad(n=2,3,\cdots)$$

因此,部分和数列$\{S_n\}$有上界,由正项级数收敛原理,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛.

由上述讨论可知,p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$,当 $0<p\leqslant 1$ 时,级数发散;当 $p>1$ 时,级数收敛.

例 4.2.3　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ 的敛散性.

解　因为

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

而 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,由比较审敛法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ 收敛.

可以看到,利用比较审敛法判定级数敛散时,对于所选的比较级数应已知敛散性,这里,我们常用等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 和 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 作为比较对象.

为方便应用,我们给出比较审敛法的极限形式.

定理 4.2.3(比较判别法的极限形式)　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\quad(0\leqslant l\leqslant\infty)$$

(1) 若 $0<l<+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的敛散性相同；

(2) 若 $l=0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3) 若 $l=\infty$时，由极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$ 的定义可知，即 $u_n>Mv_n$，所以，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon$$

当 $0<l<+\infty$时，取 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\frac{1}{2}l<\frac{u_n}{v_n}<\frac{3}{2}l$$

即
$$\frac{1}{2}lv_n<u_n<\frac{3}{2}lv_n$$

所以，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，由于 $\frac{1}{2}lv_n<u_n$，则有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，由于 $u_n<\frac{3}{2}lv_n$，则有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的敛散性相同.

当 $l=0$ 时，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则当 $n>N$ 时，有 $u_n<\frac{1}{2}v_n$，所以，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

当 $l=\infty$时，取 $M=1$，则当 $n>N$ 时，有$\frac{u_n}{v_n}>1$，即 $u_n>v_n$，所以，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

例 4.2.4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=1,$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

例 4.2.5 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty,$$

且已知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散.

利用等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 的敛散性，可推得应用更为方便的比值审敛法.

定理 4.2.4（比值判别法又称达朗贝尔审敛法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

（1）若 $\rho<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）若 $\rho>1$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）若 $\rho=1$，则无法判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛还是发散.

证　（1）若 $\rho<1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，故对于 $\varepsilon=\dfrac{1-\rho}{2}>0$，由极限的定义，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$，即

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=\frac{1+\rho}{2}=q<1$$

所以当 $n>N$ 时，有

$$u_{N+2}<qu_{N+1},u_{N+3}<qu_{N+2}<q^2u_{N+1},\cdots,u_{N+n}<q^{n-1}u_{N+1},\cdots$$

注意到，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}u_{N+1}$ 是 $q<1$ 的等比级数，且是收敛的. 由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{N+n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）若 $\rho>1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，故对于 $\varepsilon=\dfrac{\rho-1}{2}>0$，由极限的定义，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$，即

$$1<q=\frac{1+\rho}{2}=\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

所以当 $n>N$ 时，有

$$u_{N+2}>qu_{N+1},u_{N+3}>qu_{N+2}>q^2u_{N+1},\cdots,u_{N+n}>q^{n-1}u_{N+1},\cdots$$

注意到，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}u_{N+1}$ 是 $q>1$ 的等比级数，且是发散的. 由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{N+n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（3）当 $\rho=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛可能发散，此时，比值审敛法无效，需用其他方法判别敛散性. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

和
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

它们都满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,但是前者是收敛的,而后者是发散的.

例 4.2.6 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$的敛散性.

解 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1$$

由比值审敛法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$发散.

例 4.2.7 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}}{n+1}$的敛散性.

解 因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n+2}}{\frac{n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n+2}}{\frac{n\cdot\frac{\pi}{2^n}}{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}<1$$

由比值审敛法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}}{n+1}$收敛.

一般情况下,当级数的通项 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干项因子连乘时,用比值审敛法较为简单.

4.2.2 交错级数及其审敛法

所谓交错级数,是指正负项交错出现的级数.

定义 4.2.2 设 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$,则称形如
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$
或
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots$$
的级数为交错级数.

定理 4.2.5(莱布尼茨定理) 若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件:

(1) $u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛. 且若设其和为 s,则有 $s\leqslant u_1$,余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

证明　不妨设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$.

对于 $\{s_n\}$ 的偶子列 $\{s_{2n}\}$,有

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geqslant 0$$

因此偶子列 $\{s_{2n}\}$ 是单调增数列.

又
$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1$$

因此偶子列 $\{s_{2n}\}$ 是有界数列. 故偶子列 $\{s_{2n}\}$ 是收敛数列,不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = s$,且 $s\leqslant u_1$.

对于 $\{s_n\}$ 的奇子列 $\{s_{2n+1}\}$,因为

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$$

因此,
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s + 0 = s,$$

故奇子列 $\{s_{2n+1}\}$ 也收敛于 s.

由此,部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛于 s,即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛,且和 $s\leqslant u_1$.

余项 r_n 的绝对值 $|r_n|$ 可表示为

$$\begin{aligned}
|r_n| = |s - s_n| &= |\pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)| \\
&= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots \\
&= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \cdots \\
&\leqslant u_{n+1}
\end{aligned}$$

可证得余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

例 4.2.8　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解　因为
$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

由莱布尼兹定理得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛.

例 4.2.9　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解　设 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,则

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad (x > \mathrm{e})$$

所以,$f(x)$ 在上单调减少,从而

$$u_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} = u_{n+1} \quad (n \geqslant 3)$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

由莱布尼兹定理得级数 $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$,从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 收敛.

4.2.3 绝对收敛与条件收敛

对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,即一般项可以取正,也可以取负的级数,我们知道,将它的每一项都加绝对值后就可得到正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. 我们能否利用正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性来讨论原级数的敛散性呢?给出下面一个定义.

定义 4.2.3 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

显然,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 条件收敛;而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛.

定理 4.2.6 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定是收敛的.

证 令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|),\quad (n=1,2,\cdots)$$

显然 $$0\leqslant v_n\leqslant|u_n|,\quad (n=1,2,\cdots),$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,由比较审敛法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 根据级数敛散的性质,因为 $u_n=2v_n-|u_n|$,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

我们要注意,当 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必发散. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

可见,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

但是,如果我们在判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时,是根据比值审敛法得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,即 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$,这时 $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq0$,则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$,这时可以断言,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

例 4.2.10　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的绝对收敛和条件收敛性.

解　对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 中的一般项

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛.

习题 4-2

1. 用比较审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n+1}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{10^n}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

3. 判别下列级数的敛散性，并指出绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n+1}}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$;　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

4.3　幂　级　数

前面所讨论的级数中，每一项都是一个确定的常数，因此我们称之为常数项级数. 如果级数中每一项都是某一个区间 I 上的函数，则是另外的一种情形.

4.3.1　函数项级数的概念

给定区间 I 上的按照一定规律排列的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

则称表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数(简称级数),记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

其中 $u_n(x)$为一般项或第 n 项.

对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$,当 x 取区间 I 上的某一确定数值 x_0 时,相应得到一个常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,则称 x_0 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点;若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散,则称 x_0 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点. 我们把所有收敛点的集合称为级数的收敛域,所有发散点的集合称为级数的发散域.

对于收敛域内的任意一点 x,函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和是 x 的函数 $S(x)$,我们称 $S(x)$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

与数项级数类似,函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x)$$

则在收敛域上有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

同时,余项

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

且有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

4.3.2 幂级数及其收敛性

函数项级数中最简单也是最重要的一类是每一项都是幂函数的级数,我们将它称为幂级数.其一般形式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

称此级数为关于$(x-x_0)$(或在 x_0 点处)的幂级数.其中,x_0 是任意给定的常数,常数 a_0,a_1,a_2,$\cdots$,a_n,$\cdots$,称为幂级数的系数.

尤其当 $x_0=0$ 时,幂级数化为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

我们只考虑形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的幂级数的敛散性,至于一般的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$,只

要作变量代换 $t = x - x_0$，总可以化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的形式.

定理 4.3.1（Abel 定理）

(1) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处是收敛的，则对于任意的 x，只要 $|x| < |x_0|$，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 总收敛，且绝对收敛；

(2) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处是发散的，则对于任意的 x，只要 $|x| > |x_0|$，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

证　(1) 由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，由级数收敛的必要条件知道，$\lim\limits_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$，所以，数列 $\{a_n x_0^n\}$ 有界，即存在 $M > 0$，使得对于所有的 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 都有 $|a_n x_0^n| < M$，从而当 $|x| < |x_0|$ 时，有

$$|a_n x^n| = \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \cdot |a_n x_0^n| < M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

因为等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛（这是因为公比 $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$），由比较审敛法知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛，即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 绝对收敛.

(2) 用反证法. 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处是发散的，假设存在 $t_0 (|t_0| > |x_0|)$ 而幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t_0^n$ 收敛. 由(1) 知道，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，这与幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 发散矛盾. 所以对于任意的 x，只要 $|x| > |x_0|$，就有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定理 4.3.1 表明，若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛，则在开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内必定绝对收敛；若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处发散，则在开区间 $(-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, +\infty)$ 内必定发散. 也就是说，对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，必定存在一个正数 $R > 0$，使得当 $x \in (-R, R)$ 时，级数绝对收敛；当 $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 时，级数发散. 我们称 R 为幂级数的收敛半径，称开区间 $(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间，这时，级数收敛域为收敛区间加上收敛的端点.

特别地，若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在点 $x = 0$ 收敛，我们称收敛半径 $R = 0$. 若级数在任意的点都收敛，则称级数的收敛半径为 $R = +\infty$.

定理 4.3.2　给定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

其中，a_n，a_{n+1} 分别是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 中项 x^n，x^{n+1} 的系数，则幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

证　考察级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$，后项与前项之比的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \rho |x|$$

(1) 若 ρ 为非零正数，由比值审敛法知，当 $\rho|x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，级数收敛；当 $\rho|x|>1$，即 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，级数发散. 所以级数的收敛半径是 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

(2) 若 $\rho=0$，则对于任意的 $x\neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=0$，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，因此级数的收敛半径 $R=+\infty$.

(3) 若 $\rho=+\infty$，则对于任意的 $x\neq 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=+\infty$，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，因此级数的收敛半径 $R=0$.

已知一级数的收敛半径为 R，则可以知道级数在区间$(-R,R)$内是收敛的. 但是对于在区间的端点的情形还要另外加以判断，这样才能知道级数的收敛域. 看下面的例子.

例 4.3.1　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}\cdot n}x^n$ 的收敛半径及收敛域.

解　因为

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^{n+2}\cdot(n+1)}}{\dfrac{1}{2^{n+1}\cdot n}} = \frac{1}{2}$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=2$，收敛区间$(-2,2)$.

对于端点 $x=-2$，级数为交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}+\cdots$$

且满足莱布尼兹定理，因此级数收敛；

对于端点 $x=2$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$$

因为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以级数发散. 因此级数的收敛域为$[-2,2)$.

例 4.3.2　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{2^n\cdot n!}x^n$ 的收敛半径及收敛域.

解　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{5^n}{2^n\cdot n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2(n+1)}=0$$

所以收敛半径 $R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$,从而收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

例 4.3.3　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x-2)^n$ 的收敛半径及收敛域.

解　令 $t=x-2$,原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nt^n$,

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=+\infty$$

所以收敛半径 $R=0$,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nt^n$ 仅在 $t=0$ 收敛,从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x-2)^n$ 仅在 $x=2$ 收敛,收敛域为$\{2\}$.

例 4.3.4　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^nn}(x-1)^{2n+1}$ 的收敛域.

解　由于所给幂级数中仅含奇次幂项,不含偶次幂项,不可直接利用定理 4.3.2 求解,这里我们利用比值审敛法求解.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}(x-1)^{2(n+1)+1}}{\dfrac{(-1)^n}{4^nn}(x-1)^{2n+1}}\right|=\frac{|x-1|^2}{4}$$

当 $|x-1|^2<4$,即 $|x-1|<2$,$-1<x<3$ 时,级数绝对收敛,从而级数收敛.

对于端点 $x=-1$,级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}$,级数收敛;

对于端点 $x=3$,级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2}{n}$,级数收敛.

所以,此级数的收敛域是$[-1,3]$.

4.3.3　幂级数的运算及性质

类似于前面的常数项级数,函数项级数也有一些运算性质.

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$,收敛半径分别 R_a,R_b,则有:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,x\in(-R,R)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ka_nx^n=k\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$($k$ 是常数),$x\in(-R_a,R_a)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$,$x\in(-R,R)$,

其中,$R=\min\{R_a,R_b\}$, $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$.

对于幂级数的和函数,有以下分析性质.

性质 4.3.1 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内连续,且如果级数在$x=R$(或$x=-R$)收敛,则和函数$S(x)$在$(-R,R]$(或$[-R,R)$)上连续.

性质 4.3.2 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内任意闭区间$[a,b]$上是可积的,且可逐项积分,即

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b(a_nx^n)\mathrm{d}x$$

特别地,对任意$x\in(-R,R)$,

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(a_nt^n)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

且可逐项积分后所得幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$与原幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径相同为$R$.

性质 4.3.3 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内可以逐项求导,即

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

且可逐项求导后所得幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$与原幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径相同为$R$.

反复应用性质 4.3.3,可得结论:幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内具有任意阶导数.

我们知道,幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$是公比$q=x$的等比级数,当$|x|<1$时,级数收敛,其和函数$s(x)=\frac{a}{1-x}$.而对于一般的幂级数,其和函数求解非常困难.借助上述性质,我们可以求解一些幂级数的和函数和某些常数项级数的和.

例 4.3.5 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$的和函数.

解 先求收敛域.由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

因此,级数的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1$.

对于端点 $x=-1$，级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，级数收敛；对于端点 $x=1$，级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，级数发散. 所以级数的收敛域为$[-1,1)$.

设和函数 $S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1},\quad x\in[-1,1)$$

于是

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$$

利用和函数可逐项求导的性质，

$$[xS(x)]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

对上式从 0 到 x 积分，得

$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

因此，当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$.

因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^{n-1}$ 在 $x=0$ 的和函数 $S(0)=1$，
所以和函数

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

例 4.3.6　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+2)^{n-1}$ 的和函数，并由此计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n-1}}$ 的和.

解　令 $t=x+2$，则级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$，可求得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$ 的收敛区间$(-1,1)$，设

$$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$$

则

$$\int_0^t S(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n}=\frac{t}{1-t}\quad(-1<t<1).$$

对上式两边求导，可得

$$S(t)=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2}$$

将 $t=x+2$ 代入，因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+2)^{n-1}$ 的和函数

$$S(x)=\frac{1}{[1-(x+2)]^2}=\frac{1}{(1+x)^2}\quad(-3<x<-1)$$

令 $t=\dfrac{1}{2}$，则 $x=-\dfrac{3}{2}$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\right)^{2}}=4$$

习题 4-3

1. 求下列幂级数的收敛半径及收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^{n+1}$.

2. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n n}$；　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^{2n}$.

3. 求下列级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}$；　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$.

4.4 函数展开成幂函数

上节我们讨论了幂级数的和函数求解，由此联想到，给出一个函数 $f(x)$，能否找到一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，使其收敛于 $f(x)$？我们知道幂级数表示简单，且在收敛域内和函数连续，且能进行逐项求导逐项积分运算，因此我们讨论把函数展开成幂级数的问题.

4.4.1 泰勒级数

假设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内能展开成幂级数，即有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,\quad x\in U(x_0)\tag{4-2}$$

由和函数的性质 $f(x)$在邻域 $U(x_0)$内应有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\cdots$$

令 $x=x_0$，可得

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n$$

即

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{4-3}$$

由此可见，若函数 $f(x)$能展开为幂级数(4-2)，那么该幂级数的系数 a_n 应由公式(4-3)确定，即幂级数展开式唯一，且表示式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \tag{4-4}$$

于是展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in U(x_0). \tag{4-5}$$

定义 4.4.1　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有任意阶导数，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为函数 $f(x)$在点 x_0 处的泰勒级数. 尤其当 $x_0=0$ 时，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

为函数 $f(x)$的麦克劳林级数；

称展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in U(x_0)$$

为函数 $f(x)$在点 x_0 处的泰勒展开式.

由定义可知，当函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有任意阶导数，则函数 $f(x)$在点 x_0 的泰勒级数必定存在，且唯一确定. 问题是：该泰勒级数一定收敛于函数 $f(x)$吗？

下面将给一个例子来说明不是在开区间上的具有任意阶导数的函数都可以是一个幂级数的和函数.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

不难计算可得，对任意自然数 n，总有

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

显然函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有任意阶导数. 由此，函数 $f(x)$在点 $x_0=0$ 的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = 0 + \frac{0}{1!}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \cdots \equiv 0 \neq f(x)$$

这个例子告诉我们，若函数 $f(x)$在某邻域 $U(x_0)$内有任意阶导数，总可以造一个$(x-x_0)$的泰勒级数，但该级数不一定收敛于这个函数. 如何判断泰勒级数就是泰勒展开式就成了要讨论的问题了. 事实上，我们有：

定理 4.4.1　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有任意阶导数，则函数 $f(x)$在该邻域内可以展开成泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in U(x_0)$$

的充分必要条件是在该邻域内函数 $f(x)$的泰勒公式的余项 $R_n(x)$的极限为 0,即

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in U(x_0)$$

证 若函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有任意阶导数,则必有 $n+1$ 阶导数,由泰勒中值定理得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),\quad x\in U(x_0)$$

记
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

则
$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),\tag{4-6}$$

其中 $S_n(x)$是函数 $f(x)$的泰勒级数的前 $n+1$ 项和,$R_n(x)$是函数 $f(x)$的泰勒公式的余项.

必要性 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内可以展开为泰勒级数,即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in U(x_0)$$

若函数 $f(x)$ 的泰勒级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛于 $f(x)$,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$$

故
$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=f(x)-f(x)=0,\quad x\in U(x_0).$$

充分性 设$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$,$x\in U(x_0)$,则由式(4-6)可知,

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-R_n(x)]=f(x)-0=f(x)$$

表明函数 $f(x)$的泰勒级数在邻域 $U(x_0)$内的每一点都收敛于 $f(x)$,即函数 $f(x)$在邻域 $U(x_0)$内可以展开成泰勒级数.

4.4.2 初等函数的幂级数展开

要将函数 $f(x)$展开成麦克劳林级数,可以按照下述步骤求解:

第一步 求出函数 $f(x)$在 $x=0$ 的各阶导数值 $f^{(n)}(0)$,若函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某阶导数不存在,则函数 $f(x)$不能展开为麦克劳林级数;

第二步 写出麦克劳林级数,并求出其收敛区间$(-R,R)$;

第三步 判定在收敛区间内余项 $R_n(x)$的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

是否为零.若为零,则在此收敛区间内麦克劳林级数即为要求的展开式,即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$
$$x\in(-R,R)$$

例 4.4.1 将函数 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 点展开成麦克劳林级数.

解 因对任意自然数 n,都有 $f^{(n)}(x)=e^x$,$f^{(n)}(0)=1$,$(n=0,1,2,\cdots)$

所以在 $x=0$ 点的麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

其收敛域为$(-\infty,\infty)$.
由泰勒公式,有关系式:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

对任意有限实数 x(ξ 在 0 与 x 之间),有

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

因为 $e^{|x|}$ 为有限数,$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项,因此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$$

从而对任意实数 x,都有 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$,其收敛半径是$\infty$.

例 4.4.2　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成麦克劳林级数.

解　我们知道

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$(\sin x)^{(n)}\big|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

所以在 $x=0$ 点的麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

其收敛域为$(-\infty,\infty)$.
对任意有限实数 x(ξ 在 0 与 x 之间),有

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\left(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

所以得展开式

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad -\infty<x<\infty$$

例 4.4.3　将函数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$(α 是不为零的任意实数)展开成麦克劳林级数.

解　$f(x)$的各阶导数为

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n},$$
$$\cdots$$

所以

$$f(0)=1,f'(0)=\alpha,f''(0)=\alpha(\alpha-1),\cdots$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)],$$
$$\cdots\cdots$$

所以在 $x=0$ 点的麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛区间为$(-1,1)$.

可以证明

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0,\quad x\in(-1,1)$$

所以有

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

注意,该式在 $x=\pm1$ 成立与否与 α 的取值有关.如:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times4}x^2+\frac{1\times3}{2\times4\times6}x^3+\cdots,\quad x\in[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times3}{2\times4}x^2-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^3+\cdots,\quad x\in(-1,1]$$

求解过程中可以看出,直接展开为幂级数,需求 n 阶导数,并判断余项趋于零,该方法计算麻烦,且有些函数无法求解.我们考虑能否借助已知函数的幂级数展开式,通过四则运算、逐项求导、逐项积分或变量代换等方式,将所给函数展开成幂级数.

目前我们已经推得幂级数展开式的函数有

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),\tag{4-7}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),\tag{4-8}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+\cdots,$$

$$x\in(-1,1)\tag{4-9}$$

再就是等比级数

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)\tag{4-10}$$

若将式(4-10)中的 x 用$-x$ 代入,可得

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)\tag{4-11}$$

若将式(4-11)中的 x 用 x^2 代入,可得

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots,\quad x\in(-1,1)\tag{4-12}$$

若将式(4-8)两边求导,可得

$$\cos x=(\sin x)'=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)'$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<\infty$$

若将式(4-11)两边从 0 到 x 积分,可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^x \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\Big]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^x [1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots]\mathrm{d}x \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x\in(-1,1]\end{aligned}$$

需要注意的是,这里的收敛域是左开右闭的区间.特别当 $x=1$ 时,有

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

所以,当 $x=1$ 时,级数收敛.

若将式(4-12)两边从 0 到 x 积分,可得

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^x \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Big]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^x [1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots]\mathrm{d}x \\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x\in[-1,1]\end{aligned}$$

例 4.4.4　将函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$展开成$(x-1)$的幂级数.

解　因为
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

由此
$$\begin{aligned}f(x) &= a^x = a\cdot a^{x-1} = a\cdot e^{(x-1)\ln a} \\ &= a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(x-1)\ln a]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a\cdot(\ln a)^n}{n!}(x-1)^n, \quad x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

例 4.4.5　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$展开成$(x-1)$的幂级数.

解　因为
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)\end{aligned}$$

又因为
$$\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n, \quad 0<x<2,$$
$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n, \quad 0<x<2,$$

由此
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}(x-1)^n, \quad 0<x<2.\end{aligned}$$

例 4.4.6 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成$\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的幂级数.

解 因为
$$\begin{aligned}\cos x &=\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\\ &=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}\\ &=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

又因为
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<\infty,$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<\infty,$$

由此
$$\begin{aligned}f(x)=\cos x&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}-\sqrt{3}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],\quad -\infty<x<\infty.\end{aligned}$$

习题 4-4

1. 求下列函数的迈克劳林级数,并指出收敛区间.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$; (2) $f(x)=\sin^2 x$; (3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

2. 将$\dfrac{1}{3+x}$展成$(x-2)$的幂级数.

3. 将 $\sin x$ 展成$\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的幂级数.

4. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展成$(x-1)$的幂级数.

5. 求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的幂级数.

第 5 章　常微分方程与差分方程

在实际问题求解过程中，往往需要建立所求量满足的函数关系. 对于复杂问题，很难直接表示所满足的函数关系式，却较容易地建立所求量与其导数满足的方程. 该类方程称为微分方程. 在建立微分方程的基础上，对方程进行求解，从而求得所求量，达到解决实际问题的目的. 本章主要介绍微分方程的基本概念及几种常见的微分方程的求解方法，并介绍较为常见的差分方程的基本概念和常见解法.

5.1　微分方程的基本概念

为了说明微分方程的基本概念，我们给出几何及经济学中的两个具体问题.

例 5.1.1　一曲线通过点(0,3)，且该曲线上任意一点处的切线斜率恰好等于其横坐标 x，求该曲线方程.

解　设此曲线的方程为 $y=y(x)$，由题意得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x \tag{5-1}$$

又曲线过点(0,3)，所以 $y=y(x)$还满足条件：

$$y\,|_{x=0}=3 \tag{5-2}$$

对式(5-1)两端积分，得

$$y=\frac{1}{2}x^2+C \tag{5-3}$$

其中，C 是任意常数.

把条件式(5-2)代入式(5-3)，得

$$3=\frac{1}{2}\times 0^2+C\text{，由此求得，}C=3$$

于是，所求曲线方程为

$$y=\frac{1}{2}x^2+3 \tag{5-4}$$

例 5.1.2　设某种商品每生产 x 单位固定成本为 2000 元，边际成本为 $0.4x+2$，求该商品的总成本函数.

解　设此商品的总成本函数 $C=C(x)$，由题意得到

$$C'(x)=0.4x+2 \tag{5-5}$$

又固定成本为 2000 元，所以 $C=C(x)$还满足条件：

$$C\,|_{x=0}=2000 \tag{5-6}$$

对式(5-5)两端积分，得

$$C(x)=0.2x^2+2x+C \tag{5-7}$$

其中，C 是任意常数.

把条件式(5-6)代入式(5-7),得 $C=2000$.

于是,总成本函数

$$C(x)=0.2x^2+2x+2000 \tag{5-8}$$

在初等数学里,我们把含有未知数的等式叫做方程.比如,$x^2+2x-1=0$ 就是一个方程.将方程的概念进一步推广——含有未知量的等式叫做方程.未知量有很多种,如果未知量代表的是数,这样的方程与我们以前讲的方程一致;如果未知量代表的是函数,就是函数方程.例如,$f^2(x)+f(x)-x^2=0$ 就是一个函数方程,其中 $f(x)$是一个未知的函数.在此基础上我们来定义微分方程——含有未知函数及其导数或微分的方程,称为微分方程.上述两个例子中的式(5-1)和式(5-5)中都含有未知函数的导数,因此都是微分方程.

微分方程中的未知函数是一元函数,称为常微分方程;微分方程中的未知函数是多元函数,称为偏微分方程.本书仅讨论常微分方程.

我们把微分方程中的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.例如,方程(5-1)和方程(5-5)都是一阶微分方程;又如方程

$$y''+xy'+y\sin x=\mathrm{e}^x$$

是二阶微分方程;方程

$$y^{(4)}-(y')^5+x^2y=\cos x$$

是四阶微分方程;方程

$$y^{(n)}=\sin x$$

是 n 阶微分方程.

一般地,n 阶微分方程的形式

$$F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{5-9}$$

这里我们需指出的是,n 阶微分方程中,$y^{(n)}$ 必定存在,但 $x,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}$ 可以不出现.

对微分方程而言,使得方程成立的函数称为微分方程的解.例如,函数(5-3)、(5-4)都是方程(5-1)的解;函数(5-7)、(5-8)都是方程(5-5)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且相互独立的任意常数的个数等于微分方程的阶数(这里相互独立的任意常数,是指这些任意常数不能合并而使得其个数减少),这样的解称为微分方程的通解;不含有任意常数的解称为微分方程的特解.例如,函数(5-3)和(5-7)分别是微分方程(5-1)和(5-5)的通解;而函数(5-4)和(5-8)分别是微分方程(5-1)和(5-5)的特解.又如 $y=x^2+C_1x+C_2$ 是二阶方程 $y''=2$ 的通解,而 $y=x^2+C_1+C_2$ 不是方程 $y''=2$ 的通解.这是因为 $y=x^2+C_1+C_2$ 中尽管有两个任意常数,但不是相互独立的,若令 $C=C_1+C_2$,则实际上只有一个任意常数.注意,$y=x^2+C_1+C_2$ 也不是方程 $y''=2$ 的特解,因为它含有任意常数.

例 5.1.3 验证函数

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x \quad (C_1,C_2\text{ 是任意常数})$$

是二阶微分方程

$$y''+4y=0$$

的通解.

解　由于

$$y' = -2C_1\sin2x + 2C_2\cos2x$$
$$y'' = -4C_1\cos2x - 4C_2\sin2x$$

代入微分方程,得

$$y'' + 4y = -4C_1\cos2x - 4C_2\sin2x + 4(C_1\cos2x + C_2\sin2x) = 0$$

因此,$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$ 是所给二阶微分方程的解.又由于,C_1,C_2 是相互独立的两个任意常数,且该微分方程是二阶方程,故 $y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$ 是微分方程的通解.

由上可以知道,一阶微分方程的通解中含有一个任意常数,因此如果我们知道 $x=x_0$ 时,$y=y_0$,就可以由此确定这个任意常数.把用来确定通解中的任意常数的条件称为初始条件.例如,式(5-3)和式(5-7)分别是方程(5-1)和方程(5-5)的初始条件.对于二阶微分方程,由于通解中含有两个任意常数,因而可以用条件 $y|_{x=x_0}=y_0$,$y'|_{x=x_0}=y_1$ 来确定这两个任意常数.

一般地,n 阶微分方程(5-9)的初始条件为

$$y|_{x=x_0} = y_0,\quad y'|_{x=x_0} = y_1,\quad y''|_{x=x_0} = y_2,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1} \tag{5-10}$$

其中,x_0,y_0,y_1,y_2,$\cdots$,y_{n-1} 都是已知常数.

求微分方程(5-9)满足初始条件(5-10)的特解,这样的问题称为**初值问题**.例如,$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$ 是一阶微分方程的初值问题;$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1 \end{cases}$ 是二阶微分方程的初值问题,等等.例 5.1.1 中,所求解的曲线方程就是一阶微分方程的初值问题 $\begin{cases} y'=x \\ y|_{x=0}=3 \end{cases}$ 的解.

例 5.1.4　已知函数

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}\quad (C_1,C_2\text{ 是任意常数})$$

是二阶微分方程 $y''-y=0$ 的通解,求满足初始条件

$$y|_{x=0} = 1,\quad y'|_{x=0} = 3$$

的特解.

解　由于

$$y' = C_1e^x - C_2e^{-x}$$

将条件 $y|_{x=0}=1$,$y'|_{x=0}=3$ 分别代入 y,y',得

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 3 = C_1 - C_2 \end{cases}$$

解得 $C_1=2$,$C_2=-1$,因此所求特解为

$$y = 2e^x - e^{-x}$$

习题 5-1

1. 下列方程是否是微分方程?并指出微分方程的阶数.

(1) $x^3y''+5xy=\sin x$;　　　　(2) $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$;

(3) $e^y+\sin x\cdot y=2x+1$; (4) $y'''-2x(y')^2+x=0$;

(5) $\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=2x$; (6) $y^3y'+(y'')^2-x^5=0$.

2. 下列方程是否是微分方程的解? 并指出是通解还是特解.

(1) $xy'\ln x+y=0, y=\frac{C}{\ln x}$; (2) $y''=y^2+x^2, y=\frac{1}{x}$;

(3) $y''-3y'+2y=0, y=e^x+2e^{2x}$; (4) $y'^2+y^2-1=0, y=\sin(x+C)$.

3. 验证函数 $y=C_1\sin(\omega x+C_2)$(C 为任意常数),是微分方程 $y''+\omega^2y=0$ 的通解.

4. 验证由方程 $x^2-xy+y^2=C$(C 为任意常数)确定的函数,是微分方程 $(x-2y)y'=2x-y$ 的通解,并求满足条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解.

5. 验证函数 $y=e^x\int_0^x e^{t^2}dt+Ce^x$($C$ 为任意常数),是微分方程 $y'-y=e^{x+x^2}$ 的通解.

6. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线斜率等于该点横坐标的平方的一半,且曲线过点(1,1),求曲线方程.

5.2 可变量分离的微分方程

对于一般的微分方程,要求它的解是很困难的,即使是一阶微分方程 $y'=f(x,y)$,它的解也是难于求解的,我们在这里只介绍几种简单的微分方程的解法.另外,我们总是假设下面的积分等运算总是有意义的.

5.2.1 可分离变量的微分方程

可变量分离的微分方程是最简单也是最基本的一阶微分方程,这类方程的解法是求解其他一阶微分方程的基础.

我们把形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{5-11}$$

的方程,称为可变量分离的微分方程,其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是 x,y 的连续函数.显而易见,方程的特点是 $\frac{dy}{dx}$ 可表示为变量 x 的函数 $f(x)$ 和变量 y 的函数 $g(y)$ 的乘积.

这类方程是容易求解的.求解的一般步骤是:

第一步 分离变量

当 $g(y)\neq 0$ 时,方程总可以变形为

$$\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$$

第二步 两边同时积分

当 $f(x)$ 与 $\frac{1}{g(y)}$ 可积时,方程两边同时积分,可得到

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$$

由此得到方程的通解

$$G(y)=F(x)+C$$

通常我们称这种形式的通解为隐式通解，其中 $G(y)=\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$，$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$. 要注意的是，方程两边同时积分时，左边是对变量 y 积分，右边是对变量 x 积分.

我们可以验证一下，若方程的解为 $y=\Phi(x)$，且满足 $G(y)=F(x)+C$，则由隐函数求导法则可知，

$$\frac{1}{g(y)}\cdot y'=f(x)$$

即

$$y'=f(x)g(y)$$

由此可见，隐函数 $G(y)=F(x)+C$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的通解.

例 5.2.1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-x}y$ 的通解.

解　当 $y\neq0$ 时，将方程分离变量可得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

两端积分，得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=-\mathrm{e}^{-x}+C_1$$

从而

$$y=\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}=C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

其中 $C_2=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 是不为零的任意常数. 因为 $y=0$ 也是方程的解，这时只要 C_2 等于零即可. 因此方程的通解可表示为

$$y=C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\quad(C\text{ 为任意常数})$$

例 5.2.2　求微分方程 $(1+x^2)xy\mathrm{d}y-(1+y^2)\mathrm{d}x=0$ 的通解.

解　方程变形为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$$

将方程分离变量可得

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{(1+x^2)x}\mathrm{d}x$$

两端分别积分，

$$\int\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{(1+x^2)x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\int\frac{1}{(1+x^2)x}\mathrm{d}x$$

又

$$\int\frac{1}{(1+x^2)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(1+x^2)x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln C$$

故有

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln C$$

整理可得

$$1+y^2=C\frac{x^2}{1+x^2}$$

于是微分方程的通解为

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2}=C\quad(C\text{ 为任意常数})$$

例 5.2.3 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-x^2+y^2-x^2y^2$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解.

解 方程变形为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-x^2)(1+y^2)$$

将方程分离变量,两边积分可得

$$\int\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int(1-x^2)\mathrm{d}x$$

方程的通解为 $$\arctan y=x-\frac{1}{3}x^3+C$$

将初始条件 $x=0,y=0$ 代入,可得 $C=0$
因此,所求方程的特解为

$$\arctan y=x-\frac{1}{3}x^3$$

5.2.2 齐次微分方程

有些微分方程虽不能分离变量,但是我们可以通过适当的变量代换,将其化为可变量分离的微分方程.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\tag{5-12}$$

的一阶微分方程称为齐次微分方程,简称齐次方程.

例如,方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-2xy}{x^2}$是齐次方程,这是因为等式右边分子、分母同除以 x^2,原式可化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}$.

对于齐次方程(5-12),总可以利用变量代换

$$u=\frac{y}{x}\tag{5-13}$$

的方法将它化为可分离变量的微分方程. 注意,这里 $u=u(x)$,是 x 的未知函数.

由式(5-13)可得,$y=ux$,此时,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

将其代入式(5-12)得，

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

分离变量，得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边同时积分，得

$$\int \frac{1}{\varphi(u) - u}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

即

$$\int \frac{1}{\varphi(u) - u}\mathrm{d}u = \ln|x| + C$$

将左边的积分求出后，再将 $u = \frac{y}{x}$ 代入，就得到方程的通解.

例 5.2.4　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \cot\frac{y}{x}$的通解.

解　令 $u = \frac{y}{x}$，则

$$y = ux, \quad 且 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入方程可得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u + \cot u, \quad 即 \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cot u$$

分离变量，并两边积分可得

$$\int \tan u\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

即

$$-\ln|\cos u| = \ln|x| - \ln|C| = \ln\left|\frac{x}{C}\right|$$

所以

$$\frac{1}{\cos u} = \frac{x}{C}, \quad 即\ x\cos u = C$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入，就得到方程的通解

$$x\cos\frac{y}{x} == C$$

例 5.2.5　求微分方程$(x^3 + y^3)\mathrm{d}x - 3xy^2\mathrm{d}y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的特解.

解　方程可以化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

该方程为齐次方程,令 $u=\dfrac{y}{x}$,则

$$y=ux,\quad 且\quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

代入方程可得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2}$$

即

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2}-u=\frac{1-2u^3}{3u^2}$$

分离变量,并两边积分可得

$$\int\frac{3u^2}{1-2u^3}du=\int\frac{1}{x}dx$$

即

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u^3|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|C|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$$

整理得

$$1-2u^3=\frac{C}{x^2},\quad 即\quad x^2(1-2u^3)=C$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入,就得到方程的通解

$$x^2-\frac{2y^3}{x}=C,\quad 即\quad x^3-2y^3=Cx$$

把初始条件 $y(1)=1$ 代入,可得 $C=-1$

因此所求的特解为

$$x^3-2y^3+x=0$$

*5.2.3 可化为齐次方程的微分方程

我们知道,方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ 显然是齐次方程,但对方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+e}{cx+dy+f}$(其中 $ad-bc\neq0$)来说,不是齐次方程. 我们可以通过一个变量代换将它化为齐次方程的形式.

具体做法是:令

$$x=u+h,\quad y=v+g$$

其中 h,g 是待定的常数. 于是

$$dx=du,\quad dy=dv$$

从而原方程可化为

$$\frac{dv}{du}=\frac{dy}{dx}=\frac{au+bv+ah+bg+e}{cu+dv+ch+dg+f}$$

由于方程组

$$\begin{cases}ah+bg+e=0\\ ch+dg+f=0\end{cases}$$

中,$ad-bc\neq0$,因此可确定唯一的 h,g 的值,这时原方程化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{au+bv}{cu+dv}$$

例 5.2.6　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+3}{x+y-1}$的通解.

解　令 $x=u+h$，$y=v+g$，则有

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}v$$

代入方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u+h-v-g+3}{u+h+v+g-1}=\frac{u-v+h-g+3}{u+v+h+g-1}$$

令$\begin{cases}h+g-1=0\\h-g+3=0\end{cases}$，解此方程得 $h=-1$，$g=2$.

这时原方程化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u-v}{u+v}=\frac{1-\dfrac{v}{u}}{1+\dfrac{v}{u}}$$

再令 $w=\frac{v}{u}$，则$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=w+u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}$，代入方程，得

$$w+u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}=\frac{1-w}{1+w}$$

即
$$u\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}=\frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

分离变量，得到

$$\frac{1+w}{1-2w-w^2}\mathrm{d}w=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

两边同时积分，得

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2w-w^2|=\ln|u|-\frac{1}{2}\ln|C_1|,\quad (C_1\text{ 是任意常数})$$

即
$$u^2(w^2+2w-1)=C_1$$

再将 $w=\frac{v}{u}=\frac{y-2}{x+1}$，代入上式，即得方程的通解为

$$y^2-x^2+2xy-6x-2y=C,\quad (C\text{ 是任意常数})$$

要注意的是，若$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{e}{f}$，则方程组$\begin{cases}ah+bg+e=0\\ch+dg+f=0\end{cases}$无解. 这时需要用另外的方法来求解.

例 5.2.7　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4x+6y+4}{2x+3y+6}$的通解.

解　原方程可以化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2-\frac{8}{2x+3y+6}$$

令 $u=2x+3y$，则 $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$，即$\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2\right)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入方程，得到

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2\right)=2-\frac{8}{u+6}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2+\frac{6u+12}{u+6}$$

分离变量,得到

$$\frac{u+6}{u+3}\mathrm{d}u=8\mathrm{d}x$$

两边同时积分,得到

$$u+3\ln|u+3|=8x+C$$

再将 $u=2x+3y$ 代入上式,即得到方程的通解为

$$-6x+3y+3\ln|2x+3y+3|=C$$

习题 5-2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $xy'-y\ln y=0$;
(2) $(1+x)\mathrm{d}y+(1-y)\mathrm{d}x=0$;
(3) $y'=\mathrm{e}^{y}-1$;
(4) $y'-xy'=2(y^2+y')$;
(5) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}y+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{y})\mathrm{d}x=0$;
(6) $\cos x\sin y\mathrm{d}y+\sin x\cos y\mathrm{d}x=0$;
(7) $y^2+x^2y'=xyy'$;
(8) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$;
(9) $x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$;
(10) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y'=3(x-1)^2(1+y^2)$, $y|_{x=0}=1$;
(2) $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$, $y|_{x=1}=1$;
(3) $(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y+\cos y\mathrm{d}x=0$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;
(4) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $y|_{x=0}=1$.

*3. 将下列微分方程化为齐次方程并求其通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y-4}{1-x-y}$;
(2) $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$.

4. 一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任意切线段均被切点所平分,求此曲线方程.

5.3 一阶线性微分方程

5.3.1 一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{5-14}$$

的微分方程,称为一阶线性微分方程.这是因为方程中未知函数 y 及其导数都是一次的.

如果 $Q(x)\neq 0$,则方程(5-14)为非齐次线性的微分方程;若 $Q(x)=0$,则称方程(5-14)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{5-15}$$

我们称它为对应于非齐次线性微分方程(5-14)的齐次线性微分方程.方程(5-14)与方程(5-15)有密切的联系,为了求解方程(5-14),我们先来求解方程(5-15).

一阶线性齐次微分方程(5-15)是可分离变量的微分方程.分离变量,得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-P(x)\mathrm{d}x$$

两边积分,得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$$

整理得
$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad (\text{其中 } C=\pm \mathrm{e}^{C_1})$$

这是齐次方程(5-15)的通解.下面将利用这个解来求非齐次微分方程的解.我们采用的方法称为常数变易法.用待定函数 $C(x)$来代替任意常数 C,即设函数

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{5-16}$$

是非齐次方程(5-14)的解.

则有
$$y'=C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}P(x)$$

把 y 和 y'代入非齐次方程(5-14),得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}p(x)+P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

即
$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

所以
$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两边积分,得

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

把求得的 $C(x)$的表示式代入式(5-16)中,即可求得非齐次线性微分方程(5-14)的通解为

$$y=\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{5-17}$$

即
$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

其中第一项 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是非齐次方程(5-14)对应的齐次方程(5-15)的通解,第二项是式(5-17)中当 $C=0$ 时的结果,因此为非齐次方程(5-14)的一个特解.由此可得,非齐次线性方程(5-14)的通解可以表示为对应的齐次方程的通解加上此方程的一个特解.这一结论对于高阶非齐次线性微分方程同样成立.

例 5.3.1　求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}=\ln^2 x$ 的通解.

解　该方程为一阶非齐次线性微分方程,我们可以利用常数变易法,也可以直接套用通解公式两种求解.

方法 1　常数变易法

先求原方程对应的齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=0$$

的通解.分离变量,得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分,得

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|=\ln|Cx|$$

所以,对应齐次方程的通解为

$$y=Cx\quad(\text{其中 } C \text{ 为任意常数})$$

应用常数变易法,设

$$y=C(x)\cdot x\quad(\text{这里 } C(x) \text{ 是待定函数})$$

是原方程的通解,则有

$$y'=C'(x)x+C(x)$$

代入原方程,得

$$C'(x)x+C(x)-\frac{1}{x}C(x)x=\ln^2 x$$

即
$$C'(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$$

从而
$$C(x)=\int C'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln^3 x+C$$

把 $C(x)$ 代入 $y=C(x)\cdot x$,即得原方程的通解为

$$y=\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+C\right)x\quad(\text{其中 } C \text{ 为任意常数})$$

方法 2　直接代入通解公式

设 $P(x)=-\frac{1}{x}$,$Q(x)=\ln^2 x$,则原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\\&=\left(\int\ln^2 x\cdot\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\left(\int\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C\right)\cdot x\\&=\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+C\right)x\end{aligned}$$

例 5.3.2　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2-x}{x^2}y=\frac{1}{x}$的通解.

解　该方程为一阶非齐次线性微分方程,代入通解公式即可.

设 $P(x)=\frac{2-x}{x^2}$,$Q(x)=\frac{1}{x}$,

于是
$$\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2-x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{x}-\ln x$$

从而
$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}-\ln x}=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$$

且可得 $-\int P(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{x}+\ln x$,从而 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=x\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$

则原方程的通解为

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \\
&= \left(\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}\mathrm{d}x + C\right)x\,\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = \left(\int \frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}\mathrm{d}x + C\right)x\,\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} + C\right)x\,\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}x + Cx\,\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}
\end{aligned}
$$

例 5.3.3　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{y\mathrm{e}^y-x}$满足条件$y(2)=1$的特解.

解　该方程不是关于 y 的一阶非齐次线性微分方程.但如果把 y 看做自变量,把 x 看做未知函数,则方程为关于 x 的一阶非齐次线性微分方程.原方程可化为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y\mathrm{e}^y - x}{y}$$

整理,即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=\mathrm{e}^y$$

设

$$P(y)=\frac{1}{y},\quad Q(y)=\mathrm{e}^y,$$

于是,方程的通解为

$$
\begin{aligned}
x &= \left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right)\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y} \\
&= \left(\int \mathrm{e}^y\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y} = \left(\int \mathrm{e}^y\cdot y\mathrm{d}y + C\right)\frac{1}{y} \\
&= (y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y + C)\,\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

把初始条件 $x=2,y=1$ 代入,可得 $C=2$,因此,方程的特解为

$$x = (y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y + 2)\,\frac{1}{y},\quad 即\quad xy - y\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^y = 2$$

例 5.3.4　求一曲线方程,该曲线过点(0,2),且在点(x,y)处的切线斜率等于该点的横坐标与纵坐标之和.

解　设所求曲线方程为 $y=y(x)$,由题意可知

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y \\ y(0) = 2\end{cases}$$

这是一个一阶非齐次线性微分方程的初值问题.

设

$$P(x)=-1,\quad Q(x)=x,$$

则原方程的通解为

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \\
&= \left(\int x\mathrm{e}^{\int -1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)\mathrm{e}^{-\int -1\mathrm{d}x} = \left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C\right)\mathrm{e}^x \\
&= (-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C)\mathrm{e}^x = -x - 1 + C\mathrm{e}^x
\end{aligned}
$$

把初始条件 $x=0,y=2$ 代入,可得 $C=3$,因此,所求曲线方程为

$$y = -x - 1 + 3\mathrm{e}^x$$

5.3.2 伯努利方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n} \quad (n\neq 0,1) \tag{5-18}$$

的方程称为伯努利(Bernoulli)方程.当 $n=0$ 时,它是非齐次线性微分方程;当 $n=1$ 时,它是可变量分离的微分方程;当 $n\neq 0,1$ 时,该方程不是线性方程,但是可以通过变量代换的方法将其化为线性方程.当 $y\neq 0$ 时,方程两边同时除以 y^n,有

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

若我们引入变量

$$z=y^{1-n}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以上面的方程变为

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

这是一个一阶非齐次线性的微分方程.解此方程后,将 $z=y^{1-n}$ 代入,就可以得到原方程的解.

例 5.3.5 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{x}y^{3}$ 的通解.

解 该方程为伯努利方程,方程两边同时除以 y^3,有

$$y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^{-2}=\mathrm{e}^{x}$$

令 $z=y^{-2}$,则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2y^{-3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2z=-2\mathrm{e}^{x}$$

利用一阶非齐次线性方程的通解公式,可求得上面方程的通解为

$$\begin{aligned} z&=\left(\int -2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\int -2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int -2\mathrm{d}x}\\ &=(2\mathrm{e}^{-x}+C)\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{x}+C\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

把 $z=y^{-2}$ 代入,因此原方程的通解为

$$y^{-2}=2\mathrm{e}^{x}+C\mathrm{e}^{2x},\quad 即 \quad (2\mathrm{e}^{x}+C\mathrm{e}^{2x})y^{2}=1$$

习题 5-3

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $xy'+y=x\mathrm{e}^{x}$; (2) $y'-y\cot x=2x\sin x$;

(3) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$；　(4) $\frac{dy}{dx}+2xy=2xe^{-x^2}$；

(5) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$；　(6) $y'+y\cot x=e^{\cos x}$；

(7) $y'+\frac{y}{x}=(\ln x)y^2$；　(8) $\frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$；

(9) $x^2y'+xy=y^2$；　(10) $2xy^3y'+x^4-y^4=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{2-3x^2}{x^3}y=1, y|_{x=1}=0$；　(2) $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x, y|_{x=0}=1$；

(3) $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0, y|_{x=1}=e$；　(4) $y'+y=y^2(\cos x-\sin x), y|_{x=0}=1$.

3. 求一曲线方程，该曲线过点$(0,2)$，并且它在点(x,y)处的切线斜率等于横坐标与纵坐标之和.

4. 设函数 $f(x)$可微，且满足

$$\int_0^x[2f(t)-1]dt = f(x)-1$$

求 $f(x)$.

5.4　可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程是指二阶及二阶以上的微分方程. 对于一般的高阶微分方程没有普遍适用的求解方法，但是对于特殊类型的高阶方程，我们可以通过适当的变量代换将其化为低阶微分方程，因为一般来说，低阶方程的求解要比高阶方程容易. 本节我们仅就三种容易降阶的高阶微分方程的求解方法展开讨论.

5.4.1　$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

这类方程的特点是方程中仅含有 $y^{(n)}$项，不含 y 及 y 的其他阶导数，且 $y^{(n)}$可以用 x 的函数表示. 对方程两边分别积分，就可得

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

这是 $n-1$ 阶微分方程. 再次两边分别积分，可得

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)dx + C_1\right]dx + C_2$$

这是 $n-2$ 阶微分方程. 类此方法进行，连续积分 n 次，就可以得到该方程的含有 n 个任意常数的通解.

例 5.4.1　求微分方程 $y'''=x^2+e^{-x}$的通解.

解　方程两边连续积分 3 次，得

$$y'' = \frac{1}{3}x^3 - e^{-x} + C_1$$

$$y' = \frac{1}{12}x^4 + e^{-x} + C_1x + C_2$$

$$y=\frac{1}{60}x^5-\mathrm{e}^{-x}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

这就是原方程的通解.

例 5.4.2 求微分方程 $y''=x\sin x$ 满足条件 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ 的特解.

解 方程两边积分,得

$$y'=\int x\sin x\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C_1$$

由 $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$,可求得 $C_1=1$,即

$$y'=-x\cos x+\sin x+1$$

两边再次积分,得

$$\begin{aligned}y&=\int(-x\cos x+\sin x+1)\mathrm{d}x+C_2\\&=-x\sin x-2\cos x+x+C_2\end{aligned}$$

由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,可求得 $C_2=1$,则原方程所求特解为

$$y=-x\sin x-2\cos x+x+1$$

5.4.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程

这类方程的特点是方程中不含有未知函数 y. 为了降低方程的阶数,我们可作变量代换,令 $y'=p(x)$,则有 $y''=p'(x)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,代入方程,得

$$p'=f(x,p)$$

这时方程变为以 $p(x)$为未知函数的一阶的微分方程,设其通解为

$$p=\varphi(x,C_1)$$

再把 $y'=p(x)$代入,得方程

$$y'=\varphi(x,C_1)$$

对该方程进行积分,就可以得到原方程的通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

例 5.4.3 求微分方程 $y''=\frac{1}{x}y'+x\mathrm{e}^x$ 的通解.

解 所给方程式 $y''=f(x,y')$型. 令 $y'=p(x)$,则有

$$y''=p'(x)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

代入方程,得

$$p'=\frac{1}{x}p+x\mathrm{e}^x$$

即
$$p'-\frac{1}{x}p=x\mathrm{e}^x$$

这是关于 x,p 的一阶非齐次线性微分方程,可求得通解

$$p(x)=\left[\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=x\mathrm{e}^{x}+C_1x$$

从而
$$y'=x\mathrm{e}^{x}+C_1x$$
两边积分,可得原方程的通解为
$$y=(x-1)\mathrm{e}^{x}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2$$

例 5.4.4　求微分方程 $y''=\frac{3x^2}{1+x^3}y'$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 的特解.

解　令 $y'=p(x)$,则有 $y''=p'(x)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,代入方程,得
$$p'=\frac{3x^2}{1+x^3}p$$
分离变量,并两边积分,得
$$\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\int\frac{3x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$$
$$\ln|p|=\ln|1+x^3|+\ln|C_1|$$
因此
$$p=C_1(1+x^3)$$
即
$$y'=C_1(1+x^3)$$
又 $y'(0)=2$,可得 $C_1=2$,因此 $y'=2(1+x^3)$

两边积分,得
$$y=2x+\frac{1}{2}x^4+C_2$$
又 $y(0)=1$,可得 $C_2=1$,因此所求特解为
$$y=2x+\frac{1}{2}x^4+1$$

5.4.3　$y''=f(y,y')$型的微分方程

这类方程的特点是方程中不显含自变量 x. 解此方程时,为达到降阶的目的,仍令 $y'=p$(注意,与前一种类型不同的是,这里的 p 是变量 y 的函数,即 $p=p(y)$). 对于 y'',利用复合函数求导法则,有:
$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$
这样方程就变形为
$$p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$$
这是关于变量 y,p 的一阶微分方程. 设其通解为
$$y'=p=\varphi(y,C_1)$$
此方程可采用分离变量法求解. 分离变量并两边进行积分,就可以得到原方程的通解
$$\int\frac{1}{\varphi(y,C_1)}\mathrm{d}y=x+C_2$$

例 5.4.5　求微分方程 $y''+(y')^2=0$ 的通解.

解　令 $y'=p(y)$,则有 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入方程,得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0,\quad 即\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-p$$

分离变量,并两边积分,得

$$\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p=\int-\mathrm{d}y$$

因此
$$p=C_1\mathrm{e}^{-y}$$
即
$$y'=C_1\mathrm{e}^{-y}$$
分离变量,再次积分,得

$$\int\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\int C_1\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{e}^y=C_1x+C_2$$

即为原方程的通解.

习题 5-4

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y'''=\sin 2x+1$;
(2) $y''=x\mathrm{e}^x$;
(3) $y''+\sqrt{1-(y')^2}=0$;
(4) $xy''+y'=0$;
(5) $x^2y''+xy'=1$;
(6) $(1+x^2)y''=2xy'$;
(7) $y''=(y')^3+y'$;
(8) $2yy''=(y')^2+1$;
(9) $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$;
(10) $yy''-y^2=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y''=\mathrm{e}^{3x}-\sin x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$;
(2) $xy''+y'=x^2, y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=1$;
(3) $x^3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0, y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=1$;
(4) $y''=\mathrm{e}^{2y}, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$;
(5) $yy''=2(y'^2-y'), y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$;
(6) $y''=y^{-3}, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$.

5.5 线性微分方程解的结构

所谓线性微分方程,是指方程中未知函数 y 及其各阶导数 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 都是一次的.我们将形如

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)\qquad(5\text{-}19)$$

的方程称为 n 阶线性微分方程.其中 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 均为定义在区间 I 上的连续函数.

当 $f(x)\neq 0$ 时,称方程(5-19)为非齐次线性微分方程;当 $f(x)\equiv 0$ 时,方程(5-19)变为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0\qquad(5\text{-}20)$$

称为对应于非齐次线性微分方程(5-19)的齐次线性微分方程.

本节中我们讨论二阶非齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)\qquad(5\text{-}21)$$

及对应的齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5-22}$$

的解的结构.

5.5.1　二阶齐次线性微分方程解的结构

定理 5.5.1　若函数 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$都是二阶齐次线性方程(5-22)的解,则对任意常数 C_1,C_2,

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{5-23}$$

也是方程(5-22)的解.

证明　由于 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$都是方程(5-22)的解,所以

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

把 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$代入方程(5-22)左端,得

$$\begin{aligned} & [C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]'' + P(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]' + Q(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] \\ = & C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + P(x)C_1y_1'(x) + P(x)C_2y_2'(x) + Q(x)C_1y_1(x) + Q(x)C_2y_2(x) \\ = & C_1[y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)] + C_2[y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)] \\ = & 0 \end{aligned}$$

因此 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是方程(5-22)的解.

该定理说明齐次线性方程(5-22)的解的任意线性组合,仍是方程的解,即齐次线性方程的解具有叠加性.

从形式上看,解(5-23)中含有两个任意常数,但它未必是方程(5-22)的通解.这是因为,如果 $y_2(x)=ky_1(x)$,则

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1(x) + C_2ky_1(x) = (C_1 + C_2k)y_1(x) \\ &= Cy_1(x) \quad (\text{其中 } C = C_1 + C_2k) \end{aligned}$$

这时解中仅含有一个任意常数,因此它不是方程(5-22)的通解.

为表示方程(5-22)的通解,我们引入函数的线性相关与线性无关的概念.

定义 5.5.1　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$为定义在区间 I 上的 n 个函数,如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得在区间 I 内恒有

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0$$

成立,那么称这 n 个函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间 I 上线性相关;否则称为线性无关.

例如,函数 $1,\cos^2x,\cos2x$ 是线性相关的.因为当 $k_1=1,k_2=-2,k_3=1$ 时,恒有

$$1 - 2\cos^2x + \cos2x = 0$$

成立;又如,函数 $1,x,x^2$ 在任意区间 I 上线性无关的.因为如果 k_1,k_2,k_3 不全为零,那么在区间 I 上至多只有两个 x 值能使得二次三项式

$$k_1 + k_2x + k_3x^2$$

为零;要想使得它恒等于零,必须 k_1,k_2,k_3 全为零.

从上述定义不难得出两个函数相关还是无关的判定.设 $y_1(x),y_2(x)$为定义在区间 I

上的两个函数,若存在常数 k,恒有

$$y_1(x) = ky_2(x), \quad 或 \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$$

则称 $y_1(x)$,$y_2(x)$在区间 I 上线性相关;否则称线性无关.

定理 5.5.2 若函数 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$是二阶齐次线性方程(5-22)的两个线性无关的特解,则

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

就是方程(5-22)的通解.

证明 由定理 5.5.1 可知,$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是方程(5-22)的解,且由于 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$线性无关,所以

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq 常数$$

因此 C_1,C_2 不能合并成为一个任意常数,即 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$中确实含有两个相互独立的任意常数,所以

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

就是方程(5-22)的通解.

例 5.5.1 证明 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$是二阶齐次线性方程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解.

证明 令 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$,则 $y_1'(x)=\mathrm{e}^x$,$y_1''(x)=\mathrm{e}^x$,因此有

$$y_1''-4y_1'+3y_1 = 0$$

即 $y_1(x)=\mathrm{e}^x$ 是方程 $y''-4y'+3y=0$ 的解.同理,$y_2(x)=\mathrm{e}^{3x}$也是方程 $y''-4y'+3y=0$ 的解.

又

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{3x}}=\mathrm{e}^{-2x}\neq 常数$$

因此 e^x,e^{3x}线性无关,由定理 5.5.2 可知,

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x}$$

是二阶齐次线性方程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解.

5.5.2 二阶非齐次线性微分方程解的结构

在 5.3 节中我们讨论了一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

的通解

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

是由两部分组成的:一部分是非齐次方程本身的一个特解;另一部分是对应的齐次方程的通解.实际上,不仅一阶非齐次线性微分方程的通解具有这样的结构,二阶非齐次线性微分方程的通解也有同样的结构.

定理 5.5.3 设 y^* 是二阶非齐次线性方程(5-21)的一个特解,Y 是对应的齐次线性方程(5-22)的通解,则

$$y = y^* + Y$$

就是非齐次线性方程(5-21)的通解.

证明　先证明 $y=y^*+Y$ 是方程(5-21)的解.
由已知条件可知

$$(y^*)''+P(x)(y^*)'+Q(x)(y^*)=f(x)$$

$$Y''+P(x)Y'+Q(x)Y=0$$

因此

$$\begin{aligned}&(y^*+Y)''+P(x)(y^*+Y)'+Q(x)(y^*+Y)\\=&(y^*)''+Y''+P(x)(y^*)'+P(x)Y'+Q(x)(y^*)+Q(x)Y\\=&f(x)+0\\=&f(x)\end{aligned}$$

这说明 $y=y^*+Y$ 是方程(5-21)的解.

又因为 Y 是二阶齐次线性方程(5-22)的通解,所以 Y 中含有两个相互独立的任意常数,因此,$y=y^*+Y$ 中也含有两个相互独立的任意常数,所以 $y=y^*+Y$ 就是非齐次线性方程(5-21)的通解.

定理 5.5.4　设函数 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$均为二阶非齐次线性方程(5-21)的两个解,那么

$$y=y_1(x)-y_2(x)$$

是对应的齐次线性方程(5-22)的解.

证明　由于 $y=y_1(x)$和 $y=y_2(x)$都是方程(5-21)的解,所以

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=f(x)$$

$$y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=f(x)$$

把 $y=y_1(x)-y_2(x)$代入方程(5-22)左端,得

$$\begin{aligned}&[y_1(x)-y_2(x)]''+P(x)[y_1(x)-y_2(x)]'+Q(x)[y_1(x)-y_2(x)]\\=&y_1''(x)-y_2''(x)+P(x)y_1'(x)-P(x)y_2'(x)+Q(x)y_1(x)-Q(x)y_2(x)\\=&[y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)]-[y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)]\\=&f(x)-f(x)=0\end{aligned}$$

这说明 $y=y_1(x)-y_2(x)$是对应的齐次线性方程(5-22)的解.

例 5.5.2　已知微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$有三个解:

$$y_1(x)=x,\quad y_2(x)=\mathrm{e}^x,\quad y_3(x)=\mathrm{e}^{2x}$$

求微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解.

解　由定理 5.5.4 可知,$y_1(x)-y_2(x)$,$y_2(x)-y_3(x)$是对应的齐次线性方程的解.又因为

$$\frac{y_1(x)-y_2(x)}{y_2(x)-y_3(x)}=\frac{x-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}}\neq\text{常数}$$

因此 $y_1(x)-y_2(x)$,$y_2(x)-y_3(x)$线性无关,由定理 5.5.2 得,微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解可表示为

$$y=C_1(x-\mathrm{e}^x)+C_2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x})$$

定理 5.5.5　设 $y_1^*(x)$和 $y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=g(x)$$

的特解,则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)+g(x) \tag{5-24}$$

的特解.

证明 把 $y=y_1^*(x)+y_2^*(x)$代入方程(5-24)左端

$$\begin{aligned}&[y_1^*(x)+y_2^*(x)]''+P(x)[y_1^*(x)+y_2^*(x)]'+Q(x)[y_1^*(x)+y_2^*(x)]\\=&[(y_1^*)''+P(x)(y_1^*)'+Q(x)(y_1^*)]+[(y_2^*)''+P(x)(y_2^*)'+Q(x)(y_2^*)]\\=&f(x)+g(x)\end{aligned}$$

因此,$y=y_1^*(x)+y_2^*(x)$是方程(5-24)的特解.

这一定理通常称为非齐次线性微分方程的解的叠加原理.

习题 5-5

1. 判别下列函数组在定义区间上是线性相关还是线性无关.

(1) e^{-x}, e^x;　　(2) $\sin x, \sin 2x$;

(3) $\ln\sqrt{x}, \ln x^2$;　　(4) $x, x\sin x$;

(5) $e^{3x}, 2e^{3x}$;　　(6) $x, \ln 2^x$.

2. 验证函数 $y_1=e^{-2x}, y_2=e^{2x}$都是微分方程 $y''-4y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

3. 已知方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的两个特解为 $y_1=e^{x^2}, y_2=xe^{x^2}$,试求该方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解.

4. 验证函数 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\dfrac{1}{3}$($C_1, C_2$ 是任意常数)是微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

5. 验证函数 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{e^x}{1+a^2}$($C_1, C_2$ 是任意常数)是微分方程 $y''+a^2y=e^x$ 的通解.

6. 已知二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的 3 个特解分别为

$$y_1=-x^2+x-1,\quad y_2=-x^2-1+3e^x,\quad y_3=-x^2+2x-1-e^x$$

求该方程的通解,并求该方程满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的特解.

5.6 二阶常系数线性微分方程

对于一般的线性微分方程,方程的解不仅没有规律性,甚至有些方程不可求解.但是有一类特殊的线性微分方程,即常系数线性微分方程,其求解具有较强的规律性.

形如

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{5-25}$$

的微分方程称为二阶常系数线性微分方程.其中 p, q 是确定常数,$f(x)$是定义在某个区间 I 上的连续函数.

当 $f(x)\neq 0$ 时,称方程(5-25)为二阶常系数非齐次线性微分方程;当 $f(x)\equiv 0$ 时,方程(5-25)变为

$$y''+py'+qy=0 \tag{5-26}$$

称为对应于非齐次线性微分方程(5-25)的二阶常系数齐次线性微分方程.

5.6.1　二阶常系数齐次线性微分方程

根据定理 5.5.2 可知,求二阶常系数齐次线性微分方程(5-26)的通解,关键在于求出它的两个线性无关的特解 y_1,y_2,这时方程(5-26)的通解

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

问题是,如何求出方程(5-26)的两个特解?

方程(5-26)中,y,y',y''乘上常数后相加即可等于零,因此考虑 y,y',y''这三项的表示式中关于 x 的函数部分是相同的,其表示式仅仅相差常数倍.我们知道,指数函数

$$y=\mathrm{e}^{rx}$$
$$y'=r\mathrm{e}^{rx}$$
$$y''=r^2\mathrm{e}^{rx}$$

具有该特点.因此,我们猜想方程(5-26)的解可能是 $y=\mathrm{e}^{rx}$.如果能够选取适当的常数 r,使得方程(5-26)成立,即可求解方程(5-26)的解为 $y=\mathrm{e}^{rx}$.

把 $y=\mathrm{e}^{rx}$,$y'=r\mathrm{e}^{rx}$,$y''=r^2\mathrm{e}^{rx}$代入方程(5-26),得

$$r^2\mathrm{e}^{rx}+pr\mathrm{e}^{rx}+q\mathrm{e}^{rx}=0$$

因为 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$,故上式等价于关于 r 的一元二次方程

$$r^2+pr+q=0 \tag{5-27}$$

由此可见,只要常数 r 满足方程(5-27),函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$就是方程(5-26)的解.因此,方程(5-26)的求解问题转化为一元二次方程(5-27)的求根问题.我们把方程(5-27)称为微分方程(5-26)的特征方程,并将特征方程(5-27)的根 r 称为微分方程(5-26)的特征根.

下面根据一元二次方程(5-27)的判别式的三种不同情况,分别给出微分方程(5-26)的通解表示方法.

(1) 当 $p^2-4q>0$ 时,特征方程有两个不相等的实根.不妨设为 r_1,r_2,且 $r_1\neq r_2$,这时

$$y_1=\mathrm{e}^{r_1x},\quad y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$$

是微分方程(5-26)的两个解.又因为

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\mathrm{e}^{r_1x}}{\mathrm{e}^{r_2x}}=\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}\neq \text{常数}$$

因而,$y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$,$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$是微分方程(5-26)的两个线性无关的解.所以,微分方程(5-26)的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$$

(2) 当 $p^2-4q=0$ 时,特征方程有两个相等的实根.不妨设为 $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$,这时我们仅得到微分方程(5-26)的一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$.为表示方程的通解,我们还需要求出与 y_1 线性无关的另一解 y_2.

不妨设$\dfrac{y_2}{y_1}=u(x)\neq C$,即 $y_2=\mathrm{e}^{r_1x}\cdot u(x)$.可求得

$$y_2'=\mathrm{e}^{r_1x}[u'(x)+r_1u(x)]$$

$$y_2''=\mathrm{e}^{r_1x}[u''(x)+2r_1u'(x)+r_1^2u(x)]$$

代入微分方程(5-26),

$$\mathrm{e}^{r_1x}[u''(x)+2r_1u'(x)+r_1^2u(x)]+\mathrm{e}^{r_1x}p[u'(x)+r_1u(x)]+\mathrm{e}^{r_1x}qu(x)=0$$

方程两边约去 e^{r_1x},得

$$u''(x)+(2r_1+p)u'(x)+(r_1^2+pr_1+q)u(x)=0$$

因为 r_1 是特征方程的二重根,

$$2r_1+p=0,\quad 且\ r_1^2+pr_1+q=0$$

因此有 $$u''(x)=0$$

对上式两次积分得 $$u(x)=C_1x+C_2$$

因为我们仅需得到一个不为常数的解,所以不妨取 $u(x)=x$.这样我们就得到微分方程(5-26)的与 y_1 线性无关的另一个特解

$$y_2=x\mathrm{e}^{r_1x}$$

从而,微分方程(5-26)的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2x\mathrm{e}^{r_1x}$$

即 $$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$$

(3) 当 $p^2-4q<0$ 时,特征方程有两个共轭的复数根.不妨设为 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$(这里 $\alpha=-\dfrac{p}{2},\beta=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$),这时我们可得到两个线性无关的复函数解

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x},\quad y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}$$

为了表示方便,我们希望得到实数形式的解,根据欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

有

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)$$

$$y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$$

根据定理 5.5.1,可得

$$\bar{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\bar{y}_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1-y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

仍是微分方程(5-26)的解,且

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x}{\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x}=\tan\beta x\neq 常数$$

因此$\bar{y}_1,\bar{y}_2$ 是微分方程(5-26)的两个线性无关的解,从而方程的通解

$$\begin{aligned}y&=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2\\&=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\end{aligned}$$

综合上述,求二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解,可按如下步骤进行:首先表示出特征方程 $r^2+pr+q=0$,并求出特征根 r;其次根据特征根的不同情况按照以下三种方式分别表示通解.

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不等的实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 5.6.1　求微分方程 $y''+3y'-4y=0$ 的通解.

解　所求微分方程的特征方程为

$$r^2+3r-4=0$$

即
$$(r-1)(r+4)=0$$

它有两个不相等的实数根 $r_1=1,r_2=-4$,因此方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$$

例 5.6.2　求微分方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解.

解　所求微分方程的特征方程为

$$r^2+6r+9=0$$

即
$$(r+3)^2=0$$

它有两个相等的实数根 $r_1=r_2=-3$,因此方程的通解为

$$y=(C_1+xC_2)e^{-3x}$$

例 5.6.3　求微分方程 $y''-6y'+10y=0$ 的通解.

解　所求微分方程的特征方程为

$$r^2-6r+10=0$$

此时
$$p^2-4q=36-40=-4<0$$

它有一对共轭的复数根 $r_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=3\pm i$,因此方程的通解为

$$y==e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

例 5.6.4　求微分方程 $y''+2y'+y=0$ 满足条件 $y(0)=4,y'(0)=-2$ 的特解.

解　所求微分方程的特征方程为

$$r^2+2r+1=0$$

它有两个相等的实数根 $r_1=r_2=-1$,因此方程的通解为

$$y=(C_1+xC_2)e^{-x}$$

代入初始条件,得 $C_1=4,C_2=2$

因此所求特解为
$$y=(4+2x)e^{-x}$$

5.6.2　二阶常系数非齐次线性微分方程

我们知道,二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)\tag{5-28}$$

的通解等于该方程的一个特解 y^* 与对应的齐次方程的通解 Y 之和.在本节 5.6.1 中,我们已经介绍了二阶常系数齐次线性微分方程的通解的求解,因此对于非齐次常系数线性微分方程,如果能够得到它的一个特解 y^*,我们就很容易表示其通解.

这里我们应用待定系数法,对于方程(5-28)右端的 $f(x)$ 具有以下两种形式时,讨论

其特解 y^* 的求法.

- $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$
- $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

对于微分方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x) \tag{5-29}$$

这里,λ 为确定常数,$P_m(x)$为 x 的 m 次多项式,即 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$.

注意到,方程(5-29)的右端 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$为指数函数与多项式的乘积.我们知道,只有指数函数与多项式的乘积的导数结果仍是这一形式,又因为 p,q 都是确定常数,因此可以猜想方程(5-29)的特解有可能是指数函数与多项式的乘积.不妨假设方程(5-29)的特解为:

$$y^*=e^{\lambda x}Q(x)\quad(\text{这里 }Q(x)\text{ 为待定函数})$$

则有

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

把 $y^*,y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$代入方程(5-29),并消去非零因子 $e^{\lambda x}$得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \tag{5-30}$$

上式两端都是 x 的 m 次多项式,为求得满足(5-30)式的多项式 $Q(x)$,我们分以下三种情况进行讨论。

(1) 若 $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$,即 λ 不是对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{5-31}$$

的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的特征根,这时式(5-30)左端多项式的最高次 m 次必定出现在 $Q(x)$中,即 $Q(x)$应为 m 次多项式.不妨设

$$Q(x)=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

其中,$b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为待定常数.代入式(5-30),比较等式两端 x 的同次幂的系数,可得 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 所满足的方程组,由此求得待定常数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$,并得到方程(5-29)的一个特解为

$$y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$$

(2) 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,且 $2\lambda+p\neq0$,即 λ 是对应的齐次方程(5-31)的特征方程

$$r^2+pr+q=0$$

的特征单根,这时式(5-30)左端多项式的最高次 m 次必定出现在 $Q'(x)$中.我们知道,多项式求导后次数比原来降低一次,即 $Q(x)$应为 $m+1$ 次多项式.因此可设

$$Q(x)=xQ_m(x)$$

其中,$Q_m(x)$为 m 次待定多项式.代入式(5-30),采用同样方法确定 $Q_m(x)$中的待定系数,并得到所求特解

$$y^*=e^{\lambda x}xQ_m(x)$$

(3) 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,且 $2\lambda+p=0$,即 λ 是对应的齐次方程(5-31)的特征方程

$$r^2+pr+q=0$$

的二重根，这时式(5-30)左端多项式的最高次 m 次必定出现在 $Q''(x)$ 中. 因此 $Q(x)$ 应为 $m+2$ 次多项式. 不妨设

$$Q(x) = x^2 Q_m(x)$$

其中，$Q_m(x)$ 为 m 次待定多项式. 代入式(5-30)，采用同样方法确定 $Q_m(x)$ 中的待定系数，并得所求特解

$$y^* = e^{\lambda x} x^2 Q_m(x)$$

综上所述，二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$$

的特解

$$y^* = e^{\lambda x} x^k Q_m(x)$$

其中，$Q_m(x)$ 是一个与 $P_m(x)$ 同次数的多项式，且按照 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是二重根，k 依次取值 0，1 或 2.

例 5.6.5　求微分方程 $y''+2y'+y=xe^{2x}$ 的一个特解.

解　这是二阶常系数非齐次线性微分方程. 对应齐次方程的特征方程

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

它有两个相等的实数根 $r_1=r_2=-1$.

又因为在非齐次方程中函数 $f(x)=xe^{2x}$，为 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，且 $P_m(x)=x$，$\lambda=2$.

由于 $\lambda=2$ 不是特征根，故设方程的特解为

$$y^* = Q(x)e^{2x} = (ax+b)e^{2x}$$

求 $y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$，代入方程，得

$$9ax + 6a + 9b = x$$

比较等式两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 6a + 9b = 0 \end{cases}$$

由此求得
$$a=\frac{1}{9},\quad b=-\frac{2}{27}$$

因此所求的一个特解为

$$y^* = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^{2x}$$

例 5.6.6　求微分方程 $y''-3y'=x^2+1$ 的通解.

解　先求对应齐次方程的通解. 对应齐次方程的特征方程

$$r^2 - 3r = 0$$

它有两个相等的实数根 $r_1=0$，$r_2=3$.

因此对应齐次方程的通解

$$Y = C_1 + C_2 e^{3x}$$

再求非齐次方程的一个特解. 非齐次方程中函数 $f(x)=x^2+1$，为 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，且 $P_m(x)=x^2+1$，$\lambda=0$.

由于 $\lambda=0$ 是特征单根，故设方程的特解为

$$y^* = xQ_m(x) = x(ax^2+bx+c)$$

求 $y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$,代入方程,得

$$-9ax^2+(6a-6b)x+2b-3c=x^2+1$$

比较等式两端同次幂的系数,得

$$\begin{cases}-9a=1\\6a-6b=0\\2b-3c=1\end{cases}$$

由此求得 $a=-\dfrac{1}{9},\quad b=-\dfrac{1}{9},\quad c=-\dfrac{11}{27}$

因此所求的一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2-\frac{11}{27}x$$

故原方程的通解

$$y=y^*+Y=-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2-\frac{11}{27}x+C_1+C_2e^{3x}$$

例 5.6.7 求微分方程 $y''+6y'+9y=xe^{-3x}$ 满足 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 求解的基本思想是先求其通解,再确定其任意常数而得.

注意到其特征方程 $r^2+6r+9=0$ 有二重根 $r=-3$,所以它相应的齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-3x}\quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}).$$

令原方程的一个特解

$$y^*=x^2(ax+b)e^{-3x},$$

代入后比较系数得 $a=\dfrac{1}{6}, b=0$. 故原方程通解为:

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^{-3x}+\frac{1}{6}x^3e^{-3x}$$

把 $x=0, y=0$ 代入,得 $C_1=0$;把 $x=0, y'=1$ 代入,得 $C_2=1$. 满足条件的特解为

$$y=xe^{-3x}+\frac{1}{6}x^3e^{-3x}$$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

对于微分方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x] \tag{5-32}$$

这里,λ, ω 为确定常数,$P_l(x), P_n(x)$ 分别为 x 的 l 次和 n 次多项式.

利用欧拉公式

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$

方程(5-32)右端可做如下整理:

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]\\&=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2i}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}[P_l(x)-\mathrm{i}P_n(x)]\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\frac{1}{2}[P_l(x)+\mathrm{i}P_n(x)]\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$
$$=P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

其中
$$P(x)=\frac{1}{2}[P_l(x)-\mathrm{i}P_n(x)],$$
$$\overline{P}(x)=\frac{1}{2}[P_l(x)+\mathrm{i}P_n(x)],$$
是一对互为共轭的 m 次多项式. 这里 $m=\max\{l,n\}$.

根据定理 5.5.5 解的叠加原理，方程 $y''+py'+qy=P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$ 的特解可按以下方式求得. 分别求出方程
$$y''+py'+qy=P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}\tag{5-33}$$
和方程
$$y''+py'+qy=\overline{P}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}\tag{5-34}$$
的特解 y_1^* 和 y_2^*，则原方程的特解
$$y^*=y_1^*+y_2^*$$

利用例 5.6.1 所得结果，对于方程(5-33)，我们可设其特解为
$$y_1^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$$
其中，$Q_m(x)$是一个 m 次的多项式，且按照 $\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根、是特征方程的单根，k 依次取值 0 或 1.

注意到，方程(5-33)和方程(5-34)等号的右边互为共轭，因此可设方程(5-34)的特解为
$$y_2^*=\overline{y_1^*}=x^k\,\overline{Q_m}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$
这时原方程的特解
$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+x^k\,\overline{Q_m}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$
$$=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[Q_m(x)(\cos\omega x+\mathrm{i}\sin\omega x)+\overline{Q_m}(x)(\cos\omega x-\mathrm{i}\sin\omega x)]$$
由于括号内的两项互为共轭，相加后即无虚部，所以可以写成实函数的形式
$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x)]$$

综合上述，对于二阶常系数非齐次线性微分方程
$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$
的特解可设为
$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x)]$$
其中，$R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$都是 m 次的多项式，这里 $m=\max\{l,n\}$，且按照 $\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根、是特征方程的单根，k 依次取值 0 或 1.

例 5.6.8　求微分方程 $y''+4y=2\cos^2x$ 满足 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解　该方程对应的齐次方程的特征方程
$$r^2+4=0$$
其特征根为一对共轭的复数根 $r=\pm2\mathrm{i}$，所以它相应的齐次方程的通解为
$$Y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$$
原方程的右端可化为
$$2\cos^2x=1+\cos2x$$

即原方程等价于 $y''+4y=1+\cos 2x$

根据解的叠加原理,我们需分别求方程

$$y''+4y=1$$

和方程 $y''+4y=\cos 2x$

的特解 y_1^* 和 y_2^*,则原方程的特解

$$y^*=y_1^*+y_2^*$$

(1) 先求方程 $y''+4y=1$ 的特解.

该方程属于 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$型,且 $P_m(x)=1,\lambda=0$.
由于 $\lambda=0$ 不是特征单根,故设方程的特解为

$$y_1^*=A$$

代入方程,比较系数得

$$A=\frac{1}{4}$$

即所求特解为 $y_1^*=\dfrac{1}{4}$

(2) 再求方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解.

该方程属于

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

型,其中 $P_l(x)=1,P_n(x)=0$,且 $\lambda\pm i\omega=0\pm 2i$.
由于 $\lambda\pm i\omega=0\pm 2i$ 是一对共轭的特征单根,取 $m=\max\{l,n\}=0$,故设方程的特解为

$$y_2^*=x(B\cos 2x+C\sin 2x)$$

其导数为

$$(y_2^*)'=2Cx\cos 2x-2Bx\sin 2x+B\cos 2x+C\sin 2x$$
$$(y_2^*)''=-4Bx\cos 2x-4Cx\sin 2x+4C\cos 2x-4B\sin 2x$$

代入方程,得

$$4C\cos 2x-4B\sin 2x=\cos 2x$$

比较系数得

$$B=0,\quad C=\frac{1}{4}$$

即所求特解为 $y_2^*=\dfrac{1}{4}x\sin 2x$

由此可得,原方程的一个特解为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x$$

原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x$$

把条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=0$ 代入,可得

$$\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{4}\\ C_2=0\end{cases}$$

因此,所求特解为

$$y=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x$$

习题 5-6

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''+y'-2y=0$;　　(2) $16y''+8y'+y=0$;

(3) $y''-4y'+13y=0$;　　(4) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+5x=0$;

(5) $y''+y=2x^2-3$;　　(6) $y''+2y'-3y=2\mathrm{e}^{-3x}$;

(7) $y''+y'-2y=-4x$;　　(8) $y''-4y'+4y=(2x+1)\mathrm{e}^{2x}$;

(9) $y''+2y'-3y=4\sin x$;　　(10) $y''-4y'+5y=\mathrm{e}^{2x}(2\cos x+\sin x)$;

(11) $y''+y=x\cos(2x)$;　　(12) $y''-2y'=x\cos 2x+1$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y''-4y'+3y=0,y(0)=6,y'(0)=10$;

(2) $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+25s=0,s(0)=2,s'(0)=5$;

(3) $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x},y(0)=0,y'(0)=1$;

(4) $y''-2y'+y=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x,y(0)=y'(0)=0$;

(5) $y''+y-4\sin x=0,y(\pi)=y'(\pi)=1$;

(6) $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{2x}\cos 2x,y(0)=0,y'(0)=1$.

3. 设函数 $f(x)$连续,且满足

$$f(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

求函数 $f(x)$.

5.7 差分方程

在经济与管理及其他实际问题中,许多数据都是以等间隔时间周期统计的.例如,银行中的定期存款是按所设定的时间等间隔计息,外贸出口额按月统计,国民收入按年统计,产品的产量按月统计,等等.这些量是变量,通常称这类变量为离散型变量.描述离散型变量之间的关系的数学模型成为离散型模型.对于取值是离散型的经济变量,差分方程是研究它们之间变化规律的有效方法.

本节介绍差分方程的基本概念、解的基本定理及其解法,与微分方程的基本概念、解的基本定理及其解法非常类似,可对照微分方程的知识学习本节内容.

5.7.1 差分的概念

对离散型变量,差分是一个重要概念.下面给出差分的定义.

设自变量 t 取离散的等间隔整数值:$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$,y_t 是 t 的函数,记为 $y_t=$

$f(t)$. 显然，y_t 的取值是一个序列. 当自变量由 t 改变到 $t+1$ 时，相应的函值之差称为函数 $y_t=f(t)$ 在 t 的一阶差分，记为 Δy_t，即

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = f(t+1) - f(t)$$

由于函数 $y_t=f(t)$ 的函数值是一个序列，按一阶差分的定义，差分就是序列中的相邻两值之差. 当函数 $y_t=f(t)$ 的一阶差分为正值时，表明序列是增加的，而且其值越大，表明序列增大得越快；当一阶差分为负值时，表明序列是减小的.

例如：设某公司经营一种商品，第 t 月初的库存量是 $R(t)$，第 t 月调进和销出这种商品的数量分别是 $P(t)$ 和 $Q(t)$，则下月月初，即第 $t+1$ 月月初的库存量 $R(t+1)$ 应是

$$R(t+1) = R(t) + P(t) - Q(t)$$

若将上式写成

$$R(t+1) - R(t) = P(t) - Q(t)$$

则等式两端就是相邻两月库存量的改变量. 若记

$$\Delta R(t) = R(t+1) - R(t)$$

并将库存量 $R(t)$ 理解为是时间 t 的函数，则称上式为库存量函数 $R(t)$ 在 t 时刻(此处 t 以月为单位)的差分.

按一阶差分的定义方式，我们可以定义函数的高阶差分. 函数 $y_t=f(t)$ 在 t 的一阶差分的差分，即函数在 t 的二阶差分，记为 $\Delta^2 y_t$，即

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)\\ &= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t\end{aligned}$$

依次定义函数 $y_t=f(t)$ 在 t 的三阶差分为

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_t &= \Delta(\Delta^2 y_t) = \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t = \Delta y_{t+2} - 2\Delta y_{t+1} + \Delta y_t\\ &= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t\end{aligned}$$

一般地，函数 $y_t=f(t)$ 在 t 的 n 阶差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^n y_t &= \Delta(\Delta^{n-1} y_t) = \Delta^{n-1} y_{t+1} - \Delta^{n-1} y_t\\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} y_{t+n-k}\end{aligned}$$

上式表明，函数 $y_t=f(t)$ 在 t 的 n 阶差分是该函数的 n 个函数值：$y_{t+n}, y_{t+n-1}, \cdots, y_t$ 的线性组合.

例 5.7.1 设 $y_t=t^2+2t-3$，求 $\Delta y_t, \Delta^2 y_t$.

解 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = [(t+1)^2 + 2(t+1) - 3] - (t^2 + 2t - 3) = 2t + 3$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t\\ &= [(t+2)^2 + 2(t+2) - 3] - 2[(t+1)^2 + 2(t+1) - 3] + t^2 + 2t - 3 = 2\end{aligned}$$

5.7.2 差分方程的概念

先看生活中的一个常见例子.

设 A_0 是初始存款($t=0$ 时的存款)，年利率 $r(0<r<1)$，如以复利计息，试确定 t 年年末的本利和 A_t.

在该问题中，如将时间 t(t 以年为单位)看做自变量，则本利和 A_t 可看做是 t 的函数：

$A_t=f(t)$. 这个函数是要求的未知函数. 虽然不能立即写出函数关系 $A_t=f(t)$，但可以写出相邻两个函数值之间的关系式

$$A_{t+1}=A_t+rA_t,\quad (r=0,1,2,\cdots) \tag{5-35}$$

若写成函数 $A_t=f(t)$在 t 的差分 $\Delta A_t=A_{t+1}-A_t$ 的形式，则上式为

$$\Delta A_t=rA_t,\quad (r=0,1,2,\cdots) \tag{5-36}$$

由式(5-35)可算出 t 年年末的本利和为

$$A_t=(1+r)^tA_0,\quad (r=0,1,2,\cdots) \tag{5-37}$$

在式(5-35)和式(5-36)中，因含有未知函数 $A_t=f(t)$，所以这是一个函数方程；又由于在方程(5-35)中含有两个未知函数的函数值 A_t 和 A_{t+1}，在方程(5-36)中含有未知函数的差分 ΔA_t，像这样的函数方程称为差分方程. 在方程(5-36)中，仅含未知函数的函数值 $A_t=f(t)$的一阶差分，在方程(5-35)中，未知函数的下标最大差数是 1，即$(t+1)-t=1$，故方程(5-35)或方程(5-36)称为一阶差分方程.

式(5-37)是 A_t 在 t 之间的函数关系式，就是要求的未知函数，它满足差分方程(5-35)或(5-36)，这个函数称为差分方程的解.

由上述例题分析，差分方程的基本概念如下：

含有自变量，未知函数以及未知函数差分的函数方程，称为差分方程.

由于差分方程中必须含有未知函数的差分(自变量、未知函数可以不显含)，因此差分方程也可称为含有未知函数差分的函数方程.

例如，$\Delta^2 y_t-3\Delta y_t-3y_t-t=0$ 就是一个差分方程，按函数差分定义，任意阶的差分都可以表示为函数 $y_t=f(t)$在不同点的函数值的线性组合，因此该差分方程又可分别表示为 $y_{t+2}-5y_{t+1}+y_t-t=0$. 正因如此，差分方程又可定义为：

含有自变量和多个点的未知函数值的函数方程称为差分方程. 差分方程中实际所含差分的最高阶数，称为差分方程的阶数. 或者说，差分方程中未知函数下标的最大差数，称为差分方程的阶数. 如前面方程为二阶差分方程.

n 阶差分方程的一般形式可表示为

$$\phi(t,y_t,\Delta y_t,\Delta^2 y_t,\cdots\Delta^n y_t)=0 \tag{5-38}$$

$$\text{或}\quad F(t,y_t,y_{t+1},\cdots y_{t+n})=0 \tag{5-39}$$

由于经济学中经常遇到是形如式(5-39)的差分方程，所以以后我们只讨论由式(5-39)的差分方程.

若把一个函数 $y_t=\phi(t)$代入差分方程中，使其成为恒等式，则称 $y_t=\phi(t)$为差分方程的解. 含有任意常数的个数等于差分方程的阶数的解，称为差分方程的通解；给任意常数以确定值的解，称为差分方程的特解. 用以确定通解中任意常数的条件称为初始条件.

一阶差分方程的初始条件为一个，一般是 $y_0=a_0$(a_0 是常数)；二阶差分方程的初始条件为两个，一般是 $y_0=a_0$，$y_1=a_1$(a_0，a_1 是常数)；依次类推.

5.7.3　线性差分方程解的基本定理

现在我们来讨论线性差分方程解的基本定理，将以二阶线性差分方程为例来讲解。任意阶线性差分方程都有类似结论.

二阶线性差分方程的一般形式

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f(t) \tag{5-40}$$

其中 $a(t)$,$b(t)$和 $f(t)$均为 t 的已知函数,且 $b(t)\neq 0$. 若 $f(t)\neq 0$,则式(5-40)称为二阶非齐次线性差分方程;若 $f(t)\equiv 0$,则式(5-40)称为

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=0 \tag{5-41}$$

定理 5.7.1 若函数 $y_1(t)$,$y_2(t)$是二阶齐次线性差分方程(5-41)的解,则

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$$

也是该方程的解,其中 C_1、C_2 是任意常数.

定理 5.7.2(齐次线性差分方程解的结构定理) 若函数 $y_1(t)$,$y_2(t)$是二阶齐次线性差分方程(5-41)的线性无关特解,则 $y_C(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$是该方程的通解,其中 C_1、C_2 是任意常数.

定理 5.7.3(非齐次线性差分方程解的结构定理) 若 $y^*(t)$是二阶非齐次线性差分方程(5-40)的一个特解,$y_C(t)$是齐次线性差分方程(5-41)的通解,则差分方程(5-40)的通解为

$$y_t=y_C(t)+y^*(t)$$

定理 5.7.4(解的叠加原理) 若函数 $y_1^*(t)$,$y_2^*(t)$分别是二阶非齐次线性差分方程

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f_1(t)$$

与

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f_2(t)$$

的特解,则 $y_1^*(t)+y_2^*(t)$是差分方程 $y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f_1(t)+f_2(t)$的特解.

5.7.4 一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1}+ay_t=f(t), \tag{5-42}$$

与一阶非次线性差分方程对应的一阶齐次差分方程为

$$y_{t+1}+ay_t=0 \tag{5-43}$$

1. 一阶常系数齐次线性差分方程的通解

为了求出一阶齐次差分方程(5-43)的通解,由定理 5.7.2 可知,只要求出它的一个非零的特解即可. 注意到方程(5-43)的特点,y_{t+1}是 y_t 的常数倍,而函数 $\lambda^{t+1}=\lambda\cdot\lambda^t$ 恰好满足这个特点. 不妨设方程有形如下式的特解

$$y_t=\lambda^t$$

其中 λ 是非零待定常数. 将其代入方程(5-43)中,有

$$\lambda^{t+1}+a\lambda^t=0$$

即

$$\lambda^t(\lambda+a)=0$$

由于 $\lambda^t\neq 0$,因此 $y_t=\lambda^t$ 是方程(5-43)的解的充要条件是 $\lambda+a=0$. 所以 $\lambda=-a$ 时,一阶齐次差分方程(5-43)的非零特解为

$$y_t=(-a)^t$$

从而差分方程(5-43)通解为

$$y_c = C(-a)^t \quad (C\text{ 为任意常数})$$

称一次代数方程 $\lambda+a=0$ 为差分方程(5-42)或(5-43)的特征方程；特征方程的根为特征根或特征值.

由上述分析，为求出一阶齐次差分方程(5-43)的通解，应先写出其特征方程，进而求出特征根，写出其特解，最后写出其通解.

例 5.7.2　求差分方程 $3y_{t+1}-y_t=0$ 的通解.

解　该差分方程的特征方程 $3\lambda-1=0$，解得特征根 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以方程的通解为

$$y_t = C\left(\frac{1}{3}\right)^t \quad (C\text{ 为任意常数})$$

例 5.7.3　求差分方程 $y_{t+1}+2y_t=0$ 满足初始条件 $y_0=3$ 的特解.

解　该差分方程的特征方程 $\lambda+2=0$，解得特征根 $\lambda=-2$，所以方程的通解为

$$y_t = C(-2)^t \quad (C\text{ 为任意常数})$$

将初始条件 $y_0=3$ 代入，得 $C=3$. 故所求特解为

$$y_t = 3\cdot(-2)^t$$

2. 一阶常系数非齐次线性差分方程的通解

下面仅就函数 $f(t)$ 为几种常见形式用待定系数法求非齐次线性差分方程(5-42)的特解. 根据 $f(t)$ 的形式，按表 5-1 确定特解的形式，比较方程两端的系数，可得到特解.

表 5-1　几种常见形式用待定系数法求非齐次线性差分方程

<table>
<tr><th>$f(t)$的形式</th><th>确定待定特解的条件</th><th colspan="2">待定特解的形式</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$P_m(t)(a\neq0)$
$P_m(t)$是 m 次多项式</td><td>1 不是特征根</td><td>$Q_m(t)$</td><td rowspan="2">$Q_m(t)$是 m 次多项式</td></tr>
<tr><td>1 是特征根</td><td>$t\cdot Q_m(t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\rho^t P_m(t)\ (a\neq0,\rho>0,\rho\neq1)$
$P_m(t)$是 m 次多项式</td><td>ρ 不是特征根</td><td>$\rho^t P_m(t)$</td><td rowspan="2">$Q_m(t)$是 m 次多项式</td></tr>
<tr><td>ρ 是特征根</td><td>$\rho^t tP_m(t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\rho^t(b_1\cos\theta t+b_2\sin\theta t)$
$(a\neq0,\rho>0,\rho\neq1)$</td><td rowspan="2">令 $\delta=\rho(\cos\theta t+i\sin\theta t)$</td><td>$\delta$ 不是特征根</td><td>$\rho^t(B_1\cos\theta t+B_2\sin\theta t)$</td></tr>
<tr><td>δ 是特征根</td><td>$\rho^t t(B_1\cos\theta t+B_2\sin\theta t)$</td></tr>
</table>

例 5.7.4　求差分方程 $y_{t+1}-y_t=3+2t$ 的通解.

解　特征方程为 $\lambda-1=0$，特征根 $\lambda=1$. 齐次差分方程的通解为

$$y_C = C$$

由于 $f(t)=3+2t=P_1(t)$，$\lambda=1$ 是特征根. 因此非齐次差分方程的特解为

$$y^*(t) = t(B_0+B_1t)$$

将其代入已知差分方程得

$$B_0+B_1+2B_1t = 3+2t$$

比较该方程的两端关于 t 的同次幂的系数，可解得 $B_0=2$，$B_1=1$. 故差分方程的特解

$$y^*(t) = 2t+t^2$$

于是，所求通解为

$$y_t = y_c+y^* = C+2t+t^2,\quad (C\text{ 为任意常数})$$

例 5.7.5 求差分方程 $y_{t+1}+y_t=2^t$ 的通解.

解 特征方程为 $\lambda+1=0$,特征根 $\lambda=-1$.齐次差分方程的通解为

$$y_C=C(-1)^t$$

由于 $f(t)=2^t=\rho^t P_0(t)$,$\rho=2$ 不是特征根.因此设非齐次差分方程特解形式为

$$y^*(t)=B2^t$$

将其代入已知方程,有

$$B2^{t+1}+B2^t=2^t$$

解得 $B=\frac{1}{3}$,所以 $y^*(t)=\frac{1}{3}2^t$.于是,所求通解为

$$y_t=y_C+y^*(t)=C(-1)^t+\frac{1}{3}2^t,\quad (C\text{ 为任意常数})$$

例 5.7.6 求差分方程 $3y_t-3y_{t-1}=t3^t+1$ 的通解.

解 原方程改写为 $3y_{t+1}-3y_t=(t+1)3^{t+1}+1$,即 $y_{t+1}-y_t=(t+1)3^t+\frac{1}{3}$.我们求如下两个方程的通解

$$y_{t+1}-y_t=3^t(t+1) \tag{5-44}$$

$$y_{t+1}-y_t=\frac{1}{3} \tag{5-45}$$

对方程(5-44):特征根 $\lambda=1$,$f(t)=3^t(t+1)=\rho^t P_1(t)$,$\rho=3$ 不是特征根,设特解为

$$y_1^*(t)=3^t(B_0+B_1t)$$

将其代入方程(5-44)有

$$3^{t+1}[B_0+B_1(t+1)]-3^t(B_0+B_1t)=3^t(t+1)$$

可解得 $B_0=-\frac{1}{4}$,$B_1=\frac{1}{2}$.故方程(5-44)的特解

$$y_1^*(t)=3^t\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t\right)$$

对方程(5-45):特征根 $\lambda=1$,$f(t)=\frac{1}{3}=P_0(t)$,$\lambda=1$ 是特征根,设特解为

$$y_2^*(t)=Bt$$

将其代入方程(5-45)解得 $B=\frac{1}{3}$.于是,方程(5-45)的特解

$$y_2^*(t)=\frac{1}{3}t$$

又因为对应的齐次差分方程的通解为 $y_C(t)=C$.因此原方程的通解为

$$y_t=y_c+y_1^*+y_2^*=C+3^t\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}t,\quad (C\text{ 为任意常数})$$

例 5.7.7 求差分方程 $y_{t+1}-3y_t=\sin\frac{\pi}{2}t$ 的通解.

解 因特征根 $\lambda=3$,齐次差分方程的通解 $y_C=C3^t$.

$f(t)=\sin\frac{\pi}{2}t=\rho^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)$,$a=0$,$b=1$,$\rho=1$,$\theta=\frac{\pi}{2}$.令

$$\delta = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$$

因为 $\delta=\mathrm{i}$ 不是特征根，设特解 $y^*(t)=A\cos\frac{\pi}{2}t+B\sin\frac{\pi}{2}t$. 将其代入原方程有

$$A\cos\frac{\pi}{2}(t+1)+B\sin\frac{\pi}{2}(t+1)-3\left(A\cos\frac{\pi}{2}t+B\sin\frac{\pi}{2}t\right)=\sin\frac{\pi}{2}t \tag{5-46}$$

因为 $\cos\frac{\pi}{2}(t+1)=-\sin\frac{\pi}{2}t$，$\sin\frac{\pi}{2}(t+1)=\cos\frac{\pi}{2}t$，将其代入式(5-46)，并整理得

$$(B-3A)\cos\frac{\pi}{2}t-(A+3B)\sin\frac{\pi}{2}t=\sin\frac{\pi}{2}t$$

比较上式两端的系数，解得 $A=-\frac{1}{10}$，$B=-\frac{3}{10}$. 故非齐次差分方程的特解

$$y^*(t)=-\frac{1}{10}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{10}\sin\frac{\pi}{2}t$$

于是，所求通解为

$$y_t=y_C+y^*=C3^t-\frac{1}{10}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{10}\sin\frac{\pi}{2}t,\quad (C\text{ 为任意常数})$$

习题 5-7

1. 求下列各差分.

(1) $y_t=t^2+t+5$，求 Δy_t，$\Delta^2 y_t$；　(2) $y_t=\mathrm{e}^{2t}$，求 Δy_t，$\Delta^2 y_t$；

(3) $y_t=t^3+1$，求 Δy_t，$\Delta^2 y_t$；　(4) $y_t=\ln(t+1)$，求 Δy_t，$\Delta^2 y_t$.

2. 确定下列微分方程的阶数.

(1) $y_{t+2}-2y_{t+1}+4y_t=t^2$；　(2) $y_{t+4}-7y_{t+1}+y_t=2$；

(3) $y_{t+4}-t\cdot y_{t-1}=\sin t$；　(4) $\Delta^2 y_t+\Delta y_t+4y_t=t$.

3. 求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解.

(1) $3y_{t+1}-2y_t=0$；　(2) $y_t-6y_{t-1}=0$，$y_0=5$；

(3) $y_{t+1}-3y_t=-2$；　(4) $y_{t+1}-2y_t=3t^2$；

(5) $y_{t+1}-2y_t=2^t(4t+1)$；　(6) $y_{t+1}-\frac{1}{2}y_t=3\left(\frac{3}{2}\right)^t$，$y_0=5$；

(7) $y_{t+1}+2y_t=t^2+4^t$；　(8) $y_{t+1}-y_t=2^t\cos\pi t$.

习题答案与提示

第 1 章

习题 1-1

1. A 在第Ⅰ卦限内；B 在 yOz 坐标面上；C 在第Ⅶ卦限内；D 在 z 轴上；
   E 在第Ⅷ卦限内；F 在 xOy 坐标面上；G 在 y 轴上；H 在第Ⅵ卦限内.
2. x 轴：$\sqrt{34}$；　y 轴：$\sqrt{41}$；　z 轴：5.
3. $M(0,-3,0)$.
4. $(0,3,3)$或$(0,-3,-3)$.
5. 提示：$|AB|=|AC|$.
6. 提示：$|BC|^2>|AB|^2+|AC|^2$.

习题 1-2

1. (1) $x=0$ 表示 yOz 坐标面；
(2) $2y-1=0$ 表示过$\left(0,\frac{1}{2},0\right)$点，且垂直于 y 轴的平面；
(3) $3x-2y-5=0$ 表示过$(1,1,0)$点，且平行于 z 轴的平面；
(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的一个平面；
(5) $y+3z=0$ 表示过 x 轴的一个平面；
(6) $x-6z=0$ 表示过 y 轴的一个平面.
2. $x+3y=0$.
3. $2x-4y+z-3=0$.
4. $3x-7y+5z-4=0$.
5. $2x+2y-3z=0$.
6. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z+4)^2=36$.
7. 绕 x 轴：$4x^2-9(y^2+z^2)=36$；　绕 y 轴：$4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

第 2 章

习题 2-1

1. $-\frac{3}{4}$；　$-\frac{3}{4}$；　$-\frac{y^2-x^2}{2xy}$.
2. (1) $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\in R\}$；　(2) $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1\}$；
   (3) $D=\{(x,y)\mid y^2-2x>-1\}$；　(4) $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$；
   (5) $D=\{(x,y)\mid r^2<x^2+y^2\leqslant R^2\}$.
3. 提示：(x,y)沿着不同路径趋于$(0,0)$时极限不相等，故极限不存在.

4．提示：由夹逼定理，函数 $f(x,y)$在原点连续.

5．(1) $-\frac{1}{2}$；　(2) 0；　(3) 2；　(4) $\frac{1}{4}$；　(5) 2；　(6) $\frac{1}{2}$.

习题 2-2

1．(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\frac{\partial z}{\partial y}=x^2$；

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-y\sin x,\frac{\partial z}{\partial y}=\cos x$；

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y},\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x+y}$；

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$；

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$；

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left(\ln(x+y)+\frac{xy}{1+xy}\right)$；

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos xy-y\sin 2xy,\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos xy-x\sin 2xy$；

(9) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}$；

(10) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2．$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-2,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-11$.

3．$f_x(\pi,0)=-e^{-\pi},f_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=0$.

4．$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

5．提示：$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\left(-\frac{1}{x^2y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{xz^2}\right)=-\frac{1}{(xyz)^3}=-1$.

6．(1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$.

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-a^2\sin(ax+by)$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-ab\sin(ax+by)$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-b^2\sin(ax+by)$.

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x(\ln y)^2$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=y^{x-1}(x\ln y+1)$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$.

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}\cos y$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{xy}(\cos y+xy\cos y-y\sin y)$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{xy}(x^2\cos y-2x\sin y-\cos y)$.

(5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x+2y}{(x+y)^2}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y}{(x+y)^2}$ ；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x+y)^2}$.

(7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2}{(y^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{xy}{(y^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2}{(y^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}$.

7. 提示：$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{r}$.

8. 提示：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$；所以，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

习题 2-3

1. (1) $dz=(3x^2+3y)dx+(-3y^2+3x)dy$；

(2) $dz=(y\cos(x+y))dx+(\sin(x+y)+y\cos(x+y))dy$；

(3) $dz=(y^x+xy^x\ln y)dx+(x^2y^{x-1}dy)$；

(4) $dz=\frac{1}{2y\sqrt{1+\frac{x}{y}}}\left(dx-\frac{x}{y}dy\right)$；

(5) $dz=\frac{1}{1+x^2y^2}(ydx+xdy)$；

(6) $dz=(\ln(xy)+1)dx+\frac{x}{y}dy$；

(7) $du=-yz\sin(xyz)dx-xz\sin(xyz)dy-xy\sin(xyz)dz$；

(8) $du=e^{xy+z}(ydx+xdy+dz)$；

(9) $du=\frac{1}{3x-2y+z}(3dx-2dy+dz)$；

(10) $du=e^{x^2+y^2+z^2}(2xdx+2ydy+2zdz)$.

2. $\frac{1}{14}$；0.075.

3. 0.25e.

4. $dz=dx$.

5. $dz=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$.

6. 提示：在点(0,0)处 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，

但 $\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]$并不是较 ρ 高阶的无穷小.

7. $(1.98)^{1.05}\approx 2.05$.

习题 2-4

1. $\frac{dz}{dt}=4t^3+3t^2+2t$.

2. $\frac{dz}{dt}=-e^{-t}-e^t$.

3. $\frac{dz}{dt}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

4. $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{\sin x}-\frac{1+x^2y}{\sin^2 x}\cdot\cos x,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{\sin x}$.

6. $\frac{dz}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t+\cos t$.

7. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^2(\sin 2y-\sin^2 y)\cdot\cos y+x^2(\cos^2 y-\sin 2y)\cdot\sin y$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^3(\sin 2y-\sin^2 y)\cdot\sin y+x^3(\cos^2 y-\sin 2y)\cdot\cos y$.

8. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(x-2y)(9x+2y)}{(2x+y)^2}$.

9. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)},\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

10. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2(x+y^2)}+2x}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4ye^{2(x+y^2)}+1}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}$.

11. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2',\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$.

12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f_{11}''+2f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}'',\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$.

习题 2-5

1. $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin y+ye^x}{x\cos y+e^x}$.

2. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2-e^y}{1-xe^y}$.

3. $\frac{dy}{dx}=-\frac{ye^x-y^2}{-\sin y+e^x-2xy}$.

4. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1-y(x+y)}{1-x(x+y)}$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ye^{xy}}{e^z-4},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{xy}}{e^z-4}$.

6. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{yz+xy}$.

7. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y+ze^{xz}}{\ln y+xe^{xz}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xy+z}{y(\ln y+xe^{xz})}$.

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

习题 2-6

1. 极小值为 $f(3,-1)=-8$.
2. 极大值为 $f(0,0)=0$.
3. 极大值为 $f(-3,2)=31$；极小值为 $f(1,0)=-5$.
4. $a=-5$.
5. 极大值为 $z=\dfrac{1}{4}$.
6. 极小值为 $z=\dfrac{b^4}{a^2+b^2}$.
7. 长和宽都应为 $\sqrt[3]{2a}$，高为$\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$.
8. (1)3,2；(2)5,3，最小成本为 28 万元.
9. 13,26.

第 3 章

习题 3-1

1. (1) $\iint\limits_D(x+y)d\sigma\geqslant\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$；　(2) $\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma\leqslant\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$；

(3) $\iint\limits_D\ln(x+y)d\sigma<\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2d\sigma$.

2. (1) $0\leqslant\iint\limits_D xy(x+y)d\sigma\leqslant 2$；　(2) $36\pi\leqslant\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)d\sigma\leqslant 100\pi$.

习题 3-2

1. (1)$\dfrac{8}{3}$；　(2) $\dfrac{1}{4}$；　(3) 6；　(4) $-\dfrac{3}{2}\pi$.

2. (1)$\dfrac{6}{55}$；　(2) $\dfrac{8}{15}$；　(3) $\dfrac{45}{8}$；　(4) $\dfrac{27}{64}$.

3. (1) $\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$ 或$\int_0^1dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$；

(2) $\int_0^2dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$ 或$\int_0^{\ln 2}dy\int_{e^y}^{2}f(x,y)dx$；

(3) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)dy$ 或$\int_0^2dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_2^4dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx$.

4. (1) $\int_0^4dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$；　(2) $\int_{-1}^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；

(3) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$； (4) $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dx$；

(5) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

5. (1) 原式 $=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=\frac{1}{2}(e-1)$； (2) 原式 $=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy=1-\cos 1$；

(3) 原式 $=\int_{-1}^1 dy\int_{-1}^y x\sqrt{1+x^2-y^2}\,dx=-\frac{\pi}{4}$.

6. (1) $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$； (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$；

(3) $\int_0^{2\pi} d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$.

7. (1) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{3}{4}\pi a^4$；

(2) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\rho d\rho=\sqrt{2}-1$；

(3) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi a^4}{8}$.

8. (1) $\frac{16}{9}$； (2) $\frac{\pi}{16}$； (3) $\frac{3}{64}\pi^2$.

9. (1) $\pi(2\ln 2-1)$； (2) $\frac{13}{6}$； (3) $\frac{1}{4}$； (4) $14a^4$.

习题 3-3

1. 12. 2. $2\pi\left(\frac{7}{3}-\sqrt{3}\right)$. 3. $2a^2$. 4. $16-4\sqrt{7}$.

5. $\sqrt{2}\pi$. 6. $\frac{4}{3}$. 7. $C\left(0,\frac{3}{2\pi}\right)$. 8. $\frac{3}{64}\pi\mu a^4$.

9. $\frac{368}{105}\rho$.

习题 3-4

1. $\frac{1}{2}\ln 2$. 2. $\frac{1}{120}$. 3. $\frac{1}{5}\pi R^2$. 4. $\frac{1}{8}$.

5. $\frac{7}{12}\pi$. 6. $\frac{4}{15}\pi$. 7. $\frac{4}{3}\pi a^3$. 8. $\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha)$.

第 4 章

习题 4-1

1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}=\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\frac{4}{1+4^2}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n}=\frac{1!}{2\cdot 1}+\frac{2!}{2\cdot 2}+\frac{3!}{2\cdot 3}+\frac{4!}{2\cdot 4}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times4\times\cdots\times n}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\times5}{2\times4}+\dfrac{3\times5\times7}{2\times4\times6}+\dfrac{3\times5\times7\times9}{2\times4\times6\times8}+\cdots.$

2. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1+n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n-1}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$.

3. (1) 收敛,和为$\dfrac{3}{4}$； (2) 发散；

(3) 发散； (4) 收敛,和为 2.

4. (1) 发散； (2) 发散； (3) 收敛,和为$\dfrac{3}{2}$；

(4) 发散； (5) 收敛,和为$\dfrac{1}{2}$.

习题 4-2

1. (1) 发散； (2) 收敛； (3) 收敛； (4) 发散；
   (5) 发散； (6) 收敛； (7) 收敛； (8) 发散.
2. (1)收敛； (2)发散； (3) 收敛； (4) 发散；
   (5) 收敛.
3. (1) 绝对收敛； (2) 条件收敛； (3) 条件收敛； (4) 条件收敛.

习题 4-3

1. (1) 收敛半径 $R=+\infty$,收敛区间$(-\infty,+\infty)$；

(2) 收敛半径 $R=\mathrm{e}$,收敛区间$(-\mathrm{e},\mathrm{e})$；

(3) 收敛半径 $R=\sqrt{2}$,收敛区间$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

(4) 收敛半径 $R=1$,收敛区间$(-2,0)$.

2. (1) $[-1,1)$； (2) $[0,2]$； (3) $[-4,2)$； (4) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. (1) $\dfrac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$； (2) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$；

   (3) $-x\ln(1-x),x\in[-1,1)$； (4) $\dfrac{1}{(2-x)^2},x\in(0,2)$.

习题 4-4

1. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{3^{2n+2}}$, 收敛区间$(-3,3)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4^n}{2\cdot(2n)!}x^{2n}$, 收敛区间$(-\infty,\infty)$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n+1}$, 收敛区间$(-1,1)$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{5^{n+1}}$, $x\in(-3,7)$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$, $x\in(-\infty,\infty)$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n, x\in(-1,3)$

5. $\ln2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1}, x\in(0,4]$

第 5 章

习题 5-1

1. (1) 是,二阶； (2) 是,一阶；
(3) 不是； (4) 是,三阶；
(5) 是,二阶； (6) 是,二阶.
2. (1) 通解； (2) 不是解； (3) 特解； (4) 通解.
3. 略
4. $x^2-xy+y^2=3$
5. 略
6. $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}$

习题 5-2

1. (1) $y=\mathrm{e}^{Cx}$； (2) $(1-y)(1+x)=C$；
(3) $1-\mathrm{e}^{-y}=C\mathrm{e}^x$； (4) $y=\frac{1}{2\ln|C(1+x)|}$；
(5) $(\mathrm{e}^x+1)(1-\mathrm{e}^y)=C$； (6) $\sin x\sin y=C$；
(7) $y=x\ln|y|+Cx$； (8) $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$；
(9) $Cy=1+\ln\frac{y}{x}$； (10) $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$.
2. (1) $\arctan y=(x-1)^3+\frac{\pi}{4}+1$； (2) $(4-x)y^4=3x$；
(3) $\frac{1+\mathrm{e}^x}{\cos y}=2\sqrt{2}$； (4) $y^2=2x^2(\ln|x|+2)$.
3. (1) $2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C$； (2) $(x-4y+3)(2x+y-3)^2=C$.
4. $xy=6$

习题 5-3

1. (1) $y=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C}{x}$； (2) $y=(x^2+C)\sin x$；
(3) $y=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C\right](1+x)^2$； (4) $y=(x^2+C)\mathrm{e}^{-x^2}$；
(5) $y=\frac{ax\ln x+C}{\ln x}$； (6) $y=(-\mathrm{e}^{\cos x}+C)\frac{1}{\sin x}$；
(7) $y=\frac{1}{x\left[C-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]}$； (8) $y=(x^2+1+C\mathrm{e}^{x^2})^{-\frac{1}{2}}$；

(9) $y=\dfrac{2x}{1+2Cx^2}$； (10) $x^4+y^4=Cx^2$.

2. (1) $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2e}x^3e^{\frac{1}{x^2}}$； (2) $y=(-2\cos x+3)\cos x$；

(3) $x=\left(\dfrac{1}{2}\ln^2 y+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{\ln y}$； (4) $\dfrac{1}{y}=e^x-\sin x$.

3. $y=-x-1+3e^x$

4. $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2x}$

习题 5-4

1. (1) $\dfrac{1}{8}\cos 2x+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$； (2) $xe^x-2e^x+C_1x+C_2$；

(3) $\cos(x-C_1)+C_2$； (4) $C_1\ln|x|+C_2$；

(5) $C_1\ln x+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C_2$； (6) $C_1\left(x+\dfrac{1}{3}x^3\right)+C_2$；

(7) $\arcsin(C_2e^x)+C_1$； (8) $\dfrac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\dfrac{1}{C_1}$；

(9) $1-\dfrac{1}{C_1x+C_2}$； (10) $C_2e^{C_1x}$.

2. (1) $y=\dfrac{1}{9}e^{3x}+\sin x-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}$； (2) $y=\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{2}{3}\ln x+C_2$；

(3) $y=2x-2\arctan x+\dfrac{\pi}{2}$； (4) $y=-\ln(1-x)$；

(5) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$； (6) $2y^2-1=(2x+1)^2$.

习题 5-5

1. (1) 线性无关； (2) 线性无关； (3) 线性相关；
(4) 线性无关； (5) 线性相关； (6) 线性相关.

2. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$

3. $y=2xe^{x^2}$

4. 略

5. 略

6. 通解为：$y=C_1(3e^x-x)+C_2(x-e^x)+(-x^2+x-1)$；
特解为：$y=e^x-x-(x^2+1)$.

习题 5-6

1. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$； (2) $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{4}x}$；

(3) $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$； (4) $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$；

(5) $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+2x^2-7$；

(6) $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{2}xe^{-3x}$；

(7) $y=Y+y^{*}=Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+2x+1$；

(8) $y=Y+y^{*}=(C_1+C_2x)e^{2x}+x^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}$；

(9) $y=Y+y^{*}=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}-\frac{2}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x$；

(10) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{2x}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\sin x\right)$；

(11) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$；

(12) $y_1=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{8}(x+1)\cos 2x+\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\right)\sin 2x-\frac{1}{2}x$.

2. (1) $y=4e^{x}+2e^{3x}$；　　(2) $s=2\cos 5t+\sin 5t$；

(3) $y=\left(-\frac{1}{2}x^2-x-2\right)e^{2x}+2e^{3x}$；　　(4) $y=\frac{1}{6}x^3e^{x}-\frac{1}{2}x^2e^{x}$；

(5) $y=(2\pi-1)\cos x+\sin x-2x\cos x$；

(6) $y=\left(-\frac{3}{100}+\frac{4}{5}x\right)e^{-2x}+e^{2x}\left(\frac{3}{100}\cos 2x+\frac{1}{25}\sin 2x\right)$.

3. $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^{x}$.

习题 5-7

1. (1) $\Delta y_t=2t+2$；$\Delta^2 y_t=2$；　　(2) $\Delta y_t=e^{2t}(e^2-1)$；$\Delta^2 y_t=e^{2t}(e^2-1)^2$；

(3) $\Delta y_t=3t^2+3t$；$\Delta^2 y_t=6t+6$；　(4) $\Delta y_t=\ln\frac{t+2}{t+1}$；$\Delta^2 y_t=\ln\frac{t^2+4t+3}{t^2+4t+4}$.

2. (1) 二阶；　(2) 四阶；　(3) 五阶；　(4) 二阶.

3. (1) $y_t=C\left(\frac{2}{3}\right)^t$；　　(2) $y_t=5\cdot 6^t$；

(3) $y_t=C\cdot 3^t+1$；　　(4) $y_t=C\cdot 2^t-9-6t-3t^2$；

(5) $y_t=C\cdot 2^t+2^t t\left(t-\frac{1}{2}\right)$；　　(6) $y_t=2\left(\frac{1}{2}\right)^t+3\left(\frac{3}{2}\right)^t$；

(7) $y_t=C\cdot(-2)^t-\frac{1}{27}-\frac{2}{9}t+\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{6}\cdot 4^t$；

(8) $y_t=C-\frac{1}{3}\cdot 2^t\cos\pi t$.

参 考 文 献

[1] 赵利彬.高等数学[M].2版.上海：同济大学出版社，2010.
[2] 邓可，孔德斌，叶万红.高等数学[M].长春：吉林大学出版社，2014.
[3] 同济大学数学系.高等数学[M].6版.北京：高等教育出版社，2007.
[4] 隋如彬.微积分[M].2版.北京：科学出版社，2012.